arXiv:2302.14476v3 [math.RT] 6 Dec 2023

双色琼斯–温茨尔投影算子的存在性与可旋转性

AMIT HAZI

Abstract. 双色坦普利–利布代数 $2\mathrm{TL}_R({}_s n)$ 是 Temperley–Lieb 代数的一种推广。类似的双色琼斯–温茨尔投影算子 $\mathrm{JW}_R({}_s n) \in 2\mathrm{TL}_R({}_s n)$ 在 Elias–Williamson 的图示赫克范畴构造中发挥着重要作用。我们根据某些双色量子二项式系数的可逆性与消失性，给出 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在且可旋转的条件。由此，我们证明 Abe 的 Soergel 双模范畴在一般情形下等价于图示赫克范畴。

1. Introduction

令 R 为一个交换环，并固定两个标量 $[2]_s, [2]_t \in R$。双色坦普利–利布代数 $2\mathrm{TL}_R({}_s n) := 2\mathrm{TL}_R({}_s n; [2]_s, [2]_t)$ 是一个 R-代数，其生成元为 e_i（其中 $1 \le i \le n-1$），并满足以下关系：

$$e_i^2 = -[2]_s \qquad i \text{ odd}, \tag{1}$$

$$e_i^2 = -[2]_t \qquad i \text{ 偶数}, \tag{2}$$

$$e_i e_j = e_j e_i \qquad \text{for } |i-j| > 1, \tag{3}$$

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \tag{4}$$

代数 $2\mathrm{TL}_R({}_t n)$ 的定义完全相同，只是关系式 (1) 和 (2) 中的奇偶条件互换了。这些代数（由 Elias 在 [3] 中引入）是普通坦普利–利布代数的推广；当 $[2]_s = [2]_t$ 时，普通坦普利–利布代数便是其特例。通过标准论证可知，$2\mathrm{TL}_R({}_s n)$ 存在一个 R-基，其元素为生成元 e_i的单项式。

如果非零幂等元 $\mathrm{JW}_R({}_s n) \in 2\mathrm{TL}_R({}_s n)$（${}_t n$ 的情形也类似）满足 $e_i \mathrm{JW}_R({}_s n) = 0$ 对所有 $1 \le i \le n-1$ 都成立，且 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 中 1 的系数为 1，我们就称其为双色琼斯–温茨尔投影算子。此类幂等元（若存在）是唯一的。

$2\mathrm{TL}_R({}_s n)$ 的性质由某些元素 $[n]_s, [n]_t \in R$ for$n \in \mathbb{Z}$ 控制，这些元素称为双色量子数。这些元素（定义见 (5)）是关于 $[2]_s$ 和 $[2]_t$ 的二元多项式，与普通量子数类似。对于整数 $0 \le k \le n$，双色量子二项式系数

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s = \frac{[n]_s!}{[k]_s![n-k]_s!} = \frac{[n]_s[n-1]_s \cdots [n-k+1]_s}{[k]_s[k-1]_s \cdots [1]_s}$$

也可以证明它是 R 的一个元素。我们的第一个主要结果是著名的普通 Jones–Wenzl 投影算子存在性定理的双色类比。

定理 A. 双色琼斯–温茨尔投影算子 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在，当且仅当对每个整数 $0 \le k \le n$，$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s$ 在 R 中可逆。

双色 Temperley–Lieb 代数的术语源自其作为图代数的表示方式。我们将标签 s 和 t 分别与红色和蓝色对应，并将 s 和 t 用于强调。一个双色 Temperley

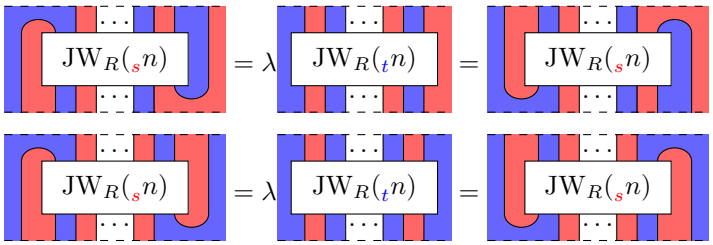
2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 20G42，20F55；次要分类号 11R18。

Lieb 图是指一种 Temperley–Lieb 图，其股线之间的平面区域以交替颜色着色。作为图代数，$2\mathrm{TL}_{R}({}_{s}n)$ 由双色 Temperley–Lieb 图张成，这些图在顶部和底部各有 n 个边界点，且最左侧区域为红色。红色区域中的蓝色圆盘取值为$-[2]_s$，而蓝色区域中的红色圆盘取值为 $-[2]_t$。此外，我们只考虑在同痕意义下的双色 Temperley–Lieb 图。这些图示关系直接对应于 (1)–(4)。我们将双色 Jones–Wenzl 投影算子画成一个标有 $\mathrm{JW}_{R}({}_{s}n)$ 的矩形：



n 奇数　　n 偶数

假设 $\mathrm{JW}_{R}({}_{s}n)$ 和 $\mathrm{JW}_{R}({}_{t}n)$ 都存在。若 $\mathrm{JW}_{R}({}_{s}n)$ 可旋转，则称其为可旋转的；如果将 $\mathrm{JW}_{R}({}_{s}n)$ 沿一条弦顺时针或逆时针旋转一格后，所得结果等于 $\mathrm{JW}_{R}({}_{t}n)$ 的某个标量倍：



我们的第二个主要结果给出了双色 Jones–Wenzl 投影算子存在且具有可旋转性的一个综合条件。

定理 B. 双色 Jones–Wenzl 投影算子 $\mathrm{JW}_{R}({}_{s}n)$和 $\mathrm{JW}_{R}({}_{t}n)$存在且可旋转，当且仅当 $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_t = 0$ 属于 R 对所有整数$1 \leq k \leq n$成立。

这一相同的代数条件最初由 Abe 在 Hecke 范畴的语境下提出 [1, 假设 1.1], ，我们将在下文讨论这一假设。

Hecke 范畴。双色坦普利–利布代数是 Elias–Williamson 图解 Hecke 范畴的核心 [5]。具体而言，只有在某些双色 Jones–Wenzl 投影算子存在且可旋转时，图示赫克范畴才定义良好。Elias–Williamson 最初在 [5, (3.3)]中给出了一个错误的可旋转性代数条件；后来他们在 [6, §5]中发现并部分纠正了这一错误。定理 B 中的可旋转性条件足以彻底纠正这一错误。

推论 C. 在不存在抛物型 H_3 子群的情况下（见注 5.3），图示赫克范畴有定义，当且仅当底层实现是 Abe 实现（见 *[1, 假设 1.1]* 或定义 5.1）。

最近，Abe 证明存在一个“基于双模”的范畴（对经典 Soergel 双模范畴的修改），在温和条件下，当底层实现是 Abe 实现时，该范畴与图示赫克范畴等价 [2, 1]。推论 C 的一个重要结果是，这种等价几乎总是成立。

推论 D. 假设 Demazure 满射性成立（见注 5.2），且基环是诺特整环。若图示赫克范畴定义良好，则它等价于 Abe 的 Soergel 双模范畴。

我们认为值得注意的是，我们的结果为赫克代数的两种表面上截然不同的范畴化给出了最佳可能的等价结论。

致谢。感谢匿名审稿人提出的宝贵意见和建议。我们也感谢 1851 年展览皇家委员会和英国工程与自然科学研究委员会（EP/V00090X/1）提供的经费支持。

2. Preliminaries

令 $A = \mathbb{Z}[x_s, x_t]$ 为含两个变量的整系数多项式环。双色量子数 定义如下。首先令 $[1]_s = [1]_t = 1$， $[2]_s = x_s$，且 $[2]_t = x_t$ 属于 A。对于 $n > 1$，我们归纳定义

$$[n+1]_s = [2]_s[n]_t - [n-1]_s, \qquad [n+1]_t = [2]_t[n]_s - [n-1]_t. \tag{5}$$

这些公式可以重新排列，从而递归定义 $[n]_s$ 和 $[n]_t$，其中 $n \leq 0$。对于交换 A-代数 R，我们也将 R 中的双色量子数定义为 A中双色量子数的特化，并以相同的记号表示。

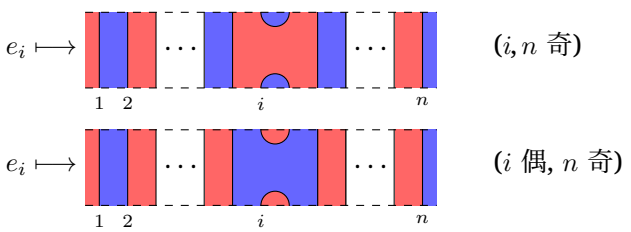
这些多项式是通常（单色）量子数的双变量扩张，可以按如下方式还原。令 $\overline{A} = A/(x_s - x_t) \cong \mathbb{Z}[x]$，其中 x是 x_s 或 x_t的像。那么，单色量子数 $[n]$ 是$[n]_s$ 或 $[n]_t$ 在 $\overline{A}$中的像。当 n 为奇数时， $[n]$ 是偶多项式，因此可以形式上将 $[n]$ 代入 $x = \sqrt{x_s x_t}$，得到 A中的一个元素。当 n 为偶数时， $[n]/[2]$ 是偶多项式，同样可以形式上将其代入 $x = \sqrt{x_s x_t}$。在这两种情况下，都很容易通过归纳法证明

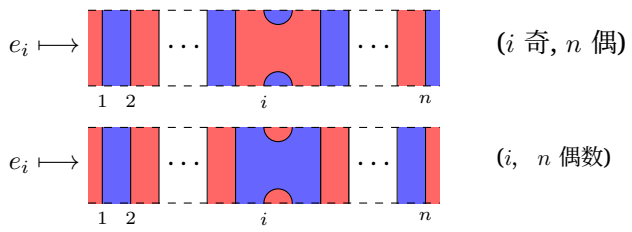
$$\begin{aligned} &[n]_s = [n](\sqrt{x_s x_t}) = [n]_t && \text{if } n \text{ is odd,} \\ &\frac{[n]_s}{[2]_s} = \left(\frac{[n]}{[2]}\right)(\sqrt{x_s x_t}) = \frac{[n]_t}{[2]_t} && \text{if } n \text{ is even} \end{aligned} \tag{6}$$

在 A中。换言之，双色量子数本质上与普通量子数相同，只差一个取决于颜色的因子 $[2]_s$ 和 $[2]_t$。

显然， A 的自同构若交换 x_s 和 x_t （“颜色交换”），也会对所有 n交换 $[n]_s$ 和 $[n]_t$。因此，我们通常只针对 $[n]_s$ 陈述结果，并将颜色交换后的对应结论留给读者自行推导。类似地，我们有 $\mathrm{2TL}({}_s n; [2]_s, [2]_t) \cong \mathrm{2TL}({}_t n; [2]_t, [2]_s)$，并且当它们存在时，该同构将 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 映射到 $\mathrm{JW}_R({}_t n)$，因此我们只陈述关于 $\mathrm{2TL}_R({}_s n)$ 和 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 的结果。

设 $D = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}$ 是 $\mathrm{2TL}({}_s n)$ 的生成元中的一个长度为 r 的单项式。若 D 不能利用 (1)–(4) 重写为某个 $s < r$ 的生成元中的单项式 $e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_s}$，则称 D 是约化的。如第 1 节所述，双色坦普利–利布代数 $\mathrm{2TL}({}_s n)$ 的一组基由这些约化单项式构成。与单色情形一样，$\mathrm{2TL}({}_s n)$ 的这组基与左端区域为红色的（同痕类）双色 Temperley–Lieb 图之间存在双射，该双射诱导了 $\mathrm{2TL}({}_s n)$ 的代数版本与图示版本之间的同构。（关于单色情形的详细证明，参见例如 [10, 定理 2.4]。）在此同构下，我们有





给定一个元素 $f \in 2\mathrm{TL}_R({}_s n)$ 和一个双色 Temperley–Lieb 图 D 我们记作

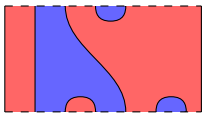
$$\operatorname*{coeff}_{\in f} D$$

当 f 写成图示基时 D 的系数。

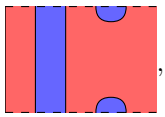
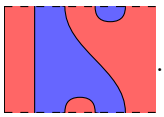
如果 R 是一个交换的 A-代数，并且对所有 n，$\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 都存在，那么 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 的系数可以按如下方式归纳计算。设 D 是 $2\mathrm{TL}_R({}_s(n+1))$ 中的一个双色 Temperley–Lieb 图。令 $\hat{}D$ 表示如下图：将连接到 D 右上边界点的弦向下折叠后得到的图，它具有 $n+2$ 个底部边界点和 n 个顶部边界点。如果 $\hat{}D$ 的第 i 个和第 $(i+1)$ 个底部边界点之间有一股线相连，则令 D_i 表示删除该帽后得到的具有 n 股线的双色 Temperley–Lieb 图。例如，如果

$D =$ 

then

$\hat{D} =$ 

and

$D_2 =$ , $D_5 =$ .

定理 2.1。假设 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 和 $\mathrm{JW}_R({}_s(n+1))$ 都存在。那么 $[n+1]_s$ 是可逆的，并且有

$$\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_R({}_s(n+1))} D = \sum_i \frac{[i]_u}{[n+1]_s} \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_R({}_s n)} D_i,$$

其中求和遍及所有位置 i其中 D_i 定义为，而 u 是被删除的帽的颜色。

证明。在单色情形下的论证（见 [9, 命题 4.1] 或 [8, 推论 3.7]）基本上可由 [6, (6.29)]直接得出。□

通过类似的计算，可以证明 $\mathrm{JW}_{\mathrm{Frac}\, A}({}_s n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均存在（例如参见 [6, <style id='13'}定理 6.14]）。我们将在后文仔细证明，这一计算是“通用的”，即如果 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在，那么它的系数就是 $\mathrm{JW}_{\mathrm{Frac}\, A}(n)$ 的系数的特化。

定理 A 中的存在性判据已知在x_s 与 x_t 在 R 中的像相等的单色情形下成立。在这种情况下，我们用 $\mathrm{TL}_R(n)$ 和 $\mathrm{JW}_R(n$分别表示单色 Temperley–Lieb 代数和 Jones–Wenzl 投影算子。

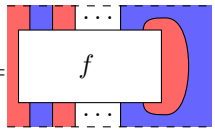
定理 2.2（[4, 定理 A。2]）。设 R 是一个可交换的 A-代数，且可通过 $\overline{A}$ 分解。那么，$\mathrm{JW}_R(n)$ 存在，当且仅当单色量子二项式系数

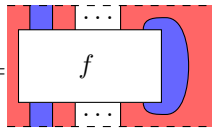
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k][k-1]\cdots[1]}$$

对所有整数 $0 \leq k \leq n$，在 R 中均可逆。

鉴于 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 的系数具有“通用”性质，我们可以将定理 2.2 理解为对 $\mathrm{JW}_{\mathrm{Frac}\,\overline{A}}(n)$ 的系数分母的描述。不幸的是，已知的这一结果的证明（其中大多数以关键方式利用了与李理论的联系）都难以推广到双色情形。

最后，我们将给出一种用于检验可旋转性的替代判据。对于 $f \in \mathrm{2TL}_R({}_s n)$，定义 f 的部分迹为

$\mathrm{pTr}(f) =$  $(n \text{ odd})$

$\mathrm{pTr}(f) =$  $(n \text{ even})$

根据 Jones–Wenzl 投影算子的定义，很容易看出，$\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 具有可旋转性，当且仅当 $\mathrm{pTr}(\mathrm{JW}_R({}_s n)) = 0$。运用完全标准的技巧（例如 [6, §6.6]），可以证明

$$\mathrm{pTr}(\mathrm{JW}_R({}_s n)) = -\frac{[n+1]_s}{[n]_s}\mathrm{JW}_R({}_s(n-1)) \tag{7}$$

当 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 和 $\mathrm{JW}_R({}_s(n-1))$ 均存在时。这给出了以下部分可旋转性判据。

命题 2.3. 假设 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 和 $\mathrm{JW}_R({}_s(n-1))$ 均存在。那么，$\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 具有可旋转性，当且仅当 $[n+1]_s = 0$。

证明完整的可旋转性判据的关键，在于对（7）作一般性解释。

3. Principal ideals

在本节中，我们将证明，由某些双色量子数和二项式系数生成的若干理想是主理想。回顾普通量子数的情形，可以证明，如果 $d|n$，那么 $[d]|[n]$。利用（6）可立即推出$[d]_s|[n]_s$。

引理 3.1（量子贝祖恒等式）。设 $m, n \in \mathbb{N}$。存在多项式$a, b \in A$ 使得

$$a[m]_s + b[n]_s = [\gcd(m,n)]_s.$$

证明。 不失一般性，假设 $m < n$。我们将证明由 $[m]_s$ 和 $[n]_s$ 在 A 中生成的理想包含 $[n-m]_s$。如果 m 和 n 不全为奇数，那么

$$\begin{aligned}
[n-1]_t[m]_s - [m-1]_t[n]_s &= ([m+n-2]_s + [m+n-4]_s + \cdots + [-(n-m)+2]_s) \\
&\quad - ([m+n-2]_s + [m+n-4]_s + \cdots + [n-m+2]_s) \\
&= [n-m]_s + [n-m-2]_s + \cdots + [-(n-m)+2]_s \\
&= [n-m]_s
\end{aligned}$$

由 [6, (6.5a)–(6.5c)] 可得。如果 m 和 n 都为奇数，类似的计算可得

$$[n-1]_s[m]_s - [m-1]_s[n]_s = [n-m]_s.$$

重复这一步多次后，我们便可执行欧几里得算法，从而得到所需结果。□

接下来，我们介绍量子数的分圆部分，它们大致类似于分圆多项式。回顾一下，单色量子数是第二类切比雪夫多项式的重新归一化。更准确地说，若将量子数 $[n]$ 在 $x = 2\cos\theta$ 处求值，我们得到

$$[n](2\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

由于 $[n]$ 是关于 x 的次数为 $n-1$ 的首一多项式，我们得出

$$[n] = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

我们将单色量子数 $[n]$ 的分圆部分定义为多项式

$$\Theta_n = \prod_{\substack{1\le k<n\\(k,n)=1}}\left(x - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

引理 3.2。设 $n \in \mathbb{N}$。我们有

(i) $\Theta_n \in \mathbb{Z}[x]$，且当 $n > 1$ 时，$\deg\Theta_n = \varphi(n)$；(ii) $[n] = \prod_{k|n}\Theta_n$；

(iii) $\Theta_n = \prod_{k|n}[k]^{\mu(n/k)}$，其中 $\mu\colon \mathbb{N}\to\{\pm1\}$ 是莫比乌斯函数。

此外，若 $n > 2$，则我们还有 $\Theta_n(x) = \Psi_n(x^2)$，其中 $\Psi_n \in \mathbb{Z}[x]$ 是 $4\cos^2(\pi/n)$ 的最小多项式。

证明。由定义以及分圆域和代数整数的基本性质可得 (i) 和 (ii)。对 (ii) 应用莫比乌斯反演即可得到 (iii)。对于最后一个结论，我们注意到，若 $n > 2$，则 Θ_n 是偶多项式，因此可写成 $\Psi_n(x^2)$ 的形式，其中 $\Psi_n \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数为 $\varphi(n)/2$。根据构造，$4\cos^2(\pi/n)$ 是 Ψ_n 的一个根。由于

$$4\cos^2\frac{\pi}{n} = 2\cos\frac{2\pi}{n} + 2$$

并且 $\mathbb{Q}(2\cos(2\pi/n) + 2) = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个域扩张，次数为 $\varphi(n)/2$，Ψ_n 必定是 $4\cos^2(\pi/n)$ 的最小多项式。□

定义 3.3. 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将双色量子数 $[n]_s$ 的分圆部分定义为

$$\Theta_{n,s} = \begin{cases}\Psi_n(x_s x_t) & \text{if } n > 2,\\ x_s & \text{if } n = 2,\\ 1 & \text{if } n = 1.\end{cases}$$

利用 (6) 和引理 3.2，我们同样得到 $[n]_s = \prod_{k|n}\Theta_{n,s}$ 以及 $\Theta_{n,s} = \prod_{k|n}[n]_s^{\mu(n/k)}$。

引理 3.4. 多项式 $\Theta_{n,s}$ 在 A 中均不可约且互不相同（但注意 $\Theta_{n,s} = \Theta_{n,t}$ 若 $n > 2$）。

证明。当 $n = 2$ 时，不可约性显然。当 $n > 2$ 时，我们有 $\Theta_{n,s} = \Theta_{n,t} = \Psi_n(x_s x_t)$，它是不可约的，因为 Ψ_n 是（例如参见 [11, (3.3)]）。互异性也随之成立，因为多项式 Ψ_n 彼此不同。□

引理 3.5。设 m、$n \in \mathbb{N}$，满足 $m \nmid n$ 和 $n \nmid m$。存在多项式a、$b \in A$，使得

$$a\Theta_{m,s} + b\Theta_{n,s} = 1.$$

证明。无妨设 $m < n$，并令 $d =$ 最大公约数(m,n)。由引理 3.1，存在 $a', b' \in A$，使得

$$a'[m]_s + b'[n]_s = [d]_s.$$

根据假设，$d < m < n$，因此我们有

$$\frac{[m]_s}{[d]_s} \in \Theta_{m,s}A$$
$$\frac{[n]_s}{[d]_s} \in \Theta_{n,s}A$$

因此两边除以 $[d]_s$，得到

$$a\Theta_{m,s} + b\Theta_{n,s} = 1. \qquad \square$$

命题 3.6。设 $m_1, m_2, \ldots, m_k, n_1, n_2, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$，使得对于所有 i, j，要么$m_i = n_j$，要么 $m_i \nmid n_j$ 且 $n_j \nmid m_i$。那么理想

$$(\Theta_{m_1,s}\Theta_{m_2,s}\cdots\Theta_{m_k,s}, \Theta_{n_1,s}\Theta_{n_2,s}\cdots\Theta_{n_l,s})$$

在 A 中是主理想。

证明。令 I 为上述理想。我们不妨假设，对于所有 i、j，都有$m_i \neq n_j$；也就是说，I的生成元在 A中互素。对于每个 i，我们可以应用引理 3.5，得到 $a_{i,j}, b_{i,j} \in A$，使得 $a_{i,j}\Theta_{m_i,s} + b_{i,j}\Theta_{n_j,s} = 1$。对所有 i 和 j 取乘积，得到

$$1 = \prod_i \left(\prod_j (a_{i,j}\Theta_{m_i,s} + b_{i,j}\Theta_{n_j,s}) \right) \in \prod_i (\Theta_{m_i,s}, \Theta_{n_1,s}\Theta_{n_2,s}\cdots\Theta_{n_l,s}) \subseteq I$$

因此 $I =$(1) 是主理想。 $\square$

对于 $f \in A$ 和一个整数 $l > 1$，我们将分圆赋值 $\nu_{l,s}(f)$ 定义为整除 f 的 $\Theta_{l,s}$ 的最高次幂的指数。这以显然的方式扩展到 Frac A；具体而言，我们定义 $\nu_{l,s}(f/g) = \nu_{l,s}(f) - \nu_{l,s}(g)$，其中 f、$g \in A$。如果 f 和 g 是由 s-有色分圆部分构成的乘积，那么

$$\frac{f}{g} = \prod_l \Theta_{l,s}^{\nu_{l,s}(f/g)}.$$

对于 $f \in \overline{A}$，我们类似地将 $\nu_l(f)$ 定义为整除 f 的 Θ_l 的最高次幂，并以完全类似的方式将其扩展到 Frac $\overline{A}$。

引理 3.7. 设 n、k 为非负整数。对于所有整数 $1 < l \leq n$，我们有

$$\nu_{l,s}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{l} \right\rfloor.$$

特别地，$\nu_{l,s}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s \in \{0, 1\}$。

证明。显然

$$\nu_{l,s}[m]_s = \begin{cases} 1 & \text{if } l|m, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

所以$\nu_{l,s}([m]_s!)=\lfloor m/l\rfloor$，上述等式便成立。为证明赋值的界，注意到$m/l-1<\lfloor m/l\rfloor\leq m/l$，因此

$$-1=\left(\frac{n}{l}-1\right)-\frac{k}{l}-\frac{n-k}{l}<\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-k}{l}\right\rfloor$$
$$<\frac{n}{l}-\left(\frac{k}{l}-1\right)-\left(\frac{n-k}{l}-1\right)=2.\quad\square$$

定理 3.8。设 $n\in\mathbb{N}$。该理想

$$\left(\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_s,\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}_s,\dots,\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}_s\right)$$

在 A 中是主理想，由 $\Theta_{n,s}$ 生成。

证明。我们将通过归纳法证明该结果。设

$$I_m=\left(\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_s,\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}_s,\dots,\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_s\right)$$

并写作

$$[n]_s^{>m}=\prod_{\substack{k>m\\k|n}}\Theta_{k,s}.$$

假设我们已经证明 I_m 是主理想，由 $[n]_s^{>m}$ 生成。我们将证明 I_{m+1} 是主理想，由 $[n]_s^{>m+1}$ 生成。只需证明

$$\left(\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s,[n]_s^{>m}\right)=([n]_s^{>m+1}).\tag{8}$$

显然，$[n]_s^{>m+1}$整除 $[n]_s^{>m}$。如果 $k>m+1$ 且 $k|n$，很容易看出

$$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m+1}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-(m+1)}{k}\right\rfloor=1,$$

因此 Θ_k 恰好整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s$ 一次，从而 $[n]_s^{>m+1}$整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s$。如果 $m+1\nmid n$，则 $[n]_s^{>m+1}=[n]_s^{>m}$，(8) 显然成立。

否则，假设 $m+1|n$。我们断言，如果 $\Theta_{l,s}$ 整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s/[n]_s^{>m+1}$，那么必有 $l\nmid m+1$ 且 $m+1\nmid l$。这意味着

$$\left(\frac{\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s}{[n]_s^{>m+1}},\Theta_{m+1,s}\right)=(1)$$

根据命题 3.6，由此可得 (8) 成立，结论随之得证。

为证明这一断言，假设 $l|m+1$。不难验证

$$\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m+1}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-(m+1)}{l}\right\rfloor=0,$$

因此 $\Theta_{l,s}$ 不能整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s$，更不用说 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s/[n]_s^{>m+1}$了。

类似地，设 $m+1|l$，并取 $0\leq r<l$ 使得 $n-(m+1)=ql+r$。若 $\Theta_{l,s}$ 整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s$，则

$$\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m+1}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-(m+1)}{l}\right\rfloor=1$$

并且我们必须有 $r+m+1\geq l$。现在令 $d=\gcd(l,n-(m+1))$。由于 $m+1|n$ 和 $m+1|l$，我们有 $m+1|d$，特别是 $m+1\leq d$。我们还有 $d|r$，因此特别有 $l-r\geq d$。结合这两个等式可得 $r+m+1\leq l$，当且仅当 $l-r=d$ 和 $m+1=d$ 时取等号。这立即意味着 $l|n$，因此 $\Theta_{l,s}$ 不整除 $\begin{bmatrix}n\\m+1\end{bmatrix}_s/[n]_s^{>m+1}$。$\square$

定理 3.9。令 $n \in \mathbb{N}$。由 A 生成的分式理想为

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_s^{-1}, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_s^{-1}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_s^{-1}$$

是主理想，由.....生成

$$\left(\prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \nmid n+1}} \Theta_{k,s} \right)^{-1}.$$

证明。我们采用与定理 3.8 的证明类似的策略。令 I_m 表示由.....生成的分式理想

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_s^{-1}, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_s^{-1}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_s^{-1}$$

并令

$$g_m = \prod_{\substack{k \mid n-m+i \text{ for some } 1 \le i \le m \\ k \nmid n+1}} \Theta_{k,s}.$$

假设我们已经证明 I_m 是主理想，由 g_m^{-1}生成。我们将证明I_{m+1} 是主理想，由 g_{m+1}^{-1}生成。只需证明由.....生成的分式理想

$$\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s^{-1}, g_m^{-1}$$

等于由 g_{m+1}^{-1}生成的主分式理想。这等价于证明以下（普通）理想相等

$$\left(g_m, \begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s \right) = \left(\frac{\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s}{h_m} \right) \tag{9}$$

的 A，其中

$$h_m = \frac{g_{m+1}}{g_m} = \prod_{\substack{k \mid n-m \\ k \nmid n-m+1, k \nmid n-m+2, \dots, k \nmid n+1}} \Theta_{k,s}.$$

（特别是，这表明$\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 整除 $g_m h_m = g_{m+1}$。）

我们首先验证（9）右侧的理想是一个普通理想。若$\Theta_{k,s}$ 整除 h_m （即若 $k \mid n-m$ 且对所有 $1 \le i \le m+1$均有 $k \nmid n-m+i$），则$k \nmid m+1$，且（$n-$（$m+1$））$/k$的小数部分为（$k-1$）$/k$。这意味着

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-(m+1)}{k} \right\rfloor = 1$$

因此$\Theta_{k,s}$ 也整除 $\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$。

显然，$\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s / h_m$ 整除 $\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$。设$\Theta_{k,s}$ 整除 $\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s / h_m$。由于我们可以写成

$$\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix} = \frac{[n]_s [n-1]_s \cdots [n-m]_s}{[m+1]_s [m]_s \cdots [1]_s},$$

这意味着，要么对于某个 $1 \le i \le m$，$k \nmid n-m$ 且 $k \mid n-m+i$；要么对于某个 $1 \le i \le m+1$，$k \mid n-m$ 且 $k \mid n-m+i$。无论哪种情况，都容易验证 $k \nmid n+1$；否则，n/k 的小数部分为 $(k-1)/k$，因此

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-(m+1)}{k} \right\rfloor = 0$$

且 $\Theta_{k,s}$ 不能整除 $\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$。这表明 $\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s / h_m$ 整除 g_m。

现在我们将证明

$$\left(\frac{g_{m+1}}{\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s}, h_m\right) = (1)$$

利用命题 3.6，可得 (9) 成立，进而得到结论。只需证明，对于任意 l、$d > 1$，以下情况不会发生：$\Theta_{l,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 和 $\Theta_{ld,s}|h_m$，或 $\Theta_{ld,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 和 $\Theta_{l,s}|h_m$。

首先，假设 $\Theta_{l,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 和 $\Theta_{ld,s}|h_m$。那么 $l \nmid n+1$ 和 $ld|n-m$，因此 $l|n-m$ 和 $l \nmid m+1$。这表明 $(n-(m+1))/l$ 的小数部分为 $(l-1)/l$，而 $(m+1)/l$ 的小数部分非零，因此

$$\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+1}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-(m+1)}{l} \right\rfloor = 1$$

这与 $\Theta_{l,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 矛盾。

类似地，假设 $\Theta_{ld,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 且 $\Theta_{l,s}|h_m$。那么，对于 $1 \le i \le m+1$，有 $l|n-m$ 和 $l \nmid n-m+i$；而对于某些 $0 \le i \le m$ 和 $ld \nmid n+1$，有 $ld|n-m+i$。这种情况唯一可能发生的方式是 $ld|n-m$。这意味着 $ld \nmid m+1$，并且同理可得

$$\left\lfloor \frac{n}{ld} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+1}{ld} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-(m+1)}{ld} \right\rfloor = 1$$

这与 $\Theta_{ld,s}|g_{m+1}/\begin{bmatrix} n \\ m+1 \end{bmatrix}_s$ 矛盾。

□

4. Existence and rotatability

令 $Q =$ 为 A 的 Frac，且 $\overline{Q} =$ 为 $\overline{A}$ 的 Frac。本节的目标是通过证明 $\mathrm{JW}_{Q,s}(n)$ 的系数的分母整除，来证明定理 A

$$\prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \nmid n+1}} \Theta_{k,s}$$

将它们与 $\mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)$ 的系数进行比较。首先，我们证明 $\mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)$ 的类似结论。

引理 4.1. 设 $k > 1$ 为整数，且 D 为 $\mathrm{TL}_{\overline{Q}}(n)$ 中的单色 Temperley–Lieb 图。那么

$$\nu_k\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)} D\right) \ge -1,$$

等号成立当且仅当 $1 < k \le n$ 和 $k \nmid n+1$。

证明. 我们采用归纳法。假设结论对 $n = m$ 成立，并设 D 为 $\mathrm{TL}_{\overline{Q}}(m+1)$ 中的单色 Temperley–Lieb 图。根据定理 2.1 的单色版本，我们有

$$\begin{aligned} \nu_k\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(m+1)} D\right) &= \nu_k\left(\sum_{\{i\}} \frac{[i]}{[m+1]} \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(m)} D_i\right) \\ &\ge \min_{\{i\}}\left(\nu_k\left(\frac{[i]}{[m+1]}\right) + \nu_k\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(m)} D_i\right)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

若 $k \nmid m+1$，则对于任意 i，$\nu_k([i]/[m+1]) \ge 0$，且 $\nu_k(\operatorname{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(m)} D_i) \ge -1$。另一方面，若 $k|m+1$，则 $\nu_k([i]/[m+1]) \ge -1$，而 $\nu_k(\operatorname{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(m)} D_i) \ge 0$。无论哪种情况，两个赋值之和都至少为 -1，因此 (10) 的右侧至少为 -1。

现在假设等号成立。根据定理 2.2，单色 Jones–Wenzl 投影算子存在于子环

$$\overline{Q}_{\mathrm{binom}} = \mathbb{Z}[x]\left[\begin{bmatrix} m+1 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1}, \dots, \begin{bmatrix} m+1 \\ m+1 \end{bmatrix}^{-1}\right].$$

自然嵌入 $\overline{Q}_{\mathrm{binom}} \subset \overline{Q}$ 诱导出一个嵌入 $\mathrm{TL}\overline{Q}_{\mathrm{binom}}(m+1) \to \mathrm{TL}\overline{Q}(m+1)$，而 $\mathrm{JW}\overline{Q}_{\mathrm{binom}}(m+1)$ 在 $\mathrm{TL}\overline{Q}(m+1)$ 中的像显然是一个 Jones–Wenzl 投影算子。由于 Jones–Wenzl 投影算子是唯一的，我们得出 $\mathrm{JW}\overline{Q}(m+1)$ 的系数属于 $\overline{Q}_{\mathrm{binom}}$。特别地，如果任意给定系数的 k-赋值为负，那么对于某个 $0 \le r \le m+1$，Θ_k 必须整除 $\begin{bmatrix} m+1 \\ r \end{bmatrix}$，因此它必须整除 $\begin{bmatrix} m+1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix}$、……、$\begin{bmatrix} m+1 \\ m+1 \end{bmatrix}$ 的最小公倍数。但定理 3.9 的单色版本的一个推论是，这个最小公倍数为

$$g_{m+1} = \prod_{\substack{1 \le r \le m+1 \\ r \nmid m+2}} \Theta_r.$$

因此必有 $(\Theta_k, g_{m+1}) = (\Theta_k)$，所以 $1 < k \le m+1$ 和 $k \nmid m+2$，如所要求。 □

现在令 $A' = A[x]/(x^2 - x_s x_t)$。我们将 A' 显然地视为一个 A-代数和一个 $\overline{A}$-代数。记 $Q' = \operatorname{Frac} A'$，则有一个同构

$$\begin{aligned} \mathrm{TL}_{Q'}(n) &\longrightarrow 2\mathrm{TL}_{Q'}({}_s n) \\ e_i &\longmapsto \begin{cases} \frac{x}{x_s} e_i & i \text{ odd}, \\ \frac{x}{x_t} e_i & i \text{ even}, \end{cases} \end{aligned}$$

它将 $\mathrm{JW}_{Q'}(n)$ 映射为 $\mapsto \mathrm{JW}_{Q'}({}_s n)$。因此，对于任意双色 Temperley–Lieb 图 D，有

$$\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D = \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{Q'}({}_s n)} D = x^a x_s^b x_t^c \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{Q'}(n)} \overline{D} = x^a x_s^b x_t^c \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)} \overline{D}$$

其中 a、b、c 为整数，且满足 $a + b + c = 0$；这里 $\overline{D}$ 表示将 D 的着色遗忘后得到的单色图。因此，当 $k > 2$ 时，有

$$\nu_{k,s}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D\right) = \nu_{k,t}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D\right) = \nu_k\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)} \overline{D}\right), \tag{11}$$

and

$$\nu_{2,s}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D\right) + \nu_{2,t}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D\right) = \nu_k\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}(n)} \overline{D}\right). \tag{12}$$

引理 4.2。设 $k > 1$ 为整数，并设 D 是 $2\mathrm{TL}_Q({}_s n)$ 中的一个双色 Temperley–Lieb 图。那么

$$\nu_{k,u}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D\right) \ge -1,$$

并且若等号成立，则 $1 < k \le n$ 和 $k \nmid n+1$，且当 $k = 2$ 时 $u = s$。

证明。由引理 4.1 和 (11)，我们只需考虑 $k = 2$ 的情形。我们仿照引理 4.1 的证明进行归纳。假设

结论对 $n = m$ 成立，并设 D 是 Temperley–Lieb 代数Q中的一个双色 Temperley–Lieb 图（$s(m+1)$）。由定理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\nu_{2,u}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s(m+1))} D\right) &= \nu_{2,u}\left(\sum_{\{i\}} \frac{[i]_v}{[m+1]_s} \operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s m)} D_i\right) \\ &\geq \min_{\{i\}}\left(\nu_{2,u}\left(\frac{[i]_v}{[m+1]_s}\right) + \nu_{2,u}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s m)} D_i\right)\right).\end{aligned} \tag{13}$$

如果 m 是偶数，那么对所有 i

$$\nu_{2,u}\left(\frac{[i]_v}{[m+1]_s}\right) \geq 0 \qquad \text{and} \qquad \nu_{2,u}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s m)} D_i\right) \geq -1$$

根据归纳法。如果 $u = t$，那么对所有 i

$$\nu_{2,t}\left(\frac{[i]_v}{[m+1]_s}\right) \geq 0 \qquad \text{and} \qquad \nu_{2,t}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s m)} D_i\right) \geq 0$$

由于 $\nu_{2,\ t}[m+1]_s = 0$ 对所有 m 并且因为 t-色赋值根据归纳法非负。另一方面，如果 m 是奇数且 $u = s$，那么对所有 i

$$\nu_{2,u}\left(\frac{[i]_v}{[m+1]_s}\right) \geq -1 \qquad \text{and} \qquad \nu_{2,s}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_{\overline{Q}}({}_s m)} D_i\right) \geq 0.$$

在所有情况下，两个赋值之和至少为 -1（而且当 $u = t$ 时至少为 0），因此 (13) 的右侧至少为 -1。

现在假设 $u = s$ 且 (13) 的左侧为 -1，但 m 是偶数。存在一个 $\mathbb{Z}$-代数的对合（或“颜色互换扭曲的” R-代数对合）

$$\begin{aligned}\tau : 2\mathrm{TL}_Q({}_s(m+1); [2]_s, [2]_t) &\longrightarrow 2\mathrm{TL}_Q({}_s(m+1); [2]_s, [2]_t) \\ [2]_s &\longmapsto [2]_t \\ [2]_t &\longmapsto [2]_s \\ e_i &\longmapsto e_{(m+1)-i}\end{aligned}$$

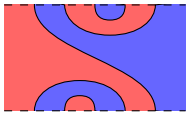
对于一个图示，D, $\tau(D)$ 是将 D 关于垂直轴反射并交换颜色后得到的图示。显然，这个对合固定 $\mathrm{JW}_Q({}_s n)$，因此我们有

$$\nu_{2,s}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s(m+1))} D\right) = \nu_{2,t}\left(\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s(m+1))} \tau(D)\right) \geq 0$$

这就产生了矛盾，并完成了证明。 □

引理 4.3. 设 n, k 为满足 $0 \leq k \leq n$ 的整数。存在一个双色图示 D，使得 $\operatorname{coeff}_{\in \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{-1}$。

证明. 取 D 为这样的图示：左下方有 k 个嵌套弧帽，右上方有 k 个嵌套弧杯，其余所有股线均从底部连接到顶部。例如，若 $n = 5$ 且 $k = 2$，我们设

$D =$ 

由定理 2.1 及对 n 的归纳法可得结论。 □

定理 A 的证明. 令

$$T_R = \{f \in 2\mathrm{TL}_R({}_s n) : e_i f = 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq n-1\}.$$

换言之，T_R 是生成元 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ 的（右）湮灭子。可以证明，$\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在，当且仅当存在 $f \in T_R$，使得 $\operatorname{coeff}_{\in f} 1$

在 R 中可逆（例如参见 [7, 练习 9。25]，单色情形）。当这种情况发生时，$T_R = R\,\mathrm{JW}_R({}_s n)$。

显然，$\mathrm{JW}_Q({}_s n)$ 存在，因此 $T_Q = Q\mathrm{JW}_Q({}_s n)$。于是，$T_A$ 是一个秩为 1 的自由 A-模，由 $c\,\mathrm{JW}_Q({}_s n) \in$Temperley–Lieb 代数$_A({}_s n)$ 生成，其中 c 是 $\mathrm{JW}_Q({}_s n)$ 的系数分母的最小公倍数。引理 4.2 蕴含 c 整除

$$g_n = \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\nmid n+1}} \Theta_{k,s},$$

而引理 4.3 和定理 3.9 给出 $c = g_n$。

假设 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s$ 对所有 $0 \le k \le n$ 在 R 中可逆。由定理 3.9 可知，g_n 在 R 中也可逆。因此，$T_R \ge R\otimes_A g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$ 中含有一个元素 $f = 1\otimes g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$，使得 $\mathrm{coeff}_{\in f}\, 1 = g_n$ 可逆，所以 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在。

反过来，假设 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在。我们有 $T_R = R\mathrm{JW}_R({}_s n) \ge R\otimes_A g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$，因此 $g_n\mathrm{JW}_R({}_s n) = 1\otimes_A g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$。但是，$g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$ 的系数（它们属于 A）在 A 中生成理想 (1)（同样由定理 3.9 和引理 4.3 可得），这直接意味着 g_n 在 R 中可逆，并且 $\mathrm{JW}_R({}_s n) = g_n^{-1}\otimes_A g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)$。□

上述计算的一个推论是前面提到的关于 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 系数的“通用计算”。

推论 4.4. 对于每个双色 Temperley–Lieb 图 D，存在互素元素 f_D、$g_D \in A$，使得如果 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在，那么对所有 D，g_D 在 R 中的特化都是可逆的，并且

$$\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_R({}_s n)} D$$

是 f_D/g_D 在 R 中的特化。

注 4.5. 我们认为，单色 Jones–Wenzl 投影子的系数的通用计算（至少对于 $\mathbb{C}$ 的子环而言）属于数学界公认的常识，也就是说，这是一个“已知”结果，但没有已发表的证明。在 [6, 定理 6.13] 中，Elias–Williamson 仔细证明了一个类似结果，其假设是 R 既是整环又是亨泽尔局部环。我们的证明不要求对 R 作任何限制，但本质上等价于定理 A。

证明. 根据定理 A 的证明，如果 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在，那么 g_n 在 R 中可逆，并且

$$\operatorname*{coeff}_{\in \mathrm{JW}_R({}_s n)} D = \operatorname*{coeff}_{\in g_n^{-1}\otimes_A g_n \mathrm{JW}_Q({}_s n)} D.$$

设 $f =$ 系数$_{\in g_n\mathrm{JW}_Q({}_s n)}$，并取 $f_D = f/$最大公约数(f, g_n) 和 $g_D =$最大公约数(f, g_n)。 □

对于 $f \in Q$，若存在 $a, b \in A$，使得 $f = a/b$ 且 b在 R中可逆，则称 f 在 R 中存在。

引理 4.6. 假设 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在。那么对于任意整数$1 \le k \le n+1$，$\frac{[n+1]_s}{[k]_s}$ 在 R 中存在。

证明。我们有

$$\frac{[n+1]_s}{[k]_s} = \frac{\prod_{l\mid n+1}\Theta_{l,s}}{\prod_{l\mid k}\Theta_{l,s}} = \frac{\prod_{\substack{l\mid n+1\\ l\nmid k}}\Theta_{l,s}}{\prod_{\substack{l\mid k\\ l\nmid n+1}}\Theta_{l,s}},$$

并且右侧的分母整除

$$\prod_{\substack{1<l\le n\\ l\nmid n+1}} \Theta_{l,s}$$

根据定理 A 和定理 3.9，它是可逆的。 □

命题 4.7。 设双色琼斯–温茨尔投影算子 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$和$\mathrm{JW}_R({}_t n)$ 存在。则 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 可旋转，当且仅当 $\frac{[n+1]_s}{[k]_s} = 0$ 对所有整数$1 \leq k \leq n$成立。

证明。进行一般计算可得

$$\mathrm{pTr}(\mathrm{JW}_Q({}_s n)) = -\frac{[n+1]_s}{[n]_s}\mathrm{JW}_Q({}_s(n-1))$$

由 (7) 得。从推论 4.4 的证明可知，$\mathrm{JW}_Q({}_s(n-1))$ 的系数可写成如下形式的分数之和： $a\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_s^{-1}$ ，其中 $a \in A$ ，且 $0 \leq k \leq n-1$ 为整数。现在注意到

$$-\frac{[n+1]_s}{[n]_s}\frac{a}{\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_s} = -\frac{[n+1]_s[k]_s!a}{[n]_s[n-1]_s\cdots[n-k]_s} = -\frac{[n+1]_s}{[k+1]_s}\frac{a}{\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_s}$$

注意到，由于 $\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 存在， $\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_s$ 可逆。因此，当 $\frac{[n+1]_s}{[k+1]_s} = 0$ 时，$\mathrm{JW}_R({}_s n)$ 可旋转。反过来，根据引理 4.3，存在一个图形，其在 $\mathrm{JW}_Q({}_s(n-1))$ 中的系数恰为 $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_s^{-1}$ ，因此上述计算表明，可旋转性意味着 $\frac{[n+1]_s}{[k+1]_s} = 0$。□

定理 B 的证明。 关于量子二项式系数的条件与[1, 假设 11]相同。根据 [1, 命题 34] ，这意味着量子二项式系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s$ 和 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t$ 均可逆。由于

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_s = \frac{[n+1]_s}{[k]_s}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_s \tag{14}$$

类似地，对于 t，我们得出 $\frac{[n+1]_s}{[k]_s} = \frac{[n+1]_t}{[k]_t} = 0$ 对所有整数 $1 \leq k \leq n$均成立。反过来，如果双色 Jones–Wenzl 投影算子存在且可旋转，那么由 (14) 结合命题 4.7 可知，$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_s$ 和 $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_t$ 对所有整数 $1 \leq k \leq n$均为零。□

5. Applications to the Hecke category

Elias–Williamson 的图示赫克范畴 $\mathcal{H}$ 由 Coxeter 群的一个反射表示构造而成，这种表示称为实现。对于每个有限抛物二面体子群，他们都确定了一个相应的双色 Temperley–Lieb 代数，其定义参数取决于实现 [5, §5.2]。在 [6,§5] 中，Elias–Williamson 指出了其 [5]实现中的一些隐藏假设。最基本的假设是（没有这一假设，图示赫克范畴就无法良好定义）：某些双色 Jones–Wenzl 投影算子存在且可旋转。为便于后续研究，我们给出一个修正后的实现定义（称为 Abe 实现），以确保这些 Jones–Wenzl 投影算子的存在性与可旋转性。

定义 5.1. 设 $\Bbbk$ 为一个整环。Coxeter 系统 (W, S) 在 $\Bbbk$ 上的 Abe 实现由一个自由有限秩 $\Bbbk$-模 V 以及若干子集组成

$$\{\alpha_s : s \in S\} \subset V \qquad \{\alpha_s^\vee : s \in S\} \subset V^* = \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, \Bbbk)$$

使得

(i) 对所有 $s \in S$， $\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s\rangle = 2$ ；(ii) 映射

$$s(\beta) = \beta - \langle \alpha_s^\vee, \beta\rangle \alpha_s$$

对所有的 $s \in S$ 和 $\beta \in V$ ，定义了 Coxeter 群 W 在 V 上的表示；

(iii) 对于所有不同的 s、$t \in S$，若 st 的阶为 $m_{st} < \infty$，则有

$$\begin{bmatrix} m_{st} \\ k \end{bmatrix}_s (\langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle, \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s \rangle) = \begin{bmatrix} m_{st} \\ k \end{bmatrix}_t (\langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle, \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s \rangle) = 0$$

对所有整数 $1 \leq k \leq m_{st} - 1$。

根据定理 B，上述条件 (iii) 等价于 $\Bbbk\,(s\,(m_{st}-1))$ 和 $\Bbbk\,(t\,(m_{st}-1))$ 的 JW 投影子的存在性和可旋转性，其中 $[2]_s = \langle \alpha_s^\vee,\ \alpha_t \rangle$ 以及 $[2]_t = \langle \alpha_t^\vee,\ \alpha_s \rangle$。因此，推论 C 可由 [6, §5.1]中的讨论推出。此外，条件 (iii) 正是 Abe 的假设 [1, 假设 1。1], 因此，推论 D 可由 Abe 的结果 [1, 定理 3。9] 和 [2, 定理 5。9]立即推出。它也等价于

$$\begin{aligned} \Psi_{m_{st}}(\langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s \rangle) = 0 \quad &\text{if } m_{st} > 2, \\ \langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle = \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s^\vee \rangle = 0 \quad &\text{if } m_{st} = 2, \end{aligned} \tag{15}$$

根据定理 3.8。

注 5.2。Abe 的结果假设 $\mathcal{H}$ 范畴化了赫克代数。对于实现 V [6, §§5.2–5.3]，这仅要求额外加入推论 D 中的 Demazure 满射性假设 [5,假设 3。9] 这是一个较弱的条件，特别是在 $2 \in \Bbbk^\times$ 时成立。

注 5.3. 对于包含 H_3 型抛物子群的 Coxeter 群，如何定义图示赫克范畴，文献中长期存在一个空白。目前这类情形下尚未定义图示赫克范畴，因为一个关键关系（H_3 扎莫洛德奇科夫关系 [5, (5.12)]）尚不完整。可以认为，Abe 范畴中必定存在这样的关系，但要明确确定这一关系，似乎超出了目前的计算能力——进一步讨论请见 [5, 注 5.4] 和 [6, §3.6]。假如能够找到这样的关系，那么推论 C 很可能在这种情形下也成立。

注 5.4. 在 [5] Elias–Williamson 中，作者错误地指出

$$[m_{st}]_s(\langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle, \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s \rangle) = [m_{st}]_t(\langle \alpha_s^\vee, \alpha_t \rangle, \langle \alpha_t^\vee, \alpha_s \rangle) = 0 \tag{16}$$

就足以确保 JW 的存在性与可旋转性$_{\Bbbk(s(m_{st}-1))}$.（这一错误在 [6] 中被发现，但在那里只得到部分解决。）在同一篇论文中，Elias–Williamson 还错误地指出 (16) 等价于 (15)。有趣的是，将这两项陈述结合起来时，这些错误竟然意外地相互抵消，使得最终的陈述等价于推论 C！

References

[1] N. Abe。《Bott-Samelson 双模之间的同态》。2020年12月。arXiv: 2012.09414 [math.RT]。[2] N. Abe。《Hecke 范畴的双模描述》。《Compos. Math.》157（2021），2133–2159。[3] B. Elias。《双色 Soergel 微积分》。《Compos. Math.》（2）152（2016），327–398。[4] B. Elias 和 N. Libedinsky。《通用 Coxeter 群的不可分解 Soergel 双模》。《Trans. A mer. Math. Soc.》（6）369（2017）。附录由 Ben Webster 撰写，3883–3910。[5] B. Elias 和 G. Williamson。《Soergel 微积分》。《Represent. Theory》20（2016），295–374。[6] B. Elias 和 G. Williamson。《Hecke 范畴的局部化微积分》。2020年11月。arXiv: 2011.05432 [math.RT]。[7] B. Elias 等。《Soergel 双模导论》。第5卷。RSME Springer 丛书（Springer, Cham, [2020]©2020），第 xxv+588 页。

(10)

[8] I. B. Frenkel 和 M. G. Khovanov。《张量积中的典范基与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的图形演算》。《杜克数学杂志》（3）87（1997年），409–480。[9] S. Morrison。《琼斯-温茨尔投影的一个公式》。载于《纪念 Vaughan F. R. Jones 60岁生日的2014年毛伊岛会议和2015年秦皇岛会议论文集》。第46卷。澳大利亚国立大学数学应用中心论文集（澳大利亚国立大学，堪培拉，2017年），第367–378页。[10] D. Ridout 和 Y. Saint-Aubin。《标准模、归纳法与 Temperley-Lieb代数的结构》。《Adv. Theor. Math. Phys.》（5）18（2014），957–1041。[11] C. Rotthaus。《非优良的普遍日式环》。《数学杂志》（2）152（1977），107–125。

Department of Mathematics, University of York, York, YO10 5DD, United Kingdom
Email address: amit.hazi@york.ac.uk