arXiv:2302.14519v2 [math.CV] 8 Mar 2023

Bohr定理的一个推广

OLE FREDRIK BREVIG 和 ATHANASIOS KOUROUPIS

摘要。本文证明了 Bohr定理的如下推广：若一个在某处收敛的狄利克雷级数 f 可解析延拓到半平面 $\mathbb{C}_\theta=\{s=\sigma+it:\ \sigma>\theta\}$，且将 $\mathbb{C}_\theta$ 映射到 $\mathbb{C}\setminus\{\alpha,\beta\}$（其中 $\alpha\neq\beta$为复数），则 f 在 $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ 上一致收敛，对任意 $\varepsilon>0$均成立。该推广是最优的，因为若将$\mathbb{C}\setminus\{\alpha,\beta\}$替换为 $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\}$，这一结论便不再成立。

1. 引言

令 $\mathfrak{D}$ 表示由以下狄利克雷级数组成的类

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s} \tag{1}$$

它们在复平面中的至少一点 $s=\sigma+it$ 处收敛。对于每个属于 $\mathfrak{D}$ 的狄利克雷级数 f，都对应一个数 $\sigma_{\mathrm{c}}(f)$，称为收敛横坐标，其性质为：当 $\sigma>\sigma_{\mathrm{c}}(f)$ 时，f 收敛；当 $\sigma<\sigma_{\mathrm{c}}(f)$时，$f$不收敛。本文探讨 Bohr 关于狄利克雷级数 [3]一致收敛的经典定理的一种推广。因此，我们将一致收敛横坐标 $\sigma_{\mathrm{u}}(f)$定义为满足 f 在半平面 $\mathbb{C}_\theta$ 上一致收敛的实数 θ 的下确界。此处以及下文中，我们令

$$\mathbb{C}_\theta=\{s=\sigma+it:\ \sigma>\theta\}.$$

我们的出发点如下。

Bohr定理。设 f 属于 $\mathfrak{D}$。如果存在一个实数 θ 和一个有界集合 Ω，使得 f 可解析延拓至 $\mathbb{C}_\theta$，且将 $\mathbb{C}_\theta$ 映射到 Ω，那么 $\sigma_{\mathrm{u}}(f)\leq\theta$。

Queff´elec 和 Seip [10]（另见 [9, 定理 8.4。1]）证明，将 Ω 为有界集合这一假设替换为 Ω 为半平面的较弱假设即可。这一对 Bohr定理的扩展被用于获得复合算子的 Gordon–Hedenmalm 刻画的规范表述 [6]，事实证明，这对进一步的发展至关重要（例如参见 [5, 第 6]节）。

本文旨在根据 f 在半平面 $\mathbb{C}_\theta$中的映射性质，精确 delineate Bohr定理可扩展的范围。我们将通过建立以下结果来实现这一目标。

定理 1. 设 f 属于 $\mathfrak{D}$。若存在实数 θ 和复数 $\alpha\neq\beta$，使得 f 可解析延拓至 $\mathbb{C}_\theta$，并将 $\mathbb{C}_\theta$ 映射到 $\mathbb{C}\setminus\{\alpha,\beta\}$，则$\sigma_{\mathrm{u}}(f)\leq\theta$。

日期：2023年3月9日。2020 数学主题分类。主要分类 30B50。次要分类 30B40, 40A30。

定理2. 存在一个狄利克雷级数 f，满足 $\sigma_{\mathrm{c}}(f) \leq 1/2$, $\sigma_{\mathrm{u}}(f) = 1$，且

$$f(\mathbb{C}_\theta) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

对于任意 $1/2 \leq \theta \leq 1$。

必须强调的是，这两个结果都是由众所周知的技巧和结果相当直接地推导出来的。定理 1 的证明使用肖特基定理，其用法与 Titchmarsh 在 [12, 第十一章], 引言中的用法相似；而定理2则由 Bohr [2] 和 Helson [8] 关于黎曼ζ函数的结果推导而来。

致谢。 作者感谢 Herv´e Queff´elec 提供了有益的意见。

2. 定理 1 和定理2的证明

我们先为定理 1 的证明做一些准备。令 $\mathbb{D}(c,\ r)$ 表示以 c 为中心、半径为 $r > 0$的开圆盘。若 f 在 $\mathbb{D}(c,\ r)$ 中解析，且不取 0 和 1，则 Ahlfors[1] 给出的肖特基定理的有效版本指出

$$|f(s)| \leq \exp\left(\frac{r + |s-c|}{r - |s-c|}\big(7 + \max(0, \log|f(c)|)\big)\right) \tag{2}$$

对于所有 s 属于 $\mathbb{D}(c,\ r)$ 的情形均成立。（实际上我们并不需要肖特基定理的有效版本，但使用显式表达式会更方便。）

定理 1 的证明。 不失一般性，我们可以假设 $\alpha = 0$ 和$\beta = 1$。众所周知（例如参见 [9, 第 4 章2]）， $\sigma_{\mathrm{u}}(f) \leq \sigma_{\mathrm{c}}(f) + 1$，因此 $\mathfrak{D}$ 中的每个狄利克雷级数都在某个半平面内一致收敛。对于 $\vartheta > \theta$，我们令

$$M(f, \vartheta) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(\vartheta + it)|.$$

显然，若 $\vartheta > \sigma_{\mathrm{u}}(f)$，则 $M(f,\ \vartheta) < \infty$。我们固定 $\vartheta > \sigma_{\mathrm{u}}(f)$，并将 (2) 与 $c = \vartheta + it$、 $r = \vartheta - \theta$和 $s = \sigma + it$结合使用，可推得若 $\theta < \sigma < \vartheta$，则

$$|f(s)| \leq \exp\left(\frac{2(\vartheta - \theta)}{\sigma - \theta}\big(7 + \max(0, \log|M(f, \vartheta)|)\big)\right). \tag{3}$$

这表明，对于任意 $\varepsilon > 0$， f 在 $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ 中有界，因此，根据Bohr定理，$\sigma_{\mathrm{u}}(f) \leq \theta$。□

Ritt [11, 定理 II] 为收敛的狄利克雷级数建立了一个版本的肖特基定理。该结果给出了一个类似于 (3) 的上界，该上界在整个 $\mathbb{C}_\theta$ 上都成立，且仅依赖于 θ 和 a_1; 此外，还要求a_1 不等于 0 或 1。这里， a_1 表示级数 (1) 中的首项系数。

为证明定理2，我们考虑垂直平移

$$V_\tau f(s) = f(s + i\tau).$$

狄利克雷级数 f 在 $\mathfrak{D}$ 中的垂直极限函数 是指对任意固定的 $\theta > \sigma_{\mathrm{u}}(f)$，可由垂直平移序列 $(V_{\tau_k} f)_{k\geq 1}$在 $\mathbb{C}_\theta$中的一致极限得到的函数。回顾 [7, 第 2.3] 节，狄利克雷级数 (1) 的垂直极限函数与以下形式的狄利克雷级数相同

$$f_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s},$$

其中， χ 是一个从自然数到单位圆的完全乘性函数。

某些 f 的性质在垂直极限下保持不变。例如，Bohr定理意味着，如果 f 属于 $\mathfrak{D}$，那么对于任意 χ， $\sigma_{\mathrm{u}}(f) = \sigma_{\mathrm{u}}(f_\chi)$。Rouch´e 定理的一个推论（例如参见 [4, 引理 1]）是，对于任意 χ 以及任意 $\theta \geq \sigma_{\mathrm{u}}(f)$， $f_\chi(\mathbb{C}_\theta) = f(\mathbb{C}_\theta)$。然而， f 和 f_χ 的收敛横坐标通常可能不同（参见 [7, 8] 或 [9, 第 8 章.4]）。

定理*2*的证明。 我们从黎曼ζ函数开始

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

它满足 $\sigma_{\mathrm{c}}(\zeta) = \sigma_{\mathrm{u}}(\zeta) = 1$。Bohr 的一个结果 [2] （另见 [9, 第 4 章.5]）断言 $\zeta(\mathbb{C}_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。根据上文的讨论，可得 $\sigma_{\mathrm{u}}(\zeta_\chi) = 1$，并且对于任意 χ， $\zeta_\chi(\mathbb{C}_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。Helson [8] 证明，存在某些 χ，使得狄利克雷级数 ζ_χ 收敛，且在半平面 $\mathbb{C}_{1/2}$ 内不为零。取这样的 χ 所对应的 $f = \zeta_\chi$，即可得到所述结果。□

参考文献

[1] Lars V. Ahlfors, 《Schwarz引理的推广》, 《美国数学会汇刊》43 3, 359 1938 364 1501949 ( ), 第 – 期。MR[2] Harald Bohr, 《关于 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma > 1$ 中的行为》, 《哥廷根科学学会通讯》（1911）, 201–208。[3] Harald Bohr, 《狄利克雷级数的一致收敛》, 《纯粹与应用数学杂志》143（1913）, 203–211。MR 1580881[4] Ole Fredrik Brevig 和 Karl-Mikael Perfekt, 《狄利克雷级数 H^2 空间上复合算子的范数》, 《泛函分析杂志》278（2020）, 第 2 期, 108320, 33 页。MR 4030275[5] Ole Fredrik Brevig 和 Karl-Mikael Perfekt, 《狄利克雷级数的平均计数函数与紧复合算子》, 《数学进展》385（2021）, 论文编号 107775, 48 页。MR 4252762[6] Julia Gordon 和 H˚akan Hedenmalm, 《系数平方可和的狄利克雷级数空间上的复合算子》, 《密歇根数学杂志》46（1999）, 第 2 期, 313–329。MR 1704209[7] H˚akan Hedenmalm、Peter Lindqvist 和 Kristian Seip, 《狄利克雷级数的希尔伯特空间及 L^2(

$0, 1$ **86** 1997 1, 1 37 1427844)

[8] **8** 1969 139 143 285858

中的膨胀函数系》, 《杜克数学杂志》（）, 第 – 期。MR Henry Helson, 《紧群与狄利克雷级数》, 《数学档案》（）, –。MR[9] Herv´e Queff´elec 和 Martine Queff´elec, 《丢番图逼近与狄利克雷级数》, 第二版, 《数学文本与读物》第 80 卷, 印度斯坦图书机构, 新德里; 施普林格, 新加坡, 2020。MR 4241378[10] Herv´e Queff´elec 和 Kristian Seip, 《狄利克雷级数 H^2 空间上复合算子的逼近数》, 《泛函分析杂志》

268 2015 6, 1612 1648 3306358

[11] **50**

（）, 第 – 期。MR J. F. Ritt, 《狄利克雷级数理论中的若干要点》, 《美国数学杂志》（1928）, 第 1 期, 73–86。MR 1506655[12] E. C. Titchmarsh, 《黎曼ζ函数理论》, 第二版, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 1986, 由 D. R. Heath-Brown 编辑并作序。MR 882550

奥斯陆大学数学系，挪威奥斯陆 0851电子邮箱地址： obrevig@math.uio.no

挪威科技大学（NTNU）数学科学系，挪威特隆赫姆 7491电子邮箱地址：
athanasios.kouroupis@ntnu.no