arXiv:2302.14734v1 [math.QA] 28 Feb 2023

# 三维流形缚 skein 模的朗兰兹对偶

DAVID JORDAN

Abstract. 我介绍关于三维流形缠结模的全新朗兰兹对偶猜想；这是我们最近与 David Ben-Zvi、Sam Gunningham 和 Pavel Safronov 共同提出的。我回顾一些历史动机，以及近期已证实该猜想的若干特殊情形。这些情形的证明结合了双仿射 Hecke 代数的表示论，以及缠结模上一种与电磁对偶相关的新型 1-形式对称性结构。本文扩展自我在华沙举行的 String Math 2022 会议上的报告，并提交给 String Math 2022 会议论文集。

## 1. Introduction

在 1967年 致 Andr´e Weil 的信中，Robert Langlands 提出了一种神秘的猜想对应——如今称为朗兰兹互反——它联系了现在所称的单代数群 $G$ 的**自守表示**与其朗兰兹对偶群 ${}^LG$的**伽罗瓦表示**。设 $\mathbb{F}$为一个数域，其阿代尔环为 $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}$。粗略地说， $G$ 的自守表示是某些 $G(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})$-表示，可以实现在 $L^2(G(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})/G(\mathbb{F}))$ 中，因此与自守形式密切相关。朗兰兹对偶群 ${}^LG$ 是由 $G$ 通过互换根数据得到的另一个单代数群。到 ${}^LG$ 的伽罗瓦表示是从绝对伽罗瓦群$\Gamma(\mathbb{F}/\mathbb{F})$到 ${}^LG(\mathbb{C})$的群同态。在朗兰兹互反已显现出的诸多非凡特征中，其中之一是：它所联系的对象在先验上属于截然不同的性质。朗兰兹互反及其众多推论和相关理论——包括函数域和局部域的变体——后来统称为**算术朗兰兹对偶**。

在朗兰兹提出他的猜想数十年后，Beilinson 和 Drinfeld 发现了一种新型的朗兰兹对偶——同样仍是猜想——它存在于光滑射影曲线 $X$上的某些向量丛模空间之间。他们提出的理论如今称为**德拉姆几何朗兰兹对偶**，断言两个这样的模空间上的不同代数几何范畴之间存在等价关系。自守侧是 $X$上的全纯 $G$丛模空间上的某个 $\mathcal{D}$-模范畴——也就是多项式微分方程组。伽罗瓦侧则是 $X$上的平坦 ${}^LG$丛模空间上的相干层范畴——也就是说，向量丛之间映射的有限商（即配有平坦联络 1-形式的 ${}^LG$丛）。与算术情形一样，几何朗兰兹对偶将先验性质迥异、彼此不存在初等联系的对象关联起来。

*Date*: 2022年6月。

连接算术猜想与几何猜想的脉络，贯穿一系列深刻的类比，即所谓的韦伊罗塞塔石碑；这些类比将函数域的算术与复曲线的几何联系起来。我们可以把函数域 $\mathbb{F}$ 的阿代尔环 $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}$ 想象成一条复曲线，以素数为点，因而将 $G(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})$视为 $G$丛在每个素数形式邻域中的“局部坐标”；在几何侧，这对应于通过曲线上每一点处的泰勒展开来刻画一个 $G$丛。由此，我们将几何侧的 $\mathrm{Bun}_G$ 上的 $\mathcal{D}$-模范畴，与算术侧的 $\ell$-进层范畴相对照；借助函数域的“层到函数”对应关系，后者又是自守形式的一种范畴化。在朗兰兹对偶的另一侧，绝对伽罗瓦群被充分认识为曲线基本群的一种算术类比。

Beilinson 和 Drinfeld 的猜想后来在 Feigin、Frenkel 和 Gaitsgory 的推动下，按照 Stoyanovsky 的提议，以扭转 $\mathcal{D}$-模的语言进行了变形。在他们的**量子德拉姆几何朗兰兹对偶**中，出现了一种在算术或几何背景下并不存在的新对称性：自守侧与伽罗瓦侧之间的区别消失了，出现的两个模空间都是全纯 $G$-丛（分别为 ${}^LG$- 丛）的模空间，而出现的范畴则都是（分别为 $\Psi$- 或 ${}^L\Psi$- 扭转的） $\mathcal{D}$- 模范畴。这里的扭转取决于一个可能为无穷大的复参数 $\Psi \in \mathbf{CP}^1$, 和 ${}^L\Psi = -1/(n_G\Psi)$，其中 $n_G \in \{1,2,3\}$ 是 $G$的套结数。经典几何朗兰兹猜想是 $\Psi = \infty$, ${}^L\Psi = 0$的特殊情形。

量子几何朗兰兹对偶的一种物理体现由 Kapustin 和 Witten 发现，是 **$S$-对偶** 的一个实例，也称为 Montonen–Olive 对偶。这种对偶联系了四维 $\mathcal{N} = 4$ 超杨–米尔斯量子场论的一些低能近似，这些近似称为“扭曲”。 $S$-对偶是一种非阿贝尔傅里叶变换，其存在性由 $\mathcal{M}$-理论预言，并且可以理解为麦克斯韦理论中电磁对偶的一种推广。在这种阐释中， $G$ 和 ${}^LG$ 分别作为不同理论的规范群出现，而参数 $\Psi$, ${}^L\Psi$ 则分别给出扭曲空间上的 $\mathbb{CP}^1$ 坐标图。$S$-对偶断言物理理论之间存在等价关系，

$$\mathcal{Z}_{G,\Psi} \simeq \mathcal{Z}_{{}^LG,{}^L\Psi},$$

而 Kapustin 和 Witten 解释了如何将经典和量子几何朗兰兹猜想中出现的范畴导出为曲面算子范畴 $\mathcal{Z}_{G,\ \Psi}(X)$ $\mathcal{Z}_{{}^LG,\ {}^L\Psi}(X)$。这一重新表述在数学界和物理学界都产生了深远影响，并为下文的大部分讨论提供了动机。

Ben-Zvi 和 Nadler 提出了几何朗兰兹对偶性的另一种组合式体现，如今称为**Betti几何朗兰兹对偶性**。其核心思想是在德拉姆猜想的两侧都应用黎曼–希尔伯特对应。在伽罗瓦侧，与 $X$ 上的德拉姆局部系统相关联的是其单值化同态 $\pi_1(X) \to {}^LG$。在自守侧，与 $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上的 $\mathcal{D}$-模相关联的是它在 $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上的平坦截面层。Betti几何朗兰兹对偶猜想断言，特征簇上的某个适当的相干层范畴——该特征簇是同态的模空间

$\pi_1(X) \to {}^L G$ ——以及 $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上的向量空间层范畴之间存在等价。特别是，后者与前者一样，被猜想只依赖于代数曲线 $X$所依托的拓扑曲面 $\Sigma$。

在我们与 Brochier、Ben-Zvi、Snyder 和 Safronov 合作的研究中，我们随后在量子群框架下对贝蒂对应的伽罗瓦侧进行了 $q$-变形；这一理论被称为量子特征标理论拓扑场论，并被赋予完全扩展的四维拓扑场论结构（其配分函数发散，有时也称为一次范畴化的三维拓扑量子场论，或 $(3+1)$-拓扑量子场论）。这些构造的核心思想是，贝蒂伽罗瓦模空间可视为映射栈 $\mathrm{Maps}(\Sigma,\ BG)$，其映入分类栈 $BG$，并带有 $\mathrm{Coh}(BG) = Rep(G)$。栈 $BG$ 具有典范的 2-移位辛结构，其变形量子化 $BG_q$ 在代数上由编织张量范畴 $\mathrm{Rep}_q(G)$给出。借助高阶莫里塔理论和因子化同调的语言，我们得以为函子“$\mathrm{Maps}(\Sigma,\ BG_q)$”赋予形式上的意义，并证明它可扩展为配分函数发散的四维拓扑量子场论。

---

本文旨在分享我们最近与 David Ben–Zvi、Sam Gunningham 和 Pavel Safronov 共同提出的一个猜想。该猜想设想，闭合定向三维流形的缠结模之间存在朗兰兹对偶。闭合定向三维流形 $_q(M)$ 的 $G$-缠结模 $\mathrm{Sk}_{G,}$ 是由 $G$ 标记的带状图形式上线性张成的空间，再对由量子群 $U_q\mathfrak{g}$ 的表示范畴 $\mathrm{Rep}_q(G)$ 这一带状编织张量范畴所建模的局部关系取商而得；缠结范畴的定义也遵循类似思路（精确定义和一些例子见第2节）。最简单的形式下，我们的猜想表述如下：

**猜想 1.1**。设 $G$ 是一个半单代数群，${}^L G$ 表示其朗兰兹对偶群。设 $M$ 是一个闭合定向三维流形，假设 $\Psi \in \mathbb{C}^\times$ 是超越数，并设 $q = e^{\mathrm{i}\Psi}$ 和 ${}^L q = e^{\mathrm{i}^L\Psi}$。那么我们有一个线性同构，

$$\mathrm{Sk}_{G,q}(M) \cong \mathrm{Sk}_{{}^L G,{}^L q}(M).$$

关于该猜想的各种改进和强化表述，请参见第4节；关于少数特殊例子的证明，请参见第5节。

**注 1.2**。 Edward Witten提出了这一猜想，而我们与Gunningham和Safronov的工作证明了，在上述假设下，编织模实际上是有限维的，因此我们的猜想可以改述为自然数之间的等式：

$$\dim \mathrm{Sk}_{G,q}(M) = \dim \mathrm{Sk}_{{}^L G,{}^L q}(M).$$

此外，我们的证明方法表明，只要 $q$取为超越数，维数就与其无关（预计只需要求 $q$ 不是单位根即可）。因此，猜想中对参数 $q$ 和 ${}^L q$的精确规定在某种程度上是多余的；之所以保留这些规定，只是为了让读者感受到它与德拉姆量子几何朗兰兹猜想之间的对应关系。

特别是，要确认如上所述的猜想，只需计算 $G$ 和 ${}^L G$对应的缠结模的一般维数。事实上，所有我们能够确认该

猜想的情形，都是通过分别计算这两个维数得出的。由于 $q$ 和 ${}^L q$之间存在超越关系，向量空间之间的典范同构（例如 intertwining 两侧微分同胚群作用的同构）很可能在参数 $q$ 上呈解析依赖，而非代数依赖。

下表总结了迄今为止重新梳理的诸多朗兰兹对偶实例。请注意量子德拉姆与量子 skein 模表述之间共有的对称性。

| 简称 | 研究对象 | 自守/A 侧 | | 伽罗瓦/B 侧 |
|---|---|---|---|---|
| 算术 | 数域 F | $\{V \subseteq L^2(G(\mathbb{A}_F)/G(\mathbb{F}))\}$ | $\leftrightarrow$ | $\{\rho : \Gamma(\overline{F}/F) \to {}^L G\}$ |
| 经典 | | | | |
| 德拉姆 | 复曲线 $X$ | $\mathcal{D}(\mathrm{Bun}_G(X))$ | $\leftrightarrow$ | $\mathrm{Coh}(\mathrm{Loc}^{{}^L G}(X))$ |
| 贝蒂 | 实曲面 $\Sigma$ | $\mathrm{Shv}(\mathrm{Bun}_G(\Sigma))$ | $\leftrightarrow$ | $\mathrm{Coh}(\mathrm{Ch}^{{}^L G}(\Sigma))$ |
| 量子 | | | | |
| 德拉姆 | 复曲线 $X$ | $\mathcal{D}_\Psi(\mathrm{Bun}_G(X))$ | $\leftrightarrow$ | $\mathcal{D}_{{}^L\Psi}(\mathrm{Bun}^{{}^L G}(X))$ |
| 贝蒂 | 实曲面 $\Sigma$ | $\mathrm{Shv}_q(\mathrm{Bun}_G(\Sigma))$ | $\leftrightarrow$ | $\mathrm{Coh}_q(\mathrm{Ch}_G(\Sigma))$ |
| 缚 skein | 三维流形 | $\mathrm{Sk}_{G,q}(M)$ | $\cong$ | $\mathrm{Sk}^{{}^L G,\ {}^L q}(M)$ |

这一猜想最基本的动机是：三维流形 $M$ 的 ${}^L G$-缚 skein 模在 $q = 1$ 处特化为 $M$ 的 ${}^L G$-特征簇上的函数代数，而曲面 $\Sigma$ 的缠结范畴在 $q = 1$ 处特化为曲面 $\Sigma$ 的${}^L G$-特征叠。事实上，一个以 ${}^L G$ 为标记的带状图，可以直接定义特征簇上的全纯函数：本质上，就是将一个 ${}^L G$-局部系统 $E$ 映射为沿图的支撑分布的相关丛的迹。这些函数及其变形称为威尔逊环可观测量。因此，人们自然会希望——尽管这绝非必然——缠结模给出的单参数量子变形族确实与 Kapustin–Witten 理论中的单参数扭曲族相一致。缠结模所具有的丰富扩展拓扑场论结构——它们被认为等同于量子特征标理论拓扑场论在三维流形上的取值，因而能够描述 Kapustin–Witten 态空间——以及它们作为 $q$-变形 Wilson 环算子的自然诠释，都支持这一希望。

我们猜想的另一个动机来源，是 Mazur、Kapranov 和 Reznikov 提出的深刻类比：它将三维流形拓扑与代数数论联系起来；此外，算术量子场论的后续发展也为此提供了动机。在这部建立在韦伊罗塞塔石碑之上的“MKR 词典”中，人们把数域（更准确地说，是它的 $\mathbb{O}$ 整数环）想象成一个闭三维流形；把 $\mathbb{O}$ 中的理想视作链环，把素理想视作纽结。$\mathbb{O}$ 中的单位元被视作嵌入曲面，域扩张被视作分歧覆盖，同调群被视作理想类群，等等。以这部词典为基础，算术场论旨在计算数域的算术不变量，仿佛它们是量子场论的配分函数。Kim 最先探索了这一思想，他提出了三维 Chern-Simons 拓扑量子场论的一个算术类比，作为构造 $L$-函数的一种机制；近来，Ben-Zvi、Sakellaridis 和 Venkatesh 也采用了这一思路，并提议运用 Kapustin 和 Witten 的四维拓扑量子场论中的思想，研究算术朗兰兹对偶的各个方面。

鉴于 MKR 词典，回顾来看，我们的猜想竟然比几何 Langlands 猜想晚得多，这或许颇为引人注目。正如

编织理论为每个三维流形赋予一个向量空间，算术朗兰兹对偶也为每个数域赋予向量空间——即对偶两侧的自守形式空间，以及算术特征簇上的代数函数空间。几何朗兰兹对偶在两个关键方面有所不同：它们涉及复曲线（↔ 函数域），而非三维流形（↔ 数域）；并且它们以范畴值不变量取代向量空间值不变量。当然，这使得缠结模的朗兰兹对偶比几何朗兰兹对偶更容易表述，也更容易证伪，因为它归结为关于整数维数相等的陈述，而非关于 $\infty$-范畴等价的陈述。从更偏物理的视角来看，值得注意的是，Kapustin 和 Witten 使用二维流形上的四维量子场论阐述了量子几何朗兰兹对偶，但基本上搁置了其间这样一个问题：如何在数学上描述附着于三维流形的希尔伯特空间。

这种时代错置感，部分可以通过提出以下两个关于算术和物理背景下朗兰兹对偶的自然问题（据我们所知，尚未得到解答）来解释。回答这两个问题，将能进一步填补我们的猜想与我上文概述的朗兰兹对偶经典体系之间的空白。先看算术方面：

**问题 1.3.** 量子算术朗-兰兹对偶能有何种意义（如果有的话）？

具体而言，特征簇上的辛结构及其变形量子化在数论中起什么作用？变形参数 $q$ 有何算术意义？再看物理方面：

**问题 1.4.** 由 Kapustin–Witten $A$ 侧扭转在 $\Psi = 0$ 处赋予一个闭合定向三维流形的希尔伯特空间是什么？

这个问题的答案应当位于 ${}^{L}G$-特征簇的朗兰兹对偶一侧，其中 $M$，并且应带有 $A$ 侧的风格，涉及辛几何／接触几何、Fukaya 范畴、Floer 理论等。我们可以通过将对一般 $\Psi$ （作为缠结模）的理解退化，或从曲面的情形向更高维度外推，来探讨可能的答案。在曲面的情形中，$A$ 侧在 $\Psi = 0$ 处的扭转是 $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上的 $\mathcal{D}$-模范畴。

在考虑三维流形的 $A$ 侧于 $\Psi = 0$ 处的扭转时，会遇到诸多复杂之处，其中之一是：尽管 $S$-对偶性预言理论 $\mathcal{Z}_{G,\ \Psi} \simeq \mathcal{Z}_{{}^{L}G,\ {}^{L}\Psi}$ 等价，但它仍会互换 狄利克雷边界条件与 Nahm 极点边界条件。从某种意义上说，缠结模按定义就是理论的 Wilson 环算子作用于狄利克雷边界条件所得的轨道；对于非零无理数 $\Psi$ （等价地， $q$ 不是单位根），我们预期这些轨道会重合。然而，我们不认为这种重合会发生在 $\Psi = 0,\ \infty$，因此必须用数学术语表述三维流形上的 Nahm 极点边界条件。

**参考文献**。 本引言中回顾的许多猜想，最初都是通过私人通信传播的，从未发表，或直到很久以后才以民间传闻的形式发表。因此，我在整个引言中都避免使用文内引用，即便是对于那些很快就以印刷形式发表的内容也是如此，例如 Kapustin 和 Witten 关于电磁对偶的论文 [KW07] ，以及 Ben-Zvi 和

Nadler 介绍 Betti 几何朗兰兹猜想的论文 [BN18]。若要更全面地回顾朗兰兹对偶在算术、几何和物理方面的表现，并了解算术拓扑入门知识，我推荐：

- 朗兹纲领的起源 [MS21], 伦敦数学会讲座系列，介绍 Robert Langlands 的生平、他的数学研究，以及他写给 Andre Weil 的信，
- 电磁对偶与朗兹纲领之间 [BV], 一套尚未发表的讲义，探讨几何朗兹、算术朗兹与电磁对偶之间的关系。
- 纽结与素数 [Mor11], 一本施普林格教材，介绍算术拓扑的基础。

**致谢**。 感谢我的合作者 David Ben-Zvi、Sam Gunningham、Pavel Safronov、Monica Vazirani 和 Haiping Yang，与我进行了本文综述的诸多讨论，并鼓励我在此论坛分享我们的猜想和进行中的工作。我也感谢 Dan Freed、Du Pei 和 Edward Witten，就电磁对偶进行了几次富有启发性的讨论和通信；感谢 Minhyong Kim，就算术量子场论展开了启发性的讨论。最后，感谢 String Math 2022 的组织者举办了一场精彩的会议，并给予我撰写这些讲义的机会。

## 2. Quantum groups and their skein theory

缠结模和缠结范畴的构造取决于对 cp-刚性带状编织张量范畴[1] $\mathcal{A}$的指定。这意味着 $\mathcal{A}$ 是一个局部可表示的阿贝尔范畴，具有足够多的紧投射对象，并配备双线性幺半群函子 $\otimes: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$、编织自然同构$\sigma$和带状元 $\nu$，且其中所有紧投射对象都是可对偶的。

其基本思路是，利用 Reshetikhin 和 Turaev 的图形演算，以图示形式编码 cp-刚性带状编织张量范畴的全部代数结构。这些图表及其所有关系都发生在一个带装饰的圆柱球 $D^2 \times I$中；随后，我们可以让图表遍布整个定向三维流形，只在局部某个球内施加由图形演算导出的关系。由此得到的向量空间称为缠结模。此外，我们还可以允许这些图表终止于三维流形的边界曲面分支上，由此引出缠结范畴的概念，以及缠结范畴之间的诱导函子。

### 2.1. 带状编织张量范畴的典型例子。

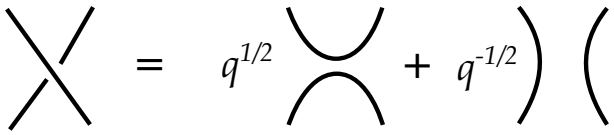
我们感兴趣的主要例子是，在参数 $q$ 取超越数值时，与代数群 $G$ 相关联的范畴 $\mathrm{Rep}_q(G)$[2] 。这意味着我们考虑与 $G$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的局部有限维表示范畴，并在其中考虑一个张量子范畴，该子范畴由所有权都属于 $G$ 的权格的 $U_q(\mathfrak{g})$-表示组成。我们

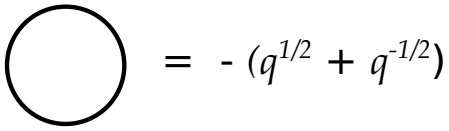
[1]对于专家而言：等价地，我们也可以改为考虑紧投射对象的子范畴；该子范畴将是一个所有对象都可对偶化的（不一定含单位元的！）带状辫状幺半张量范畴。我们注意到，除非 $\mathcal{A}$ 是半单的，否则紧投射对象并不构成阿贝尔范畴，而是构成一个加性幂等完备范畴。[2]更确切地说，带状结构的指定取决于选择 $q$ 的一个 $d$ 次根，其中 $d$ 是 Cartan 矩阵的行列式；不过我们将在记号中略去这一点。

回顾一下， $G$ 的权格介于伴随群与 $\mathfrak{g}$ 的单连通群的权格之间，因此可通过指定 $Z(G)$ 来确定；它是 $G$ 的权格对根格取商所得的商群。等价地，也可通过 $\pi_1(G)$ 来确定；它是 $G$ 的余权格对余根格取商所得的商群。

**例 2.1.** 我们将在这些笔记中详细讨论 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$ 和 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$ 这两个例子。我们回顾一下，$\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$ 是一个半单范畴，其简单对象为 V(0)、V(1)、V(2).....，其中每个 $V(k)$ 的维数为 $k+1$，最高权为 $k$。范畴 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$ 是 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$ 的全子范畴，由 V(0)、V(2)、V(4).....这些不可约表示的直和构成。

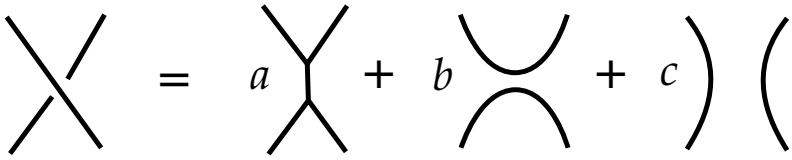
我们来回顾这两个范畴的一些其他标准代数事实。首先，对于 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$，我们回顾一下，二维定义表示 V(1) 是一个张量生成元：每个表示 $V(k)$ 都是第 k 个张量幂 $V(1)^{\otimes k}$ 的直和项。其次，Hom空间 $\mathrm{Hom}(V(1)^{\otimes k}, V(1)^{\otimes \ell})$ 由下方右边首项所示的求值映射和余求值映射自由生成。特别地，我们可以用求值映射、余求值映射和恒等映射来表示编织：




我们在生成元中省略了源和目标 V(1)。需要指出的是，求值和余求值通常应涉及 $V(1)^*$，但我们已将 $V(1) \cong V(1)^*$ 认同。有两个自然的候选同构，而惯例上更倾向于采用斜对称配对，因此圆的取值公式中出现负号，也就是 V(1) 的量子维数。

**例 2.2.** 对于 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$，情况类似，但稍微复杂一些。同样很容易证明，$\mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$ 由生成元 V(2) 张量生成。回顾同构 $V(2) \otimes V(2) \cong V(0) \oplus V(2) \oplus V(4)$，现在我们有一个三维空间 $\mathrm{End}(V(2) \otimes V(2))$，由下方右边的三个图表张成。特别地，我们可以表示编织：




对于适当的常数 $a,\ b,\ c \in \mathbf{C}(q)$，可以通过在给定的基中直接计算确定。同样，我们省略了生成元上的标签 V(2)。

**例 2.3.** 对于群族 $G = \mathrm{SL}_N$，我们同样有 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_N)$ 由与 $\mathrm{SL}_N$ 的第一基本权重对应的定义表示 $V(\omega_1)$ 张成张量范畴。我们可以给出类似的图示

描述 V($\omega_1$) 张量幂的 Hom空间，可使用 MOY演算[MOY98] ，也可使用 [Kup96; CKM14]，的蜘蛛图/网图描述；详情请参阅相关文献。

2.2. **图形演算、缠结模与缠结范畴**。 我们将要用到的关于带状编织张量范畴的关键事实是，它们都允许进行图形演算。上文已经看过一些图形演算的例子；现在让我们更精确地回顾一下它的含义。

**定义 2.4** （概要。见图1以及 [Coo19，第4节。2]）。 设 $\Sigma$为一个定向曲面。

- 一个 $\mathcal{A}$ $\Sigma$ 的**标记**是由数据 $X$构成的：在 $\mathcal{A}$中，对有限个互不相交的圆盘 $x_1$、.....、$x_n$: $\mathbb{D}^2 \to \Sigma$ 进行定向嵌入，并分别以 $V_1$、.....、$V_n$ 中的对象标记。 我们将位于每个圆盘 $x_i$内的 $x$ 轴记作 $\vec{x_i}$ ，并记 $X = \cup_i \vec{x_i}$。
- 带状图由连接“券”的“带状边”构成。券只不过是 $\Sigma \times I$中的一个零单纯形，并配有一个法向量。带状边是嵌入于 $\Sigma \times I$中的一条 1-单形，其端点分别位于集合 $X$中或某个券处，并沿其配有一个法向量。此外，我们要求每个嵌入单形的切向量在终止于 $X \times \{0,1\}$ 时正好竖直向上；若终止于某个券，则切向量须与该券的法向量同向。最后，我们要求对每个券处的入射和出射带状边赋予一个循环次序。
- $\mathcal{A}$-**着色**的带状图是指：为每条带状边标记一个 $\mathcal{A}$ 中的对象，并为每个券标记一个态射，该态射从入边的（有序）张量积映射到出边的（有序）张量积。
- 若一个 $\mathcal{A}$-着色带状图 $\Gamma$ **与一个** $\mathcal{A}$-**标记**相容，则称其满足 $\partial\Gamma = \vec{X}$；我们将 $\mathcal{A}$-着色的、位于 $M$ 上且与 $X$ 相容的带状图所张成的向量空间记为 $\mathrm{Rib}_{\mathcal{A}}(M,\ X)$。

**注 2.5**。关于带状张量范畴的图形演算，文献中已有许多不同但实质上等价的表述。我们在此给出的表述改编自我们在 [GJS19]，中的表述；不过，我们以一种拓扑等价的表述取代了惯用的“带状边”和“券”表述，这种表述与本文后文出现的单纯同调更为兼容。

现在来描述编织模的定义关系。将三维球写成底空间为二维圆盘 $\mathbb{D}^2$ 的圆柱体 $\mathbb{D}^2 \times I$，并固定一个标记 $X \cup Y$，其中圆盘 $X = (x_1,\ V_1)$ ....., $(x_n,\ V_n)$ 嵌入于 $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$ 中，而 $Y = \{(y_1,\ W_1)$ ..... $(y_m,\ W_m)\} \times \{1\}$。那么我们便有一个良定义的满射，

$$\mathrm{Rib}_{\mathcal{A}}(\mathbb{D}^2 \times I, X \cup Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W_1 \otimes \cdots \otimes W_m),$$

称为 Reshetikhin–Turaev 求值映射，参见 [Tur16]。本质上，该映射将圆柱体中的带状图及其一般投影作为输入，将每个交叉解释为编织，将每个券解释为各个张量积之间的态射，并计算相应的复合：这一过程良定义且与交叉无关，或许是带状范畴最基本的代数性质。我们将称该映射的核为 $X$ 与$Y$之间的 **缚 skein 关系** 。

**定义 2.6.** 设 $M$ 是一个定向三维流形，其边界 $\partial M \cong \mathrm{rev}\ \Sigma_{in} \coprod \Sigma_{out}$带有分解，并且 $\Sigma_{in}$ 上有 $\mathcal{A}$-标记 $X_{in}$， $\Sigma_{out}$上有 $X_{out}$-标记。

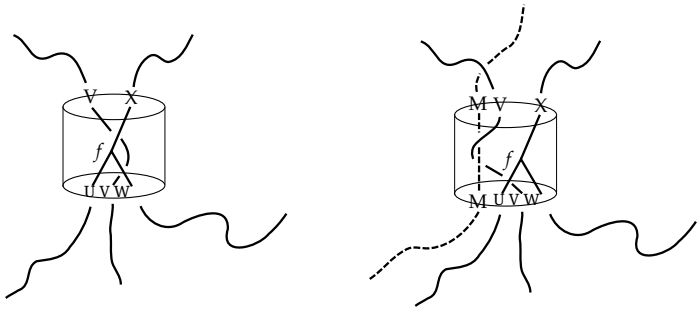



FIGURE 1. 左图：缠结模由 $\mathcal{A}$ 标记的带肋图表张成；缠结关系指出，圆柱体内的图表可以替换为任何其他图表，只要其 RT求值给出 Hom($U \otimes V \otimes W$， $V \otimes X$) 中的同一元素。右图：沿虚线引入一个缺陷，并沿其插入一个编织模范畴（见第 3 节）。现在，缠结模包含缺陷之外来自编织张量范畴的标记和关系，以及沿缺陷来自其编织模范畴的标记和关系。

- **相对 $\mathcal{A}$-缠结模**$\mathrm{Sk}_{\mathcal{A}}(M,\ X_{in},\ X_{out})$ 是由 $M$ 中与 $X_{in} \cup X_{out}$ 相容的 $\mathcal{A}$-着色带状图的同痕类张成的向量空间，再对同痕关系以及由任一定向球 $\mathbb{D}^2 \times I \subset M^3$ 所确定的 $X_{in}$ 与 $X_{out}$ 之间的缠结关系取商。
- 当 $\partial M = \emptyset$ （因此 $\partial\Gamma = \emptyset$）时，我们称之为 **$\mathcal{A}$-缠结模**，并将其记为 $\mathrm{Sk}_{\mathcal{A}}(M)$。

**定义 2.7**。 设 $\Sigma$ 为一个定向曲面。其 **缠结范畴** $\mathrm{SkCat}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$具有：

- 其对象为 $\Sigma$的 $\mathcal{A}$-标记。
- 从 $X$ 到 $Y$ 的 1-态射为 $(\Sigma \times[0,1],\ X,\ Y)$ 的相对 $\mathcal{A}$-缠结模。

1-态射的复合通过以显然的方式拼接相对缠结来定义。

**例 2.8**。 在 $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$ 和 $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$ 的情形下，涉及带标记的带状图的缠结模的相当复杂的定义大大简化了，这得益于例 2.1 中强调的简化。在这两种情形下，都可以省去带状图弦上的标记和取向：对于标记，分别始终取 V(1) 或 V(2) 作为标记（因而省略该标记）；此外，分别利用 V(1) 和 V(2) 的自对偶性来消除取向数据。

对于券，在 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{SL}_2)$ 的情形下，舒尔-外尔对偶意味着所有态射都可以用编织表示，因此完全不需要任何 coupon。对于 $\mathrm{Rep}_q(\mathrm{PGL}_2)$，我们只需要例 (2.2) 中的三价优惠券。

2.3. **与变形量子化的关系**。 使用几何表示论研究缠结模的起点，来自以下关于 $q = 1$ 处缠结模和缠结范畴的描述。

[3]在此不失一般性地假设 $\mathbb{D}^2 \times \{0\} \subset \Sigma \times \{0\}$ 和 $\mathbb{D}^2 \times \{1\} \subset \Sigma \times \{1\}$。

**定义 2.9**。 拓扑空间 $X$ 的 $G$-特征叠 $\mathrm{Ch}_{\underline{G}}(X)$ 是平坦 $G$-丛在 $X$ 上的模叠；等价地，它是将 $G$-**表示簇** $\mathrm{Hom}(\pi_1(X)\ G)$ 按 $G$ 的共轭作用取商后得到的商叠。 $G$-**特征簇** $\mathrm{Ch}_G(X)$ 是 GIT 商，即表示簇上闭 $G$-轨道的集合。

**定理 2.10**。 缠结范畴 $\mathrm{SkCat}_{G,\ q=1}(\Sigma)$ 的幂等完备化（分别为自由余完备化）自然等价于 $G$-特征叠 $\mathrm{Ch}_G(\Sigma)$ 上的向量丛（分别为拟凝聚层）范畴。此外，向缠结范畴的变形关于参数 $q$ 是平坦的。

这里，关于参数 $q$ 的平坦性意味着，在 $\mathrm{SkCat}_G(\Sigma)$ 中定义的 Hom空间实际上是自由的 $\mathbf{C}[q,q^{-1}]$-模；非正式地说，这意味着支撑缠结模的向量空间在 $q$ 中是“常数”的，只有代数结构随 $q$ 变化：在这种情况下，我们在 $q=1$ 极限上得到一个泊松括号，并称缠结代数/缠结范畴是特征簇/特征叠的变形量子化。所得的泊松括号量子化了 Atiyah–Bott/Goldman/Fock-Rosly 泊松括号（这是一个定义在特征簇上的单一泊松括号，由每组作者分别以三种不同方式独立构造）。对于任意三维流形，$\mathrm{Sk}_G(M)$ 的 $q=1$ 极限也有类似的解释。以下结论对于 $G=\mathrm{SL}_2$ 在 [Bul97; PS00], 中得到证明，但对任意群 $G$ 都成立。

**定理 2.11.** 定向三维流形 $M$ 的缠结模 $\mathrm{Sk}_{G,q=1}(M)$ 自然同构于代数 $\mathcal{O}(\mathrm{Ch}_G(M))$，它是 $M$ 的 $G$- 特征簇上的代数函数代数。

然而，当量子参数 $q$ 偏离 1 时，从初等角度看，缠结模的表现与缠结范畴大不相同。曲面的缠结范畴（更准确地说，是作为其 Hom空间出现的相对缠结代数）平坦地依赖于量子参数 $q$；而闭三维流形的缠结模则恰恰相反。我们已经指出，当 $q=1$ 时，闭三维流形的缠结模可以认作 $M$ 的 $G$-特征簇上的代数函数代数——这通常是一个无限维向量空间。相比之下，我们

**定理 2.12** ([GJS19]). 设 $q\in\mathbb{C}^\times$ 为一般值，且 $M$ 是一个闭的定向三维流形。那么，$M$ 的 $G$-缠结模是有限维的。

这一论断最初是 Edward Witten 于 2014年提出的一个猜想，对编织理论界来说在很大程度上出乎意料：鉴于已有许多结果表明，曲面的辫图代数和缠结范畴能够平坦变形，人们普遍预期三维流形的编织模也应如此。事后看来，借助现代变形量子化方法——具体来说，就是移位辛结构的框架 [Pan+13] ——定理所断言的有限性一点也不令人意外。

由缠结范畴变形的曲面特征叠是辛的（如今称为“0-移位辛”）；而三维流形的特征叠则具有截然不同的结构：如今称为 $(-1)$-移位辛。理解 $(-1)$-移位辛叠的一种方式，是借助 Darboux 坐标的移位类比：Darboux 坐标赋予 0-移位辛叠一个局部辛同胚，使其映到唯一的辛

向量空间，而 $(-1)$-移位叠的 Darboux 坐标则将任意一点的邻域识别为辛向量空间中两个拉格朗日子空间的交集。

在这一背景下，缠结模的有限维性可以从以下事实得到理解：0-移位和（$-1$）-移位辛结构的变形量子化概念在本质上截然不同。对于0-移位结构，熟悉的概念涉及一个非交换代数，并且量子化的底层向量空间满足平坦性判据；而（$-1$）-移位辛结构的量子化则在经典簇上定义了一个周变层，其整体截面描述了这种变形。构造这一周变层一般至少有两种途径：一种是遵循Kashiwara和Schapira [KS12], 的变形量子化及其张量积的代数构造；另一种是遵循 [Ben+15]的几何构造。

在代数构造中，我们假设（$-1$）-移位结构确实源于两个拉格朗日子簇的交集 $L_1, L_2$，并且辛簇 $X$ 可以变形量子化为某个非交换代数 $A$（或代数层），同时这两个拉格朗日子簇分别量子化为 $M_1$、 $M_2$ 上的全纯（分别为左、右）模 $A$。在这种情况下，Kashiwara和Schapira证明，非交换交——即相对张量积 $M_1 \otimes_A M_2$ ——在经典交集$L_1 \cap L_2$上定义了一个周变层。对缠结模背景下该周变层截面的细致分析，得出了 [GJS19]的有限性结果。

Abouzaid和Manolescu [AM17] 关于复化瞬子Floer同调的一种相关几何构造，同样取决于三维流形的特征叠的构造；该特征叠可视为某个亏格为 $g$的曲面的特征叠中两个标准拉格朗日子流形的交。Brav–Bussi–Ben-Bassat–Joyce对这种($-1$)-移位辛叠的量子化受一个消失循环周变层控制；在良好的情形下，它确实具有有限维的整体截面空间。

**注 2.13.** Gunningham和Safronov正在进行的工作在非常一般的情况下给出了Kashiwara–Schapira层与Brav–Bussi–Ben-Bassat–Joyce层的一个等同，其中包括我们这里的缠结模情形，从而统一了这两种方法。

我们或许会这样理解这两种构造所得到的有限性：一般而言，两个拉格朗日子流形应当横截相交，但实际情况当然未必如此。然而，在量子化之后，即使经典拉格朗日子流形未能横截相交——从而产生正维数的特征簇，以及无限维的函数代数——它们在量子层面且参数取一般值时，仍会呈现一般情形下的行为。

Kashiwara–Schapira 量子化和阿布扎伊德–马内奥莱斯库量子化按构造不仅是向量空间，也是链复形；迄今我们只在它们的零次上同调上构造了相关对象。这表明缠结模也具有自然的导出增强，其各次上同调均为有限维，并满足类似于 1.1 的朗兰兹对偶。本文不讨论这一导出增强。

2.4. **编织拓扑场论**。 给定一个带有定向边界 $M$ 的三维流形 $\partial M = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$，我们得到一个函子，

$$\mathrm{Sk}_{\mathcal{A}}(M) : \mathrm{SkCat}(\Sigma_-)^{op} \otimes \mathrm{SkCat}(\Sigma_+) \to \mathrm{Vect},$$

称为 $M$的编织双模，它将一对编织对象映射为 $M$ 中与边界处给定标记相容的相对编织。

**定理 2.14** (Walker，未发表)。 将曲面和三维流形分别映射到其缠结范畴和缠结（双）模的赋值，定义了一个从曲面与三维协边范畴$\mathrm{Cob}^3$ 到范畴与范畴双模范畴的函子。

在 [Coo19] 中已证明，缠结范畴满足一个称为切除的泛性质，这意味着缠结范畴与 Ayala–Francis [AF15], 的范畴分解同调一致，正如该背景下在[BBJ18a；BBJ18b]中所研究的那样。缠结模的切除性质应被视为表达了将编织理论一直扩展到点的存在性： (3，2)-TFT 公理允许我们沿曲面切割三维流形，而切除则允许我们沿嵌入的一维流形切开曲面，随后再沿零维流形切开这些一维流形。

然而，尽管众所周知，缠结模在 Walker 之后定义了一个 (3，2)-TFT，并且缠结范畴的切除通过因子化同调蕴含了一个 (2，1，0)-TFT，但据我所知，在完全扩展拓扑场论的框架下，尚未对所期望的 (3，2，1，0)-TFT 作出严格构造。在 [BJS21], 中，我们从同样的输入——一个 cp-刚性的编织张量范畴——构造了一个 (3，2，1，0)-TFT；然而，正如预期，仍有待确认该理论在三维流形上的取值就是缠结模。尽管如此，在很大程度上，我们将在缠结理论表述与该理论的完全扩展表述之间转换使用相关概念，见第 3 节。

## 3. Gradings and twists of skein modules

容易观察到，带状编织张量范畴 $\mathrm{Rep}_q(G)$ 自然地按群 $G$ 的中心 $Z(G)$ 的庞特里亚金对偶 $Z(G)^\vee$分级（作为阿贝尔幺半范畴）： $G$ 的中心元素定义了量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的类群中心元素，并且根据舒尔引理，任意简单表示都唯一确定了中心的一个特征。类群性质意味着，这些表示与群结构相容地进行张量积。

由于缠结关系都局部发生在一个球内，$\mathrm{Rep}_q(G)$ 上的中心分次自然扩展为 $H_1(M, Z(G)^\vee)$ 对 $G$-缠结模的分次：给定一个带有 $G$ 标记的带状图，我们将每个 1-单形上的标记替换为其关于 $Z(G)^\vee$ 的分次，从而得到一个单纯 1-循环。注意，通过这种方式总能得到一个循环，因为在券处，只有当各度数之和为零时，态射才可能非零。如果流形有边界，且缠结是相对于边界定义的，那么通过类似的推理，该 1-循环将给出一个相对的 $Z(G)^\vee$ 1-循环。这一赋值给出了 $G$-缠结模关于 $H_1(M, Z(G)^\vee)$ 的分次，而这一分次将在下文中发挥重要作用。

我们将看到，缠结模还具有另一种结构：可以沿着余维二缺陷插入编织模范畴，从而对其进行扭转。分次与扭曲构造在精确意义下是对偶的，这一点我们很快就会看到。现在先概述缠结模的扭曲构造：完整细节将在即将出版的 [GJS23], 中给出，因此我们将从略。

**定义3.1**。 对于编织张量范畴 $\mathcal{A}$ ，编织模范畴 $\mathcal{M}$ 是一个关于 $\mathcal{A}$的模范畴 $\mathcal{M}$ ，并带有一个“单值”自然自同构，

$$\alpha : (X, m) \mapsto (\alpha_{X,m} : X \otimes m \to X \otimes m),$$

$\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{M}$上的作用函子

$$\alpha_{X\otimes Y,m} = (\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha_{X,Y\otimes M} \circ (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,M}).$$

**注 3.2**。 为说明这个定义，我们可以想象， $\mathcal{A}$ 上的编织张量结构由小圆盘的 $E_2$-运算子编码（见图2），而 $\mathcal{M}$ 位于平面上的一个点（一个余维二缺陷）处。模作用来自将 $\mathcal{A}$-圆盘移至 $\mathcal{M}$，而自然同构$\alpha$ 确实是将这些圆盘逆时针绕 $\mathcal{M}$ 滑动一周、然后使其碰撞所得到的单值。

**定义 3.3**。 $E_2$-幺半双范畴 BrMod($\mathcal{A}$)的对象是编织模范畴，其1-态射是编织模函子（即与 $\alpha$满足显然兼容条件的模函子（$F$， $J$）），其2-态射是编织模自然变换。 $E_2$-幺半结构将对象对 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$ 映至相对张量积 $\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2$，由此得到的全纯自然自同构由全纯的复合给出。

我们称编织模范畴 $\mathcal{M}$ 是可对偶的，如果它作为 BrMod($\mathcal{A}$) 中的对象是完全可对偶的。

给定一个完全可对偶的编织模范畴，以及三维流形$M$中的一个纽结 $K$ ，我们可以将缠结模 $\mathrm{Sk}_{\mathcal{M}}(M, K)$ 定义为所有 ($\mathcal{A}$， $\mathcal{M}$)-带标记的带状图模掉 ($\mathcal{A}$， $\mathcal{M}$)-缠结关系后得到的形式张成空间。这里，($\mathcal{A}$， $\mathcal{M}$)-带标记的带状图是 $M$ 中的一个带状图，它带有由 $\mathcal{A}$ 在开集 $M\backslash K$ 上给出的标记，以及沿着 $K$ 由 $\mathcal{M}$ 给出的标记。($\mathcal{A}$， $\mathcal{M}$)-缠结关系通过以下方式给出：在包含于 $M\backslash K$ 的任意开圆柱体内施加 $\mathcal{A}$ 的 Reshetikhin– Turaev 求值关系；并在与 $K$ 沿着$\{0\} \times I \subset D^2 \times I$ 相交的任意开圆柱体内施加 $\mathcal{M}$ 的 Reshetikhin–Turaev 求值关系。

3.1. **阿贝尔群的高形式对称作用**。 对于本文的讨论，最重要的可对偶模范畴来源是可逆模范畴，也就是求值与余求值都是编织模范畴等价、从而将其对偶编织模范畴确定为逆元的那些模范畴。这些模范畴在张量积运算下构成一个阿贝尔群，我们可以利用这一额外结构来定义沿纽结以及沿 $M$ 中单纯形循环的扭转。为说明这一构造的动机，我们现在回顾量子场论中高形式对称性的框架。

回想一下，阿贝尔群 $A$ 在一个 ($d + 1$) 维量子场论中的普通作用，会在附属于任意$d$ 维流形 $M$ –的希尔伯特空间 $Z(M)$ 上诱导出 $H_d(M, A)$ 的作用；特别地，如果 $M$ 是闭且连通的，我们便得到群 $A \cong H_d(M, A)$ 本身在向量空间 $Z(M)$ 上的作用。

纯粹用局部／场论术语来说， $A$-作用之所以出现，是因为我们重新定义了某个 $d$-循环邻域内的场方程，并要求场在穿过该循环时按照 $A$-作用进行变换：特别是，这会在场中引入一个奇点，因此扭曲意义下的场并非通常意义下的场。我们所强调的 $H_d(M, A)$ 在 $Z(M)$ 上的作用，是通过将一个 $d$-循环置于平凡映射柱 $M \times I$ 的中点而产生的，从而改变了关联函数的概念。

在关于扩展缺陷的文献中，这种作用称为 0-形式对称性，其中的“0”表示它尚未成为扩展对称性。在此背景下，我们也可以考虑群 $A$ 在一个 $(d+1)$ 维量子场论上的 $k$-形式对称性作用的结构：用数学／函子术语来说，这意味着我们考虑 $(k+1)$-群 $B^kA$ 在该理论上的作用（这里，$B^k$ 表示 $k$ 重去环化，它是一个具有唯一对象和唯一 $n=$ 态射（适用于 $n<k$）的 $k+1$-群胚，并以 $A$ 作为其 $k+1$-态射群）。由此类扩展作用，我们可以得到（除此之外）$H_{d-k}(M,\ A)$ 在附属于每个 $d$-流形 $M$ 的希尔伯特空间 $Z(M)$ 上的作用。同样，用物理术语来说，群 $A$ 的 $k$-形式对称性作用所提供的数据，允许我们沿着 $M$ 的更高余维子流形修改场方程。

3.2. **扭转与分次相结合：皮卡群胚**。上文出现的同调群 $H_{d-k}(M,A)$ 是 $M$ 的整体不变量——也就是说，它们取决于 $M$ 的整体拓扑，并允许我们沿某个整体循环对希尔伯特空间进行整体扭转。在实际应用中，通过引入由元素 $\gamma\in H_{d-k-1}(M,A)$ 标记的希尔伯特空间 $Z(M)$ 的扭曲 $Z(M)[\gamma]$，以及同调扭曲之间的同构（从而细化 $H_{d-k}$ 的作用），为 $k$-形式对称作用提供一种更局部的增强，将非常有用。粗略来说，引入扭曲使我们能够考虑相对于边界的 $M^{d+1}$ 中的循环，从而将 $H_{d-k}(M,A)$ 中的 $d-k$-循环“切分”为更基本的部分。

为简化记号，以下固定 $d=3$ 和 $k=1$；不过，将一般概念推广到任意的 $d$ 和 $k$ 也很直接，还可以引入高阶群胚，以便处理更高余维中的扭曲。

回顾一下，根据定义，取值于 $A$、定义在 $M$ 上的单纯 1-循环 $\gamma$ 是嵌入 $M$ 中的有向图，其边标记为 $A$ 的元素，并且每个顶点处所有入边的标记之和等于所有出边的标记之和。

**定义 3.4.** 固定一个定向三维流形 $M$。皮卡群胚 $H_{1,2}(M,A)$ 的对象为单纯 1-循环 $C_1(M,A)$ 构成的阿贝尔群，对称幺半积由加法给出。从 $\gamma$ 到 $\gamma'$ 的态射是满足 $d\eta=\gamma'-\gamma$ 的 2-链 $\eta$ 的同调类。

根据定义可立即得出，$H_{1,2}(M)$ 的对象同构类群与 $H_1(M,A)$ 自然同构，并且任意对象的自同构群与 $H_2(M,A)\cong H_1(M,A^\vee)$ 自然同构。因此，函子 $H_{1,2}(M,A)\to$ Vect 的数据包括：对每个 $[\gamma]\in H_1(M,A)$，都有一个向量空间 $F([\gamma])$，且每个向量空间都带有阿贝尔群 $H_1(M,A^\vee)$ 的作用。

3.3. **编织张量范畴上的一形式作用**。回顾 [BJS21]，编织张量范畴构成一个 4-范畴 BrTens。这个 4-范畴的构成如下：

- 对象是 cp-刚性编织张量范畴，
- 1-态射从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-中心代数，即配备了编织张量函子 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^{op}\to\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的 cp-刚性张量范畴 $\mathcal{C}$，
- 2-态射从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 是与中心作用相容的 $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$ 双模范畴，
- 3-态射是双模函子，并且
- 4-态射是自然变换。

特别地，给定一个编织张量范畴 $\mathcal{A}$，其自同态三范畴由 $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-中心代数组成。单位自同态是 $\mathcal{A}$ 本身及其正则作用。接下来，我们可以考虑如此看待的 $\mathcal{A}$ 的自同态二范畴，它恰好就是我们之前遇到的编织模范畴的二范畴 BrMod($\mathcal{A}$)。图2展示了它与定义3.1中概念的比较

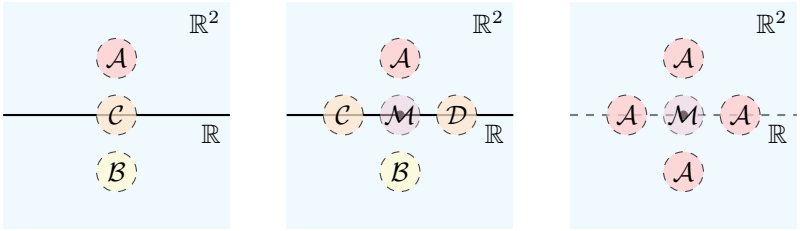



FIGURE 2. (A) 描绘了一对编织张量范畴 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$，它们由圆盘 $\mathbb{R}^2$ 的嵌入来编码，以及它们之间的一个1-态射：一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-中心代数 $\mathcal{C}$，由夹在 $\mathcal{A}$区域和 $\mathcal{B}$区域之间的区间$\mathbb{R}$ 的嵌入来编码。(B) 描绘了一个2-态射：通过将圆盘带入中心点，编码出 $\mathcal{M}$ 上的 $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$-双模结构。(C) 描绘了特殊情形 $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$；此时我们可以消去 $\mathbb{R}$，而 $\mathcal{M}$ 位于 $\mathbb{R}^2$中的一个孤立点上，并且辫子模范畴结构来自从任意方向用 $\mathcal{A}$-圆盘接近 $\mathcal{M}$ 。

**定义3.5.** 阿贝尔群 $A$ 在编织张量范畴 $\mathcal{A}$ 上的1-形式对称作用，是指一个 $E_2$-幺半群函子 $A \to$BrMod($\mathcal{A}$)，其中 $A$被视为离散对称幺半二范畴。

更具体地说， $A$on $\mathcal{A}$ 上的 1-形式对称作用是指：对于每个 $a \in A$，给定一个编织模范畴 $\mathcal{M}_a \in$ BrMod($\mathcal{A}$)，以及固定的等价 $\phi_{a,\ b} : M_a \otimes_{\mathcal{A}} M_b \to M_{a+b}$ of braided module categories，并满足显然的五边形方程。

以下是我们将使用的两个主要示例来源：

**例 3.6**。 设 $A$ beany subgroup of the group $Z_{gp}(\mathcal{A})$ ofgroup-like Bernstein-central elements of $A$,

$$Z_{gp}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \mid a_{V\otimes W} = a_V \otimes a_W\},$$

并将 $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}$定义为一个范畴，其中 $\alpha_{a,\ m} =$(id$_Y \otimes a$)$\circ \sigma_{m,\ Y}\sigma_{Y,\ m}$。当我们取 $\mathcal{A}$ 为 Rep$_q(G_{sc})$，并取 $A = Z(G)$为 Rep$_q(G_{sc})$ 的万有分次群时，便得到这一示例的一个特殊情形。在物理学文献中（受麦克斯韦理论启发），所得作用被称为**电 1-形式对称性**。

~**例 3.7**。 设 $A$ 是任意 $A$-分次编织张量扩张 $\mathcal{A}$，并定义$\sim\mathcal{M}_a$ 为次数 $a$ 分量 Rep$_q(G)_a$，其中 $\alpha$ 和 $\phi$ 分别是 $A$上的~双编织与乘法函子的限制。这个~例子的一种特殊情形是取 $\mathcal{A}$ 为 Rep$_q(G_{ad})$、 $A = \pi_1(G)$和 $A =$ Rep$_q(G_{sc})$。同样，在物理学文献中，由此得到的作用称为**磁性 1-形式对称性**。

3.4. **扭曲缠结模**。 现在让我们将上述抽象概念转化为缠结模的形式体系，并最终转化为线性代数。

**定义 3.8**。 固定一个 1-形式作用 $\pi:\ \mathcal{A}\ \to$ BrMod($\mathcal{A}$)。对于每个单纯循环 $\gamma \in C_1(M,\ A)$，**扭曲缠结模** TwSk($M$)[$\gamma$] 是所有由 ($\mathcal{A},\ \pi,\ \gamma$) 标记的带状图所张成的空间，再模去 ($\mathcal{A},\ \pi,\ \gamma$)-缠结关系。

这里，($\mathcal{A},\ \pi,\ \gamma$)-标记的带状图是 $M$ 中的一个带状图：在 $\gamma$ 的支撑补集中，其带状图弦和 coupon 由 $\mathcal{A}$ 的对象与态射标记；沿着 $\gamma$ 的任意一个 1-单形，其带状图弦和 coupon 由 $\mathcal{M}_a$ 的对象与态射标记，并以 $a$ 加权。缠结关系按显然的方式定义，分别处理不与 $\gamma$ 的支撑相交的圆柱体、与 $\gamma$ 的一个 1-单形相交的圆柱体，以及与 $\gamma$ 的一个 0-单形相交的圆柱体。完整定义从略。

**命题 3.9** ([GJS23])。 我们有一个定义良好的函子，

$$\mathrm{TwSk}(M) : H_{1,2}(M, Z(G)^\vee) \to \mathrm{Vect},$$

将每个 $\gamma \in Z_1（M, Z（G）^\vee）$ 映射到 $\gamma$-扭曲缠结模，并将每个$\eta:\ \ \gamma_1\ \to\ \gamma_2$ 映射为由边界圆盘上的 ***Reshetikhin-Turaev*** 求值诱导的同构。

这仅仅意味着，对于每个 $\gamma \in C_1(M,\ A)$ 的选择，我们将定义一个扭曲缠结模 TwSk($M$)[$\gamma$]；对于每个满足 $d\eta = \gamma' - \gamma$ 的 $\eta \in C_2(M,\ A)/dC_3(M,\ A)$，我们定义一个同构，

$$\mathrm{TwSk}(M)[\eta] : \mathrm{TwSk}(M)[\gamma] \to \mathrm{TwSk}(M)[\gamma'],$$

并且这些同构将以相容的方式复合。

最后，我们可以考察来自例 2.1 的两种扭曲缠结模。

**例 3.10**。 设 $A = Z(G)$。我们在例 3.6 中已经看到，$Z(G)$ 通过 1-形式对称性作用于 Rep$_q(G)$；由此得到的 $H_2(M,\ Z(G))$ 对 Sk($M$) $=$TwSk($M$)[0] 的作用，使我们能够按照特征 $H_2(M,\ Z(G))^\vee \cong H_1(M,\ Z(G)^\vee)$ 分解 Sk($M$)。缚 skein 理论的诠释见图 3。所得的分次分解正是第 3 节开头所观察到的初等分解。这种初等形式的分次，在 [Car17], [Gil18], [GM18] 和 [DW21] 的计算中尤为重要。

据我们所知，对于非平凡的 $\gamma \in H_1(M,\ Z(G))$，扭曲缠结模 TwSk($M$)[$\gamma$] 是新的，因此没有先验的初等描述。不过，在这种情况下，描述扭曲很容易：关于缺陷的条件表明，当一个标记为简单表示 $V$ 的带状图 1-单形穿过一个权重为 $z \in Z(G)$ 的缺陷 1-单形时，它会获得一个标量因子，该因子等于 $z$ 在 $V$ 上的求值。

**例3.11**。 令 $A = \pi_1(G)$。我们已在例3.7中看到，我们可以通过1-形式对称性，得到 $\pi_1(G)$ 在 Rep$_q(G)$ 上的作用。据我们所知，由此产生的 $H_2(M, Z(G))$ 作用，以及随之而来的 $H_1(M, \pi_1(G)^\vee)$ 在 Sk($M$) 上的分解和扭曲缠结模都是新的，因此没有先验的 初等描述。不过，在这种情况下，定义扭转仍然很容易。给定一个带有简单标记的 $G^{sc}$-标记带状图，我们可以通过将每个简单标记 $V$ 替换为其分次，构造 $C_1(M, \pi_1(G))$ 中的一个1-单形；其中

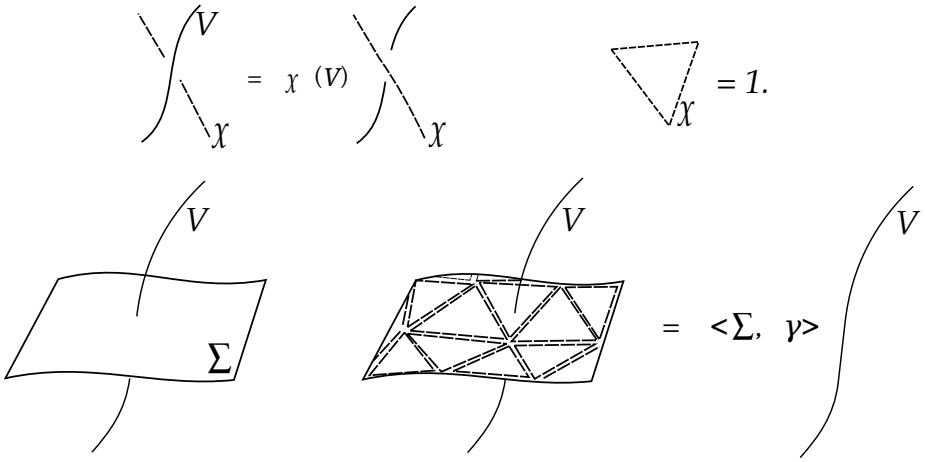



FIGURE 3. 左上：每个特征 $\chi$ 都确定一个编织模范畴 $\mathcal{M}_\chi$，其底层范畴为 $\mathcal{A}$，且双编织由 $\chi$ 在每个标记缠结的对象$V \in \mathcal{A}$ 上的中心作用给出。右上：这个编织模范畴是可逆的；闭环可平凡收缩。底部：某个 2-循环 $\Sigma$ 与某个缠结之间的配对，通过先在 $\Sigma$ 中凝聚某个三角网络，再沿缠结收缩每个三角形得到。结果是，缠结的支撑 1-循环 $\gamma$ 与循环 $\Sigma$ 之间的庞加莱配对 $\langle \Sigma, \gamma \rangle$ 给出了乘法。我们注意到，$\chi$ 的可逆性已意味着三角剖分的相邻边两两抵消，因此，尽管引入了缺陷，所得缠结模并未发生扭转，故我们确实得到了一个自同态。

相对于 $\pi_1(G)$，将 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G^{sc})$ 视为 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G)$ 的一个 $\pi_1(G)$-分次扩张。空间 $\mathrm{TwSk}(M)[\gamma]$ 是所有 $G^{sc}$-标记带状图的张成空间，这些图的底层1-余循环等于 $\gamma$；并且仅模去那些底层1-余循环为 $\gamma$ 的缚关系。

对于任意群 $G$，以及对于 $A = Z$ or $\pi_1$，以及对于 $a \in H_1(M,\ A^\vee)$ 和 $b \in H_1(M,\ A)$，我们用 $\mathrm{Sk}_{G\ A,\ ,}^{a\ b}(M)$ 表示扭曲缠结模的 $a$-分次分量。根据定义，我们有一个自然的向量空间线性映射，

$$\Phi : \mathrm{Sk}_{G^{ad},Z}(M) \to \mathrm{Sk}_{G^{sc}}(M),$$

它将一个由 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G^{ad})$ 标记的带状图视为由 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G^{sc})$ 标记的带状图。一个重要的观察是，尽管 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G^{ad}) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{q}}(G^{sc})$ 是全忠实的（因此在球内，此映射只是一个同构），但它在整体上并非同构，并且同时具有核和余核。余核很明显：根据构造，$\Phi$ 的像包含在 $\mathrm{Sk}_{G^{sc}}(M)$ 的零次部分中。核则更微妙，但其根源在于：按定义，在源中只施加底层 1-循环平凡的缠结关系，而在目标中则不然。在缠结模 $\mathrm{Sk}_{G^{sc}}(M)$ 中，两个次数为零的带状图可以通过一种仍涉及非平凡次数元素的方式相互关联。以下内容清楚地揭示了这一点

**定理 3.12**（[GJS23]）。设 $M$ 是一个定向3维流形（不一定是闭流形），且 $q \in \mathbb{C}^\times$ 是任意复数。则存在一个典范同构，

$$\mathrm{Sk}^{a,b}_{G/Z(G),\pi_1}(M) \cong \mathrm{Sk}^{a,b}_{G,Z}(M).$$

展开来说，这意味着上面的映射 $\Phi$ 实际上首先可以扩展为一个映射

$$\mathrm{Sk}_{G^{ad},\pi_1}(M) \to \bigoplus_{b \in H_1(M,Z(G))} \mathrm{Sk}^{0,b}_{G^{ad},Z}(M),$$

该映射是单射，随后又可以扩展为一个映射，

$$\bigoplus_{a,b} \mathrm{Sk}^{a,b}_{G^{sc},\pi_1}(M) \to \bigoplus_{a,b} \mathrm{Sk}^{a,b}_{G^{sc},Z}(M),$$

这是一个同构。注意，指标 $a$ 和 $b$ 同时出现在上面的左边和右边。这可由自然同构 $\pi_1(G^{ad}) \cong Z(G^{sc})^\vee$ 得到说明。

熟悉高形式对称性规范化语言的读者对此或许不会感到意外：事实上，我们有 $G^{ad} = G/Z(G)$，因此 $\mathrm{Rep}_q(G^{ad})$ 是通过 $Z(G)$ 对电 1-形式对称性进行规范化所得；对电 1-形式对称性进行规范化，会在新理论中诱导出对偶磁 1-形式对称性，并具有类似上文的同构。

## 4. The bigraded refinement of the skein conjecture

总之，我们定义了双分次纽结化模，

$$\mathrm{Sk}^{a,b}_{G^{sc},Z}(M), \qquad \text{for } a \in H_1(M, Z(G^{sc})^\vee), b \in H_1(M, Z(G^{sc})),$$

利用电 1-形式对称性，以及

$$\mathrm{Sk}^{a,b}_{G^{ad},\pi_1}(M), \qquad \text{for } a \in H_1(M, \pi_1), b \in H_1(M, \pi_1(G^{ad})^\vee),$$

利用磁性 1-形式对称性，其中在每种情况下，$a$ 表示分次次数，而 $b$ 表示扭转。现在回顾一下，在朗兰兹/S 对偶下，电 1-形式对称性和磁性 1-形式对称性相互交换。因此，为猜想 1.1 提供依据的同一电-磁对偶原理也预言：

**猜想 4.1**（纽结化猜想的双分次精化）。设 $q \in \mathbb{C}^\times$是超越数，且 $M$ 是一个闭定向3流形。那么我们有维数相等，

$$\dim \mathrm{Sk}^{a,b}_{G,Z}(M) = \dim \mathrm{Sk}^{b,a}_{{}^L G,\pi_1}(M).$$

现在设 $G$ 是 ADE 型单连通群，因而 ${}^L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$。在这种情况下，朗兰兹对偶群 ${}^L G = G^{ad}$ 还可以表现为商群 $G/Z(G)$，即将 $G$ 除以我们用于定义双分次的电 1-形式对称性所得的商。因此，我们可以应用定理 3.12，得到以下等价的

**猜想 4.2 (**精化纽结化猜想的改述**)**。假设 $G$ 是单连通的 *ADE* 型，$q \in \mathbb{C}^\times$ 是超越数，且 $M$ 是一个闭定向3维流形。那么我们有维数相等，

$$\dim \mathrm{Sk}^{a,b}_{G,Z}(M) = \dim \mathrm{Sk}^{b,a}_{G,Z}(M),$$

对于所有 $a \in H_1(M, Z(G)^\vee)$ $b \in H_1(M, Z(G))$ $b \in H_1$。

**备注 4.3**。 猜想 4.1 的重新表述非常方便：将其应用于 $G = \mathrm{SL}_N$ 的情形，这意味着我们可以完全在 $Z$-$\mathrm{SL}_N$ 上的扭曲中，或是在 $\pi_1$-$\mathrm{PGL}_N$ 上的扭曲中，检验该精化猜想。由于关于 $\mathrm{SL}_N$ 缚 skein 理论的已知结果更多，我们将在下一节研究 $Z$-扭曲。

**注 4.4**。 定理 3.12 中的同构完全是规范的，对任意 $q$ 均成立，也适用于带边界的三维流形：这是一个非常普遍的原理；特别是，出现在所断言同构两侧的指标 $a$ 和 $b$之间，事先就存在自然的对应。相比之下，指标 $a$ 和$b$ 本身并不自然地属于同一个群，而是分别属于庞特里亚金对偶群。因此，猜想 4.2 在语义上似乎无法成立。

事实上，要使猜想 4.2 有意义，就必须选择一个同构$Z(G) \cong Z(G)^\vee$，尽管显然该陈述本身并不依赖于这一选择。这应被视为进一步表明：朗兰兹对偶应当将 $Z(G)$ 与 $\pi_1({}^L G)^\vee$互换，但在 ADE 情形下，我们却将 $\pi_1({}^L G)^\vee$ 与$Z(G)$对应起来。

请回想，猜想 1.1 中的未扭转缠结模是对未扭转分次分量求和得到的。因此，猜想 1.1 可由猜想 4.2 的以下弱化形式推出。

**猜想 4.5.** 假设 $G$ 是 *ADE* 型的单连通群， $q \in \mathbb{C}^\times$ 是超越数，且 $M$ 是闭的定向 3 维流形。那么，维数相等：

$$\dim \mathrm{Sk}^{a,0}_{G,Z}(M) = \dim \mathrm{Sk}^{0,a}_{G,Z}(M),$$

对所有 $a \in H_1(M, Z(G)^\vee$。

## 5. 一些支持该猜想的证据

缠结模的维数很难用初等方法计算。事实上，两个基本例子 $S^2 \times S^1$ [HP95] 和 $T^3$ [Car17; Gil18] 之间相隔了二十五年，这充分说明了这一点。此后，研究取得了突破，人们开始结合初等方法与范畴论技巧计算这些维数。这使我们如今能够在若干特殊情形下证明我们的猜想。请回想，李代数 $\mathfrak{sl}_N$ 在朗兰兹对偶下保持不变；然而在群的层面上，朗兰兹对偶会将对偶群上的单连通形式与伴随形式互换，因此探讨 $(\mathrm{SL}_N, \mathrm{PGL}_N)$ 这一对的朗兰兹对偶是有意义的。

我们关注两类缠结模，对于这两类缠结模，可以进行完整计算。在第一类中，我们将 Langlands 对偶对固定为 $(\mathrm{SL}_2, \mathrm{PGL}_2)$，并考虑任意亏格 $g$ 的映射柱 $\Sigma_g \times S^1$ ；而在第二类中，我们则将三维流形固定为 $T^3$，并令 Langlands 对偶对取遍 $(\mathrm{SL}_N, \mathrm{PGL}_N)$。对于第一类，我们回顾如下结果：

**定理 5.1** ([GM18], [DW21])。 假设量子参数是一般的。那么我们有：

$$\dim \mathrm{Sk}_{SL_2}(\Sigma_g \times S^1) = 2^{2g+1} + 2g - 1.$$

关于电 *1*-形式对称作用，我们有：

$$\dim \mathrm{Sk}^{a,0}_{\mathrm{SL}_2}(\Sigma_g \times S^1) = \begin{cases} g+1, & a=(0,0) \\ g, & a=(1,0) \\ 1, & otherwise \end{cases},$$

这里的各个情形指的是 *K¨unneth* 分解，

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma_g \times S^1, \mathbb{Z}/2) &= H_0(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \otimes H_1(S^1) \oplus H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \otimes H_0(S^1) \\ &= H_0(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \oplus H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2). \end{aligned}$$

因此，缠结模的朗兰兹对偶首次得到了非平凡的验证，具体如下

**定理 5.2** ([GJS23], 即将发表)。 假设量子参数是一般的。那么我们有：

$$\dim \mathrm{Sk}_{\mathrm{PGL}_2}(\Sigma_g \times S^1) = 2^{2g+1} + 2g - 1$$

事实上，证明并非通过对 $\mathrm{Sk}_{\mathrm{PGL}_2}$ 进行计算，而是通过应用推论 4.5。更具体地说，我们证明：

$$\dim \mathrm{Sk}^{0,a}_{\mathrm{SL}_2}(\Sigma_g \times S^1) = \begin{cases} g+1, & a=(0,0) \\ g, & a=(1,0) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

当然，第一种情形已由 Carrega 和 Gilmer 证明，我们在此重述仅为强调。对于第二种情形，我们利用这样一个事实：在 $q=1$ 处的扭曲 skein 范畴变为扭曲特征簇上的拟凝聚层范畴。事实上，这是一个光滑仿射簇，因此，其量子化到缠结范畴后的 Hochschild 同调可与该扭曲特征簇的中间同调群对应；Hausel–Rodriguez-Villegas [HR07], 沿着 Hitchin 的思路证明了其维数为 $g$。

现在转向第二族 skein 模，我们回顾以下记号： $\mathcal{P}(d)$ 表示 $d$的分拆数，即将 $d$写成非负整数之和的方法数； $J_3 = C * \mu$ 是第三 Jordan 示性函数，它是通过对立方函数 $C(n) = n^3$ 作 M¨obius 反演得到的。

**定理 5.3** ([Gun+23]，即将发表)**.** 假设量子参数是一般的。那么我们有：

$$\dim \mathrm{Sk}_{SL_N}(T^3) = (\mathcal{P} * J_3)(N) = \sum_{N=d\cdot e\cdot f} \mathcal{P}(d) \cdot e^3 \cdot \mu(f).$$

关于电 *1*-形式对称作用，我们有

$$\mathrm{Sk}_{SL_N}(T^3)^{(a,b,c),0} = \mathrm{gcd(a,b,c,N)},$$

其中我们将 $(a, b, c)$ 记作 $(\mathbb{Z}/N)^3 = H_1(T^3, \mathbb{Z}/N)$ 的一个元素。

该定理的证明首先建立环面的缚 skein 范畴与双仿射 Hecke 代数模范畴之间的等价，继而给出该双仿射 Hecke 代数与量子环面和对称群的交叉积之间的同构，最后通过组合方法直接计算 Hochschild 同调。

我们对朗兰兹对偶的第二个非平凡验证由以下定理给出

**定理 5.4** ([GJS23])**.** 假设量子参数是一般的，且$N$ 是素数。则有：

$$\dim \mathrm{Sk}_{PGL_N}(T^3) = (\mathcal{P} * J_3)(N) = \sum_{N=d\cdot e\cdot f} \mathcal{P}(d)\cdot e^3 \cdot \mu(f).$$

关于磁性 *1*-形式对称作用，我们有

$$\mathrm{Sk}_{\mathrm{PGL}_N}(T^3)^{(a,b,c),0} = \mathrm{gcd(a,b,c,N)} = 1.$$

我们的证明与定理 5.2 的证明类似。我们应用猜想 4.5，并转而证明：

$$\dim \mathrm{Sk}^{0,(a,b,c)}_{\mathrm{SL}_N}(T^3) = 1, \quad \text{if } (a,b,c) \neq 0.$$

为此，我们再次依赖扭曲特征簇是光滑的这一事实，以及其中间同调已知为一维。当然，我们预期当 $N$ 不是素数时，定理仍然成立，但此时扭曲特征簇并不光滑，因此我们无法轻易运用相同的证明技巧。

## References

[AF15] David Ayala 和 John Francis。“拓扑流形的因子化同调”。载于：J. Topol. 8.4（2015），第 1045–1084 页。 ISSN：1753-8416。DOI：10.1112/jtopol/jtv028。arXiv：1206.5522 [math.AT].[AM17] Mohammed Abouzaid 和 Ciprian Manolescu。“SL(2, ℂ) Floer 同调的层论模型”。载于：（2017）。arXiv：1708.00289 [math.GT].[BBJ18a] David Ben-Zvi、Adrien Brochier 和 David Jordan。“在曲面上积分量子群”。载于：拓扑学杂志 11.4（2018），第 873–916 页。 DOI：10.1112/topo.12072。电子印本：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/topo.12072。 URL：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/topo.12072.[BBJ18b] David Ben-Zvi、Adrien Brochier 和 David Jordan。“量子特征簇与编织模范畴”。载于：Selecta Mathematica（2018 年 7 月）。 ISSN：1420-9020。 DOI：10.1007/s00029-018-0426-y。 URL：https://doi.org/10.1007/s00029-018-0426-y。[Ben+15] Oren Ben-Bassat、Christopher Brav、Vittoria Bussi 和 Dominic Joyce。“导出阿廷栈上移位辛结构的‘达布定理’及其应用”。载于：Geom. Topol. 19.3（2015），第 1287–1359 页。 ISSN：1465-3060。 DOI：10.2140/gt.2015.19.1287。arXiv：1312.0090 [math.AG].[BJS21] Adrien Brochier、David Jordan 和 Noah Snyder。“关于编织张量范畴的可对偶性”。载于：Compositio Mathematica 157.3（2021），第 435–483 页。 DOI：10.1112/S0010437X20007630。[BN18] David Ben-Zvi 和 David Nadler。“贝蒂几何朗兰兹”。载于：《代数几何：盐湖城 2015》。第 97 卷。Proc. Sympos. Pure Math. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018 年，第 3–41 页。[Bul97] Doug Bullock。“$SL_2$(C)-特征的环与 Kauffman 括号缠结模”。载于：Comment. Math. Helv. 72.4（1997），第 521–542 页。ISSN：0010-2571。 DOI：10.1007/s000140050032。arXiv：q-alg/9604014。

[BV] David Ben-Zvi 和 Jackson Van Dyke。《电磁对偶与朗兰兹纲领之间的关系》。URL：https://web.ma.utexas.edu/ users/vandyke/notes/langlands_sp21/langlands.pdf。[Car17] Alessio Carrega。“三维环面缠结空间的九个生成元”。载于：Algebr. Geom. Topol. 17.6（2017），第 3449–3460 页。ISSN：1472-2747。DOI：10.2140/agt.2017.17.3449。arXiv：1603.09661 [math.GT].[CKM14] Sabin Cautis、Joel Kamnitzer 和 Scott Morrison。“网络与量子斜 Howe 对偶”。载于：Math. Ann. 360.1-2（2014），第 351–390 页。ISSN：0025-5831。DOI：10 . 1007 / s00208 - 013 - 0984 - 4。arXiv：1210 . 6437[math.RT].[Coo19] Juliet Cooke。《曲面的因子化同调与缠结范畴》。2019 年。DOI：10.7488/ERA/2251。[DW21] Renaud Detcherry 和 Maxime Wolff。“曲面与圆周乘积的 Kauffman 缠结模的一组基”。载于：Algebraic & Geometric Topology 21.6（2021），第 2959–2993 页。DOI：10.2140/agt.2021. 21.2959。URL：https://doi.org/10.2140/agt.2021.21.2959。[Gil18] Patrick M. Gilmer。“关于三维环面的 Kauffman 括号缠结模”。载于：Indiana Univ. Math. J. 67.3（2018），第 993–998 页。ISSN：0022-2518。DOI：10.1512/iumj.2018.67.7327。arXiv：1604.02075[math.GT].[GJS19] Sam Gunningham、David Jordan 和 Pavel Safronov。“缠结模的有限性猜想”。载于：（2019 年 8 月）。arXiv：1908 . 05233[math.QA].[GJS23] Sam Gunningham、David Jordan 和 Pavel Safronov。《缠结模上的一形式对称性》。即将出版，2023 年。[GM18] Patrick M. Gilmer 和 Gregor Masbaum。“关于曲面与圆周乘积的缠结模”。载于：（2018）。arXiv：1804.05746[math.GT].[Gun+23] Sam Gunningham、David Jordan、Monica Vazirani 和 Haiping Yang。《环面上的缠结》。即将出版，2023 年。[HP95] Jim Hoste 和 J´ozef H. Przytycki。“$S^1 \times S^2$的 Kauffman 括号缠结模”。载于：Math. Z. 220.1（1995），第 65–73 页。ISSN：0025-5874。DOI：10.1007/BF02572603。[HR07] Tamas Hausel 和 Fernando Rodriguez-Villegas。“特征簇的混合霍奇多项式”。载于：Inventiones mathematicae 174（2007 年 1 月）。DOI：10.1007/s00222-008-0142-x。[KS12] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。“变形量子化模”。载于：Ast´erisque 345（2012），第 xii+147 页。ISSN：0303-1179。arXiv：1003.3304 [math.AG].[Kup96] Greg Kuperberg。“秩二李代数的蜘蛛”。载于：Comm. Math. Phys. 180.1（1996），第 109–151 页。ISSN：0010-3616。arXiv：q-alg/9712003

.

[KW07] Anton Kapustin 和 Edward Witten. “电磁对偶与几何朗兰兹纲领”. In: *Commun. Number Theory Phys.*1.1（2007年），第 1–236 页。ISSN: 1931-4523。DOI: 10.4310/CNTP.2007.v1. n1.a1. arXiv: hep-th/0604151.[Mor11] M. Morishita.《纽结与素数：算术拓扑导论》. Universitext. Springer London，2011年。ISBN: 9781447121572。URL: https://books.google.co.uk/books?id=OYW9kQEACAAJ.

[MOY98] Hitoshi Murakamia、Tomotada Ohtsuki 和 Shuji Yamada. “通过着色平面图的不变量构造 HOMFLY 多项式”. In: 1998年。[MS21] Julia Mueller 和 Freydoon Shahidi 编。《朗兰兹纲领的起源》。London Mathematical Society Lecture Note Series. 剑桥大学出版社，2021年。 DOI: 10.1017/9781108591218.[Pan+13] Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi.´“移位辛结构”. In: *Publ. Math. Inst. Hautes EtudesSci.* 117（2013），第 271–328 页。 ISSN: 0073-8301。 DOI: 10.1007/s10240- 013-0054-1。arXiv: 1111.3209 [math.AG].[PS00] J´ozef H. Przytycki 和 Adam S. Sikora. “关于缚 skein 代数与 $Sl_2(\mathbf{C})$-特征簇”. In: *Topology* 39.1（2000），第 115–148 页。 ISSN: 0040- 9383。 DOI: 10.1016/S0040-9383(98)00062-7。arXiv: q-alg/9705011.[Tur16] Vladimir G. Turaev.《纽结与三维流形的量子不变量》. 第 18 卷。德·格鲁伊特数学研究丛书。第三版。德·格鲁伊特，柏林，2016年，第 xii+596 页。 DOI: 10.1515/9783110435221.