arXiv:2302.14759v1 [math.GT] 28 Feb 2023

诺维科夫定理的一个初等证明

SAMUEL RANZ 和 LAURAN TOUSSAINT

Abstract. 诺维科夫定理指出，给定闭3-流形 M 上的一个紧张的（余维一）叶状结构，则任一叶的基本群都嵌入 M 的基本群。我们利用叶状分支覆盖给出这一结果的一个简单证明。

1. 引言 Introduction

余维一叶状结构[1]极具灵活性，除了欧拉示性数之外，并不限制其所在流形的拓扑学 [19, 5, 10]。因此，研究叶状结构的特殊类别颇有意义。其中一类是紧叶层，诺维科夫定理描述了它们的一些拓扑性质[14]。本文将为这一经典结果提供一种新的证明。

我们先回顾一下定义：

定义 1. 闭的、可定向的3维流形 M 上的余维一叶状结构 $\mathcal{F}$，若满足以下任一等价条件，则称为紧张的：

(i) 存在一条横截闭曲线，它与 $\mathcal{F}$的每个叶都相交。*(ii)* 对于 $\mathcal{F}$ 的任意一叶 L，都存在一条闭横截线与 L相交。*(iii)* 存在一个闭形式 $\omega \in \Omega^2(M)$，其在 $\omega|_{\mathcal{F}}$ 上的限制是非退化的。*(iv)* M 上存在一个黎曼度量，使得 $\mathcal{F}$ 的叶都是极小曲面。

关于此定义的详细讨论，请读者参阅 [1, 3]。紧叶层与环境流形的拓扑学密切相关，以下定理便说明了这一点。

定理 ([14]). 设 $\mathcal{F}$ 是闭的、可定向的3维流形 M上的一个紧横截叶状结构。那么，对于任意一叶 L，包含映射 $\iota : L \to M$ 诱导一个单射

$$\iota_* : \pi_1(L) \to \pi_1(M).$$

Novikov 的原始证明 [14], 虽然初等，却相当精细。最新的证明依赖于极小曲面理论 [15, 17, 18, 7], ， [1] 提供了出色的阐述。

在本文中，我们利用紧叶层的另一种刻画重新证明这一结果。简言之，叶状分支覆盖是一个光滑映射 $\pi\colon (M, \mathcal{F}) \to \mathbb{CP}^1$，其在 $\mathcal{F}$ 的任意一叶上的限制定义了一个分支覆盖，详见定义4，其中有更详细的说明。 π 的纤维是 $\mathcal{F}$的闭横截线。因此，任何承认分支覆盖的叶状结构，按照定义1的意义，都是紧张的。反过来则有多种证明方法。

[1]除非另有明确说明，我们始终假设所讨论的叶层是光滑的、共定向的，且余维为一。

解析证明见 [9, 推论 1。3] 而 [2] 的主定理给出了组合证明。

定理 ([2])。 闭合3维流形上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 是紧张的，当且仅当它存在一个叶状分支覆盖。

鉴于这一刻画，诺维科夫定理可由以下结果推出，这也是我们的主要结论：

主定理。 设 $\mathcal{F}$ 是闭合、可定向3维流形 M 上的叶状结构，且它存在一个叶状分支覆盖。那么，对于任意叶 L ，包含映射 $\iota: L \to M$ 诱导一个单射

$$\iota_* : \pi_1(L) \to \pi_1(M).$$

证明分为两步。首先，我们证明存在叶状分支覆盖的叶状结构没有任何消失圈，见命题5。接着，我们沿用标准论证，证明对于这类叶状结构，叶的基本群单射到环境空间的基本群中，见第 5节。

论文结构。 前四节介绍所需的预备知识。第2 节回顾阿尔泽拉-阿斯科利定理。第 3 节介绍叶状分支覆盖的基础知识，其中包括命题 5 ，这是证明定理1的主要要素。第 4 节给出映入叶状结构的莫尔斯映射的定义，并介绍其特征叶状结构的一些性质。主定理的证明见第 5节。

致谢。 我们衷心感谢 Fran Presas 提出了证明策略，分享了他的见解和想法，并进行了许多有益的讨论。感谢´Alvaro del Pino 对初稿提出意见。我们也要感谢 Ga¨el Meigniez 的有益讨论。

第一作者获得西班牙科学与创新部资助的项目 SEV-2015-0554-17-2 的 BES-2017-081980 号资助。第二作者由荷兰研究理事会（NWO）资助，参与研究计划 ENW M20-3 下的项目“适当弗雷德霍姆同伦论”（项目编号 OCENW.M20.195）。

2. Ascoli's theorem

这里我们回顾著名的阿尔泽拉-阿斯科利定理。该定理的主要用途是证明叶状分支覆盖不存在消失圈，见命题 5。

设 X 是一个拓扑空间， (Y, d) 是一个度量空间，且 $S \subset C(X, Y)$ 是连续函数空间的一个子集。那么， S 称为：

- **等度连续** 于 $x_0 \in X$ ，若给定 $\varepsilon > 0$ ，则存在 x_0的一个邻域 U ，使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

对所有 $f \in S$ 和 $x \in U$。如果 S 在每个 $x \in X$处都等度连续，我们就称其为等度连续的。

- **逐点相对紧**，即对每个 $x \in X$ 集合

$$S_x := \{f(x) \mid f \in S\} \subset Y,$$

具有紧闭包。

定理 2（阿尔泽拉-阿斯科利定理）。设 X 为一个拓扑空间，$(Y、d)$ 为度量空间，并考虑赋予紧开拓扑的 $C(X、Y)$。如果子集 $S \subset C(X、Y)$ 是等度连续且逐点相对紧的，那么 S 的闭包是紧的。

关于该定理的证明，读者可参阅 [13]。以下观察和例子将在下一节中发挥作用：

- 如果 Y是紧的，那么任意子集 $S \subset C(X，Y)$ 都是逐点相对紧的。
- 如果 Y 是紧流形，那么任意两个黎曼度量都是等价的。因此，在这种情况下，子集 $S \subset C(X，Y)$ 的等度连续性可针对 Y上的任意黎曼度量进行检验。
- 给定 $S \subset C^\infty(X，Y)$ 我们记作

$$J^k S := \{j^k f \mid f \in S\} \subset \Gamma(J^k(X,Y)),$$

属于 k阶映射的喷射 S。假设 $J^k S$ 是等度连续且逐点相对紧的（相对于 d 上的某个度量 $J^k(X,Y)$）。那么，根据定理2， $J^k S$ 中的任意序列都包含一个子序列，它收敛（在 C^0-范数下）到一个全纯截面（回忆一下，全纯截面空间是闭的，关于 C^0-范数而言；例如，这可由 [16, 定理 717]得出）。因此， S 中的任意序列都包含一个子序列，该子序列在C^k-范数下收敛。

叶状丛是指一个纤维丛 $\pi\colon Y \to B$，它带有平坦联络；或者等价地，是指 Y 上的一个叶状结构 $\mathcal{F}$，其叶横截于 π 的纤维。如果 Y 和 B 有非空边界，我们还要求 $\partial Y = \pi^{-1}(\partial B)$。这意味着 π 限制为一个叶状丛 $\pi_\partial\colon (\partial Y，\ \mathcal{F}|_{\partial Y}) \to \partial B$。

引理3。设 $(Y$ 是一个紧黎曼流形，$g)$ 和 $\pi\colon\ (Y,\mathcal{F}) \to B$ 是一个叶状丛。设 $g_s\colon\ X \to Y$，$s \in (0,1]$ 是一族叶向映射，它们都提升同一个映射 $f\colon\ X \to B$。那么，g_s 在 C^∞ 范数下收敛于一个提升 f 的叶向映射 g_0。

证明。我们证明，对任意 $k \geqslant 0$，族 $j^k g_s、\ s \in (0、\ 1]$ 满足定理 2 的假设。由于等度连续性是局部性质，只需证明其在 $x \in X$ 处成立。设 $\dim X = n$。存在 $U \simeq \mathbb{D}^n \subset X$ 的局部坐标 x、纤维 $\pi^{-1}(f(x))$ 附近的 $V \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n$，以及 $W \simeq \mathbb{D}^n \subset B$ 附近的 $f(x)$，使得

$$\mathcal{F}|_V = \bigcup_{t \in \mathbb{S}^1} \{t\} \times \mathbb{D}^n,$$

且限制 $\pi|_V$ 等于

$$\pi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n, \quad (t,z) \mapsto z.$$

我们在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n$ 上赋予由 $\mathbb{D}^n$ 和 $\mathbb{S}^1$ 上的标准度量构成的乘积度量。在这些坐标下，每个提升 g_s 等于

$$g_s|_U : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n, \quad z \mapsto (t_s, f(z)),$$

对于某个 $t_s \in \mathbb{S}^1$。由此描述可知（使用乘积度量），对于任意 $k \geqslant 0$，族 $j^k g_s$, $s \in (0, 1]$ 在 x 处等度连续且相对紧。事实上，

的投影 $g_s|_U$ 到 $\mathbb{D}^n$ 因子上与 s无关，而 t_s 包含在一个紧集内。由于 Y 是紧的，任意两个度量都等价，因此对于黎曼度量也同样成立。应用定理2即可得到所需的极限。□

3. Foliated branched covers

定义 4。 闭合、可定向的叶状3流形上的叶状分支覆盖是一个光滑映射

$$\pi : (M, \mathcal{F}) \to \mathbb{CP}^1,$$

使得 C <style id="2">: = 临界点集$(\pi) \subset M$ 是一个闭合但不一定连通的1维子流形，并满足以下局部模型：在每个 $x \in C$ 周围，都存在坐标$(z、\ t) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R} \subset M$ 以及一个全纯图表 $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{CP}^1$，使得

- $\mathcal{F} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{D}^2 \times \{t\}$；
- $\pi(z、\ t) = \gamma(t) + z^2$，且其中 $\gamma :\ \mathbb{R} \to \mathbb{D}^2$ 是一条满足 $\gamma(0) = \pi(x)$的曲线。

换言之，一个光滑映射 $\pi :\ (M,\ \mathcal{F}) \to \mathbb{CP}^1$ 若其限制在每个叶上是一个分支覆盖，则称为叶状分支覆盖。叶状分支覆盖的存在性会对叶状结构的拓扑学施加强限制。特别地，$\mathcal{F}$ 没有任何消失圈：

命题 5。 设 $\pi : (M, \mathcal{F}) \to \mathbb{CP}^1$ 为一个叶状分支覆盖。假设给定圆盘 $g_t : D \to (M, \mathcal{F})$, $t \in (0, 1]$的一个浸入族，使得：

- g_t 的像包含于 $\mathcal{F}$的一片叶 L_t 中；
- 对每个 $x \in D$，曲线 $g_t(x)$, $t \in (0, 1]$横截于 $\mathcal{F}$；
- 当 t 趋于零时，限制 $g_t|_{\partial D} : \partial D \to M$ 收敛（在 C^0-拓扑学下）到一个浸入 $g_\partial : \partial D \to M$，其像包含于一片叶 L中。

那么，存在一个映射 $g : D \to L$，它延拓了 g_∂。

证明。 我们首先在一些额外假设下证明该命题，随后将说明如何归约到这一特殊情形。因此，暂时假设存在 $p_1, \dots, p_k \in D$，使得对所有 $t \in (0, 1]$:

- $\pi \circ g_t = \pi \circ g_1$;
- $\pi \circ g_t$的临界点是 p_1，.....，p_k。

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，我们定义一条曲线

$$\lambda_i : (0, 1] \to M, \quad t \mapsto g_t(p_i),$$

进入 π的临界轨迹。

由紧致性可知，存在一个序列 $t_n \to 0$，使得极限 $q_i := \lim_{n\to\infty} \lambda_i(t_n)$存在。我们固定 p_i周围的局部坐标 $U_i \simeq \mathbb{D}^2 \subset D$、$q_i$周围的局部坐标 $1] \subset M$，以及 $f(q_i)$ 周围的局部坐标 $W_i \simeq \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{CP}^1$，在这些坐标中，叶状结构等于，

$$\mathcal{F} = \bigcup_{t\in[-1,1]} \mathbb{D}^2 \times \{t\}.$$

第二个假设意味着，在这些坐标中，曲线等于

$$\lambda_i : (0,1] \to V_i, \quad t \mapsto (0, a(t)),$$

对所有正的 $\dot{a}(t) > 0$ t均成立。此外，经过重新参数化 t，我们可以假设 $a(t) = t$。叶状分支覆盖由下式给出

$$\pi|_{V_i} : V_i \to W_i, \quad (z,t) \mapsto z^2 + \gamma_i(t),$$

如定义 4中所述。特别地，该局部模型意味着 $\lim_{t\to 0} \lambda_i(t)$ 存在且等于 q_i。注意，上述附加假设意味着 $\gamma_i(t) = \gamma_i(1)$ 对$t \in [0$均成立，$1]$。因此，在这些坐标下，族 g_t 等于:

$$g_t|_{U_i} : U_i \to V_i, \quad z \mapsto (g_1(z), t).$$

我们在每个 $V_i \simeq \mathbb{D}^2 \times [-1、1]$ 上赋予乘积黎曼度量，并将其延拓为整个 M上的黎曼度量 g。上述表达式的第一个坐标与 t无关。因此显然，喷射族 $j^1 g_t$、$t \in (0、1]$ 在 p_i 处是等度连续且相对紧的。

补集 $D\backslash\{p_1, \ldots, p_k\}$ 被每个 g_t 映入 f的临界轨迹补集中。因此，我们处于引理 3的条件下，由此可得 g_t 和 $\mathrm{d}g_t$在 D中的每一点都等度连续且相对紧。应用定理 2，便得到一个 C^1-极限 $g := \lim_{t\to 0} g_t$。由极限的唯一性，g 可延拓 g_∂，且其像包含于单个叶中，因为 g 是叶向映射的一个 C^1-极限。

还需证明我们可以归约到上述特殊情形。首先注意，若 ϕ_s 是 $(M, \mathcal{F})$的叶向同伦，则对 g_t和 g_∂证明该命题，等价于对 $\phi_1 \circ g_t$ 和 $\phi_1 \circ g_\partial$证明该命题。这意味着我们可以假设 g_∂ 的像不包含 π的任何临界点。事实上，存在一个（C^∞-小的）同伦，使得 g_∂ 的像与 π的临界点不相交。我们稍微滥用记号，仍将经过同伦的族记作 g_t 和 g_∂。

接下来，由于我们关注的是极限 $\lim_{t\to 0} g_t$，可以将该族限制在 $t \in (0, \varepsilon]$上，其中 $\varepsilon > 0$ 任意小。由于 g_∂ 的像不包含 π 的任何临界点，对于 $g_t|_{\partial D}$ 而言，$t \in (0, \varepsilon]$也同样成立。因此，在将该族限制到$t \in (0, \varepsilon]$之后，存在一个叶向同伦，将 g_t 变为一个满足以下条件的族:

$$\pi \circ g_t|_{\partial D} = \pi \circ g_\partial. \tag{1}$$

回顾定义 4，π 的临界点位于与 $\mathcal{F}$ 横截且不与 $g_t|_{\partial D}$的像相交的紧曲线上。该族 g_t 定义了一个浸没G：$(0, \varepsilon] \times D \to (M, \mathcal{F})$，使得

$$G^*\mathcal{F} = \bigcup_{t\in(0,\varepsilon]} \{t\} \times D.$$

由于临界曲线与 $\mathcal{F}$ 横截，它们的原像与$\{t\} \times D$ 的水平集横截，且不与边界相交。因此，$\pi \circ g_t$ 的临界点k 的数量与 t无关，并且由于 D的紧致性，该数量是有限的。

因此，经过对 D 重新参数化（对每个 t），我们可以假设，对于所有 t，$\pi \circ g_t$ 的临界轨迹等于 $\{p_1, \ldots\ldots, p_k\} \subset D$。与之前一样，这使我们能够定义曲线

$$\lambda_i : (0, \varepsilon] \to M, \quad t \mapsto g_t(p_i),$$

进入 π 的临界轨迹，其极限记为 $q_i := \lim_{t\to 0}\lambda_i \in M$。对于每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，我们在 $U_i \simeq \mathbb{D}^2 \subset D$ 中取 p_i 周围的局部坐标，在 q_i 周围取 $V_i \simeq \mathbb{D}^2 \times [-1,\ 1] \subset M$，并在 $\pi(q_i)$ 周围取 $W_i \simeq \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{CP}^1$，使得叶状结构等于

$$\mathcal{F} = \bigcup_{t\in[-1,1]} \mathbb{D}^2 \times \{t\},$$

叶状分支覆盖由下式给出：

$$\pi|_{V_i} : V_i \to W_i, \quad (z,t) \mapsto z^2 + \gamma_i(t).$$

设 $\phi_{i,t}:\ W_i \to W_i,\ t \in [-1,1]$ 是一个具有紧支撑的光滑族微分同胚，满足 $\phi_{i,t} = \mathrm{id}$，对于 $t \in \mathcal{O}p(\pm 1)$ 和 $\phi_{i,t}(\gamma_i(t)) = \gamma_i(\varepsilon)$，对于 $t \in \mathcal{O}p([0,\varepsilon])$。我们在 V_i 上通过令以下式子成立来扰动 π

$$\widetilde{\pi}|_{V_i} : V_i \to W_i, \quad (z,t) \mapsto (\phi_{i,t}\circ\pi)(z,t).$$

根据构造，$\widetilde{\pi}$ 在 V_i 的补集上与 π 一致，而在 $\widetilde{V}_i := \mathbb{D}^2 \times [0,\varepsilon] \subset V_i$ 上，我们有：

$$\widetilde{\pi}|_{\widetilde{V}_i} : \widetilde{V}_i \to W_i, \quad (z,t) \mapsto z^2 + \gamma_i(\varepsilon). \tag{2}$$

~再次滥用记号，继续分别用 π 和 V_i 表示 $\widetilde{\pi}$ 和 V_i。如有必要，进一步缩小 g_t，我们可以假设 g_t 的像与 π 的临界轨迹的交集包含于 V_i 的并集中。因此，根据上述公式，我们有

$$\pi \circ g_t|_{\{p_1,\dots,p_k\}} = \pi \circ g_\varepsilon|_{\{p_1,\dots,p_k\}}.$$

还需要安排使得 $\pi \circ g_t = \pi \circ g_\varepsilon$ 在 D的其余部分上成立。为此，考虑浸入

$$G : D \times (0,\varepsilon] \to M, \quad (x,t) \mapsto g_t(x),$$

以及其定义域的子集 $B := \{(x,\ t) \in D \times (0,\ \varepsilon] \mid x \in \partial D \cup \{p_1,\ \dots\dots,\ p_k\}\}$。映射 $\pi \circ G$ 的纤维与 D-因子横截，并且在 B 中的点处与$(0,\ \varepsilon]$-因子相切。因此，存在一个向量场 $X \in \mathfrak{X}(D \times (0,\ \varepsilon])$ 与 $\pi \circ G$ 的纤维相切，满足 $\mathrm{d}t(X) = -1$ 和 $X|_B = -\partial_t$。我们利用其流 ϕ_t 来定义映射

$$\widetilde{g}_t : D \to M, \quad (x,t) \mapsto G(\phi_t(x,\varepsilon)), \quad t \in (0,\varepsilon].$$

根据构造，这些映射在整个 D上满足 $\pi \circ \widetilde{g}_t = \pi \circ \widetilde{g}_\varepsilon$。 □

4. Morse maps into foliations.

本节回顾从Morse函数到余维一叶层的基本性质，例如参见 [12]。光滑函数 f：$M \to \mathbb{R}$ 若其所有临界点都是非退化的，则称为Morse函数。众所周知，Morse函数构成 $C^\infty(M)$[2] 的开稠密子集，例如参见 [11, 6]。

引理 6. 设 $f \in C^\infty(M)$ 是一个光滑函数，且在闭集（可能为空） $A \subset M$的某个邻域上为 *Morse* 函数。那么存在一个 *Morse* 函数 $g \in C^\infty(M)$，它与 f 任意接近，并满足 $g|_A = f|_A$。

[2]给定光滑流形 M和 N，我们认为 $C^\infty(M,\ N)$配备了（强） C^∞-拓扑。在此拓扑下，函数序列 $f_n,\ k \in \mathbb{N}$ 收敛到 f，当且仅当任意阶导数都一致收敛。

考虑 N上的一个共定向余维一叶状结构 $\mathcal{F}$。对于任意点 $x \in N$，都存在一个开邻域 $U \subset N$ 和一个浸没 $\phi : U \to \mathbb{R}$，使得

$$\mathcal{F} = \ker \mathrm{d}\phi,$$

作为定向余分布。我们将 $(U,\ \phi)$ 称为 $\mathcal{F}$ 的**浸没图册**。设 $f\colon\ M \to (N,\ \mathcal{F})$ 是一个光滑映射。若点 $x \in M$ 处的 $\mathrm{d}f(T_xM)$ 与 $T_{f(x)}\mathcal{F}$ 作为 $T_{f(x)}N$ 的子空间并不横截，则称该点是 f 相对于 $\mathcal{F}$ 的**相切奇点**。也就是说，f 具有相切奇点，当且仅当 $\phi \circ f\colon$ $f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ 在 $f(x)$ 附近的某个（因而也对任意一个）浸没图册 $(U,\ \phi)$ 中有一个临界点。若 f 的相切奇点 x 处，$\phi_U \circ f$ 有一个非退化临界点，则称该奇点为**非退化**。此时，我们将 x 的**指标**定义为 $\phi \circ f$ 的指标。

定义 7. 若映射 $f\colon\ M \to (N, \mathcal{F})$ 的所有切触奇点均为非退化，则称其为莫尔斯映射 。若 M 的边界非空，则要求 f 的奇点位于其内部。

引理 8. 若 M 是紧的，则有以下结论：

- 从 M到 $(N, \mathcal{F})$ 的莫尔斯映射构成 $C^\infty(M, N)$中的开稠子集。
- 设 $f\colon\ M \to (N,$ $\mathcal{F})$ 是一个光滑映射，且在闭子集 $A \subset M$的某个邻域上为莫尔斯映射。则存在一个任意接近 f的莫尔斯映射 g，使得 $g|_A = f|_A$。

证明。 考虑一个光滑映射 $f\colon\ M \to (N, \mathcal{F})$。由于 M是紧的，其像可由有限多个浸没图册 (U_i, ϕ_i) 覆盖，其中 $\mathcal{F}$。对 6 引理 $\phi_i \circ f\colon\ f^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}$，通过归纳应用即可得证。 □

与莫尔斯函数一样，$f\colon\ M \to (N,\ \mathcal{F})$ 的奇点是孤立的，并满足如下局部模型：令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$中由水平超平面构成的叶状结构。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，嵌入

$$f_k : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{F}),\quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Big(x_1, \ldots, x_n, \sum_{i=1}^{k} -x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\Big), \tag{3}$$

是 Morse 的，并在原点处有一个指标为 k 的奇点。在局部范围内，任何莫尔斯映射在指标为 k的奇点附近都等价于此模型。

引理 9. 设 M 紧致，且 $f\colon\ M \to (N$是一个莫尔斯映射。那么

$$\chi(M) = \sum_{p \in \mathrm{Sing(f)}} (-1)^{\mathrm{Index}(f,p)}.$$

证明。 用浸没图册 $(U_i,\ \phi_i)$ 覆盖 f的像，其中 $\mathcal{F}$。由此可在 $f^{-1}(U_i)$上定义 $\phi_i \circ f$ 的梯度。利用分割，可以将这些局部向量场拼接成 M上的向量场 X。容易验证，对于任意临界点p，f 的指标与梯度 X 之间满足

$$\mathrm{Index}(X, p) = (-1)^{\mathrm{Index}(f,p)}.$$

因此，结论可由庞加莱´-霍普夫定理推出，例如参见 [6]。 □

现在我们将讨论范围限制为 dim $M = 2$ 和 dim $N = 3$。在这种情况下，拉回 $f^*\mathcal{F}$ 在 M 上定义了一个由直线构成的奇异叶状结构，称为**特征叶状结构**，它属于 f。准确地说，$f^*\mathcal{F}$ 的一片叶定义为 f 下 $\mathcal{F}$ 的一片叶的原像。在 f 的临界点之外，特征叶状结构是正则的，而 $f^*\mathcal{F}$ 的奇点对应于 f 的临界点。它们的局部模型由方程3给出。指标为 0 或 2 的临界点所对应的奇点称为**中心**，而指标为 1 的临界点所对应的奇点称为**鞍点**，另见图1。

因此，引理 9 立即推出以下结论：

推论 10. 假设 $f\colon \mathbb{D}^2 \to (M^3, \mathcal{F})$ 是 *Morse*。则特征叶状结构 $f^*\mathcal{F}$ 的中心数比鞍点数多一个。特别地，它至少有一个中心奇点。

5. Proof of the main theorem

根据命题 5，只需证明：若 $(M, \mathcal{F})$ 没有任何消失圈，那么对于任意一片叶 L，都存在一个单射 $\pi_1(L) \to \pi_1(M)$。这是一个经典结果，在文献中许多地方都能找到，例如参见 [3, 命题 9.2。5], 或 [1, 定理 4。35], 但下面的引理11 有时并未明确陈述。为完整起见，我们在此给出。

设有一个叶状流形 $(M^3, \mathcal{F})$ 以及一条叶内曲线 $\gamma\colon S^1 \to L$，它在 M 中可缩。我们首先固定一个浸入的填盖圆盘 $f\colon \mathbb{D}^2 \to M$，如下引理所示：

引理 11。 设叶状流形 $(M^3, \mathcal{F})$ 和 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to L$ 是一条在 M 中可缩的叶内曲线。那么，存在一个浸入 $f\colon \mathbb{D}^2 \to M$ 满足：

(i) $f(\partial\mathbb{D}^2) \subset L$，且 $f|_{\partial\mathbb{D}^2}$ 在 L 内与 γ 叶内同伦。*(ii)* $f|_{\mathcal{O}p(\partial\mathbb{D}^2)}$ 与 $\mathcal{F}$ 横截。

证明。通过一个 C^0-小的叶内同伦，我们可以假设 γ 是浸入的。将其稍微推出，使其与 $\mathcal{F}$ 横截，即可得到一个与 $\mathcal{F}$ 横截的浸入圆柱。由于 γ 的任意同伦在 M 中都保持可缩，我们找到一个光滑映射 $g\colon \mathbb{D}^2 \to M$，将该浸入圆柱延拓。因此，$g|_{\partial\mathbb{D}^2} = \gamma$，且 $g|_{\mathcal{O}p\partial\mathbb{D}^2}$ 是一个与 $\mathcal{F}$ 横截的浸入。

Smale-Hirsch 浸入定理 [8], 另见 [4, 定理 8.2。1], 表明，要找到所需的浸入 f，只需找到一个单射丛映射 $G\colon T\mathbb{D}^2 \to TM$ 覆盖 g，并且使得 G 在 ∂D^2 中的点处与 $\mathrm{d}g$ 一致。

g 的微分定义了一个丛映射 $\mathrm{d}g\colon T\mathbb{D}^2 \to g^*TM$，它覆盖恒等映射。利用圆盘是可缩的这一点，我们固定一个标架 $e := (e_1, e_2, e_3)$，其定义在 g^*TM 上，使得 $\mathcal{F} = \langle e_1, e_2\rangle$（这意味着 $e_3 \pitchfork \mathcal{F}$），并且

$$\mathrm{d}_p g(\partial_\theta) = e_2, \quad \mathrm{d}_p g(\partial_r) = e_3, \quad \forall p \in \partial\mathbb{D}^2,$$

其中 (r, θ) 表示 $\mathbb{D}^2$ 上的极坐标。在上述标架中，$\mathrm{d}g|_{\partial D^2}$ 可解释为标准正交二标架族

$$G_\partial : \mathbb{S}^1 \to V_2(\mathbb{R}^3), \quad t \mapsto (\dot\gamma(t), e_3).$$

因此， G 的存在等价于 G_∂ 在 $\pi_1(V_2(\mathbb{R}^3)) = \mathbb{Z}_2$中定义零类，而这又等价于 $\dot{\gamma}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ 的旋转数为奇数。

设 $U \subset L$ 是 $\gamma(0)$的一个可缩邻域，并将标架 e 延拓到 U 上。设$\sigma\colon \mathbb{S}^1 \to U$ 是一条浸入曲线，满足 $\sigma(0) = \gamma(0)$、 $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(0)$，且 $\mathrm{rot}(\dot{\sigma}) = 1$。那么，$\gamma$ 叶内同伦于浸入曲线 $\gamma \circ \sigma$（但同伦过程不经过浸入曲线），其旋转数为 $\mathrm{rot}(\gamma \circ \sigma) = \mathrm{rot}(\gamma) + 1$。因此，我们可以假设 γ 的旋转数为奇数，这意味着存在一个覆盖 g 的单射丛映射 $G\colon T\mathbb{D}^2 \to TM$。应用相对于边界 ∂D^2 的 Smale-Hirsch 浸入定理，即可得到所需的浸入 f。□

诱导的特征叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}} := f^*\mathcal{F}$ 与边界 ∂D^2 相切。由紧致性可知，其中包含有限个中心奇点和鞍点奇点。必要时，对 f 进行轻微的~扰动后，我们可以假设 $\mathcal{F}$ 的每一片叶至多包含一个奇点。对于每个中心奇点 c，令 Δ 为满足以下条件的极大集合：

~• Δ包含 c 且是 $\mathcal{F}$ 饱和的。~• 包含在 $\mathcal{F}$ 中的每个叶，都会在 $\mathcal{F}$的对应叶中围出一个浸入圆盘。

中心奇点的局部模型表明 Δ 非空，而由局部 Reeb 稳定性可知 Δ 是开集。由于 Δ 在拓扑上是一个圆盘，其边界_ 。 ~ $\partial\Delta := \Delta\backslash\Delta$是一条包含在 $\mathcal{F}$某个叶中的闭曲线（不一定是浸入曲线）。

~现在有几种可能。首先，假设 $\mathcal{F}$ 只有一个奇点，该奇点~必然是一个中心。在这种情况下， $\partial\Delta$ 包含在 $\mathcal{F}$ 的一个非奇异叶中，因此它自身就是浸入的。也就是说， $\partial\Delta$ 是一个消失圈，这与命题5矛盾。

~接下来，假设 $\mathcal{F}$ 有多个中心。前面的论证表明，对于~每个中心， c 对应的曲线 $\partial\Delta$ 都是奇异的。由于 $\mathcal{F}$ 的每个叶至多包含一个奇点， $\partial\Delta$也至多包含一个奇点，且该奇点是一个鞍点。由推论10可知，至少存在两个中心 c_1 和 c_2 ，其边界 $\partial\Delta_1$ 与 $\partial\Delta_2$ 共用同一个鞍点，因此相交于一点。下图（图1）展示了两种可能的构型。

第一种情形中， $\partial\Delta_1 \cup \partial\Delta_2$ 在 $\mathcal{F}$的相应叶内围成一个单连通区域。第二种情形中，不妨设 $\partial\Delta_1 \subset \Delta_2$，并用 s表示该鞍点奇性。于是，闭曲线 $\partial\Delta_2\backslash\partial\Delta_1 \cup s$ 在 $\mathcal{F}$的相应叶内围成一个~圆盘。因此，在这两种情形下，都可以将 f 替换为 f ，使其诱导的特征叶状结构少一个中心奇点。由此，我们可以通过~归纳地将问题化归到 $\mathcal{F}$ 只有一个中心的情形，这种情形已在上文讨论过。

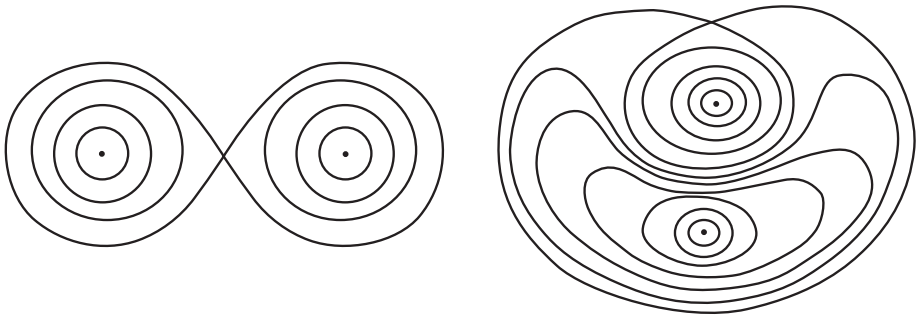

FIGURE 1. 鞍点奇性及其相应中心奇性的两种可能构型。

REFERENCES

[1] D. Calegari. 叶层与3-流形几何。牛津数学专著。牛津大学出版社，牛津，2007年。[2] D. Calegari. 紧叶层的叶内分支覆盖 S^2。《代数几何与拓扑》，21(5):2523–2541，2021年。[3] A. Candel和L. Conlon。《叶层》第二卷，数学研究生教材第23卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[4] Y. Eliashberg和N. Mishachev。《 h原理导论》，数学研究生教材第48卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。[5] H. Eynard-Bontemps. 闭3-流形上余维一叶状结构空间的连通性。《数学发明》，204(2):605–670，2016年。[6] V. Guillemin和A. Pollack。《微分拓扑》。普伦蒂斯霍尔公司，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1974年。[7] J. Hass. 带叶流形上的极小曲面。《瑞士数学评论》，61(1):1–32，1986年。[8] M. W. Hirsch. 流形浸入。《美国数学会汇刊》，93:242–276，1959年。[9] A. Ibort和D. Mart´ınez Torres. 2-校准流形的Lefschetz铅笔结构。《巴黎科学院数学报告》，339(3):215–218，2004年。[10] G. Meigniez. 余维一Haefliger结构的正则化与极小化。《微分几何杂志》，107(1):157–202，2017年。[11] J. Milnor. Morse理论。数学年刊研究第51号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1963年。根据M. Spivak和R. Wells的讲义编写。[12] I. Moerdijk和J. Mrcun。《叶层与李群胚导论》。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，2003年。[13] J. R. Munkres。《拓扑学》。普伦蒂斯霍尔公司，新泽西州萨默塞特，2000年。 [MR0464128]的第二版。[14] S. P. Novikov. 叶层的拓扑。《莫斯科数学学会论文集》，14:248–278，1965年。[15] H. Rosenberg. 平面叶层。《拓扑学》，7:131–138，1968年。[16] W. Rudin.《数学分析原理》。纯粹与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔图书公司，纽约—奥克兰—杜¨塞尔多夫，第三版，1976年。[17] D. Sullivan. 叶状流形和复流形动力学研究中的圈。《数学发明》，36:225–255，1976年。[18] D. Sullivan. 由极小曲面构成的叶状结构的同调刻画。《瑞士数学评论》，54(2):218–223，1979年。[19] W. P. Thurston. 余维一叶层的存在性。《数学年刊》（第二辑），104(2):249–268，1976年。