不存在低能稳定子态的局域哈密顿量

Nolan J. Coble *[1]、Matthew Coudron[1,2], Jon Nelson[1], 和 Seyed Sajjad Nezhadi[1]

[1]量子信息与计算机科学联合中心（*QuICS*），马里兰大学[1]计算机科学系，马里兰大学[2]美国国家标准与技术研究院

arXiv:2302.14755v1 [quant-ph] 28 Feb 2023

摘要

Gharibian 和 Le Gall 最近提出的无低能可抽样态（NLSS）猜想[GL22] 断言存在一族局部哈密顿量，使得所有能量足够低的常数能量态都不具有允许完美采样访问的简洁表示。仅使用 Clifford 门即可制备的态（即稳定子态）是可采样态的一个例子，因此，NLSS 猜想意味着存在这样的局部哈密顿量：其低能空间中不包含任何稳定子态。我们通过对与 CSS 码对应的局部哈密顿量进行简单修改，描述了具备这一必要性质的若干族。我们的方法还可以应用于 Anshu、Breuckmann 和 Nirkhe 最近提出的 NLTS 哈密顿量 [ABN22], ，从而得到一族局部哈密顿量，其低能空间中既不包含稳定子态，也不包含平凡态。我们希望，这些技术最终将有助于构造能够同时满足 NLSS 和 NLTS 的哈密顿量。

目录

1 引言 **2**
1.1 量子 PCP 猜想的影响.41.2 致谢.5

2 预备知识 **5**
2.1 状态.52.2 哈密顿量.6

3 基于 CSS 码的 NLCS 8

4 经典与量子 Tanner 码 12

5 未来工作 16

A 省略的证明 20
A.1 混合 Clifford 态.20A.2 旋转投影算符.21

B 一个简单的 NLCS 哈密顿量 **22**
迈向NLACS.23

*ncoble@terpmail.umd.e du、mcoudron@umd.edu、nelson1@umd.edu、sajjad@ umd.edu

1 引言

局域哈密顿量在量子物理和量子计算中无处不在。从物理学角度来看，哈密顿量描述封闭量子系统的动力学和能谱，其中“局域”哈密顿量对应这样的模型：只有少量粒子能够彼此直接相互作用。从计算角度来看，局域哈密顿量通过“局域哈密顿量问题”自然地推广了广为研究的约束满足问题；该问题关注的是近似局域哈密顿量基态能量的复杂度。

定义 （LH-δ（n））。一个 k-局部哈密顿量，$\mathcal{H} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathcal{H}_i$，是 $m = \text{poly}(n)$ 厄米矩阵 $\mathcal{H}_i \in \mathbb{C}^{2^n\times 2^n}$ 的和，其中每个 $\mathcal{H}_i$ 至多在 $k = \mathcal{O}(1)$ 个量子比特[1] 上非平凡作用，并且具有有界的谱范数 $\|\mathcal{H}_i\| \le 1$。

给定一个局部哈密顿量 $\mathcal{H}$ 和两个实数 $a < b$，满足 $b - a > \delta(n)$，带承诺间隙 $\delta(n)$ 的局域哈密顿量问题是要判定以下哪种情况成立：（1）存在一个能量为 $\langle\psi_0|\mathcal{H}|\psi_0\rangle \le a$ 的状态，或（2）所有状态的能量均为 $\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle \ge b$，已知其中一种情况必然成立。[2] 值 $\delta(n)$ 称为该问题的承诺间隙。

局部哈密顿量问题是 NP 完全约束满足问题（CSP）的自然量子类比：[3] 局部项充当作用于 n 个量子比特态的量子约束，而局部项的能量对应于该态满足相应局部约束的程度。$\mathcal{H}$ 的最低能量态——即基态——是能够最佳满足所有局部约束的态。

不难证明，当承诺间隙为 $\delta(n) = 1/\text{poly}(n)$ 时，CSP 是 NP 完全的；而著名的经典 PCP 定理 [AS92, ALM+98] 表明，[令人惊讶的是，] 即使当 $\delta(n) = \Omega(1)$，即为常数时，CSP 仍然是 NP 完全的。由于局部哈密顿量问题是 CSP 的量子推广，我们也可以类似地问，它是否是 QMA（NP 的量子版本）完全的。Kitaev 在最初定义 QMA 问题类时证明，当 $\delta(n) = 1/\text{poly}(n)$ 时，局部哈密顿量问题是 QMA 困难的 [KSV02]。量子复杂性理论中或许最重要的未解问题，是量子版 PCP 定理是否成立。“量子 PCP 猜想 ” [AN02, AALV08] 断言，具有常数承诺间隙的局部哈密顿量问题是 QMA 困难的；迄今为止，这一猜想仍未得到证明。

作为证明量子 PCP 猜想的一种可能途径，Freedman 和 Hastings 提出了无低能平凡态（NLTS）猜想；在假设 NP $\neq$ QMA 的条件下，量子 PCP 猜想蕴含该猜想。若存在一个严格大于基态能量的常数，且它是任何可由常数深度电路制备的态（“平凡态”）能量的下界，则称局部哈密顿量具有 NLTS 性质。NLTS 猜想断言存在 NLTS 哈密顿量。这个看似更简单的问题悬而未决近十年，直到 Anshu 和 Breuckmann 解决了组合版本 [AB22], ，不久之后，Anshu、Breuckmann 和 Nirkhe 又给出了完整证明 [ABN22]。他们利用近期发展的渐近良好量子低密度奇偶校验码，明确构造了一个 NLTS 哈密顿量 [LZ22]。

尽管 NLTS定理取得了重大进展，但候选哈密顿量还必须满足许多其他性质，才能在具有常数承诺间隙的情况下成为 QMA-困难问题。例如，Gharibian 和 Le Gall 提出了无低能可抽样态（NLSS）猜想 [GL22]。如果经典计算机能够高效地从由 $|\psi\rangle$ 所定义的分布中抽取一个 $x \in \{0,1\}^n$ $p(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2$ 并计算所有振幅，$\langle x|\psi\rangle$，则称一个态为“可采样”的。[4] 如果存在一个常数可以为每个可采样态的能量提供下界，则局部哈密顿量具有 NLSS性质。NLSS 猜想断言

[1] $\mathcal{H}_i = h_i \otimes \mathbb{I}_{2^{n-k}}$ 其中 h_i 是一个 $2^k \times 2^k$ 厄米矩阵，且 $\mathbb{I}_{2^{n-k}}$ 是 $2^{n-k}\times 2^{n-k}$ 恒等矩阵[2]这等价于判定 $\mathcal{H}$ 是否存在一个小于 a 的特征值，或者 $\mathcal{H}$ 的所有特征值是否都大于 b；后者是更常见的问题表述。[3]严格来说，局部哈密顿量问题是判定问题 MAX-k-CSP 的推广。[4]按照 [GL22], 中的说法，更恰当的术语是，$|\psi\rangle$ 具有一种简洁表示，使其能够被完美采样访问。我们不会直接讨论 NLSS 猜想，因此为简洁起见，将使用“可采样”一词。

存在一个 NLSS 哈密顿量；Gharibian 和 Le Gall 表明，除非 MA = QMA，否则量子 PCP 猜想蕴含 NLSS 猜想。

本文考察 NLSS 猜想的一个简化版本：我们不考虑可采样态，而是研究稳定子态。稳定子态是由泡利群中一个大小为 2^n的交换子群稳定的唯一态。等价地，稳定子态是仅使用克利福德门（即哈达玛门、相位门和受控非门）即可制备的态。若某个局部哈密顿量具有“无低能稳定子态”（NLCS）[5] 性质，即存在一个常数，作为任意稳定子态能量的下界，我们就称其具有该性质。[6] 戈特斯曼-克尼尔定理 [Got98] 表明，任何稳定子态都可以高效采样，因此任何 NLSS 哈密顿量也必定是 NLCS 哈密顿量。我们证明，可以利用一种通用构造生成许多 NLCS 哈密顿量。

要证明某个特定局部哈密顿量具有 NLCS 性质，必须给出所有稳定子态能量的显式下界。设 $\mathcal{H} = \frac{1}{m}\sum \mathcal{H}_i$ 是一个局部哈密顿量，$|\psi\rangle$ 是一个 n量子比特态。任意一个哈密顿量项的能量都可表示为 $\langle\psi|\mathcal{H}_i|\psi\rangle = \mathrm{Tr}\left[\psi_{A_i} h_i\right]$，其中 A_i 是 $\mathcal{H}_i$ 非平凡作用的量子比特集合，ψ_{A_i} 是 $|\psi\rangle$ 在 A_i上的约化态，而 h_i 是$\mathcal{H}_i$的非平凡部分。为简便起见，假设对所有 i，都有 $|A_i| = k$。要给$|\psi\rangle$ 的能量求下界，一种特别有力的方法是对每个能量项分别给出“局部”下界。也就是说，证明每个 $\mathrm{Tr}\left[\psi_{A_i} h_i\right]$ 都有一个常数下界。一般而言，这并非易事。不过，稳定子态有一个相当便利的性质：我们在命题 3 中证明，如果 $|\psi\rangle$ 是稳定子态，那么每个 ψ_{A_i} 都是 k 量子比特上的稳定子态的凸组合。因此，要对每个 n量子比特稳定子态 $|\psi\rangle$ 的 $\mathrm{Tr}\left[\psi_{A_i} h_i\right]$ 求下界，只需对每个 k量子比特稳定子态 $|\zeta\rangle$的量 $\langle\zeta|h_i|\zeta\rangle$ 求下界即可。

这一观察得出了一个相当简单的 NLCS 哈密顿量。首先，考虑哈密顿量 $\mathcal{H}_0 = \frac{1}{n}\sum |1\rangle\langle 1|_i$，其中 $|1\rangle\langle 1|_i$ 是作用于第 i 个量子比特上的 $|1\rangle$ 投影算符，并在其他位置作用恒等算子。所有局部项都是单量子比特投影算符 $|1\rangle\langle 1|$。显然，我们无法为稳定子态的能量给出下界，因为 $|0\rangle$ 的能量为 0。不过，我们可以改为考虑 $\mathcal{H}_0$ 的一个“共轭”版本，从而解决这个问题：

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{i\frac{\pi}{8}Y}|1\rangle\langle 1|e^{-i\frac{\pi}{8}Y}\right)_i,$$

也可以表示为 $\tilde{\mathcal{H}}_0 = (e^{i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}\mathcal{H}_0(e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}$。每个局部项都是单量子比特投影算符 $e^{i\frac{\pi}{8}Y}|1\rangle\langle 1|e^{-i\frac{\pi}{8}Y}$,，并且很容易计算得出，每个单量子比特稳定子态在该局部项下的˜能量都很高。我们在附录 B 中给出一个完整的证明，证明 $\mathcal{H}_0$ 是 NLCS。

量子 PCP 猜想不仅意味着 NLTS/NLCS/NLSS 哈密顿量的存在，也意味着同时具有NLTS/NLCS/NLSS 性质的哈密顿量的存在。用低深度电路对局部哈密顿量进行共轭，能够方便地保留 NLTS 性质。也就是说，若 $\mathcal{H}$ 具有 NLTS 性质，且 C是一个常数深度电路，那么 $C^\dagger\mathcal{H}C$ 也具有 NLTS 性质（见引理4）。

注意，由于 $|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - Z)$，哈密顿量 $\mathcal{H}_0$是一个*CSS* 哈密顿量，也就是说，其局部哈密顿量项具有$\frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_i)$的形式，其中 P_i彼此对易，且为 X和 Z型泡利算符。由于哈密顿量 $\tilde{\mathcal{H}}_0$只是经过深度为 1 的电路共轭而得$(e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}$，自然会让人想知道，是否也能对 [ABN22] 中的 NLTS 哈密顿量采用同样的过程，因为它们也是 CSS 哈密顿量。本文的主要结果如下：

定理 1（定理 12 的非正式表述）。令 $\mathcal{H}_{NLTS}$ 为 *[ABN22]*中的 *NLTS* 局部哈密顿量。由 $\tilde{\mathcal{H}}_{NLTS} \equiv (e^{i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}\mathcal{H}_{NLTS}(e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}$给出的局部哈密顿量同时满足 *NLTS* 和 *NLCS*。

[5]NLCS 中的“C”代表 Clifford，因为由 Clifford 电路制备的态与稳定子态等价。[6]此前有人提出，NLCS 哈密顿量的存在可直接由量子 PCP 猜想推出，例如见 [AN22]。我们将在第 1.1 节讨论 NLCS 等概念与量子 PCP 猜想之间的关系。

我们通过给出各个哈密顿量项的局部下界来证明定理 12 。具体而言，我们证明，若 $h = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P^{\otimes k})$ 是一个 k-局部项，其中 $P \in \{X, Z\}$，则

$$\langle\zeta| (e^{i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes k} h (e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes k} |\zeta\rangle \geq \sin^2(\pi/8)$$

对于任意 k-量子比特稳定子态 $|\zeta\rangle$，只要 k 为奇数即可。结合这一下界以及稳定子态的约化态是稳定子态的凸组合这一事实，我们可知，用 $(e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}$ 共轭 CSS 哈密顿量后会得到 NLCS 哈密顿量，至少当许多哈密顿量项作用于奇数个量子比特时是如此。

遗憾的是，奇数权重这一条件是我们局部方法所必需的：如果 k 为偶数，则总存在一个 k-量子比特稳定子态，其 $\langle\zeta_0| (e^{i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes k} h (e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes k} |\zeta_0\rangle = 0$。尽管如此，我们在第 4 节证明，存在一个来自 [ABN22] 的显式 NLTS 哈密顿量，其中每个局部项都作用于奇数个量子比特。由于常数深度电路共轭保持 NLTS 性质，因此最终我们有 $\tilde{\mathcal{H}}_{NLTS}$ 同时满足 NLTS 和 NLCS。

1.1 量子 PCP 猜想的含义

现在我们来讨论量子 PCP 猜想保证存在何种哈密顿量。量子 PCP 猜想有两种主要表述；这里我们着重讨论间隙放大版本。有关该猜想的精彩综述，请参见 [AAV13]。

猜想 ([AAV13]中的猜想 1.3)。 设 $\epsilon > 0$ 为一个常数。 局部哈密顿量问题-ϵ 是 QMA 困难，且可通过量子多项式时间归约。

换句话说，该猜想指出，存在一个最坏情形的局部哈密顿量，其基态能量在常数精度内的近似是 QMA 困难的。近似局部哈密顿量的基态能量以及求出其基态，对凝聚态物理理论和量子模拟算法都至关重要。如果量子 PCP 猜想成立，那么它意味着存在一些哈密顿量，我们根本不可能近似其基态能量，更不用说求出它们的基态了。[7]

FH [在定义 NLTS 猜想时的关键洞见是，有些状态具有这样的性质：它们的基态能量可以在比QMA更小的复杂度类中计算。对于常数 k，若一个 n量子比特态 ρ满足以下条件，我们称其为 k **局部可逼近的：它具有多项式大小的经典描述，据此可以在多项式时间内将每个** k局部约化态 $\rho_A \equiv \mathrm{Tr}_{-A}[\rho]$ （其中 $|A| \leq k$）近似到逆多项式精度。考虑以下简单结果：

事实 2. 假设 $\mathcal{H} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i$ 是一个 k-局部哈密顿量，且 ρ 是一个 k-局部可逼近态。那么，在 $\mathcal{H}$ 下， ρ 的能量可以在NP中近似到逆多项式精度。

证明。 每个 $\mathcal{H}_i$ 至多对 k 个量子比特有非平凡作用， $A_i \subset [n]$，因此 $\mathcal{H}_i$ 下 ρ 的能量为 $\mathrm{Tr}[\rho\mathcal{H}_i]$ =$\mathrm{Tr}\left[\rho_{A_i} h_i\right]$, 其中 $_{-A_i}[\mathcal{H}_i]$ Tr $\mathcal{H}_i$是 $h_i \in \mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$ 的非平凡部分。由于 $h_i \in \mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$ ，且根据假设，我们可以从 ρ的经典描述中高效地将 ρ_{A_i} 计算到逆多项式精度，因此可以在多项式时间内通过穷举近似每个 $\mathrm{Tr}[\rho\mathcal{H}_i]$ 。 □

平凡态可以通过局部信息近似。如果 $|\psi\rangle$ 是一个平凡态，那么存在一个常数深度电路，使得 $|\psi\rangle = C|0\rangle^{\otimes n}$。对于一组 k 量子比特， A只有位于 ψ_A 的反向光锥中的门才会对 [8] 产生影响。 A 由于反向光锥的大小至多为 $k2^d$（一个常数），因此只需从 C 中取常数个门，就能通过穷举近似 ψ_A。因此，我们可以根据 $|\psi\rangle\langle\psi|$的经典描述来近似其局部约化态。 C

[7]当然，除非有人相信 QMA $\subseteq$ P 或QMA的其他某种弱化形式。[8]参见图 1(a)。

能够计算局部约化态这一假设对稳定子态也成立。假设$|\psi\rangle$ 是一个 n量子比特的稳定子态。由于 $|\psi\rangle$ 是一个稳定子态，存在 n 个相互独立且彼此对易的泡利算符 $\{P_1,\ldots,P_n\}$，它们稳定 $|\psi\rangle$。这些泡利算符组成的列表将作为 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 的经典描述，据此可以计算局部约化态。约化态 ψ_A 可以写成

$$\psi_A = \frac{1}{2^k}\sum_{P\in G_A} P, \tag{1}$$

其中 G_A 是 $|\psi\rangle$ 的稳定子中仅对 A中的量子比特产生非平凡作用的子群。共有4^k 个这样的泡利群元素（忽略相位），记作 $\mathcal{P}_A$。对于 $P\in\mathcal{P}_A$，当且仅当 $\pm P$ 属于 $|\psi\rangle$ 的稳定子群时，P与每个稳定子生成元都对易。因此，我们可以通过暴力检查 G_A 中的哪些元素与每个生成元都对易，来确定 $\mathcal{P}_A$ 的元素。[9] 由于只需检查常数个泡利算符，这项计算可以在多项式时间内完成，因此利用方程（1）可以高效地计算出 ψ_A。

因此，除了是 NLSS 的推论之外，假设 NP $\neq$ QMA，量子 PCP 猜想也蕴含了 NLCS 哈密顿量：如果每个局部哈密顿量都有低能稳定子态，那么根据事实 2，基态能量可以在 NP 中计算。

1.2 致谢

本文是美国国家标准与技术研究院（NIST）的成果之一。该机构隶属美国政府，因此本文不受美国版权保护。我们感谢 Alexander Barg 和 Chinmay Nirkhe 提供的有益讨论。

2 预备知识

对于自然数 n，我们记作 $[n]\equiv\{1,\ldots,n\}$。对于子集 $A\subseteq[n]$，我们用 $-A\equiv[n]\setminus A$ 表示集合补集，用 Tr_A 表示对 A 中的量子比特取偏迹。特别地，$\mathrm{Tr}_{-A}[|\psi\rangle\langle\psi|]$ 表示 $|\psi\rangle$ 在 A 中各量子比特上的局部密度矩阵。

2.1 状态

设 $C=\{C_n\}$ 是由单量子比特和双量子比特门组成的可数量子电路族，其中每个 C_n 作用于 n 个量子比特。如果对于所有 n，C_n 的深度均由函数 $d(n)$ 上界，则称 C 是一个**深度-$d(n)$** 量子电路族。如果 $d(n)=\mathcal{O}(1)$，则称 C 是一个深度-$\mathcal{O}(1)$（或常数深度）量子电路族。类似地，如果 $d(n)=\mathrm{poly}(n)$，则称 C 是一个深度-poly(n)（或多项式规模）量子电路族。

单量子比特**泡利群**是集合 $\mathcal{P}_1\equiv\{i^\ell P\mid P\in\{\mathbb{I},X,Y,Z\},\ell\in\{0,1,2,3\}\}$，而 n-量子比特泡利群是它的 n 重张量幂，即 $\mathcal{P}_n=\bigotimes_{i\in[n]}\mathcal{P}_1$。对于一个元素 $S=P_1\otimes\cdots\otimes P_n\in\mathcal{P}_n$，$S$ 的**权重**定义为 P_i 不等于恒等算子的量子比特数，即 $\mathrm{wt}(S)=\left|\{P_i\mid P_i\neq i^\ell\mathbb{I}\}\right|$。我们将 S 非平凡作用的这些量子比特组成的集合记作 $\mathrm{N}(S)\subseteq[n]$。

n-量子比特**Clifford 群** $\mathcal{C}_n$ 是稳定泡利群的酉算子集合。众所周知，$\mathcal{C}_n$ 由集合 {H、P、CNOT}生成，其中 H 是单量子比特 Hadamard门，P 是单量子比特相位门，而 CNOT 是双量子比特受控非门。**Clifford 电路**定义为 Clifford 群中的任意元素。

设 ψ 是一个定义在 n 个量子比特上的 [可能为混合态的] 态，并设 $N\geq n$。若存在一个作用于 N 个量子比特的量子电路 C，使得 $\psi=\mathrm{Tr}_N[C\left|0^N\right\rangle\!\left\langle 0^N\right|C^\dagger]$，则称 C**制备** ψ。ψ 被称为：**平凡的**

[9]接下来需要确定 $+P$或 $-P$是否属于稳定子群。尽管稍微复杂一些，但仍可在多项式时间内完成，且不受 P权重的影响。

态，若存在一个制备它的常数深度量子电路；若存在一个制备它的多项式规模电路，则称其为 [高效] **可制备态**；若存在一个制备它的多项式规模 Clifford 电路，则称其为**Clifford 态**；若存在一个制备它的多项式规模量子电路，且该电路包含 Clifford+ $\mathcal{O}$ 个 T 门（其中 T 门数为 O(log(n))），则称其为**近似 Clifford 态**。纯态 $|\psi\rangle$ 若满足以下条件，则称为**可采样态**：(1) 存在一个经典算法，能够对每个 $x \in \{0,1\}^n$ 精确计算 $\langle x|\psi\rangle$；(2) 存在一个经典算法，能够从分布 $p(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2$ 中精确采样 $x \in \{0,1\}^n$。

一个**稳定子群**是一个阿贝尔子群，G，属于 $\mathcal{P}_n$ 且不包含 $-\mathbb{I}$。作为有限群，我们总能找到一组彼此独立且相互对易的生成元，$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$，属于 G。当生成集明确时，我们就简称为子群 $\langle \mathcal{S} \rangle = G$。请注意，给定一个稳定子群，就能明确地定义一个**稳定子码** [Got96、CRSS97、CRSS98]，$\mathcal{C}_\mathcal{S}$，它是 +1 其中各算子的公共特征空间 $\langle \mathcal{S} \rangle$。

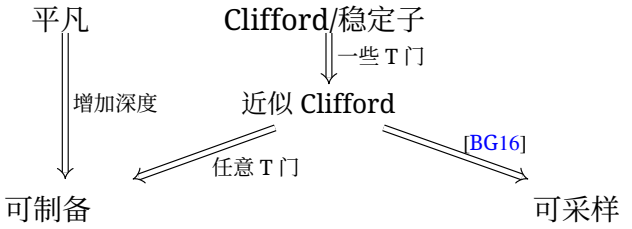
如果给定的稳定子群有一个生成集 $\mathcal{S}$，其中的元素仅由泡利算符 X 和 $\mathbb{I}$ 的张量积构成，或者仅由泡利算符 Z 和 $\mathbb{I}$的张量积构成，那么我们称 $\mathcal{C}_\mathcal{S}$ 为 **CSS 码**，并称 $\mathcal{S}$ 生成一个 CSS 码。

纯态 $|\psi\rangle$的**稳定子群**是泡利群的子群，由 Stab($|\psi\rangle$) $\equiv \{P \in \mathcal{P}_n \mid P|\psi\rangle = |\psi\rangle\}$定义。我们称 $P \in$ Stab($|\psi\rangle$) **稳定** $|\psi\rangle$。请注意，Stab($|\psi\rangle$) 是泡利群的阿贝尔子群，且不包含 $-\mathbb{I}$，因此它是如前所述的一个有效稳定子群。

若纯态 $|\psi\rangle$ 满足 $|\text{Stab}(|\psi\rangle)| = 2^n$，则称其为**稳定子态**；等价地，若存在 n 个相互独立的泡利算符能够稳定 $|\psi\rangle$，则称其为稳定子态。注意，$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G} g$，其中 $G = \text{Stab}(|\psi\rangle)$。

若混合态 ψ 是纯稳定子态的凸组合，即 ψ，则称其为稳定子态；也就是说，$\psi = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$，其中每个 $|\varphi_j\rangle$ 都是定义在 n 个量子比特上的纯稳定子态，$\sum_j p_j = 1$，且 $p_j \geq 0$。

此处定义的所有状态都通过以下关系彼此相关：



(2)

根据 Clifford 群的定义，对于纯态而言，稳定子态与 Clifford 态是等价的。即使对于混合态，我们也会交替使用“稳定子态”和“Clifford 态”这两个术语，原因是以下结果：

命题 3. 如果 ψ 是 *Clifford* 态，那么它也是稳定子态。

证明见附录 A.1。命题 3 指出，纯稳定子态的约化态是子系统上纯稳定子态的凸组合。这一点对于我们的能量下界论证至关重要：要为哈密顿量的一个 n-局部项，给所有 k 量子比特稳定子态的能量设定下界，$\mathcal{H}_i$只需为其非平凡部分的所有 k 量子比特稳定子态的能量设定下界 $\mathcal{H}_i$。

2.2 哈密顿量

A **k-局部哈密顿量**，$\mathcal{H}^{(n)}$，是作用于 n 量子比特空间上的厄米算子，$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$，可以写成一组项的和 $\mathcal{H}^{(n)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathcal{H}_i$，其中每个 $\mathcal{H}_i$ 都是仅在 k个量子比特上非平凡作用且谱范数为 $\|\mathcal{H}_i\| \leq 1$的厄米矩阵。一个**由 k-局部哈密顿量构成的族**，$\{\mathcal{H}^{(n)}\}$，是一个可数集合，其中的k-局部哈密顿量按系统规模 n编索引，并且 $k = \mathcal{O}(1)$，$m = \text{poly}(n)$。我们常用“局部哈密顿量”一词来指代由 k-局部哈密顿量构成的族。

对 $\mathcal{H}$ 而言，其**基态能量** 为 $E_0 \equiv \min_\rho \text{Tr}[\rho\mathcal{H}]$，其中最小化是在所有 n 量子比特混合态上进行的。若 $E_0 = 0$，则称 $\mathcal{H}$ 为**无挫折** 的。若满足下述条件，则称状态 ψ为 $\mathcal{H}$ 的**基态**

$\mathrm{Tr}[\psi\mathcal{H}] = E_0$。若 $\mathrm{Tr}[\psi\mathcal{H}] < E_0 + \epsilon$，则称状态 ψ为 $\mathcal{H}$ 的 **ϵ-低能态**。若 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ 是纯态，则该条件可简化为 $\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle < \lambda_{\min}(\mathcal{H}) + \epsilon$，其中 $\lambda_{\min}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$的最小特征值。对于无挫折哈密顿量，这等价于 $\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle < \epsilon$。我们考虑的所有哈密顿量均为无挫折哈密顿量。

对于 $S \in \mathcal{P}_n$，我们用 Π_S 表示 S 的 $+1$ 特征空间上的正交投影算符，即 $\Pi_S \equiv \frac{\mathbb{I}-S}{2}$。~~由于~~ Π_S 仅对 $\mathrm{wt}(S)$ 个量子比特有非平凡作用，我们可以写作 $\Pi_S = \Pi_S|_{\mathrm{N}(S)} \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\mathrm{N}(S)}$。

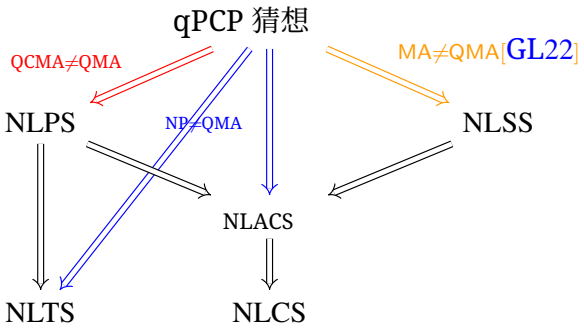
给定一个稳定子群 $\langle\mathcal{S}\rangle$，其生成集为 $\mathcal{S}$，与 $\mathcal{S}$ 关联的 **稳定子哈密顿量**为 $\mathcal{H}_\mathcal{S} \equiv \frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{S\in\mathcal{S}}\Pi_S$。如果每个量子比特至多受到 $\mathcal{S}$ 中 $\mathrm{wt}(\mathcal{S})$ 个元素的非平凡作用，那么 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 是一个 $\mathrm{wt}(\mathcal{S})$-局部哈密顿量。如果 $\mathcal{C}$ 是与 $\mathcal{S}$ 关联的稳定子码，那么每个 $|\psi\rangle \in \mathcal{C}$ 都是 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 的零能量态。特别地，$\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 是无挫折的，其基态空间为 $\mathcal{C}$。如果 $\mathcal{S}$ 生成一个 CSS 码，那么我们称 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 为 **CSS 哈密顿量**。

如果 $\{\langle\mathcal{S}_n\rangle \mid \langle\mathcal{S}_n\rangle \le \mathcal{P}_n\}$ 是一个可数的稳定子群族，那么与 $\{\mathcal{S}_n\}$ 相关联的**稳定子（或 CSS）哈密顿量族**为 $\{\mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}\}$。当满足以下条件时，这将是一个局域哈密顿量族：(1) 每个量子比特至多受到 $\mathcal{S}_n$ 中 $\mathrm{wt}(\mathcal{S}_n)$ 个元素的非平凡作用；(2) $\mathrm{wt}(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(1)$；(3) $|\mathcal{S}_n| = \Theta(n)$。这类稳定子群族 $\{\langle\mathcal{S}_n\rangle\}$ 对应于量子 LDPC 码族。

对于上一节中的每个状态，我们都可以考虑 NLTS 的一个类似概念。

定义。若一个 k-局部哈密顿量族 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 满足 ϵ-**NL**X**S** 性质，则称该族具有此性质：对所有充分大的 n，$\mathcal{H}^{(n)}$ 都没有 ϵ-低能态，其类型为 X。若存在某个常数 ϵ，使得该族 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 具有 ϵ-NLXS 性质，则称该族具有**NL**X**S** 性质。

以下是 NLXS 定理/猜想与量子 PCP 猜想之间成立的蕴含关系。箭头旁的复杂度不等式表示：若该分离成立，则相应的蕴含关系成立。例如，若量子 PCP 猜想成立且 MA $\neq$ QMA，则 NLSS 成立。



(3)

各项 NLXS 结果之间的关系在图2中隐含地给出。平凡态、稳定子态和近似 Clifford 态都是局部可近似态的例子，因此根据量子 PCP 猜想和事实2即可推出。NLSS 的蕴含关系由 Gharibian 和 Le Gall 在最初定义 NLSS 时给出 [GL22]。NLPS 的蕴含关系众所周知：如果每个局部哈密顿量都有一个低能可制备态，$C|0\rangle^{\otimes n}$，那么给定该态的经典描述后，C 量子证明者只需制备该态并测量其能量即可。这将使 LH-$\epsilon \in$ QCMA成立，从而在量子 PCP 猜想成立时推出QMA $=$ QCMA。

对于一族 k-局域哈密顿量，$\{\mathcal{H}^{(n)}\}$，以及一族 $C = \{C_n\}$深度为$\mathcal{O}(1)$ 的量子电路，我们将 C-**旋转版本** 定义为 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 的 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}^C \equiv \{{C_n}^\dagger\mathcal{H}^{(n)}C_n\}$。这仍是一族局域哈密顿量，不过其 k 可能与原哈密顿量不同。这是因为，与单个哈密顿量项 $C^\dagger\mathcal{H}_iC$发生非平凡相互作用的量子比特，仅限于处在受 $\mathcal{H}_i$作用的量子比特的反向光锥中的量子比特。单个量子比特的反向光锥中的量子比特数量会随电路深度呈指数增长；但由于 C 是常数深度电路，该数量仍为常数。示例见图1

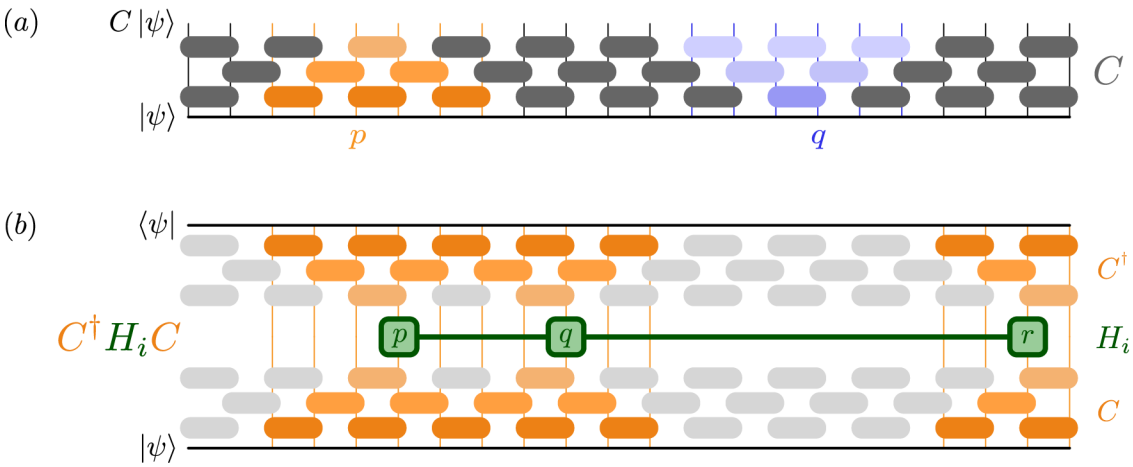


图 1： (a) 考虑一个常数深度电路，C。图右侧以 [蓝色] 高亮显示的门表示量子比特 q 的"光锥"，即可以追溯到 q的门的集合。图左侧以 [橙色] 高亮显示的门表示量子比特 p 的"反向光锥"中的门，即最终会影响 p的门。(b) 考虑一个单独的 k-局部哈密顿量项 $\mathcal{H}_i$，它仅作用于量子比特 p、q、和 r。将 $\mathcal{H}_i$ 与 C共轭时，不在 p、q、或 r 中任一量子比特的反向光锥内的门，都会与其逆门相互抵消。任意一个量子比特的反向光锥中的量子比特数量为 $\leq 2^d$，其中 d 是 C的深度，因此 $C^\dagger\mathcal{H}_i C$至多是 $k2^d$-局部的。

举例说明。当 $C = V^{\otimes n}$ 是单量子比特门 V的张量积时，我们将使用"V-旋转"一词，而不是"$V^{\otimes n}$-旋转"。

考虑一个经 C 旋转的哈密顿量的好处在于，除了保持局域性之外，NLTS 性质也得以保持。

引理 4。 如果 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 是一族 ϵ_0-*NLTS* 局域哈密顿量，且 $C = \{C_n\}$ 是一族常数深度电路，那么 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}^C$ 也是 ϵ_0-*NLTS*。

证明。 假设 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}^C$ 不是 NLTS。根据定义，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 n 和常数深度电路 $U_{\epsilon,\ n}$ 使得 $U_{\epsilon,\ n}|0\rangle^{\otimes n}$ 是 $C_n^\dagger\mathcal{H}^{(n)}C_n$ 的 ϵ-低能态，即

$$\langle 0|^{\otimes n} U_{\epsilon,n}^\dagger C_n^\dagger \mathcal{H}^{(n)} C_n U_{\epsilon,n} |0\rangle^{\otimes n} < \lambda_{\min}(C_n^\dagger \mathcal{H}^{(n)} C_n) + \epsilon.$$

由于 C_n 是酉算子， $\mathcal{H}^{(n)}$ 和 $C_n^\dagger\mathcal{H}^{(n)}C_n$ 的最小特征值相等。定义 $|\psi_{\epsilon_0,\ n}\rangle \equiv C_n U_{\epsilon_0,\ n}|0\rangle^{\otimes n}$ 我们有

$$\langle\psi_{\epsilon_0,n}|\,\mathcal{H}^{(n)}\,|\psi_{\epsilon_0,n}\rangle < \lambda_{\min}(\mathcal{H}^{(n)}) + \epsilon_0,$$

即 $|\psi_{\epsilon_0,\ n}\rangle$ 是 $\mathcal{H}^{(n)}$ 的 ϵ_0-低能态。由于 $C_n U_{\epsilon_0,\ n}$ 是常数深度电路，这意味着 $\mathcal{H}^{(n)}$ 具有低能平凡态，与 ϵ_0-NLTS 的假设矛盾。 □

来自 CSS码 的 3 个 NLCS

我们将证明，对大多数 CSS 哈密顿量施加单量子比特门的张量积旋转，就足以将其变为 NLCS 哈密顿量，其中包括 [ABN22] 中所使用的量子 Tanner 码。特别地，我们考虑单量子比特门 $D \equiv e^{-i\frac{\pi}{8}Y}$，并将 CSS 哈密顿量旋转 $D^{\otimes n}$。对于局部哈密顿量 $\mathcal{H}^{(n)}$，我们将其 D-**旋转后的版本** 记为 $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)} \equiv D^{\dagger\otimes n}\mathcal{H}^{(n)}D^{\otimes n}$。我们将与泡利元素 $S \in \mathcal{P}_n$ 相关联的 D-**旋转投影算符**记为 $\tilde{\Pi}_S \equiv D^{\otimes n}\Pi_S D^{\dagger\otimes n}$。根据定义，我们

有 $\tilde{\Pi}_S = \tilde{\Pi}_S\,|_{\mathrm{N}(S)} \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus \mathrm{N}(S)}$，其中 $\tilde{\Pi}_S\,|_{\mathrm{N}(S)} = D^{\otimes \mathrm{wt}(S)} \Pi_S\,|_{\mathrm{N}(S)}\, D^{\dagger \otimes \mathrm{wt}(S)}$。请注意，在上述记号中，我们没有明确包含 D，因为在全文中，D 将专指 $e^{-i\frac{\pi}{8}Y}$。

我们有以下结果：

定理 5. 设 $\{\mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}\}$ 是与一族量子（*CSS*）*LDPC* 码 $\{\langle \mathcal{S}_n \rangle\}$相关联的一族 *CSS* 哈密顿量。假设对于每个 n，生成元 $S \in \mathcal{S}_n$ 中有常数比例 $\alpha > 0$具有奇数权重。那么 $\{\mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}\}$ 是一族 *NLCS* 哈密顿量。

我们通过给出与 CSS 生成元相关联的 D-旋转投影算符的能量局部下界来证明这一点。作为一项技术要求，这些下界仅在生成元的权重为奇数时成立。

回顾一下，在对量子比特进行置换后，CSS 码的生成元可以写成 $X \otimes \mathbb{I}$或 $\bar{Z} \otimes \mathbb{I}$，其中 $\bar{X} \equiv X^{\otimes k}$ 且 $\bar{Z} \equiv Z^{\otimes k}$。首先考虑将$\Pi_{\bar{X}}$ 和$\Pi_{\bar{Z}}$ 旋转 D时会发生什么：

命题 6。

$$\tilde{\Pi}_{\bar{X}} = \frac{\mathbb{I} - \mathrm{H}^{\otimes k}}{2}, \qquad \tilde{\Pi}_{\bar{Z}} = \frac{\mathbb{I} - (-X\,\mathrm{H}\,X)^{\otimes k}}{2}.$$

这些恒等式在附录 A.2中推导得出。局部下界将由以下结果给出：

引理 7。 若 k 为奇数，则对于任意 k量子比特稳定子态 $|\eta\rangle$，都有 $\left|\langle\eta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$。另一方面，若 k 为偶数，则存在一个 k量子比特稳定子态 $|\eta_0\rangle$，使得 $\langle\eta_0|\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta_0\rangle = 1$。

证明将使用以下关于稳定子态几何性质的结果：

事实 8（推论 3 of [GMC17]）。设 $|\zeta\rangle$，$|\xi\rangle$ 是两个稳定子态。若 $|\langle\zeta|\xi\rangle| \neq 1$，则 $|\langle\zeta|\xi\rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

引理 7 的证明。由于 H 是一个 Clifford 门，$\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle$ 是一个稳定子态。我们将证明，在 $\left|\langle\eta|\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| \neq 1$ 为奇数的情形下 k，根据事实 8 即可得到该界。

回忆一下，$|\eta\rangle\langle\eta| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$, 其中 $G \equiv \mathrm{Stab}(|\eta\rangle)$。我们分两种情况讨论：

I.（每个 $S \in G$ 都包含一个 $\mathbb{I}$ 或一个 Y，位于某个位置）在这种情况下，我们计算

$$\begin{aligned}
\langle\eta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle &= \mathrm{Tr}\left[|\eta\rangle\langle\eta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\right], \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left[g\,\mathrm{H}^{\otimes k}\right], \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i\in[k]}\mathrm{Tr}[g_i\,\mathrm{H}], \\
&= 0,
\end{aligned}$$

w这里最后一行成立，是因为对于某个 j，$g_j \in \{\mathbb{I}, Y\}$，并且 $\mathrm{Tr}[\mathrm{H}] = \mathrm{Tr}[Y\mathrm{H}] = 0$。

II.（存在一个仅由 X 和 Z 组成的 $S \in G$）考虑 k 为奇数的情况。由于 $\mathrm{wt}(S) = k$，S 包含以下两种情况之一：(1) 含有奇数个 X 和偶数个 Z；或 (2) 含有偶数个 X 和奇数个 Z。我们着重讨论前一种情况；后一种情况类似。

注意，$\left|\langle\eta|\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| = 1$ 当且仅当 $\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle$ 与 $|\eta\rangle$ 具有相同的稳定子群。由于 S稳定 $|\eta\rangle$，$\mathrm{H}^{\otimes k}\,S\mathrm{H}^{\otimes k}$ 稳定 $\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle$。我们知道 H 如何共轭泡利算符：$X \mapsto Z$、$Z \mapsto X$和 $Y \mapsto -Y$。根据假设，S 含有奇数个 X和偶数个 Z，因此 $\mathrm{H}^{\otimes k}\,S\mathrm{H}^{\otimes k}$ 将含有偶数个 X和奇数个 Z。因此，我们有$S \cdot (\mathrm{H}^{\otimes k}\,S\,\mathrm{H}^{\otimes k}) = -(\mathrm{H}^{\otimes k}\,S\,\mathrm{H}^{\otimes k}) \cdot S$，这意味着 S与 $\mathrm{H}^{\otimes k}\,S\,\mathrm{H}^{\otimes k}$ 不可能同时属于同一个稳定子群。因此，$\mathrm{Stab}(|\eta\rangle) \neq \mathrm{Stab}(\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle)$，且$\left|\langle\eta|\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| \neq 1$。

由于在这两种情况下 $\left|\langle\eta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| \neq 1$，根据事实 8 我们必须有 $\left|\langle\eta|\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 当 k 为奇数时。我们注意到，上述证明不适用于偶数 k，因为可能所有稳定子都含有偶数个 X 和 Z（或两者都是奇数个）。在这种情况下 $\mathrm{H}^{\otimes k}$ 将属于 G 的正规化子，且两个稳定子群可能相等。

我们很容易找到一个 k 为偶数的例子，其中无法得到非平凡的上界。注意，$|\Phi^+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ 是 $\mathrm{H}^{\otimes 2}$ 的 $+1$ 本征态，因此对于偶数 k，定义 $|\eta_0\rangle \equiv |\Phi^+\rangle^{\otimes k/2}$。 □

现在我们可以证明奇数权 CSS 生成元的局部下界。

引理 9. 对于每个 k 量子比特稳定子态，$|\eta\rangle$、$\langle\eta|\,\Pi_{\bar{X}}\,|\eta\rangle \geq c_k$ 和 $\langle\eta|\,\Pi_{\bar{Z}}\,|\eta\rangle \geq c_k$，其中若 k 为偶数，则 $c_k = 0$；若 k 为奇数，则为 $c_k = \text{正弦}^2(\frac{\pi}{8})$。

证明。设 $|\eta\rangle$ 为一个 k 量子比特稳定子态。我们先考虑 $\langle\eta|\,\Pi_{\bar{X}}\,|\eta\rangle$:

$$\langle\eta|\,\tilde{\Pi}_{\bar{X}}\,|\eta\rangle \equiv \langle\eta|\,D^{\dagger\otimes k}\left(\frac{\mathbb{I}-\bar{X}}{2}\right)D^{\otimes k}\,|\eta\rangle\,, \tag{4}$$

$$\text{（由引理6）} \qquad = \langle\eta|\,\frac{\mathbb{I}-\mathrm{H}^{\otimes k}}{2}\,|\eta\rangle \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\langle\eta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right). \tag{6}$$

该界由引理7得出，因为$\sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$。

对于 $\langle\eta|\,\Pi_{\bar{Z}}\,|\eta\rangle$，我们有:

$$\langle\eta|\,\tilde{\Pi}_{\bar{Z}}\,|\eta\rangle \equiv \langle\eta|\,D^{\dagger\otimes k}\left(\frac{\mathbb{I}-\bar{Z}}{2}\right)D^{\otimes k}\,|\eta\rangle\,, \tag{7}$$

$$\text{（由引理6）} \qquad = \langle\eta|\,\frac{\mathbb{I}-(-X\,\mathrm{H}\,X)^{\otimes k}}{2}\,|\eta\rangle \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\langle\eta|\,(-X\,\mathrm{H}\,X)^{\otimes k}\,|\eta\rangle\right), \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-(-1)^k\,\langle\zeta|\,\mathrm{H}^{\otimes k}\,|\zeta\rangle\right) \tag{10}$$

其中 $|\zeta\rangle \equiv X^{\otimes k}\,|\eta\rangle$ 是另一个稳定子态，因为 $X = X^\dagger$ 属于 Clifford 群。再次由引理7得出该界。

□

引理9 给出了以下针对 n量子比特稳定子态的下界。

引理 10. 设 $S \in \mathcal{P}_n$ 是仅由泡利算符 X 和 $\mathbb{I}$ 构成的张量积，或仅由泡利算符 Z 和 $\mathbb{I}$构成的张量积。记 $k = \mathrm{wt}(S)$. 对于每个 n量子比特稳定子态，$|\eta\rangle$, $\langle\eta|\,\Pi_S\,|\eta\rangle \geq c_k$。

证明。回想一下，$\Pi_S = \Pi_S\,|_{\mathrm{N}(S)} \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\mathrm{N}(S)}$，因此

$$\langle\eta|\,\tilde{\Pi}_S\,|\eta\rangle = \mathrm{Tr}\left[\eta_{\mathrm{N}(S)}\tilde{\Pi}_S\,|_{\mathrm{N}(S)}\right], \tag{11}$$

其中 $\eta_{\mathrm{N}(S)} \equiv \mathrm{Tr}_{-\mathrm{N}(S)}[|\eta\rangle\langle\eta|]$ 是 $|\eta\rangle$ 在 $\mathrm{N}(S) \subset [n]$上的约化态。由于 $\eta_{\mathrm{N}(S)}$ 是一个 Clifford 态的约化态，根据主张 3，在 k 个量子比特上存在纯稳定子态 $\{|\eta_j\rangle\}$，使得 $\eta_{\mathrm{N}(S)} = \sum_j p_j\,|\eta_j\rangle\langle\eta_j|$。对每个$\langle\eta_j|\,\Pi_S\,|_{\mathrm{N}(S)}\,|\eta_j\rangle$应用引理 9，即可得到下界。 □

现在我们可以证明定理5。

定理 5。 设 $\{\mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}\}$ 是与一族量子（*CSS*）*LDPC* 码 $\{\langle \mathcal{S}_n\rangle\}$相关联的一族 *CSS* 哈密顿量。假设对于每个 n，生成元中有一个常数比例 $\alpha > 0$ 的生成元 $S \in \mathcal{S}_n$ 具有奇数权重。˜那么 $\{\mathcal{H}_{\mathcal{S}_n}\}$ 是一族 *NLCS* 哈密顿量。

证明。 根据定义，$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}_n} = \frac{1}{|\mathcal{S}_n|}\sum_{S\in\mathcal{S}_n} \tilde{\Pi}_S$ 其中 $\tilde{\Pi}_S$ 是与 $S \in \mathcal{S}_n$关联的经过 D旋转的投影算符。令 ψ 为一个定义在 n 个量子比特上的稳定子态。我们将直接给出 ψ能量的下界。

根据定义， $\psi = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, 其中每个 $|\varphi_j\rangle$ 都是定义在 n 个量子比特上的纯稳定子态。我们有:

$$\mathrm{Tr}\left[\psi\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}_n}\right] = \sum_j p_j \langle\varphi_j|\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}_n}|\varphi_j\rangle, \tag{12}$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{S}_n|}\sum_{S\in\mathcal{S}_n}\sum_j p_j \langle\varphi_j|\tilde{\Pi}_S|\varphi_j\rangle, \tag{13}$$

(引理 10) $$\geq \frac{1}{|\mathcal{S}_n|}\sum_{S\in\mathcal{S}_n} c_{\mathrm{wt}(S)}\sum_j p_j, \tag{14}$$

(由 c_k的定义) $$= \frac{1}{|\mathcal{S}_n|}\sum_{S\in\mathcal{S}_n:\mathrm{wt}(S),\,\mathrm{odd}} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right), \tag{15}$$

$$= \alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right), \tag{16}$$

其中，最后一行由假设 $\alpha|\mathcal{S}_n|$ 项的 $\mathcal{S}_n$ 具有奇数权重得出。由于这对所有稳定子态都成立， ψ, 因此我们有， $\{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}_n}\}$是一个 ϵ-NLCS，且其 $\epsilon = \alpha\sin^2(\frac{\pi}{8}) = \Omega(1)$。 □

现在我们转向主要结果：存在一个同时具有 NLTS 和 NLCS 性质的局部哈密顿量族。回顾 [ABN 22]:

定理 （ [ABN22], 的定理 5 的简化版）。存在一个常数 $\epsilon_0 > 0$ 以及一个与一族量子低密度奇偶校验码相关联的显式 *CSS* 哈密顿量族， $\{\langle\mathcal{S}_n\rangle\}$，它是 ϵ_0-*NLTS*。

为了使用我们的定理 5，我们要求 $\mathcal{S}_n$ 中的稳定子生成元有一个奇数比例具有奇数权重。并不能立即看出， [LZ22]中的量子 Tanner 码是否满足这一点。不过，第 4 节专门证明以下结果。

断言 11。 存在一个显式 *CSS* 码族，满足 *[ABN22]*的定理 *5* 的条件，且其中每个稳定子生成元的权重都是奇数。

有了断言 11，我们现在可以证明本文的主要结果了。

定理 12。 设 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 为断言 *11*中的 *CSS* 哈密顿量族。其 D旋转版本 $\{\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}\}$是一个同时具有 *NLTS* 和 *NLCS* 性质的局部哈密顿量族。

证明。 由于 $\{\mathcal{H}^{(n)}\}$ 满足 [ABN22] 的定理 5 的条件，因此它是一个有效的局部哈密顿量，并且它是 ϵ_0-NLTS，其中 $\epsilon_0 > 0$ 是某个常数。由于 $D^{\otimes n}$ 是一个深度为 $\mathcal{O}(1)$ 的电路（引理 4 ）， D-旋转族$\{\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}\}$也具有 ϵ_0-NLTS 性质。

根据断言11， $\mathcal{H}^{(n)}$ 的所有稳定子项对每个 n都具有奇数权重。因此，根据定理5$\{\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}\}$ 是 ϵ_1-NLCS，参数为 $\epsilon_1 \equiv \sin^2(\frac{\pi}{8})$。令 $\epsilon' \equiv \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$，则有 $\{\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}\}$ 同时是 ϵ'-NLTS 和ϵ'-NLCS。 □

4 经典码与量子 Tanner 码

所有已知的渐近良好（距离为$\Omega(n)$，码率为$\Omega(1)$）量子低密度奇偶校验码都是 CSS 码 [BE21、PK22、LZ22]。与近期文献 [ABN22], 中 NLTS 的证明一样，我们将考虑 [LZ22]的量子 Tanner 码。定理5所需的唯一条件是，CSS 生成元中有固定比例的生成元具有奇数权重。由于量子 Tanner 码包含随机局部码成分，我们将在此证明，可以通过适当选择局部码，使所有稳定子都具有奇数权重（断言11）。由于我们不需要所选码的距离或码率方面的任何结果，因此不会详述证明量子 Tanner 码是良好的量子低密度奇偶校验码所需的诸多复杂细节。相反，我们只会提及其构造中所需的经典编码理论。先作一些回顾。

定义。 一个定义在 n 个比特上的**经典线性码** 是一个子空间 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$。对于这样的线性码，存在一个整数 $m \leq n$ 和两个满秩矩阵 $H \in \mathbb{F}_2^{m\times n}$, $G \in \mathbb{F}_2^{(n-m)\times n}$，使得 $\ker H = \text{=im}\, G^T = \mathcal{C}$。 H 称为 $\mathcal{C}$ 的**校验矩阵**，而 G 称为 $\mathcal{C}$ 的**生成矩阵**。特别地， $HG^T = 0$ 当且仅当 $x \in \mathcal{C}$，即零向量时， $Hx = 0$。此外，任意 $H \in \mathbb{F}_2^{m\times n}$都定义了一个有效的码 $\ker H$，并且我们总能找到一个 $G \in \mathbb{F}_2^{(n-\text{rk}(H))\times n}$，使得 $\text{im}\, G^T = \text{=ker}\ H$。我们通常直接使用 H，而不使用其底层码；事实上，许多经典码是通过先构造校验矩阵来构造的。

需要指出的是，尽管我们通常称之为该校验矩阵/生成矩阵，但校验矩阵和生成矩阵的选取并不唯一。此外，定义码时，我们不必局限于满秩矩阵。

定义。 给定一个线性码 $\mathcal{C}$，其**对偶码**定义为

$$\mathcal{C}^\perp \equiv \left\{x \in \mathbb{F}_2^n \mid x^T c = 0 \text{ for all } c \in \mathcal{C}\right\},$$

也就是说，对偶码是在标准点积下 $\mathcal{C}$ 的正交补。注意，如果 H （分别为 G）是 $\mathcal{C}$ 的校验向量（分别为生成矩阵），那么 H 是 $\mathcal{C}$ 的对偶码的生成矩阵（分别为校验向量），反之亦然。

顾名思义，量子 Tanner 码的一个主要组成部分是经典 Tanner 码。Tanner码是一种构造较大码（称为全局码）的方法：从较小的码（称为局部码）出发，使局部码的性质转化为全局码所需的性质。

定义。 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个具有 $|E| = n$ 的 d-正则图。对于顶点 $v \in V$，我们将与 v 相连的 d 条边记为 E_v。[10] 设 $C \subseteq \mathbb{F}_2^d$ 是定义在 d 个比特上的码。与 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{C}$ 相关联的 **Tanner 码** 定义为

$$\mathcal{T}(\mathcal{G}, C) \equiv \left\{x \in \mathbb{F}_2^n \;\middle|\; x_v \in C \text{ for all } v \in V\right\},$$

其中， x 是对 E 的比特赋值，而 x_v 是 x 在 E_v中各边上的限制。我们称C 为 $\mathcal{T}(\mathcal{G}, C)$的局部码。如果 $h \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$是 $\mathcal{C}$的校验矩阵，我们通常将$\mathcal{T}(\mathcal{G}, \mathcal{C})$记作 $= \mathcal{T}(\mathcal{G}, \ker\ h)$。我们可以根据 $\mathcal{G}$和 h构造 $\mathcal{T}(\mathcal{G}, \ker\ h)$的“全局”校验矩阵 H，方法如下： H 共有 $r|V|$ 行，每个 $\mathcal{G}$的顶点对应 r 行；共有 $|E|$ 列，每条 $\mathcal{G}$中的边对应一列。给定一个顶点 v以及局部码 h中的一行 h_j， H 的第H_v行$_j$ 定义为 H_v、$_j|_{E_v} = h_j$，其余位置均为 0。换句话说，如果我们限制在H_v中与 v相连的边所对应的列$_j$ 上，就会看到 h的第 j个校验向量。

[10]我们还假设，对于每个 v， E 中以及 E_v 中的边都已给定明确的顺序。

直观地说，在 Tanner 码中，我们为 $\mathcal{G}$的边赋予比特，并针对 $\mathcal{G}$ 中的每个顶点检查其“局部”视图是否属于选定的局部码。局部码与全局码之间的区别至关重要；尤其是在讨论量子 Tanner 码时，相关记号会变得繁复。为保持一致，提及全局码以及全局校验矩阵或生成矩阵时，我们始终使用花体 $\mathcal{C}$ 和大写 H， G 。提及局部码以及局部校验矩阵或生成矩阵时，我们始终使用标准的大写 C和小写 h， g 。

示例。考虑图2，并设 $x \in \mathbb{F}_2^n$ 为如图所示的边上的比特赋值。假设我们通过以下校验矩阵选取一个局部码$\ker h$:

$$h \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

x 不是 Tanner 码 $\mathcal{T}(\mathcal{G}, h)$ 的元素。它通过了顶点 v 处的局部检验，因为 $hx_v = [0\ \ 0]^T$，但没有通过顶点 w 处的局部检验，因为 $hx_w = [1\ \ 1]^T$。

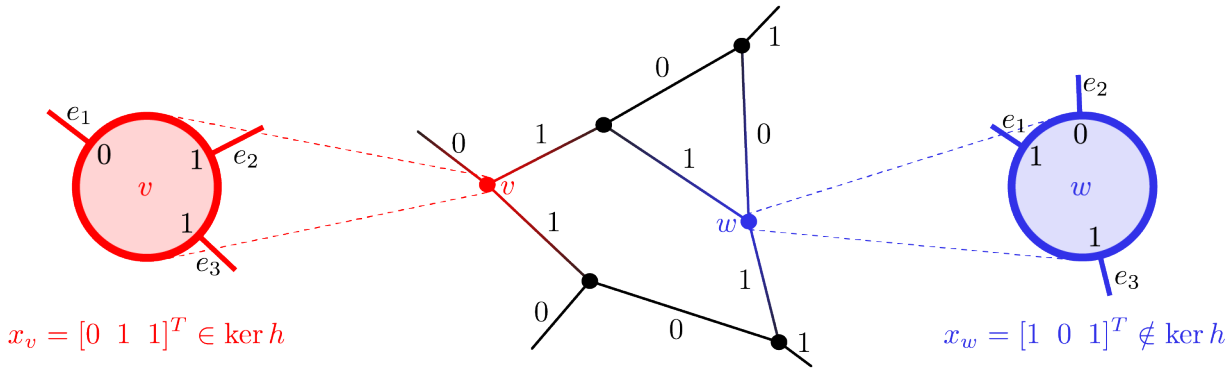


图2： Tanner码示例。请注意，这只是整体图的一部分。

Sipser 和 Spielman [SS96] 通过在一个扩展的 d-正则基图[11]上 $\mathcal{G}$定义 Tanner 码，给出了渐近良好的经典LDPC码的第一个显式示例。在他们最初的结果中，局部码由一个均匀随机校验矩阵 $h \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$给出，他们证明所得的码$\mathcal{T}(\mathcal{G}, \ker h)$ 以高概率具有渐近优良参数。

CSS 码的定义似乎与经典码的定义截然不同，而且经典码如何能用于构造量子码可能并不明了。然而，下面这个更具编码理论性质的 CSS 码定义，与第 2 节给出的定义等价。

定义 (CSS码的另一种定义)。 设 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_Z$ 是两个经典码，其校验矩阵分别为 $H_X \in \mathbb{F}_2^{m_x\times n}$和 $H_Z \in \mathbb{F}_2^{m_z\times n}$。假设 H_X 和 H_Z 满足 $H_X H_Z^T = 0$，即 $\mathcal{C}_Z^\perp \subseteq \mathcal{C}_X$。对于 H_X（分别是 H_Z）的每一行，我们关联一个泡利群元素 $S_1 \otimes \cdots \otimes S_n \in \mathcal{P}_n$，其中若第 j个元素为 1，则为$S_j = X$（分别为 $S_j = Z$）；若第 j个元素为 0，则为 $S_j = \mathbb{I}$。这些泡利元素构成一个有效稳定子群的生成集，因此定义了一个 CSS 码，记作 CSS($\mathcal{C}_X$， $\mathcal{C}_Z$)。

秉持同样的思路， [SS96], Leverrier 和 Z´emor [LZ22] 证明了，对于一个显式的 d^2-正则图[12]， $\mathcal{G}^\square$以及两个特殊局部码 C_X和 C_Z，全局码 $\mathcal{C}_X \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_X)$和 $\mathcal{C}_Z \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_Z)$

[11]我们所说的确实是一个具有 $\{\mathcal{G}_n\}$ 常数度 d的可数图族[12]。严格来说，它们定义了两个图族$\{\mathcal{G}_{0,n}^\square\}$ 和$\{\mathcal{G}_{1,n}^\square\}$ 这两个图族定义在同一个顶点集上，但具有不同的边集，而这些边集通过“方复形”结构相关联。我们的论证只依赖于它们的顶点集具有相同的大小，因此为简单起见，我们假设只有一个图 $\mathcal{G}^\square$。

以高概率定义一个渐近良好的 CSS 码。Anshu、Breuckmann 和 Nirkhe [ABN22]随后证明，这个 CSS 码满足一项充分性质，使其对应的局部哈密顿量属于 NLTS。

根据定义，码 $\mathrm{CSS}(\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Z)$ 将在以下情况下满足定理 5的条件：对于 H_X 和 H_Z 而言，都有固定比例的行具有奇数权重。因此，我们需要证明，可以选择 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_Z$ 的全局校验矩阵，使得对于每个矩阵，都有固定比例的行具有奇数权重。我们可以通过考察局部校验矩阵，并利用以下结果来实现这一点：

引理 13。 令 $\mathcal{T}(\mathcal{G}$、核 $h)$ 为一个 *Tanner*码。若 $\alpha > 0$ 比例的 $h \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$行具有奇数权重，则相应全局校验矩阵 H 中也有 α 比例的行具有奇数权重。

证明。 根据假设，对于每个 $v \in V$， r 行中对应于 H 的 αr 行都具有奇数权重。因此， H 的 $r|V|$ 行具有奇数权重，蕴含关系成立。注意，由于 h的维数都是固定常数，即使局部校验矩阵中只有一行具有奇数权重，全局校验矩阵中也至少有 $1/r > 0$ 比例的行具有奇数权重，而这是一 个常数。

□

例如，这说明经典扩展码中有一半的行具有奇数权重，因为局部校验向量矩阵是均匀随机选取的。如果局部码 $\mathcal{C}_X$、$\mathcal{C}_Z$（属于 [LZ22]）也是通过均匀随机校验矩阵选取的，我们就大功告成了。遗憾的是，量子Tanner码的局部码具有更复杂的结构。

给定 t 两个码 C_0、$C_1 \subseteq \mathbb{F}_2^d$，定义在 d 比特上，其“对偶张量码”是一个定义在 d^2 比特上的码 as

$$C_0 \boxplus C_1 \equiv \left(C_0^\perp \otimes C_1^\perp\right)^\perp.$$

这个定义相当晦涩，但我们可以用一种更简单的方式来理解对偶张量码：

事实 14。 如果 h_0、 h_1 分别是 C_0、 C_1 的校验矩阵，那么

$$\ker\left(h_0 \otimes h_1\right) = C_0 \boxplus C_1.$$

也就是说， $h_0 \otimes h_1$ 是 C_0 和 C_1 的对偶张量码的一个校验矩阵。

量子Tanner码的组成部分经典Tanner码的局部码都是对偶张量码。现在我们陈述 [LZ22] 关于量子低密度奇偶校验码的主要结果。请注意，为了更好地契合我们的讨论，我们将两个定理合并陈述。

事实 *15*（ [*LZ22*] 的定理 *2* 和定理 *17*）。取 $\mathcal{G}^\square$ 为 *[LZ22]* 中构造的 d^2-正则图族，并令 $r \equiv \lfloor \rho d \rfloor$ 为 $\rho \in (0, 1/2)$。通过均匀随机地选取元素来选择 $h_0, h_1 \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$。令 h_0 为码 C_0 的校验矩阵， h_1 为码 C_1 的生成矩阵，即 $C_0 = \ker h_0$ 和 $C_1 = \mathrm{im}\ h_1^T$。当 d 趋于无穷时，以概率 *1*，经典 *Tanner* 码 $\mathcal{C}_X \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_0 \boxplus C_1)$ 和 $\mathcal{C}_Z \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_0^\perp \boxplus C_1^\perp)$ 可构成一族渐近良好的量子低密度奇偶校验码。

如前所述，这两个经典码的局部码本身是由两个更小的码构造而成的。为 C_0 选取随机校验矩阵、为 C_1 选取随机生成矩阵，是为了使构造具有对称性，尤其是因为 h_0 是 $C_0^\perp$的随机生成矩阵，而 h_1 是 $C_1^\perp$的随机校验向量 矩阵。

要应用引理13 ，我们首先需要为 $C_0 \boxplus C_1$ 和 $C_0^\perp \boxplus C_1^\perp$构造局部校验矩阵。根据事实14，这等价于为 C_0、C_1、$C_0^\perp$、以及 $C_1^\perp$选取校验矩阵。根据事实15的陈述，我们已经有了 C_0 和 $C_1^\perp$的校验矩阵，因此必须为C_1 和 $C_0^\perp$选取校验矩阵。

我们需要以下技术引理来证明本节的主要结果：

引理 16。 通过在 $\{0,1\}$ 中独立同分布地均匀随机选取元素来选择 $A \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$，其中 $r = \lfloor \rho d \rfloor$ 满足 $\rho \in (0,\ 1/2)$。当 d 趋于无穷大时，以下结论以概率 *1* 成立：

1. A 至少有一行的权重为奇数。 *2.* 至少有一个 $x \in \ker A \subseteq \mathbb{F}_2^d$ 的权重为奇数。

证明。 我们将 A 的第 i 行记为 A_i。

(1.) 令 $\mathsf{par}(v) \equiv \mathsf{wt}(v) \bmod 2$ 表示 $v \in \mathbb{F}_2^d$ 的奇偶性，并令 O_A 为对应于 A 中奇数权重行数的 [非负] 随机变量，即 $O_A \equiv |\{A_i \mid \mathsf{par}(A_i) = 1\}|$。

$$\begin{aligned}
\Pr[O_A > 0] &= 1 - \Pr[O_A = 0], && (17)\\
&= 1 - \Pr\Big[\mathrm{par}(A_i) = 0 \ \ \forall i \in [r]\Big], && (18)\\
(\because \text{i.i.d.}) \quad &= 1 - \Pr\Big[\mathrm{par}(A_1) = 0\Big]^r, && (19)\\
&= 1 - (1/2)^r, && (20)
\end{aligned}$$

最后一行成立，是因为 $A_1 \in \mathbb{F}_2^d$ 是均匀随机的，且 $\mathbb{F}_2^d$ 中一半的向量具有偶数权重。由于 $r = \lfloor \rho d \rfloor$，当 d 趋于无穷大时，该值趋近于 1。

(2.) 我们将对每个 $x \in \ker A$ 都具有偶数权重这一事件的概率进行估计。所有码字都具有偶数权重，当且仅当全1向量 $[1,1,\ldots,1]$ 是 $\ker A$ 的校验向量。也就是说，当且仅当 $1^d \equiv [1,1,\ldots,1] \in \mathrm{im}\ A^T$，即 A 的行空间时。令 $S_k \equiv \mathsf{Span}\{A_1,\ldots,A_k\}$ 表示 A 的前 k 行所张成的空间，并注意 $S_r = \mathrm{im}\ A^T$。我们将对 r 使用归纳法证明 $\Pr\big[1^d \in S_r\big] \le (2^r-1)/2^d$。

当 $r = 1$ 时，$\Pr\big[1^d \in S_1\big] = \Pr\big[A_1 = 1^d\big] = 1/2^d$，正如所需。对于 $k \ge 1$，假设 $\Pr\big[1^d \in S_k\big] \le (2^k-1)/2^d$。考虑 $k+1$。根据全概率公式，我们有

$$\begin{aligned}
\Pr\Big[1^d \in S_{k+1}\Big] &= \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \in S_k\Big] \cdot \Pr\Big[1^d \in S_k\Big]\\
&\quad + \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \notin S_k\Big] \cdot \Pr\Big[1^d \notin S_k\Big], && (21)\\
(\Pr\Big[1^d \notin S_k\Big] \le 1) \quad &\le \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \in S_k\Big] \cdot \Pr\Big[1^d \in S_k\Big]\\
&\quad + \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \notin S_k\Big], && (22)\\
(1^d \in S_k \Rightarrow 1^d \in S_{k+1}) \quad &= \Pr\Big[1^d \in S_k\Big] + \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \notin S_k\Big],\\
(\text{I.H.}) \quad &\le \frac{2^k-1}{2^d} + \Pr\Big[1^d \in S_{k+1} \ \Big|\ 1^d \notin S_k\Big]. && (23)
\end{aligned}$$

现在考虑 $1^d \notin S_k = \mathsf{Span}\{A_1,\ldots,A_k\}$ 的情形。由于 $|S_k| \le 2^k$，$1^d \in S_{k+1}$ 仅当某个 $v \in S_k$ 满足 $A_k = 1^d + v$ 时成立。由于 A_k 是均匀随机选取的，这种情况发生的概率为 $2^k/2^d$。因此，

$$\Pr\Big[1^d \in S_{k+1}\Big] \le \frac{2^k-1}{2^d} + \frac{2^k}{2^d} = \frac{2^{k+1}-1}{2^d}, \tag{24}$$

正如所需。综上，我们有

$$\Pr[\#\text{ odd weight vectors in } \ker A > 0] = 1 - \Pr\Big[1^d \in S_r\Big] \ge 1 - \frac{2^{\lfloor \rho d \rfloor}-1}{2^d}, \tag{25}$$

当 d 趋于无穷大时，它趋于 1。

□

推论 17. 令 h 按引理16 选取，并假设 $C \equiv \ker h$。当 d 趋于无穷大时，以概率 *1*，任意校验矩阵 $g \in \mathbb{F}_2^{(d-r)\times d}$，对于 $C^\perp$ 至少有一行的权重为奇数。

证明。 回顾一下，对于 $C^\perp$ 的校验矩阵是 C的生成矩阵，因此 g 的各行生成了 $C = \ker h$中的码字。反设 g 的所有行都具有偶数权重。在 $\mathbb{F}_2$ 上，任意两个偶数权重向量之和的权重仍为偶数，因此 C 中的所有码字都必须具有偶数权重。然而，根据引理 16 至少有一个 $x \in C$ 具有奇数权重，矛盾。 □

现在我们证明本节的主要结果，即断言11。

断言 11。 存在一个满足 *[ABN22]*的定理 *5* 条件的显式 *CSS*码族，使得每个稳定子生成元都具有奇数权重。

证明。 定理 5 中使用的 CSS码族 [ABN22]正是事实 $\mathrm{CSS}(\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Z)$给出的族，其中事实 15 由 $\mathcal{C}_X \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_0 \boxplus C_1)$ 和 $\mathcal{C}_Z \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_0^\perp \boxplus C_1^\perp)$ 给出。我们必须证明，整体校验矩阵 H_X 和 H_Z （分别属于 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_Z$ ）可以选取为仅包含奇数权重的行。

根据事实15，当 d 趋于无穷时，以概率 1 随机选取的校验矩阵$h_0 \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$（对于 C_0 ）以及生成矩阵 $h_1 \in \mathbb{F}_2^{r\times d}$（对于 C_1）将得到渐近良好的量子低密度奇偶校验码。根据事实 14，$C_0 \boxplus C_1$ 的校验矩阵为 $h_0 \otimes g_1$，其中 g_1 是 $C_1 = (C_1^\perp)^\perp$的任意校验矩阵；而 $C_0^\perp \boxplus C_1^\perp$的校验矩阵为 $g_0 \otimes h_1$，其中 g_0 是 $C_0^\perp$的任意校验矩阵。

根据引理 16 的第 1 点，当 d 趋于无穷时， h_0 和 h_1 以概率 1 都至少有一行具有奇数权重。类似地，根据推论 17，当 d 趋于无穷时， g_0 和 g_1以概率 1 都至少有一行具有奇数权重。我们按如下方式构造一个新矩阵 h_0'：令 $h_{0,\star}$ 为 h_0 中一个具有奇数权重的行。我们将 h_0 的每个具有奇数权重的行作为 h_0' 的一行；对于每个具有偶数权重的行 $h_{0,j}$， h_0' 中都有一行 $h_{0,j} + h_{0,\star}$。由于偶数权重向量与奇数权重向量之和具有奇数权重，矩阵 h_0' 的所有行都具有奇数权重（前提是 h_0 至少有一行具有奇数权重）。我们还注意到，将一行加到另一行不会改变矩阵的核。也就是说，$\ker h_0 = \ker h_0'$。我们以类似方式构造矩阵 h_1'， g_0'，以及 g_1'。根据构造， h_0'， h_1'， g_0'，和 g_1' 的所有行都具有奇数权重。

由于 $\ker(h_0' \otimes g_1') = \ker(h_0 \otimes g_1) = C_0 \boxplus C_1$, $h_0' \otimes g_1'$ 是 [ABN22] 的定理 5 所用的 $\mathcal{C}_X \equiv \mathcal{T}(\mathcal{G}^\square, C_0 \boxplus C_1)$ 局部码的校验矩阵。由于 h_0' 和 g_0' 的每一行都具有奇数权重，它们的张量积的每一行也如此。因此，根据引理 13，由 h_0' 和 g_1' 构造的相应全局校验矩阵 H_X 的每一行都具有奇数权重。由 g_0' 和 h_1'构造的全局校验矩阵 H_Z 也同样如此。

由于当 d趋于无穷时，所有这些性质都以概率 1 成立，因此存在某个常数 d，使得存在显式矩阵 h_0'、h_1'、 g_0'、 以及 g_1' 满足此断言的所有条件、事实 15 （ [LZ22]的定理 2 和定理 17），以及 [ABN22]的定理 5。 □

5 未来工作

（1）这项工作提出的最直接问题，是证明将任意 CSS 哈密顿量旋转 $(e^{-i\frac{\pi}{8}Y})^{\otimes n}$ 后都能得到 NLCS 哈密顿量。对于稳定子生成元中有固定比例具有奇数权重的情形，我们已经证明了这一点；这是我们的证明方法所要求的技术条件。不过，我们相信所有经 $e^{-i\frac{\pi}{8}Y}$ 旋转的 CSS 哈密顿量都是 NLCS。第一步可以是证明这一点适用于 $\mathcal{H} = \frac{1}{n}\sum |11\rangle\langle 11|_{i,i+1} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{2}(\mathbb{I} - Z_iZ_{i+1})$，因为其中的稳定子生成元权重均为偶数。

（2）NLACS 哈密顿量是 NLSS 或量子 PCP 猜想与NP $\neq$ QMA（见图 3）的推论，因此我们相信它们确实存在。在附录 B 中，我们给出了一个自包含的证明，证明简单的 D-旋转零哈密顿量 $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{n}\sum_i (e^{i\frac{\pi}{8}Y}|1\rangle\langle 1|e^{-i\frac{\pi}{8}Y})_i$是 NLCS；在附录

˜B.1中，我们给出了 Clifford + 1 T 门作用于 $\mathcal{H}_0$下所产生态的能量的精确下界。我们还猜想，对于任意 $t \leq n$，由 Clifford + t T 门制备的态的能量也存在一个精确下界。

(3) 我们希望，我们的技术能够导出满足 NLSS 的局部哈密顿量。考虑零哈密顿量，$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{n}\sum |1\rangle\langle 1|_i$, 以及一族 Haar随机低深度电路，$C = \{C_n\}$局部哈密顿量 $C\mathcal{H}_0C^\dagger$ 的唯一基态恰好是 $C|0^n\rangle$，[13] 除非2中定义的）P = #P [BFNV18，Mov19]否则无法采样。我们希望，对于能量足够低的常数能量态，情况同样如此，但要证明这一点还需要新的技术。若这一点成立，$C\mathcal{H}_0C^\dagger$将是一个 NLSS 哈密顿量，除非P = #P。

类似于我们关于同时满足 NLTS 和 NLCS 的结果，人们可能希望，通过随机低深度电路旋转任意 CSS 哈密顿量，也能得到同时满足 NLTS 和 NLSS 的结果。然而，要证明这一点，还有许多尚未解决的前提条件。例如，对于 CSS 哈密顿量，$\mathcal{H}$，$C\mathcal{H}C^\dagger$ 的每个基态都具有 $C|\psi\rangle$ 的形式，其中 codestate 为 $|\psi\rangle$。将随机低深度电路作用于 CSS 码的 codestate 后得到的态并不一定不可采样，因此尚不清楚，即使是这类哈密顿量的基态空间，是否也不可采样。

(4) 值得注意的是，通过常数深度电路旋转哈密顿量这一技术，虽然可能有助于确立 NLSS，但似乎无法满足量子 PCP 猜想所需的某些其他前提。例如，事实2 指出，局部可近似态的能量可以在 NP 中计算，因此量子 PCP 猜想蕴含以下结论（假设 NP $\neq$ QMA）：

猜想 1（不存在低能局部可近似态（NLLS））。存在一族局部哈密顿量 $\mathcal{H}^{(n)}$，以及一个常数 $\epsilon > 0$，使得 $\mathcal{H}^{(n)}$ 的所有 ϵ 低能态都不是局部可近似的。

一个密切相关的猜想（“不存在低能级、可经典计算的态”猜想）最近在 [WFC23]中提出。[14] 通过常数深度电路旋转，可像保留 NLTS 性质一样保留 NLLS 性质，因此不能通过旋转哈密顿量来解决 NLLS 猜想。

此外，对于经常数深度电路旋转的任意 CSS 哈密顿量（包括本文考虑的所有构造），局域哈密顿量问题都属于 NP。注意，每个经 C 旋转的 CSS 哈密顿量都有一个形如 $C^\dagger|\varphi\rangle$ 的基态，其中 $|\varphi\rangle$ 是某个稳定子态。此类状态可以通过局部近似得到，因为利用平凡态和稳定子态的局部密度矩阵计算方法，就能高效地计算局部密度矩阵。

[13]请注意，我们通常将旋转记为 C，写作 $C^\dagger\mathcal{H}C$，而不是 $C\mathcal{H}C^\dagger$。这里我们调换了顺序，因此基态为 $C|0^n\rangle$，而不是 $C^\dagger|0^n\rangle$。[14]请注意，这些猜想并不能推出 LH-$\epsilon \notin$ NP，因为它们无法排除那些基态能量具有间接NP-见证的哈密顿量。 [BV04] 为某些对易哈密顿量构造了此类见证。

参考文献

[AALV08] Dorit Aharonov、Itai Arad、Zeph Landau 和 Umesh Vazirani。可检测性引理与量子间隙放大，2008年11月。arXiv:0811.3412 [凝聚态物理，物理学：量子物理]。网址：http://arxiv.org/abs/0811.3412。1[AAV13] Dorit Aharonov、Itai Arad 和 Thomas Vidick。量子 PCP 猜想，2013年9月。arXiv：1309.7495。网址：http://arxiv.org/abs/1309.7495。1.1，（文档）[AB22] Anurag Anshu 和 Nikolas P. Breuckmann。组合 NLTS 的构造，2022年6月。编号：arXiv:2206.02741 arXiv:2206.02741 [量子物理]。网址：http://arxiv.org/abs/2206.02741。1[ABN22] Anurag Anshu、Nikolas Breuckmann 和 Chinmay Nirkhe。基于良好量子码的 NLTS 哈密顿量，2022年6月。编号：arXiv:2206.13228 arXiv:2206.13228 [凝聚态物理，物理学：量子物理]。网址：http://arxiv.org/abs/2206.13228。（文档），1，1，3，3，11，3，4，4，11，4[ALM+98] Sanjeev Arora、Carsten Lund、Rajeev Motwani、Madhu Sudan 和 Mario Szegedy。证明验证与近似问题的困难性。《美国计算机学会学报》，45(3):501–555，1998年5月。doi:10.1145/278298.278306。1[AN02] Dorit Aharonov 和 Tomer Naveh。量子 NP——综述，2002年10月。arXiv:quant- ph/0210077。网址：http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210077。1[AN22] Anurag Anshu 和 Chinmay Nirkhe。量子码哈密顿量低能态的电路下界。载于 Mark Braverman（编），第13届理论计算机科学创新会议（ITCS 2022），第215卷《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs），第6:1–6:22页，德国达格施图尔，2022年。达格施图尔城堡——莱布尼茨信息学中心。网址：https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/15602，doi:10.4230/LIPIcs.ITCS.2022.6。6[AS92] S. Arora 和 S. Safra。概率性证明检验：NP 的一种新刻画。载于《第33届计算机科学基础年度研讨会会议论文集》，第2–13页，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，1992年。IEEE。网址：http://ieeexplore.ieee.org/document/267824/，doi:10.1109/SFCS.1992.267824。1[BE21] Nikolas P. Breuckmann 和 Jens N. Eberhardt。平衡乘积量子码。《IEEE 信息论汇刊》，67(10):6653–6674，2021年。doi:10.1109/TIT.2021.3097347。4[BFNV18] Adam Bouland、Bill Fefferman、Chinmay Nirkhe 和 Umesh Vazirani。关于量子随机电路采样的复杂性与验证。《自然·物理》，15(2):159–163，2018年10月。网址：https://doi.org/10.1038%2Fs41567-018-0318-2，doi:10.1038/s41567-018-0318-2。（3）[BG16] Sergey Bravyi 和 David Gosset。以 Clifford 门为主的量子电路的改进经典模拟。《物理评论快报》，116(25):250501，2016年6月。doi:10.1103/PhysRevLett.116.250501。2[BV04] S. Bravyi 和 M. Vyalyi。k-局域哈密顿量问题及公共特征空间问题的交换版本，2004年12月。arXiv:quant-ph/0308021。网址：http://arxiv.org/abs/quant-ph/0308021。14

[CRSS97] A. R. Calderbank、E. M. Rains、P. W. Shor 和 N. J. A. Sloane。《量子纠错与正交几何》。《物理评论快报》，78(3)：405–408，1997年1月。doi:10.1103/ PhysRevLett.78.405。2.1[CRSS98] A.R. Calderbank、E.M. Rains、P.M. Shor 和 N.J.A. Sloane。《通过 GF(4) 上的码实现量子纠错》。《IEEE 信息论汇刊》，44(4)：1369–1387，1998年7月。doi:10.1109/18.681315。2.1[FH13] M. H. Freedman 和 M. B. Hastings。《非k超有限复形上的量子系统：扩展图上经典统计力学的推广》，2013年7月。arXiv:1301.1363 [quant-ph]。网址：http://arxiv.org/abs/1301.1363。1.1[GL22] Sevag Gharibian 和 Franc¸ois Le Gall。《量子奇异值变换的去量子化：量子化学与量子 PCP 猜想中的困难性及应用》。载于《第54届 ACM SIGACT 计算理论年会》会议论文集，第19–32页，2022年6月。arXiv:2111.09079 [quant-ph]。网址：http://arxiv.org/abs/2111. 09079，doi:10.1145/3519935.3519991。（文档），1，4，3，2.2[GMC17] H´ector J. Garc´ıa、Igor L. Markov 和 Andrew W. Cross。《稳定子态的几何》，2017年11月。arXiv:1711.07848 [quant-ph]。网址：http://arxiv.org/abs/1711. 07848。8[Got96] Daniel Gottesman。《达到量子汉明界的量子纠错码类》。《物理评论A辑》，54(3)：1862–1868，1996年9月。doi:10.1103/PhysRevA.54. 1862。2.1[Got98] Daniel Gottesman。《量子计算机的海森堡表象》，1998年7月。arXiv:quant-ph/9807006。网址：http://arxiv.org/abs/quant-ph/9807006。1[KSV02] A. Kitaev、A. Shen 和 M. Vyalyi。《经典与量子计算》，数学研究生教材第47卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年5月。网址：http://www.ams.org/gsm/047，doi:10.1090/gsm/047。1[LZ22] Anthony Leverrier 和 Gilles Z´emor。《量子Tanner码》，2022年4月。编号：arXiv:2202.13641 arXiv:2202.13641 [quant-ph]。网址：http://arxiv.org/abs/2202. 13641。1，3，4，4，4，4，15，4[Mov19] Ramis Movassagh。《量子霸权与随机电路》，2019年。网址：https://arxiv.org/abs/1909.06210，doi:10.48550/ARXIV.1909.06210。（3）[PK22] Pavel Panteleev 和 Gleb Kalachev。《渐近良好的量子码与局部可检验经典 LDPC 码》，2022年1月。arXiv：2111.03654。网址：http://arxiv.org/abs/2111. 03654。4[SS96] M. Sipser 和 D.A. Spielman。《扩展码》。《IEEE 信息论汇刊》，42(6)：1710–1722，1996年11月。doi:10.1109/18.556667。4，4[WFC23] Jordi Weggemans、Marten Folkertsma 和 Chris Cade。《具有启发式 Ansatz 态制备及量子 PCP 猜想相关意义的可引导局部哈密顿量问题》，2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2302.11578，doi:10.48550/ARXIV. 2302.11578。（4）

A 省略的证明

A.1 混合 Clifford 态

定义18。 令 G 为一个稳定子群， $P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n \in \mathcal{P}_n$ 为任意泡利算符，且 $A \subseteq [n]$ 为任意一组 n 量子比特。我们将集合$G_{A,\ P}$定义为

$$G_{A,P} \equiv \left\{ g_A \;\middle|\; g \in G,\ g_j = P_j \text{ for all } j \notin A \right\},$$

其中， g_A 表示将 g 限制到 A （注意， g_A 作用于 $|A|$ 个量子比特，而非 n 个量子比特） .

$G_{A,\ P}$可以看作 G 中所有在子集 A之外与 P相等的元素，不过我们只考虑这些元素在 A 上的限制（包括整体相位）。为简便起见，我们用$G_{i,\ P} \equiv G_{\{i\},\ P}$和$G_{-A,\ P} \equiv G_{[n]\setminus A,\ P}$表示 $i \in [n]$。我们用 G_A表示$G_{A,\ \mathbb{I}}$这一特殊情形。$G_A \equiv \{g_A \mid g \in G$和 $\mathrm{N}(g) \subseteq A\} \cup \{\mathbb{I}_A\}$ 是 G 中所有仅作用于 A中量子比特的元素的集合。

命题 3 可由以下两个众所周知的事实直接得出。

事实 19. 设 $G \leq \mathcal{P}_n$ 是一个稳定子群， $\mathcal{C}$ 是其对应的编码空间。$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$ 是投影到$\mathcal{C}$上的投影算符。若 $|G| = 2^n$，则 $\frac{1}{2^n}\sum_{g\in G} g = |\psi\rangle\langle\psi|$, ，其中 $|\psi\rangle$ 是与 G对应的稳定子态。否则，对于 $r > 0$ ，有 $|G| = 2^{n-r}$ ，且 $\mathcal{C}$有 2^r 个逻辑基态。令 $\{|\bar{x}\rangle\}$ 表示 $\mathcal{C}$的逻辑计算基态。那么

$$\frac{1}{2^{n-r}}\sum_{g\in G} g = \sum_{x\in\mathbb{F}_2^r} |\bar{x}\rangle\langle\bar{x}| .$$

事实 20。 假设 $|\psi\rangle$ 是一个作用于 N 个量子比特上的稳定子态，其稳定子群为 G ，并设 A 是一个由 n个量子比特组成的子集。根据事实 *19* ， 我们可以写成 $+\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2^N}\sum_{g\in G} g$。在 A上的局部态 $\psi \equiv \mathrm{Tr}_{-A}[|\psi\rangle\langle\psi|]$ 等于

$$\psi = \frac{1}{2^n}\sum_{\hat{g}\in G_A} \hat{g}.$$

命题 3。 如果 ψ 是一个 *Clifford* 态，那么它也是一个稳定子态。

证明。 根据定义，存在一个纯 Clifford 态 $|\psi\rangle$ ，它作用于 $N \geq n$ 个量子比特，并且存在一个子集 A ，包含 n 个量子比特，使得 $\psi = \mathrm{Tr}_{-A}[|\psi\rangle\langle\psi|]$。设 $G \equiv \mathrm{Stab}(|\psi\rangle)$，并设 G_A 按事实 20中的定义给出。根据定义， G_A 是 $\mathcal{P}_n$ 的一个阿贝尔子群，且不包含 $-\mathbb{I}$，因此它是一个有效的稳定子群。设 $|G_A| = 2^{n-r}$。我们有

$$\text{(By Fact 20)} \qquad \psi = \frac{1}{2^r 2^{n-r}}\sum_{\hat{g}\in G_A} \hat{g}, \tag{26}$$

$$\text{(By Fact 19)} \qquad = \frac{1}{2^r}\sum_{x\in\mathbb{F}_2^r} |\bar{x}\rangle\langle\bar{x}| . \tag{27}$$

由于每个 $|\bar{x}\rangle\langle\bar{x}|$ 都是 n 个量子比特上的稳定子态，且 $\sum_{x\in\mathbb{F}_2^r} \frac{1}{2^r} = 1$，因此该陈述得证。 □

A.2 旋转投影算符

返回命题6。

命题 6。

$$\tilde{\Pi}_{\bar{X}} = \frac{\mathbb{I} - \mathrm{H}^{\otimes k}}{2}, \qquad \tilde{\Pi}_{\bar{Z}} = \frac{\mathbb{I} - (-X\,\mathrm{H}\,X)^{\otimes k}}{2}.$$

证明。我们将证明 $D^\dagger X D = \mathrm{H}$ 和 $D^\dagger Z D = -X\mathrm{H}\,X$。由于 $\Pi_{\bar{X}} \equiv (\frac{1}{2})(\mathbb{I} - X)$ 且 $\Pi_{\bar{Z}} \equiv (\frac{1}{2})(\mathbb{I} - Z)$，结论得证。

$$\begin{aligned}
D^\dagger X D &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) ZX\right) X \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) XZ\right), \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) X + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) Z\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) XZ\right), \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) X + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) Z + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) Z - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) X, \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) Z + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) X, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z + X), \\
&= \mathrm{H}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^\dagger Z D &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) ZX\right) Z \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) XZ\right), \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) Z - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) X\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) XZ\right), \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) Z - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) X - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) X - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) Z, \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) Z - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) X, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X), \\
&= -X\,\mathrm{H}\,X.
\end{aligned}$$

□

B 一个简单的 NLCS哈密顿量

本节旨在证明一类简单的 NLCS 哈密顿量确实存在。

定义 21. 零哈密顿量， $\mathcal{H}_0^{(n)}$ 定义为

$$\mathcal{H}_0^{(n)} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |1\rangle\langle 1|_i \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\{i\}}\,.$$

注意，对于所有 $x \in \mathbb{F}_2^n$， $\mathcal{H}_0^{(n)}|x\rangle = \frac{|x|}{n}|x\rangle$ 均成立。特别地， $\mathcal{H}_0^{(n)}$ 的唯一基态是 $|0\rangle^{\otimes n}$，其能量为 0。对于 $n=1$，有 $\mathcal{H}_0^{(1)} = |1\rangle\langle 1|,$，因此我们可以将作用于 n 个量子比特的零哈密顿量写为

$$\mathcal{H}_0^{(n)} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_0^{(1)} \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\{i\}}\,.$$

注。 定义一组稳定子生成元， $\mathcal{S}_n \equiv \{Z_1,\ldots,Z_n\}$ 其中 Z_i 是作用于量子比特 i 上的泡利算符， Z 并在其他位置为恒等算子。零哈密顿量是与 $\langle\mathcal{S}_n\rangle$ 相关联的 CSS 哈密顿量，因为 $|1\rangle\langle 1| = \frac{\mathbb{I}-Z}{2}$。本节的结果直接由第3节的结果推得。

令 $D \equiv e^{-i\frac{\pi}{8}Y}$。我们将 D 旋转零哈密顿量定义为

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)} \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\{i\}},$$

其中 $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)} = D^\dagger |1\rangle\langle 1| D$。我们将通过证明每个局部项上稳定子态能量的一个简单下界，证明 D 旋转零哈密顿量是 NLCS。根据断言 3，每个稳定子态的约化态都是稳定子态的凸组合，因此这些“局域”下界意味着所有稳定子态的全局下界。我们有以下局域能量下界。注意

引理 22。 若 $|\eta\rangle$ 是单量子比特稳定子态，则 $\langle\eta|\tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)}|\eta\rangle \geq \sin^2(\frac{\pi}{8})$。 –

证明。 根据定义， $\tilde{H}_0^{(1)} = D^\dagger|1\rangle\langle 1|D,$ 所以 $\langle\eta|\tilde{H}_0^{(1)}|\eta\rangle = |\langle 1|D|\eta\rangle|^2$。由于

$$D = \cos\Big(\frac{\pi}{8}\Big)\mathbb{I} - i\sin\Big(\frac{\pi}{8}\Big)Y = \cos\Big(\frac{\pi}{8}\Big)\mathbb{I} + \sin\Big(\frac{\pi}{8}\Big)XZ,$$

我们有

$$D = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}.$$

那里 只需检查六种单量子比特稳定子态： $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$、 $|+\rangle$ 、 $|-\rangle$ 、 $|y+\rangle$ 以及 $|y-\rangle$.

- $|\langle 1|D|0\rangle|^2 = \sin^2(\frac{\pi}{8})$.
- $|\langle 1|D|1\rangle|^2 = \cos^2(\frac{\pi}{8})$.
- $|\langle 1|D|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{8}))^2 = \frac{1}{2}(1+\sin(\frac{\pi}{4})) = \cos^2(\frac{\pi}{8})$.
- $|\langle 1|D|-\rangle|^2 = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{\pi}{8}))^2 = \frac{1}{2}(1-\sin(\frac{\pi}{4})) = \sin^2(\frac{\pi}{8})$.
- $|\langle 1|D|y+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8})\right|^2 = \frac{1}{2}$.
- $|\langle 1|D|y-\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\sin(\frac{\pi}{8}) - i\cos(\frac{\pi}{8})\right|^2 = \frac{1}{2}$.

由于 $\sin^2(\frac{\pi}{8})$ 是最小值，故得证。 □

推论 23. 若 η 是单量子比特混合稳定子态，则 $\mathrm{Tr}\left[\eta\tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)}\right] \geq \sin^2(\frac{\pi}{8})$。

证明。 根据定义， $\eta = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, 其中每个 $|\varphi_j\rangle$ 都是单个量子比特上的纯稳定子态。将引理 22 应用于每个 $|\varphi_j\rangle$，即可得到下界。 □

现在我们得到以下全局下界。

引理 24. 若 $|\eta\rangle$ 是一个 n量子比特稳定子态，则 $\langle\eta|\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}|\eta\rangle \geq \sin^2(\frac{\pi}{8})$。

证明。 根据定义， $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)}|_i \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\{i\}}$，因此

$$\langle\eta|\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}|\eta\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}\left[\eta_i\tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)}\right],$$

其中 $\eta_i \equiv \mathrm{Tr}_{-i}[|\eta\rangle\langle\eta|]$ 是 $|\eta\rangle$ 在量子比特 i上的约化态。由于 η_i 是 Clifford 态的约化密度矩阵，根据命题 3 ，它也是一个稳定子态。对求和中的每一项应用推论 23即可得到该界。

□

命题 25. $\{\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}\}$ 是一个 *NLCS* 哈密顿量族。

证明。 根据定义， $\psi = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$, 其中每个 $|\varphi_j\rangle$ 都是定义在 n 个量子比特上的纯稳定子态。对每个 24 应用引理 $|\varphi_j\rangle$即可得到下界。因此，每个 n量子比特稳定子态的能量至少为 $\sin^2(\frac{\pi}{8})$，相对于 $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}$而言，这意味着 $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}$是 ϵ-NLCS，其 $\epsilon = \sin^2(\frac{\pi}{8})$。 □

B.1 迈向 NLACS

对于一个态“非 Clifford”的程度，有多种定义，其中 T 门的数量是常见的一种。本文考虑的是任意泡利旋转门的数量， $e^{i\theta P}$ for $\theta \in [0, 2\pi)$ and $P \in \mathcal{P}_n$，因为它涵盖了 T 门的数量。[15]

引理 26。 设 C是一个作用于 n个量子比特的量子电路，其中包含多项式数量的 *Clifford* 门以及至多 t个任意泡利旋转门， $e^{i\theta_j P'_j}$。则存在 t个泡利算符、 $\{P_j\} \subset \mathcal{P}_n$以及一个稳定子态$|\varphi\rangle$，使得

$$C|0\rangle^{\otimes n} = \prod_{j\in[t]}\left[e^{i\theta_j P_j}\right]|\varphi\rangle, \tag{28}$$

按照约定，当 $t = 0$时， $C|0\rangle^{\otimes n} = |\varphi\rangle$ 。

证明。 根据定义，我们可以将 C 分解为

$$C = C_t e^{i\theta_t P'_t} C_{t-1} \ldots e^{i\theta_2 P'_2} C_1 e^{i\theta_1 P'_1} C_0, \tag{29}$$

其中每个 C_ℓ 都是一个 Clifford 电路。

对于每个 $j \in [t]$，我们都有 $e^{i\theta_j P'_j} = \cos(\theta_j)\,\mathbb{I} + i\sin(\theta_j)P'_j$。由于 Clifford 门将泡利群正规化，对于每个 Clifford 电路 C' 和每个泡利算符 $P' \in \mathcal{P}_n$，都存在另一个泡利算符 $P'' \in \mathcal{P}_n$，使得 $C'(\cos\theta\,\mathbb{I} + i\sin\theta P') = (\cos\theta\,\mathbb{I} + i\sin\theta P'')C'$。因此，我们可以将每个 Clifford 电路，

[15] The T gate is equal to $\mathrm{T} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)Z = e^{i\frac{\pi}{8}Z}$.

C_ℓ，移到所有泡利旋转门之后，而只需通过 C_ℓ的共轭关系改变各个泡利算符。

最终，我们可以将 C 改写为

$$C = e^{i\theta_t P_t} \dots e^{i\theta_2 P_2} e^{i\theta_1 P_1} C_t \dots C_1 C_0, \tag{30}$$

对于 t 个泡利算符 $\{P_t\}$，如所愿。 □

命题 25 表明 D-旋转零哈密顿量 $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{n}\sum \left(D^\dagger |1\rangle\langle 1| D\right)_i$，是 $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$-NLCS。很自然会问，$\mathcal{H}_0$ 是否也属于 ϵ-NLACS，其中常数 ϵ 取适当值。本节将证明，由至多包含 1 个泡利旋转门的 Clifford 门制备的所有态都满足一个明确的下界：+：

$$\langle\psi| \tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)} |\psi\rangle \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{31}$$

事实上，有数值证据表明，对于任意数量的泡利旋转门，以下下界可能成立，不过我们尚无法从解析上证明这一点：

猜想2. 设 $|\psi\rangle$ 是由 *Clifford* 电路以及至多 t 个泡利旋转门制备的 n 量子比特态。对于 D-旋转零哈密顿量 $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}$，$|\psi\rangle$ 的能量有如下下界：

$$\langle\psi| \tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)} |\psi\rangle \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{32}$$

特别是，如果存在一个常数 $\beta \in [0,1)$，使得 $t \leq \beta n$ 对所有充分大的 n均成立，那么$|\psi\rangle$ 的能量就有下界 $(1-\beta)\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$，其中该下界为常数。

由引理 26可知，这类态中最一般的形式是稳定子态，其上施加 t 个泡利旋转门，且这些门之间没有中间电路。猜想 2 背后的直觉是，降低稳定子态能量的唯一方法，就是“撤销”一个用于共轭哈密顿量的 D 门。例如，要构造能量为次常数的态，可以对 $n - o(n)$ D 施加若干个门 $|0\rangle^{\otimes n}$。

我们还注意到，目前尚不清楚对于任意 D-旋转 CSS 哈密顿量（如定理 5中所考虑的情形），是否能证明类似的下界（如果存在的话）。这同样留作一个开放问题。目前，我们考虑 $t = 1$对应的 D-旋转零哈密顿量。

首先，回顾以下定义。

定义18. 设 G 为一个稳定子群，$P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n \in \mathcal{P}_n$ 为任意泡利算符，$A \subseteq [n]$ 为 n 个量子比特的任意子集。我们将集合$G_{A,P}$ 定义为

$$G_{A,P} \equiv \left\{ g_A \;\middle|\; g \in G,\ g_j = P_j \text{ for all } j \notin A \right\},$$

其中 g_A 表示 g 在 A 上的限制（注意，g_A 作用于 $|A|$ 个量子比特，而非 n 个量子比特）.

以下引理明确描述了至多含有一个泡利旋转门的态的局部密度矩阵。

引理 27. 设 $|\psi\rangle = e^{i\theta P}|\varphi\rangle$ 对于 $P \in \mathcal{P}_n$, $\theta \in [0, 2\pi)$，并设 $|\varphi\rangle$ 为一个满足 $G \equiv$稳定子$(|\varphi\rangle)$ 的稳定子态。对于 $A \subset [n]$，我们可以将 $\psi_A \equiv$ 迹$_{-A}[|\psi\rangle\langle\psi|]$ 写作

$$\psi_A = \frac{1}{2^{|A|}} \sum_{\hat{g} \in G_A} \left(\cos^2(\theta)\hat{g} + \sin^2(\theta) P_A \hat{g} P_A \right) + \frac{1}{2^{|A|}} \sum_{g' \in G_{A,P}} i \sin(\theta)\cos(\theta)[P_A, g']. \tag{33}$$

这个表达式的左边可以看作 ψ_A 的稳定子部分，因为它是两个稳定子态的凸组合；右边则可以看作非稳定子部分，因为当 $P \in G$ 或 $P_A = \mathbb{I}$ 时，它等于零。

证明。由于 $|\varphi\rangle$ 是稳定子态，因此存在一个稳定子群 G，满足 $|G| = 2^n$，使得 $|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G} g$。利用泡利矩阵的指数形式，我们有

$$\psi = \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}(\cos(\theta)\,\mathbb{I} + i\sin(\theta)P)g(\cos(\theta)\,\mathbb{I} - i\sin(\theta)P), \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\cos^2(\theta)g + \sin^2(\theta)PgP + i\sin(\theta)\cos(\theta)Pg - i\sin(\theta)\cos(\theta)gP, \tag{35}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(\cos^2(\theta)g + \sin^2(\theta)PgP\Big) + \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(i\sin(\theta)\cos(\theta)(Pg - gP)\Big). \tag{36}$$

考虑对集合 A之外的所有量子比特取偏迹。唯一迹非零的泡利群元素是 $\mathbb{I}$，其迹为 2。对于方程（36）中的左项，我们有

$$\frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(\cos^2(\theta)\,\mathrm{Tr}_{-A}[g] + \sin^2(\theta)\,\mathrm{Tr}_{-A}[PgP]\Big) \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(\cos^2(\theta)g_A\prod_{j\in[n]\setminus A}\mathrm{Tr}[g_j] + \sin^2(\theta)P_Ag_AP_A\prod_{j\in[n]\setminus A}\mathrm{Tr}[P_jg_jP_j]\Big), \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(\cos^2(\theta)g_A + \sin^2(\theta)P_Ag_AP_A\Big)\Big(\prod_{j\in[n]\setminus A}\mathrm{Tr}[g_j]\Big), \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2^{|A|}}\sum_{\hat{g}\in G_A}\Big(\cos^2(\theta)\hat{g} + \sin^2(\theta)P_A\hat{g}P_A\Big), \tag{40}$$

最后一行成立，是因为只有那些在 A 之外为恒等算子的 $g\in G$ 才具有非零迹，而各项迹均非零时，它们的乘积为 $2^{n-|A|}$。

类似地，对于方程（36）中的右项，我们有

$$\frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(i\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{Tr}_{-A}[Pg - gP]\Big), \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{g\in G}\Big(i\sin(\theta)\cos(\theta)[P_A, g_A]\Big)\Big(\prod_{j\in[n]\setminus A}\mathrm{Tr}[P_jg_j]\Big), \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2^{|A|}}\sum_{g'\in G_{A,P}} i\sin(\theta)\cos(\theta)[P_A, g'], \tag{43}$$

其中 最后一行同样成立，因为只有当对所有 $j\notin A$ 都有 $g_j = P_j$ 时，迹才非零 . □

引理 28。

$$\langle\psi|\,\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}\,|\psi\rangle \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{44}$$

证明。根据引理 26，存在一个泡利算符 P、一个 n量子比特 Clifford 态 $|\varphi\rangle$，使得 $|\psi\rangle = e^{i\theta P}|\varphi\rangle$。令 $G \equiv \mathrm{Stab}(|\varphi\rangle)$。

回顾一下，根据定义 $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{H}}_0{}^{(1)}|_i \otimes \mathbb{I}_{[n]\setminus\{i\}}$，因此

$$\langle\psi|\,\tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}\,|\psi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}\Big[\psi_i\tilde{\mathcal{H}}_0{}^{(1)}\Big], \tag{45}$$

其中 $\psi_i \equiv \mathrm{Tr}_{-i}[|\psi\rangle\langle\psi|]$ 是 $|\psi\rangle$ 在量子比特 i上的约化态。我们将证明，这个求和中至多有一项为 0，而其余各项均有下界 $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$。

根据引理27，我们可以将约化态写成

$$\psi_i = \frac{1}{2}\sum_{\hat{g}\in G_i}\left(\cos^2(\theta)\hat{g} + \sin^2(\theta)P_i\hat{g}P_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{g'\in G_{i,P}} i\sin(\theta)\cos(\theta)[P_i, g']. \tag{46}$$

我们分情况讨论：

I. 如果 $P\in G$，$P_i = \mathbb{I}$, $G_{i,P} = \emptyset$，或 $G_{i,P} = \{\mathbb{I}\}$ 那么 ψ_i是一个稳定子态，因此 $\mathrm{Tr}\left[\psi_i \tilde{\mathcal{H}_0}^{(1)}\right] \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$。

II. 假设情形**I.**中的四个条件均不成立。那么必定有 $G_{i,P} = \{\mathbb{I}, P^\star\}$，对某个$P^\star \in \mathcal{P}_1 \setminus \{\mathbb{I}, P_i\}$成立；$P^\star$不可能是 P_i，否则会推出 $P\in G$。注意，$G_{i,P}$不可能更大，否则这将与 G 是一个稳定子群这一事实矛盾。现在我们讨论 G_i的各种情况。

II.1. 若 $G_i = \{\mathbb{I}\}$，那么 ψ_i 可以写成

$$\psi_i = \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}i\sin(\theta)\cos(\theta)[P_i, P^\star], \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\sigma, \tag{48}$$

因为对于某个非恒等泡利算符，有 $P_i \neq P^\star$ 和 $2i[P_i, P^\star] = \sigma$。通过对 $\sigma\in\mathcal{P}\setminus\{\pm\mathbb{I}\}$ 直接计算，可得界 $\mathrm{Tr}\left[\psi_i \tilde{\mathcal{H}_0}^{(1)}\right] \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$。

II.2. 如果 G_i 非平凡，那么 $G_i = \{\mathbb{I}, P^\star\}$，因为它必须与满足 $g_i = P^\star$ 且 $g_{-i} = P_{-i}$ 的 $g\in G$ 对易（由于我们处于情形 **II.**，这样的算子存在）。由于 $P^\star \notin \{\mathbb{I}, P_i\}$，我们可以将 ψ_i 写成

$$\psi_i = \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)P^\star + \frac{1}{2}i\sin(\theta)\cos(\theta)[P_i, P^\star], \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)P^\star + \frac{1}{4}\sin(2\theta)i[P_i, P^\star]. \tag{50}$$

通过直接计算，我们得到如下结果：

II.2.a. 如果 $P_i \neq Y$，那么无论 θ 如何，均有 $\mathrm{Tr}\left[\psi_i \tilde{\mathcal{H}_0}^{(1)}\right] \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$。**II.2.b.** 如果 $P_i = Y$ 且 $P^\star \neq Z$，那么无论 θ 如何，均有 $\mathrm{Tr}\left[\psi_i \tilde{\mathcal{H}_0}^{(1)}\right] \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$。

II.2.c. 如果 $P_i = Y$ 且 $P^\star = Z$，那么 $\mathrm{Tr}\left[\psi_i \tilde{\mathcal{H}_0}^{(1)}\right] \geq 0$，且等号可能成立。

回顾这些情形，只有在以下条件同时成立时，ψ_i的能量才可能小于 $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$：(1) $P_i = Y$；(2) $Z_i \in G$；(3) 存在一个$g\in G$，使得 $g_i = Z$ 且 $g_{-i} = P_{-i}$，也就是说，g 和 P 在除 i之外的每个量子比特上都相同。

我们必须证明，对于给定的 $P\in\mathcal{P}_n$ 和稳定子群 G，至多只有一个量子比特能满足这三个条件。假设存在两个这样的量子比特，i 和 j，它们满足：(1) $P_i = P_j = Y$；(2)Z_i，$Z_j \in G$；(3) 存在 g, $h\in G$，使得 $g_i = h_j = Z$、$g_{-i} = P_{-i}$ 和 $h_{-j} = P_{-j}$。根据条件 (3)，$g_i = Z$ 和 $g_j = Y$；根据条件 (2)，$Z_j \in G$；但这意味着 $gZ_j = -Z_j g$，与 G 是阿贝尔群这一事实矛盾。因此，至多只有一个量子比特能满足所需条件，使约化态 ψ_i 的能量小于 $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$，由此得到所需的下界。

□