arXiv:2302.14773v1 [math.OA] 28 Feb 2023

JB*-三重系统的数值指标估计

David Cabezas 和 Antonio M. Peralta

Abstract. 我们证明，每个交换的 JB*-三重系统的数值指标均为一。我们还重新审视 JB*-三重系统中的交换性概念，并证明 JBW*-三重系统 M 的数值指标恰为一，当且仅当它是交换的；而在 $e^{-1} \leq n(M) \leq 2^{-1}$ 的情况下则并非如此。因此，JB*-三重系统 E 是交换的，当且仅当 $n(E^*) = 1$（等价地，$n(E^{**}) = 1$）。在一般情形下，我们证明，每个含有非交换元素的 JB*-三重系统 E 的数值指标也满足 $e^{-1} \leq n(M) \leq 2^{-1}$；当 E 的二重对偶在其原子部分中包含一个秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子时，同样如此。

1. Introduction

本文旨在首次估计与 JB*-三元组相关的复 Banach 空间的数值指标，并研究其与这些对象的交换性之间的关系（定义见下文）。尽管自上世纪六十年代以来，人们一直积极计算某些具体 Banach 空间类（大多数为复空间）的数值指标，但对于这一受到深入研究的复 Banach 空间类，我们目前的认识几乎仍是一片空白。

我们先回顾一些基本概念。若 X 是一个赋范空间，我们分别用 $\mathcal{B}_X$ 和 S_X 表示 X 的单位球和单位球面。符号 $B(X,Y)$ 表示从 X 到另一个赋范空间 Y 的有界线性算子空间。我们将 $B(X)$ 记作 $B(X,X)$。设 X 是一个实或复赋范空间，且 T 属于 $B(X)$。T 的数值域和数值半径定义为

$$V(T) := \{\phi(Tx) : x \in S_X, \phi \in S_{X^*}, \phi(x) = 1\} \subset \mathbb{C}, \text{ and } v(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\} \in \mathbb{R}_0^+,$$

分别地。显然，对于每个 $T \in B(X)$，$v(T) \leq \|T\|$。数值半径是 $B(X)$ 上的一个半范数。存在实希尔伯特空间 H 以及 $T \in B(H)$，满足 $v(T) = 0$.。空间 X 的数值指标定义为

$$n(X) := \max\{k \geq 0 : k\|T\| \leq v(T),\ \forall T \in B(X)\} = \inf\{v(T) : T \in B(X), \|T\| = 1\},$$

当且仅当数值半径是一个范数（等价于算子范数）时，才为正。关于数值指标的开创性研究可追溯至20世纪60年代的 Bauer 和 Lumer。Bonsall 和 Duncan 的著名专著 [7, 8]，其中详尽梳理了相关历史，并介绍了数值指标的基本结果。本文将回顾一些里程碑式的结果。例如，对于每个 $T \in B(X)$，已知 $v_{B(X)}(T) = v_{B(X^*)}(T^*)$（参见 [7, §9，推论 6]）。由此可得 $n(X^*) \leq n(X)$。所有实巴拿赫空间的数值指标值涵盖区间 $[0,1]$, 内的所有可能值，而对于复 Banach 空间，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47A12；46L05；47A30；17C65；16W10。

Key words and phrases. 交换性，JB*-三元组，数值指标，Cartan 因子。

其数值指标值涵盖 $[e^{-1},1]$ 中的所有元素（参见 [30]；需要指出的是，复数情形下的下界本质上源自 Bohnenblust–Karlin 定理）。

几十年来，一个引人关注且悬而未决的问题是，不等式 $n(X) \geq n(X^*)$ 是否可能是严格不等式。Boyko、Kadets、Martín 和 Werner 在 [10] 中给出了确切答案，他们找到了一个巴拿赫空间的例子，其数值指标严格大于其对偶的数值指标（另见 [58, 例 4.3]）。参考文献 [53, 57] 中包含了关于数值指标的最新综述。近期，人们非常积极地计算若干重要巴拿赫空间的数值指标。对于任意一族巴拿赫空间，其 c_0-和、 ℓ_1-和以及ℓ_∞-和的数值指标，均等于相应各个直和项的数值指标的下确界： $n(C(K,X)) = n(X)$、 $L^1(\mu,X) = n(X)$ 和 $L^\infty(\nu,X) = n(X)$；这里 K 是任意紧豪斯多夫空间， μ 是任意正测度， ν 是任意 σ-有限测度， X 是任意巴拿赫空间（见 [63, 64]）。此外，若 M 是 $C(K,X)$ 的一个子空间，满足性质 J 且左乘不变，则 $n(M) \leq n(X)$ [3]。每个函数代数的数值指标均为 1 [73]。两个巴拿赫空间的射影张量积和内射张量积的数值指标，小于或等于两个因子的数值指标中的较小者 [61]。近年来还有许多其他出版物致力于研究数值指标（例如， [20, 21, 52, 60, 65], 在 MSC 条目 47A12“数值域、数值半径”下发表的论文已超过 1600 篇）。

最著名且常被引用的结果之一，是 Huruya 的一项结果：该结果表明，若 C*-代数 A 是交换的，则其数值指标为 1； A 否则为 $\frac{1}{2}$ [50]。Huruya 的论证实际上依赖于 Crabb、Duncan 和 McGregor 先前关于 C*-代数[25], 的代数数值指标的研究、Russo–Dye 定理，以及 Kaplansky 的一项著名结果。后者通过证明不存在非零二幂零元来刻画 C*-代数的交换性（参见 [29,第 2.12 节第21]页）。

后续研究探讨了如何确定更一般的非结合完备赋范代数的数值指标这一问题。Rodríguez-Palacios 在[69, 定理 26] 中证明，若 $\mathfrak{A}$ 是一个（含幺）非交换 Jordan V-代数，则当 $\mathfrak{A}$ 结合且交换时， $n(\mathfrak{A}) = 1$ ；否则， $n(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$。同一作者与 Iochum 和 Loupias 合作证明，当 $\mathfrak{A}$ 是一个（不一定交换的）JB*-代数[51]时，同样的结论也成立。读者可参阅 [34], 和 [19, 命题3.5.44, 以及 §2.1.47 中的评论和 422] 页，以了解较新的处理方法。

C*-代数和 JB*-代数是更广泛的复 Banach 空间族（称为 JB*-三重系统）的严格子类。JB*-三重系统由 Kaup [55] 引入，用于对任意维数的复 Banach 空间中的有界对称域进行分类，旨在推广经典的黎曼映射定理。过去四十年间，人们对 JB*-三重系统的几何、代数和全纯性质进行了深入研究。然而，对于一般 JB*-三重系统的数值指标，我们完全没有任何估计。Martín 已经提出这样一个问题：如同 C*-代数和 von Neumann 前对偶的情形，当 Y 是 JB*-三重系统或 JBW*-三重系统的预对偶时，条件 $n(Y) = 1$ 是否蕴含 $n(Y^*) = 1$（参见命题 3.5]之后的[59, 评论）。Martín 在 JBW*-三重系统预对偶的情形下，于 [60, 定理 2.1]中肯定地解决了这一问题。

本文首次给出了任意 JB*-三元组数值指标的估计。令人惊讶的是，尽管缺少二元乘积，计算数值指标的关键代数性质却是“交换性”。

我们回顾一下，具有三元乘积 $\{.,.,.\}$ 的 JB*-三元组 E，如果形如 $L(a,b): x \mapsto \{a,b,x\}\,(a,b \in E)$ 的算子在 $B(E)$ 中交换，则称其为交换的。我们将在第 2 节重新讨论交换的 JB*-三元组的 Gelfand理论。JB*-三元组中的交换性概念曾被 Kaup [55, §1], Dineen 和 Timoney[28], ，以及 Friedman 和 Russo [39] 等公认专家研究过（相关参考文献还可补充 [19, §4.2.1]和 [18,§3]）。我们已经回顾过 Kaplansky 的结果：C*-代数是交换的，当且仅当它不含非平凡幂零元素 [29, p. 2.12.21]。受这一刻画的启发，有人猜想 JB*-代数是结合的，当且仅当它不含非平凡幂零元素。该猜想最终由 Iochum、Loupias 和 Rodr´ıguez-Palacios 在 [51] 中证明成立。在 JB*-三元组的框架下，尚不清楚如何应用幂零性（特别是由于扩展 Gelfand–Naimark 公理 $\|\{a,a,a\}\| = \|a\|^3$ 对 JB*-三元组中的每个元素 a 都成立 E）。我们转而考察由单个元素生成的内理想，这些内理想自然地具有 JB*-代数的结构。在定理 2.6 中，我们证明了 JB*-三元组中交换性的一些新刻画，表明 JB*-三元组 E 是交换的，当且仅当下列陈述之一成立：

(a) 对每个 $a \in E$，算子 $L(a,a) = \{a,a,.\}$ 的像都包含于由 a 在 E 中生成的内理想内，也就是说，包含于 $E(a) = \overline{\{a,E,a\}}^{\|.\|}$ 中。

(b) E^{**} 的原子部分不含秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子，也不含维数为 ≥ 2 的秩一 1 型 Cartan 因子（即希尔伯特空间）。

以下推论由推论2.7得出，它断言 JB*-三重系统 E 是非交换的，当且仅当下列条件之一成立：

(1) 存在元素 $a \in E$，使得内理想 $E(a)$ 含有一个非零二幂零元 b（作为 JB*-代数）（即 $\{b,r(a)\,b\} = 0$）；等价地，$E(a)$ 是非结合的。(2) E 的每个单生成内理想都是结合的 JB*-代数，且 E^{**} 的原子部分可约化为希尔伯特空间的 ℓ_∞-和，其中至少一个空间的维数大于或等于 2。

我们的主要结论见第3节。我们首先证明，每个交换的 JB*-三重系的数值指标均为 1（见引理 3.1）。假设 M 是一个 JBW*-三重系（即一个同时也是对偶巴拿赫空间的 JB*-三重系），我们证明：如果 M 是交换的，则 $n(M) = 1$；否则 $\frac{1}{e} \leq n(M) \leq \frac{1}{2}$（参见定理 3.6）。这就对 Mart´ın 在 Proposition 3.5] 之后的评注中提出的问题给出了肯定的解答，适用于 Y 是 JBW*-三重系的情形，因为 $n(Y) = 1 \Leftrightarrow Y$ is commutative $\Leftrightarrow Y^{**}$ is commutative $\Leftrightarrow n(Y^{**}) = 1 \Leftrightarrow n(Y^*) = 1$。

为了计算非交换的 JB*-三重系 E，我们证明，如果 E含有一个元素 a，使得由 E 生成的 a 内理想是一个非结合的 JB*-代数，那么 E 的数值指标属于区间 $[e^{-1}, 2^{-1}]$（见命题3.9）。

在定理 3.12 中，我们证明 JB*-三元系是交换的，当且仅当 $n(E^*) = n(E^{**}) = 1$.此外，如果 E 由于其二次对偶的原子部分中存在秩大于或等于 2 的 Cartan 因子而是非交换的，则有 $\frac{1}{e} \leq n(E) \leq \frac{1}{2}$。还有一种非交换 JB*-三元系不在我们结果的适用范围内。具体而言，设E 是一个非交换 JB*-三元系，其二次对偶的原子部分是秩一 Cartan 因子的（无限）ℓ_∞-和（即复希尔伯特空间），且其中至少一个的维数为 ≥ 2。我们不知道是否有 $n(E) \leq \frac{1}{2}$。

1.1. JB*-三重系背景。

本小节汇集了论证中用到的一些基本定义和结果。JB*-三元系是一个复 Banach 空间 E，配备连续的三元乘积 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}:E\times E\times E\to E$，该乘积关于外侧变量是线性且对称的，关于中间变量是共轭线性的，并满足以下条件：

(1) 在 E 上由 $L(a,b)x=\{a,b,x\}$ 给出的算子 $L(a,b)$ 满足

$$L(a,b)L(x,y)-L(x,y)L(a,b)=L(L(a,b)x,y)-L(x,L(b,a)y),$$

对所有 a、b、x、$y\in E$ 均成立。 (Jordan 恒等式)

(2) 对每个 $a\in E$，$L(a,a)$ 都是具有非负谱的厄米算子。

(3) 对每个 $a\in E$。 （扩展 Gelfand–Naimark 公理）

JB*-三元系严格包含 JB*-代数类（参见 [55, 第 525] 页），而后者又严格包含所有 C*-代数。更具体地说，给定任意两个复希尔伯特空间 H，K，$B(H,K)$ 中对三元乘积封闭的每个闭子空间

$$\{x,y,z\}:=\frac{1}{2}(xy^*z+zy^*x), \tag{1.1}$$

是一个 JB*-三元系。这些 JB*-三元系称为 JC*-三元系。特别是，刚才介绍的三元乘积在每个 C*-代数上诱导出 JB*-三元系结构。对于 JB*-代数，三元乘积定义为

$$\{x,y,z\}:=(x\circ y^*)\circ z+(z\circ y^*)\circ x-(x\circ z)\circ y^*. \tag{1.2}$$

或许值得回顾一下 JB*-代数的概念。Jordan 代数是一种（不一定结合的）代数 $\mathfrak{A}$，其乘积 $\circ$ 是交换的，并满足 Jordan 恒等式：

$$(a\circ b)\circ a^2=a\circ(b\circ a^2).$$

如果 $\mathfrak{A}$ 具有一个满足 $\|a\circ b\|\leq\|a\|\,\|b\|$、$a$、$b\in\mathfrak{A}$ 的范数 $\|.\|$，我们就称 $\mathfrak{A}$ 为赋范 Jordan 代数。如果该范数还完备，则称 $\mathfrak{A}$ 为 Jordan–Banach 代数。每个结合 Banach 代数 A 都是一个 Jordan–Banach 代数，其 Jordan 乘积为 $a\circ b=\frac{1}{2}(ab+ba)$。JB*-代数是一个复 Jordan–Banach 代数 $\mathfrak{A}$，配备了满足 $\|U_a(a^*)\|=\|2(a\circ a^*)\circ a-a^2\circ a^*\|=\|a\|^3$ 的代数对合 *，其中该条件对所有 $a\in\mathfrak{A}$均成立。对于 Jordan–Banach 代数中的每个元素 a，我们将由元素 a定义的 Jordan乘法算子记为 M_a，即 $M_a(x)=a\circ x$。关于 JB*-代数的经典参考资料见专著 [2, 19, 45]。

JB*-三元组的一项关键性质，即 Kaup–Banach–Stone 定理，断言：JB*-三元组之间的线性双射是等距映射，当且仅当它是三重同构（参见 [55, 命题 5.5]）。由此深刻结果可推得，上述三重乘积的表达式本质上是唯一的。

给定 $a,b\in E$，我们用 $Q(a,b)$ 表示定义在 E 上的共轭线性算子 $Q(a,b)=\{a,x,b\}\,(x\in E)$。符号 $Q(a)$ 表示 $Q(a,a)$。

如果一个 JB*-三元组 E 具有预对偶，则称其为 JBW*-三元组。Barton 和 Timoney 的一项结果保证，每个 JBW*-三元组都具有唯一的等距预对偶，且其三元乘积分别是 w*-连续的（见 [4, 定理 1.4]）。每个 JB*-三元组 E 的二重对偶 E^{**}都是 JBW*-三元组，其三元乘积以某种方式延拓自 E 中的三元乘积（参见 [27, 推论 11]）。

JB*-三元组中的一个三重幂等元 E 是满足 $\{e,e,e\}=e$的元素 $e\in E$。每个三重幂等元 $e\in E$都会产生一个 Peirce 分解，将 E 表示为 $E=E_2(e)\oplus E_1(e)\oplus E_0(e)$，其中 $E_k(e):=\{x\in E:\ L(e,e)x=\frac{k}{2}x\}$ 称为 Peirce-k 子空间。对于 $k=0$、1、2，符号 $P_k(e)$ 表示将 E 投影到 $E_k(e)$上的 Peirce-k 投影。Peirce 投影是压缩的[40, 推论 1.2]。此外已知，Peirce 子空间恰好是算子 $L(e,e)$ 和$L(e,e)=P_2(e)+\frac{1}{2}P_1(e)$ 的特征子空间。Peirce-2 子空间 $E_2(e)$ 是一个 JB*-代数，其乘积为 $x\circ_e y=\{x,e,y\}$，对合为 $x^{*_e}=\{e,x,e\}$（参见[11, 定理 2.2]和 [56, 定理 3.7]）。Peirce 子空间中元素之间的三元乘积遵循适当的规则，这些规则称为皮尔斯算术，具体描述如下：

$$\{E_i(e),E_j(e),E_k(e)\}\subseteq E_{i-j+k}(e),$$

若 $i-j+k\in\{0,1,2\}$，否则为零，并且

$$\{E_2(e),E_0(e),E\}=\{E_0(e),E_2(e),E\}=0.$$

任意两个三重幂等元 $e,v\in E$ 称为正交的（简称 $e\perp v$），如果 $e\in E_0(v)$，或者等价地，$v\in E_0(e)$（等价地，$L(e,v)=0$）。如果 $v-e$ 是一个与 e正交的三重幂等元，我们记作 $e\le v$；等价地，e 是 JB*-代数 $E_2(v)$中的一个投影。若 $e\perp v$，则和 $e+v$ 是一个三重幂等元，满足 $e,v\le e+v$。

JB*-三重系统 E 中的非零三重幂等元 e 称为极小的，如果 $E_2(e)=\mathbb{C}e$；称为完全的或极大的，如果 $E_0(e)=\{0\}$；称为酉的，如果 $E=E_2(e)$。根据命题 3.5]，，JB*-三重系统 E 的完全三重幂等元与其闭单位球的极端点重合。也就是说，若以 $\partial_e(\mathcal{B}_E)$表示 E的闭单位球的极端点，则有 $\partial_e(\mathcal{B}_E)=\{$中的完全三重幂等元 $E\}$.

JB*-三元组可能不含任何非零三重幂等元，但根据克莱因–米尔曼定理，每个 JBW*-三元组中都“充满”了完全三重幂等元。

JB*-三元组 E的闭子空间 I是三元理想，当且仅当 $\{E,E,I\}+\{E,I,E\}\subseteq I.$。已知$I$ 是三元理想，当且仅当 $\{E,E,I\}\subseteq I$（参见 [28, 命题 1.4] 和 [13, 命题 1.3]）。若 $\{I,E,I\}\subseteq I.$，则称闭子空间 I是 E的内理想。对于 E中的每个三重幂等元 e，利用皮尔斯算术很容易推得，E_2（e）和 E_0（e）都是 E的内理想。关于内理想的更多细节，读者可参见 [31]。

2. Commutativity in JB*-triples revisited

若 JB*-三重系 E 满足

$$[L(a,b),L(x,y)]=L(a,b)L(x,y)-L(x,y)L(a,b)=0,$$

对所有 $a,b,x,y\in E$ 均成立，则称其为交换的、阿贝尔的或结合的；也就是说，$L(a,b)$ 和 $L(x,y)$ 在结合 Banach 代数 $B(E)$ 中可交换（参见[28, 39, 48, 55]）。

JB*-代数 $\mathfrak{A}$中的通常乘积总是交换的，即对每个$a,b\in\mathfrak{A}$，$a\circ b=b\circ a$。若 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的任意两个 Jordan乘法算子 $M_a,M_b\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 在 $B(\mathfrak{A})$ 中可交换，即对所有 $a,b,x\in\mathfrak{A}$，$[M_a,M_b](x)=M_aM_b(x)-M_bM_a(x)=0$，则称该代数为结合的。众所周知，当 C*-代数 A 按照自然的 Jordan 乘积 $a\circ b=\frac{1}{2}(ab+ba)$ 被视为 JB*-代数时，它作为 C*-代数是交换的，当且仅当它作为 JB*-代数是结合的。

以下注记将在多处用到。

注记 2.1. 显然，任意交换的 JB*三重系的 JB*三重系都是交换的。一个 JB*代数 $\mathfrak{A}$ 当且仅当作为 JB 三重系来看时是交换的，它才是结合的（参见*命题 [28,4。1]）。

在 C*-代数的框架下，Kaplansky 的一项著名结果证明，交换性可由不存在非零二幂零元素来刻画（参见 [29, 第 2.12 页21]）。对于 JB*-代数（或更广义地，对于不一定交换的 JB*-代数），Iochum、Loupias 和 Rodr´ıguez-Palacios 得到了 Kaplansky 的这一刻画，并证明了以下结果：

定理 2.2（[51, 定理 1]）。设 $\mathfrak{A}$ 为一个 JB*-代数。那么， $\mathfrak{A}$ 是结合的，当且仅当对每个元素 $a \in \mathfrak{A}$，条件 $a^2 = 0$ 都蕴含 $a = 0$。

以下引理可直接由 JBW*-三元组中三元乘积分别弱*-连续这一性质得到。

引理 2.3. 设 E 是 JBW*-三重系统 M 的弱*稠密 JB* 子三重系统。那么 E 是交换的，当且仅当 M 是交换的。

备注 2.4. 接下来回顾我们论证中所需的另一项工具。每个 JBW*-三重系统 M 都可分解为两个（可能为零的）正交弱*闭理想 $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{N}_M = \mathcal{N}$ 的直和 $(M = \mathcal{A} \oplus^\infty \mathcal{N})$（分别称为 M 的原子部分和非原子部分），使得 $\mathcal{A}$ 恰为 M 中所有极小三重幂等元的弱*闭线性张成， $\mathcal{N}$ 不含极小三重幂等元， $\mathcal{N}$ 的闭单位球不含极端点， $\mathcal{A}_*$ 与 M_* 和 $\phi|_{\mathcal{N}} \equiv 0$ 的闭单位球中所有极端点的范数闭线性张成重合，并且对于 M_* 的闭单位球中的每个极端点 ϕ，都有 [40, 定理 1 和 2]）。M_* 的闭单位球中的极端点与 M 中的极小三重幂等元一一对应；事实上，对于每个 $\phi \in \partial_e$ （$\mathcal{B}_{M_*}$），都存在唯一的极小三重幂等元 $e = e_\phi$，使得

$$P_2(e)(x) = \phi(x)e, \quad \text{for all } x \in M \text{ (see [40, Proposition 4])}. \tag{2.1}$$

此外，原子部分分解为一族 $\{C_i\}_{i\in\Lambda}$ Cartan 因子的正交和，即 $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in\Lambda}^\infty C_i$ （见 [41, 命题 2 和定理 E]）。

给定一个 JB*-三元系 E，上述分解适用于其二重对偶 E^{**}，后者是一个 JBW*-三元系。注意，在这种情况下 $\mathcal{A}_{E^{**}} \neq \{0\}$，因为 $\partial_e(\mathcal{B}_{E^*}) \neq \{0\}$. 此外，若 $\pi_{\mathcal{A}}$ 表示从 E^{**} 到其原子部分的自然投影，且 $\iota_E \colon E \hookrightarrow E^{**}$ 表示典范嵌入，则映射 $\Psi_E = \pi_{\mathcal{A}} \circ \iota_E \colon E \hookrightarrow \mathcal{A}_{E^{**}}$ 是一个等距三元同态，其像在弱*拓扑下稠密 [41, 命题 1 及其证明]。$\partial_e(\mathcal{B}_{E^*})$中的元素称为纯原子。

根据 JB*-三重系的 Gelfand理论（见 [55, 推论 1.11]），每个交换的 JB*-三重系 E 都可以通过三重同构（即保持三重乘积的线性双射）与某个 $C_0(L)$ 的范数闭子空间等距同一化；该子空间由主 $\mathbb{T}$-丛 L 上所有 $\mathbb{T}$-齐次（或 $\mathbb{T}$-等变）连续函数组成。该丛是局部凸豪斯多夫复线性空间 L 中的一个 $\mathbb{T}$-对称（即 $\mathbb{T}L = L$）子集，使得 $0 \notin L$，且 $L \cup \{0\}$ 是紧的，即，

$$E \cong C_0^{\mathbb{T}}(L) := \{a \in C_0(L) : a(\lambda t) = \lambda a(t) \text{ for every } (\lambda, t) \in \mathbb{T} \times L\}.$$

空间 $C_0^{\mathbb{T}}(L)$ 配备上确界范数，其三元乘积由 $\{a, b, c\} = a\overline{b}c$ 给出，

每个交换的 C*-代数显然都是交换的 JB*-三元组（即一个 $C_0^{\mathbb{T}}(L)$-空间，对应于某个主 $\mathbb{T}$-丛 L，见 [68, 命题 10] 或 [38, 引理 3。1]）。 [55, 推论 1.13 及后续评论中给出的例子] 表明，交换的 JB*-三元组的类严格更广。

单生成的 JB*-三重系统的情形更为有利，因为对于 JB*-三重系统 E 中的每个元素 x，由元素 x 生成的 JB*-子三重系统（记为 E_x）与某个交换的 C*-代数 $C_0(\Omega)$（其中 Ω 是包含于 $(0, \|x\|]$ 中的局部紧豪斯多夫空间，且 $\Omega \cup \{0\}$ 为紧空间）等距 JB*-三重同构；这里 $C_0(\Omega)$ 表示所有在 0 处消失的复值连续函数构成的巴拿赫空间。已知还存在一个三重同构 Ψ，将 E_x 映到 $C_0(\Omega)$，并满足 $\Psi(x)(t) = t$ $(t \in \Omega)$（参见 [54, 推论 4.8], [55,推论 1.15] 和 [38, 39]）。集合 $\Omega = \mathrm{Sp}(x)$ 称为 x 的三重谱。应注意，只要 $0 \notin \mathrm{Sp}(x)$，就有 $C_0(\mathrm{Sp}(x)) = C(\mathrm{Sp}(x))$。作为这一“连续三重函数演算”的推论，对于每个 $x \in E$，都存在唯一的元素 $y \in E_x$ 满足 $\{y, y, y\} = x$。元素 y 记作 $x^{[\frac{1}{3}]}$，称为 x 的立方根。我们可以归纳定义 $x^{[\frac{1}{3^n}]} = \ddot{A}x^{[\frac{1}{3^{n-1}}]}\ddot{a}^{[\frac{1}{3}]}$, $n \in \mathbb{N}$。序列 $(x^{[\frac{1}{3^n}]})$ 在 E^{**} 的弱*拓扑下收敛于一个三重幂等元，记为 $r(x)$，称为 x 的值域三重幂等元。三重幂等元$r(x)$ 是满足 x 在 JBW*- 代数 $E_2^{**}(e)$ 中为正的最小三重幂等元 $e \in E^{**}$ （参见 [33, 引理 3.3]）。

下面的引理汇集了 JB*-三重系统中的一些广为人知的事实。这里陈述该引理，既为求完备，也为读者提供明确的论证。

引理 2.5. 设 E 是一个含有酉三重幂等元 u的交换 JB*-三重系统。那么， E 是一个交换含幺 C*-代数。因此，每个交换 JBW*-三重系统都是交换冯·诺依曼代数。

证明. 容易根据 JB*-三重系统 $E = E_2(u)$ 的交换性验证 Jordan 乘积 $\circ_u$ 是结合的，因此结论成立。对于第二个结论，注意若 M 是交换 JBW*-三重系统，则 $\partial_e(\mathcal{B}_M) \neq \emptyset$，因此我们可以在 M 中找到一个完全三重幂等元u。将 M 表示为某个主 $\mathbb{T}$-丛 L上的 $C_0^{\mathbb{T}}(L)$，这意味着 $P_1(u) = 0$，从而 u 是含幺的。□

本文还将讨论 JB*-三元系中由单个元素 a 生成的内理想 $E(a)$。已知 $E(a)$ 恰好是集合 $Q(a)(E)$ 的范数闭包。 $= \{a, E, a\}$. 此外，$E(a)$ 是 $E_2^{**}(r(a))$ 的一个 JB*-子代数，并包含作为正元素的 a（参见 [12, 命题 2.1]）。在这种情况下， E_a 不过是由元素 a 生成的 $E(a)$ 的 JB*-子代数。因此，我们始终将 $E(a)$ 视为本段所述的、具有自然结构的 JB*-代数。注意，若 e 是 E 中的一个三重幂等元，则 Peirce-2 子空间 $E_2(e)$ 就是由 e 生成的内理想。另一个有趣的例子是将复希尔伯特空间 H 视为 1 型 Cartan 因子。已知在这种情况下，三元乘积为

$$\{\xi, \eta, \zeta\} = \frac{1}{2}\left(\langle \xi, \eta\rangle \zeta + \langle \zeta, \eta\rangle \xi\right),$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 H的内积。显然， H 中的非零三重幂等元集合就是整个单位球面，其中 $H_2(\xi) = \mathbb{C}\xi$ 且 $H_1(\xi) = \{\xi\}_{\perp_2} = \{\eta \in H :$ 对每个范数为 1 的元素， $\langle \eta, \xi\rangle = 0\}$

ξ 属于 H。由此可得，对所有 $\xi \in H$， $H(\xi) = \mathbb{C}\xi$。在这种情况下，由单个元素生成的内理想过于弱化。

正交性也可以作为 JB*-三重系 E中一般元素之间的一种关系来理解。我们称 a， $b \in E$ 正交（$a \perp b$ 记作 $L(a, b) = 0$. 以下关于事实 $a \perp b$ 的等价表述可参见 [17, 引理 1]:

$$\begin{array}{ccccc} \{a,a,b\} = 0; & & a \perp r(b); & & r(a) \perp r(b); \\ E_2^{**}(r(a)) \perp E_2^{**}(r(b)); & & r(a) \in E_0^{**}(r(b)); & & a \in E_0^{**}(r(b)); \\ b \in E_0^{**}(r(a)); & & E_a \perp E_b & & \{b,b,a\} = 0. \end{array} \tag{2.2}$$

设 M 是一个 JBW*-三重系。由于 M 的三元乘积分别弱*-连续， $M_2(e)$ 是一个 JBW*-代数。给定任意 $\varphi \in M_*$，存在唯一的三重幂等元 $e = s(\varphi) \in M$，使得$\varphi = P_2(e) \circ \varphi$，并且 $\varphi|_{M_2(e)}$ 是 $M_2(e)$ 上的忠实正规正泛函（参见 [40, 命题2]）。三重幂等元 $e = s(\varphi)$ 称为 φ的支撑三重幂等元。

在下一个定理中，我们汇集了从 [28, 39, 55]，借用的 JB*-三元组交换性的一些已知刻画，以及一些新的等价改写，后者将在之后用于估计 JB*-三元组的数值指标。

定理 2.6. 设 E 为 JB*-三元组。那么，以下条件等价：

(*i*) E 是交换的。(*ii*) E^{**} 是交换的。(*iii*) E^{**}, $\mathcal{A}_{E^{**}}$的原子部分是交换的，等价地，$\mathcal{A}_{E^{**}} \cong \ell_\infty$。(*iv*) 对某个主 $\mathbb{T}$-丛 L，有 $E \cong C_0^{\mathbb{T}}(L)$。(*v*) 对于每个支撑三重幂等元为 $e = s(\varphi)$的泛函 $\varphi \in E^*$，有 $P_1(e) = 0$。(*vi*) 对于每个支撑三重幂等元为 $e = s(\phi)$的泛函 $\phi \in \partial_e(\mathcal{B}_{E^*})$，有 $P_1(e) = 0$。(*vii*) 每个泛函 $\phi \in \partial_e(\mathcal{B}_{E^*})$都是三重同态或三重反同态（即$\phi\{a,b,c\} = -\phi(a)\phi(b)\phi(c)$）。(*viii*) 对于每个极小三重幂等元 $e \in E^{**}$，有 $P_1(e) = 0$。(*ix*) 对于每个三重幂等元 $v \in E^{**}$， $E_2^{**}(v)$是结合的 JBW*-代数（或交换的 JBW*-三重系统），且 $L(v,v)(E) \subseteq E_2^{**}(v)$。(*x*) 对于每个完全三重幂等元 $e \in E^{**}$， $E_2^{**}(e)$是结合的 JBW*-代数，且 $L(e,e)(E) \subseteq E_2^{**}(e)$。(*xi*) 对于每个完全三重幂等元 $e \in E^{**}$，JBW*-代数 $E_2^{**}(e)$不含非零二幂零元素，且 $L(e,e)(E) \subseteq E_2^{**}(e)$。(*xii*) 对于 E中的每个 a，内理想 $E(a)$是结合的 JB*-代数（或交换的 JB*-三重系统），并包含算子 $L(a,a)$的像。

$(xiii)$ 对于 E中的每个 a ，内理想 $E(a)$作为 JB*-代数不含非零二幂零元素，且 $L(a,a)(E) \subseteq E(a)$。

(xiv) 对于每个 a，在 E 中都有 $L(a, a)(E) \subseteq E(a)$。

证明。 等价关系 $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ 源于以下事实： E 以等距且弱*稠密的方式嵌入为 E^{**} 的子三重态，并且 $\mathcal{A}_{E^{**}}$ （参见引理 2.3）。与 (iv) 的等价性已在定理之前说明。

(v) 、 (vi) 和 (vii) 与所有先前陈述的等价性已在 [28, 定理 4.3],中证明，而与 $(viii)$ 的等价性则由（2.1）得出。因此，从 (i) 到 $(viii)$ 的所有陈述都等价。

若 E^{**} 是交换的，则对每个三重幂等元 $v \in E^{**}$，Peirce-2 空间 $E_2^{**}(v)$ 显然是一个结合的 JBW*-代数，因为它是 E^{**} 的 JBW*-子三重态。为证明第二个陈述，我们注意到，若对于某个主 $\mathbb{T}$-丛 L 有 $E \cong C_0^{\mathbb{T}}(L)$，则容易推出 E^{**} 是交换冯·诺依曼代数，因此 $P_1(v) = 0$，进而对于所有三重幂等元 $v \in E^{**}$.， $L(v, v)E^{**} = E_2^{**}(v) + E_1^{**}(v) = E_2^{**}(v)$。这说明 (ix) 可由前述任一陈述推出。

蕴含关系 $(ix) \Rightarrow (x)$ 显然成立。

$(x) \Rightarrow (ii)$ 由于 $\partial_e(\mathcal{B}_{E^{**}})$ 中的每个元素都是完全三重幂等元 [56, 命题 3.5], ，我们总能找到一个完全三重幂等元 $e \in E^{**}$。 $E_2^{**}(e)$ 根据假设是结合的。此外，我们还知道 $L(e,e) = P_2(e)$，因为 $P_1(e)(E) \subseteq E_2^{**}(e)$。这表明 $E^{**} = E_2^{**}(e)$ 是一个结合 JBW*-代数，等价地说，是一个交换冯·诺依曼代数。

等价关系 $(x) \Leftrightarrow (xi)$ 和 $(xii) \Leftrightarrow (xiii)$ 可由定理 2.2 得出。容易验证，(iv) 蕴含 (xii)。 蕴含关系 $(xiii) \Rightarrow (xiv)$ 显然。

最后，我们将证明 $(xiv) \Rightarrow (iii)$。假设 (xiv) 成立。若 $E^{**}, \mathcal{A}_{E^{**}}$ 的原子部分包含一个秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子 C，则例如由 [37, 引理 3.10 及其前面的讨论] 可知， C （因而 $\mathcal{A}_{E^{**}}$ 和 E^{**}）包含一个与 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3(\mathbb{C}) =$ ßÅ $\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \beta & \delta\end{matrix}$ ã： $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$TM 等距同构的 JB*-子三重系统；此外，我们可以在 E^{**} 中找到两个正交的极小三重幂等元 e_{11}, e_{22} 以及一个秩 2 三幂等元 e_{12}，使它们生成的 JB*-子三重系统与 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3(\mathbb{C})$ 等距同构，其中 $e_{11} \cong$ Å 1 0 0 0 ã $e_{22} \cong$ Å 0 0 0 1 ã，且 $e_{12} \cong$ Å 0 1 1 0 ã。通过对 [15, 中的 JB*-三重系统应用 Kadison 传递性定理 3] Theo-rem 3.3]，存在范数为一元素 $a, b \in E$，使得 $a = e_{11} + P_0(e_{11} + e_{22})(a) = e_{11} + a_0$ 且 $b = e_{12} + P_0(e_{12})(b) = e_{12} + b_0$. 。下面说明如何得到 a。将 [15, 定理 3.3(c)] 应用于正交的极小三重幂等元 e_{11} 和 e_{22}，可得正交的范数为一的元素$a, c \in E$，使得 $a = e_{11} + P_0(e_{11})(a)$ 且 $c = e_{22} + P_0(e_{22})(c)$。由 $a \perp c$ 可推出 $P_0(e_{11})(a) = P_0(e_{11} + e_{22})(a)$（参见 (2.2)）。

在这种情况下，由于正交性，

$$\begin{aligned} L(a,a)(b) &= L(e_{11}, e_{11})(b) + L(a_0, a_0)(b) \\ &= L(e_{11}, e_{11})(e_{12}) + L(a_0, a_0)(b_0) = \frac{1}{2}e_{12} + L(a_0, a_0)(b_0) = \frac{1}{2}e_{12} + c_0, \end{aligned}$$

其中 $e_{12} \perp c_0$。这不可能，因为根据假设，$L(a,a)(E) \subseteq E(a) \subseteq E_2^{**}(r(a))$ 且 $r(a) = e_{11} + r(a_0)$，其中 $e_{11}, e_{12}, e_{11}+e_{22} \perp r(a_0)$ 和 $P_2(r(a))(e_{12}) = 0$（注意，$L(r(a)\ r(a))(e_{12}) = L(e_{11}, e_{11})(e_{12}) + L(r(a_0)\ r(a_0))(e_{12}) = \frac{1}{2}e_{12}$）。因此我们证明了，$\mathcal{A}_{E^{**}}$ 不包含秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子。

接下来，假设 $\mathcal{A}_{E^{**}}$ 包含一个非平凡的秩一 Cartan 因子 C。众所周知，每个秩一 JB*-三重系统都是一个复希尔伯特空间，并带有 1 型 Cartan 因子的结构（例如，参见 [13, 命题 4.5] 和 [22] 或 [6, 定理 2.3 和 §3]）。若 $\dim(C) \geq 2$，则可在希尔伯特空间 C中找到一个正交归一集 $\{\xi_1, \xi_2\}$。利用 1 型 Cartan 因子的结构，ξ_1 和 ξ_2 是 C 中的极小且完全三重幂等元，并且 $\xi_i \in C_1(\xi_j) \subseteq E_1^{**}(\xi_j)$，其中 $i \neq j$.。三重幂等元 ξ_1 和 ξ_2 在 E^{**}中也都是极小的。再次应用 JB*-三重系统的 Kadison 传递性定理 [15, 定理 3.3]，，可找到两个范数为一元素 a、$b \in E$，使得 $a = \xi_1 + P_0(\xi_1)(a) = \xi_1 + a_0$ 且 $b = \xi_2 + P_0(\xi_2)(b) = \xi_2 + b_0$。注意，$P_0(\xi_1)(a)$ 和 $P_0(\xi_2)(b)$ 在 C 中的分量为零，因为 ξ_1 和 ξ_2 在 C中是完全的。等式 $L(r(a)\ r(a))(\xi_2) = L(\xi_1, \xi_1)(\xi_2) + L(r(a_0)\ r(a_0))(\xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2$，以及 $L(a,a)(b) = L(\xi_1,\xi_1)(\xi_2) + L(a_0,a_0)(b_0) = \frac{1}{2}\xi_2 + L(a_0,a_0)(b_0)$，其中 $L(a_0,a_0)(b_0)$ 属于 E^{**}中 C 的正交补，证明了 $L(a,a)(b) \notin E_2^{**}(r(a)) \supseteq E(a)$，这与我们的假设矛盾。总而言之，$\mathcal{A}_{E^{**}}$ 中的所有 Cartan 因子都必须与 $\mathbb{C}$一致，因此 $\mathcal{A}_{E^{**}}$ 是交换的。□

上述定理的证明实际上给出了导出以下推论的一种论证。

推论 2.7. 设 E 是一个 JB*-三重系统。以下断言等价：

(a) E 是非交换的。

(b) 以下陈述之一成立：

(1) 存在 E 中的一个元素 a，使得内理想 $E(a)$包含一个非零二幂零元 b（作为 JB*-代数）（即 $\{b, r(a)\ b\} = 0$）；等价地，$E(a)$是非结合的。(2) E 的每个单生成内理想都是一个结合 JB*-代数，并且E^{**} 的原子部分可约化为希尔伯特空间的一个 ℓ_∞-和，其中至少一个空间的维数大于或等于 2。

(c) 以下陈述之一成立：

(1) E^{**} 的原子部分包含一个秩为 ≥ 2.的 Cartan 因子

(2) E^{**} 的原子部分仅包含秩一 Cartan 因子，且其中至少有一个是维数大于或等于 2 的希尔伯特空间。

众所周知，JB*-代数的二重对偶的原子部分中所含的唯一秩一 Cartan 因子是 $\mathbb{C}$ （参见[26, 推论 3.2] 的证明或 [35, 推论 3.4]的证明）。因此，根据前面的结果，下一个推论显然成立。

推论 2.8. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数。那么，当且仅当对 E 中的每个 a，内理想 $E(a)$关于其 JB*-代数的自然结构是结合的，$\mathfrak{A}$才是结合的。

注 2.9. 对一般的 JB*-三重系 E，条件“对所有$a \in E$，$E(a)$ 都是一个结合 JB*-代数”并不意味着 E 是交换的。例如，将希尔伯特空间 H视为一个

1 型 Cartan 因子时，满足 $H(a) = \mathbb{C}a$ 是一个交换的 JB*-代数；然而， H 并非交换的。在这种情况下，我们得到一个秩一 JB*-三重系；利用秩一 1 型 Cartan 因子的 c_0-和，可以构造出秩更大的类似例子。

定理（i）、（ii）、（iii）、（v）–（xi）中的定理 2.6 用对偶和预对偶刻画了 JB*-三重态的交换性。新的结论（xii）–（xiv）涉及 E. 的内在结构。假设 E 实际上是一个 JBW*-三重态，那么 E 中有丰富的三重幂等元，因此我们可以在一定程度上放宽假设。

我们先引入一些记号。以下记 $\mathcal{Q}_3$ 为 $M_2(\mathbb{C})$ 中所有形如 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ 的矩阵构成的 JB*-子代数，其中 α、 β、 $\gamma \in \mathbb{C}$。

定理 2.10. 设 M 是一个 JBW*-三重态。则以下条件等价：

（i） M 是交换的。（ii） M 是交换冯·诺依曼代数。（iii）对于每个三重幂等元 $e \in M$，都有 $L(e,e)(M) \subseteq M_2(e)$（等价地， $P_1(e) = 0$）。

证明。 等价关系（i） $\Leftrightarrow$ (ii)由引理 2.5. (ii) $\Rightarrow$ (iii)显然。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 取 M 中的一个完全三重幂等元 e。根据假设， $L(e,e)(M) \subseteq M(e) = M_2(e)$，因此 $M = M_2(e)$ 是一个 JBW*-代数。若 $M = M_2(e)$ 作为 JBW*-代数是非结合的，根据推论 12], $M_2(e)$ 包含 $\mathcal{Q}_3$ 作为 JB*- 子代数。考虑 $\mathcal{Q}_3$ 中的三重幂等元 $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。容易验证 $L(v,v)(w) = \frac{1}{2}w \in M_1(v)$，因此 $L(v,v)(M) \not\subseteq M(v) = M_2(v)$，这与我们的假设矛盾。

□

需要指出的是，定理（iii）中的陈述 2.10 不能替换为“$P_1(e) = 0$对每个完全三重幂等元 $e \in M$均成立”。例如， $M = M_2(\mathbb{C})$ 是一个非交换的 JB*-代数，满足这一性质，因为 M 中的每个完全三重幂等元都是酉元。在非交换有限 JBW*-代数的情形下，也可以找到类似的例子，见 [42]。

注记 2.11。 在定理 2.6 和推论2.7中，与 JB*-三重系 E的交换性相关联，或与其否定相关联的主要性质有两项，即：

（a）存在 $a \in E$，使得 E（a）包含一个非零二幂零元；

（b）存在 $b \in E$，使得 L（b， b） $\not\subseteq E$（b）。

显然， （a）意味着 E 是非交换的（参见定理 2.2），因此（a） $\Rightarrow$（b），根据定理 2.6。

然而，蕴含关系（b） $\Rightarrow$ （a）并不总是成立。一个反例是将维数为 ≥ 2 的希尔伯特空间视为 1 型 Cartan 因子。

3. The numerical index of a JB*-triple

本节旨在计算 JB*-三重系统的数值指标，这似乎是迄今尚未解决的问题。对于 C*-代数、JB*-代数以及不一定交换的 JB*-代数，数值指标已有明确结论。具体而言，C*-代数 A 满足：若 A 是交换的，则 $n(A) = 1$；否则 $n(A) = \frac{1}{2}$ [50], 。当以（含幺）非交换 Jordan V-代数 [69, （定理 26] ）或不一定交换的 JB*-代数 [34, 51] （另见 [19, 命题3.5.44 以及 §2.1.47 中的评论和第 422] 页）替代 A 时，也有相同结论。本节的结果表明，每个交换的 JB*-三重系统的数值指标均为 1（见引理 3.1）；对于 JBW*-三重系统 M，我们证明，若 M 是交换的，则 $n(M) = 1$；否则 $\frac{1}{e} \leq n(M) \leq \frac{1}{2}$（参见定理 3.6）。在一般情形下，我们证明，每个（非交换的）JB*-三重系统 E，只要其二次对偶的原子部分包含秩大于或等于 2 的 Cartan 因子，就满足 $\frac{1}{e} \leq n(E) \leq \frac{1}{2}$（见定理 3.12）。

我们已经指出，对于每个巴拿赫空间 X 以及每个 $T \in B(X)$，都有 $v_{B(X)}(T) = v_{B(X^*)}(T^*)$，因此不等式 $n(X^*) \leq n(X)$ 总是成立 [7, 第 9 节 推论 6]。需要提醒读者的是，刚才给出的不等式通常可能是严格不等式（参见 [10, 58]）。

让我们从交换的 JB*-三元组 E 的情形入手，研究 JB*-三元组的数值指标。正如我们在上一节中已经指出的，E 通常并非与交换的 C*-代数等距同构。因此，直接应用已有文献中的结果并不容易。不过，这种情形可以很容易地从现有文献中推导出来。

引理 3.1. 每个交换的 JB*-三重系统 E 的数值指标均为 1。

证明. 已知 $n(E^{**}) \leq n(E^*) \leq n(E) \leq 1$. 由于 E^{**} 是交换冯·诺依曼代数（参见引理 2.5），并且 C*-代数 A 的数值指标为 1 或 1 2，具体取决于 A 是否交换[50], ，因此我们有 $n(E^{**}) = n(E^*) = n(E) = 1$. □

以下结果是 Hahn–Banach定理的一个众所周知的推论，并将在本文余下部分多次（有时是隐含地）使用。

引理 3.2. 设 Y是巴拿赫空间 X的一个闭子空间。若 $T \in B(X)$ 满足 $T(Y) \subset Y$，则 $V_{B(Y)}(T|_Y) \subset V(T)$。特别地，$v_{B(Y)}(T|_Y) \leq v(T)$。

我们继续介绍另一个技术工具，其表述可能已见于 [34, 51, 69] 等现有文献。通常可由 Bouldin 关于代数数值域的一项著名结果得到 [9]。这里我们给出与二幂零元相关的 Jordan乘法算子的数值半径的精确计算；为使论述完备，证明也一并给出，并借助柯西–施瓦茨不等式提供一种替代方法，从而在某种程度上避免使用 Bouldin 的结果。

引理3.3。设 $\mathfrak{A}$ 是 JB*-代数，且 b 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个二幂零元。那么 $v(M_b) = \frac{1}{2}\|b\|$。

证明。 显然可以假设 b 非零，且 $\|b\| = 1$. 在这些假设下， $\mathfrak{A}$ 非结合（参见定理 2.2），因此 $n(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$ 由 [51, 定理 5] (或者， [69, 定理26], [34, 命题 2.6] 或 [19, 命题3.5.44 及第 §2.1.47 节和第 422] 页中的注释），于是 $v_{B(\mathfrak{A})}(M_b) \geq \frac{1}{2}$. 下面考察反向不等式。

现在，任取 $\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$ 和 $z \in S_{\mathfrak{A}}$，使得 $\phi(z) = 1$。我们有 $\phi \circ M_b(z) = \phi(b \circ z) = \varphi(b)$，其中 φ 是定义在 $\mathfrak{A}$ 上的泛函，由 $\varphi(y) = \phi(y \circ z)$ 给出，对所有 $y \in \mathfrak{A}$均成立。由于 $\|\varphi\| \leq \|\phi\|\|z\| \leq 1$ 且$\varphi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1} \circ z) = \phi(z) = 1$，$\varphi$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个态（参见 [45, 引理 1.2.2], ; 若 $\mathfrak{A}$ 不含幺，则可以用近似单位元代替 $\mathbf{1}$ [45, 引理 1.2.2 和 §3.6]）。

令 $\mathfrak{B}$ 表示由 b在 $\mathfrak{A}$ 中生成的 JB*-子代数。根据 Shirshov–Cohn 定理 [45, 定理 2.4.14]（另见 [74, 推论 2.2]），$\mathfrak{B}$ 是一个 JC*-代数，也就是说，它是某个含幺 C*-代数 A的 JB*-子代数。由于 φ 是 $\mathfrak{B}$上的一个态，根据 [45, 引理 3.6.6]，我们可以将 φ 延拓到 $\mathfrak{B}$ 在 A 中的添单位化上；此时其范数在单位元处取得。再将后者通过 Hahn–Banach 延拓到 A，所得泛函的范数为 $\mathbf{1}$，且在 A的单位元素处取得，因此存在 A 上的一个态 $\tilde{\varphi}$，其在 $\mathfrak{B}$ 上的限制为 φ。

现在我们将在 C*-代数 A中进行讨论，其中显然 $b^2 = 0$，且 $\tilde{\varphi}$ 是一个态。由于 b 是二幂零的，$bb^* \perp b^*b$ 属于 A。因此，A^{**} 中的相应值域投影 $l = r(bb^*)$ 和 $r = r(b^*b)$ 正交。众所周知，$b = lbr$。

由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}(b)|^2 = |\tilde{\varphi}(lbr)|^2 &\leq \tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(rb^*br) \leq \tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(\|b^*b\|r) = \|b^*b\|\tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(r) = \|b\|^2\tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(r)\\ &= \tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(r) \leq \tilde{\varphi}(l)\tilde{\varphi}(1-l) = \tilde{\varphi}(l)(1-\tilde{\varphi}(l)) \leq 1/4,\end{aligned}$$

因为 $\tilde{\varphi}(l) \in [0,1]$。

综合以上结果可得 $|\phi \circ M_b(z)| = |\varphi(b)| = |\tilde{\varphi}(b)| \leq 1/2$。由于 $\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$和 $z \in S_{\mathfrak{A}}$任意，且 $\phi(z) = 1$，因此可知 $v_{B(\mathfrak{A})}(M_b) \leq \frac{1}{2}$。□

注 3.4. 在前一定理证明的最后部分，我们通过柯西–施瓦茨不等式重新得出了一个与 Bouldin 在 [9] 中的结果相近的结论。具体而言，若 b 是 C*-代数 A中的非零二幂零元，则由 $x \mapsto bx$、xb 分别定义的算子 L_b、R_b：$A \to A$ 的数值半径均为 $\frac{1}{2}\|b\|$.

下一个命题是估计非交换 JB*-三重的数值指标上界的关键结果。

命题 3.5. 设 e 是 JB*-三重 E 中一个非零三重幂等元。假设存在一个非零二幂零元 $b \in E_2(e)$（即 $b^2 \equiv \{b,e,b\} = 0$）。那么，算子 $L(b,e)$：$E \to E$ 满足 $v(L(b,e)) = \frac{1}{2}\|b\| = \frac{1}{2}\|L(b,e)\|$ 属于 $B(E)$。

证明. 不失一般性，设 $\|b\| = 1$。在命题 2.4] 的证明中已证明，存在一个含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 以及一个等距三重嵌入 Ψ：$E \hookrightarrow \mathfrak{A}$，使得 $\Psi(e) = p$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影。记 $\tilde{b} = \Psi(b) \in \mathfrak{A}_2(p)$。显然，$\tilde{b}$ 与 $1-p$ 正交。注意到 $v_{B(E)}(L(b,e)) = v_{B(\Psi(E))}(L(b,p))$。

应用 Ψ 是三重同态这一事实，我们得到 $\tilde{b}^2 = \{\tilde{b},1,\tilde{b}\} = \{\tilde{b},p+(1-p)\,\tilde{b}\} = \{b,p,b\} = \Psi\{b,e,b\} = 0$。此外，算子 $L(b,p)$ 可视为 $B(\mathfrak{A})$ 中的算子，因为 $\Psi(E)$ 是 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子三重系统。对所有 $a \in \mathfrak{A}$，我们得到

$$L(\tilde{b},p)(a) = \{\tilde{b},p,a\} = \{\tilde{b},1,a\} = \tilde{b} \circ a = M_{\tilde{b}}(a)$$

因为 $1-p \perp \tilde{b} \in \mathfrak{A}_2(p)$。也就是说，$L(b,p) = L(b,\mathbf{1}) = M_{\tilde{b}}$在 $B(\mathfrak{A})$ 中。

因此，通过应用引理3.2 和3.3 我们可推得

$$v_{B(E)}\big(L(b,e)\big) = v_{B(\Psi(E))}\left(L(\tilde{b},p)\right) \leq v_{B(\mathfrak{A})}\left(L(\tilde{b},p)\right) = \frac{1}{2}\|M_{\tilde{b}}\| = \frac{1}{2}\|\tilde{b}\| = \frac{1}{2}.$$

最后，由于 b 属于含幺 JB*-代数 $E_2(e)$（e 是单位元），我们可以将其写为 $b = h + ik$，其中h 且 k 在 $E_2(e)$ 中自伴。显然， $\|b\| = 1$ 意味着 $\|h\| \geq 1/2$ 或 $\|k\| \geq 1/2$，不妨设$\|h\| \geq 1/2$。我们知道 $\|h\| = \sup_{\phi\in\mathcal{S}(E_2(e))} |\phi(h)|$，其中 $\mathcal{S}(E_2(e))$ 表示 $E_2(e)$ 的态（参见[45, 引理 3.6。8]）。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\phi_\varepsilon \in \mathcal{S}(E_2(e))$，使得 $\phi_\varepsilon(e) = 1$，从而$|\phi_\varepsilon(h)| > \frac{1}{2} - \varepsilon$。令 $\tilde{\phi}_\varepsilon = \phi_\varepsilon \circ P_2(e) \in S_{E^*}$，则有 $\tilde{\phi}_\varepsilon(e) = 1$，并且

$$\left|\tilde{\phi}_\varepsilon \circ L(b,e)(e)\right| = \left|\tilde{\phi}_\varepsilon\{b,e,e\}\right| = \left|\tilde{\phi}_\varepsilon(b)\right| = \left|\tilde{\phi}_\varepsilon(h) + i\tilde{\phi}_\varepsilon(k)\right| \geq \left|\tilde{\phi}_\varepsilon(h)\right| > \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

由此得到 $v_{B(E)}(L(b,e)) \geq 1/2$。 □

JBW*-三重态的原子分解是一种有用的工具，例如可用于 JB*-三重态的 Gelfand–Naimark 定理 [41]。然而，JBW*-三重态还存在一种更精细的分解，其思路仿照著名的冯·诺依曼代数 Murray-von Neumann 分解；该分解由 Horn 和 Neher 提出 [47, 49]。假设我们考虑一个代数性质（$\mathcal{P}$），它确定 JBW*-三重态 M中一类具体的元素。例如（$\mathcal{P}$）：“e 是极小三重幂等元”，或“e 是阿贝尔三重幂等元，即 $M_2(e)$ 是一个结合 JB*-代数”。显然，由第一个性质定义的类中的元素属于由第二个性质定义的类。根据 [67, 推论 IV 3.61]（另见 [5, 定理 4.5]），存在唯一的正交 w*-闭理想 $I_{(\mathcal{P})}$ 和 $N_{(\mathcal{P})}$，使得 $M = I_{(\mathcal{P})} \oplus^\infty N_{(\mathcal{P})}$，$I_{(\mathcal{P})}$ 与具有性质（$\mathcal{P}$）的所有元素M 所张成空间的 w*-闭包重合，而 $N_{(\mathcal{P})}$ 是 $I_{(\mathcal{P})}$的正交补。所有极小三重幂等元构成的类给出 M的原子分解，而所有阿贝尔三重幂等元构成的类则产生 M 的分解，即将其表示为 I 型部分与连续部分的正交和，也就是说， $M = M_I \oplus^\infty M_c$，其中 M_I 是所有阿贝尔三重幂等元 [49] 所张成空间的 w*-闭包；若 M_c 非平凡，则其中不含非零阿贝尔三重幂等元（参见[48, 命题 4.13] 或[5, 推论 4.11]）。若 $M = M_I$（分别为 $M = M_c \neq \{0\}$），则称 M 为 I 型（分别为连续型），以免产生歧义。此处的术语与冯·诺依曼代数理论 [71], 以及 JBW*-代数的分类 [2, 45]中的术语完全一致。

正如读者已经可以猜到的，JBW*-三元组的连续部分与我们在命题3.5 中已经发展的工具完全契合，无需进一步了解其具体形式。然而，为了理解 I 型部分，我们还需要更多细节。

考虑两个任意的冯·诺伊曼代数 $A \subset B(H)$ 和 $W \subset B(K)$，代数张量积 $A \otimes W$ 规范地嵌入到 $B(H \otimes K)$ 中，其中 $H \otimes K$ 是 H 与 K 的希尔伯特空间张量积（见 [72, 定义 IV.1.2]）。 A 与 W 的通常冯 · 诺伊曼张量积（记为 $A\overline{\otimes}W$）恰好是由代数张量积 $A \otimes W$ 生成的 $B(H \otimes K)$ 的冯·诺依曼子代数，即 $A \otimes W$ 在 $B(H \otimes K)$ 中的弱* 闭包（见 [72,§IV.5]）。

冯·诺依曼张量积也适用于其他类型的算子空间。具体而言，若A 表示一个交换冯·诺依曼代数，而 M 是某个 $B(H)$的 JBW*-子三重系，称为 JW*-三重系（Cartan 因子属于第 1、2、3 或 4 型时即为此情形，参见[49] 或 [43, §9]）。沿用标准记号 [47, 49], ，我们将 $A\overline{\otimes}M$ 记作代数

张量积 $A \otimes M$ 在通常的冯·诺依曼张量积 $A\overline{\otimes}B(H)$中 A 与 $B(H)$的弱 $A\overline{\otimes}M$ -闭包。显然，*是 $A\overline{\otimes}B(H)$ 的 JBW*-子三重系。

根据 Horn 在*中建立的 I 型 JBW[49, -三重系统分类定理 1，7], I 型 JBW*-三重系统恰好是以下形式的 ℓ_∞-和 JBW*-三重系统：

(*i*)： $A\overline{\otimes}C$，其中 A 是一个交换冯·诺依曼代数，而 C 是一个 Cartan 因子，并实现为某个 $B(H)$ 的 JW*-子三重系统；

(*ii*)： $A\otimes C$ （代数张量积），其中 A 同前， C 是一个例外 Cartan 因子 .

当然，当 C 是有限维非例外 Cartan 因子时，$A\overline{\otimes}C = A\otimes C$ （见 [72, 定理 IV.4.14]）。这一特定情形或许值得进一步说明。设 F为一个有限维 JB*-三重系统。为与前文记号一致，我们将 $A\overline{\otimes}C$ 记作 A 与 C的内射张量积。若 $A \cong C(\Omega)$（其中 Ω 为 A的谱），则张量积 $A\overline{\otimes}C$ 可与空间 $C(\Omega, C)$ 等同，该空间由所有取值于 C 的连续函数组成，并赋予逐点运算和上确界范数（参见 [70, 第 49]页）。

我们将频繁运用以下结论：给定 Cartan 因子 C 中的酉元 $u \in A$ 和三重幂等元 e，元素 $u \otimes e$ 是 $A\overline{\otimes}C$ 中的三重幂等元，且相应的 Peirce 子空间满足

$$(A\overline{\otimes}C)_j (u \otimes e) = A\overline{\otimes}(C_j(e)) \tag{3.1}$$

（参见 [49,引理 1.7（i）]）。

Horn–Neher I 型连续分类已被证明是解决 JB*-三重系统理论中诸多问题的有力工具，例如，描述满足 Dunford–Pettis 性质和替代 Dunford–Pettis 性质的 JB*-三重系统 [1, 23], ；研究 JBW*-三重系统上压缩投影的像 [16, 24, 66], ；研究冯·诺依曼代数和 JBW*-三重系统的预对偶中的弱非紧性度量 [43], ；证明 JB*-三重系统中关于 Grothendieck 不等式的 Barton–Friedman 猜想 [44],；确定有限维 JBW*-代数和三重系统 [42], ； 等等。

应当指出，在大多数情况下，冯·诺伊曼张量积 $A\overline{\otimes}C$ 不属于先前关于计算 $C(K, X)$ 空间的数值指标的结果范围 [63, 定理 5], $L_\infty(\mu, X)$ 空间关于 σ-有限测度 μ [64]，以及巴拿赫空间的射影张量积和内射张量积[61]。

在陈述我们对 JBW*-三元组的数值指标的估计之前，我们回顾一下：如果一个巴拿赫空间 X 的二次对偶可写成 ℓ_1-和 X 某个其他闭子空间的形式，则称其为 L-嵌入的（见 [46]）。显然，自反巴拿赫空间是 L-嵌入的。冯·诺伊曼代数的预对偶是 L-嵌入空间的例子 [46, 例 IV.1.1], ，JBW*-三元组的预对偶也具有同样性质 [4, 命题 3.4] ，实 JBW*-三元组的预对偶亦然 [6, 命题 2.2]。Mart´ın 在 [60, 定理 2.1] 中证明，对于每个 L-嵌入空间 X，都有 $n(X) = n(X^*)$。特别地，当 X 是某个（实或复）JBW*-三元组的预对偶时，这一结论成立。

定理 3.6. 设 M 是一个 JBW*-三重系统。那么，如果 M 是交换的，则 $n(M) = n(M_*) = 1$ ；否则，$\frac{1}{e} \le n(M) = n(M_*) \le \frac{1}{2}$。

证明。 正如我们在本定理前的注释中所指出的，等式 $n(M_*) = n(M)$ 可由 [60, 定理 2.1] 得出。若 M 是交换的，则由引理 $n(M) = 1$ 可得 3.1。记 M

形式为

$$M = \left(\bigoplus^{\infty} A_j \overline{\otimes} C_j \right) \bigoplus^{\infty} M_c, \tag{3.2}$$

其中，每个 A_j 都是交换冯·诺依曼代数，每个 C_j 都是 Cartan 因子，而 M_c 是 M 的连续部分（参见 [47, 49] 以及该定理之前的段落）。根据 [63, 命题1]，$n(M) = \inf\{n(A_j \overline{\otimes} C_j) : j\} \wedge n(M_c)$。如果连续部分 M_c 是非平凡的，我们显然可以选取一个非零三重幂等元 $e \in M_c$，相应的 JB*-代数 $(M_c)_2(e)$ 是非结合的，因此根据定理 2.2，存在一个非零 $b \in (M_c)_2(e)$，其中 $\{b, e, b\} = 0$. 命题 3.5 断言，算子 $L(b,e): M_c \to M_c$ 满足 $v(L(b,e)) = \frac{1}{2}\|b\| = \frac{1}{2}\|L(b,e)\|$ 在 $B(M_c)$ 中成立（当 $L(b,e)$ 被视为 $B(M)$ 中的算子时，在 $B(M)$ 中也成立）。因此，我们得出在此情形下 $\frac{1}{e} \leq n(M) \leq \frac{1}{2}$。

若分解 (3.2) 中存在一个秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子 C_{j_0}，C_{j_0} 包含一个 JB*-子三重系，它与 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3(\mathbb{C}) = \text{ß} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ã} : \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$TM 等距同构，并且在 C_{j_0} 中存在两个正交的极小三重幂等元 e_{11}、e_{22} 和一个秩 2 三幂等元 e_{12}，使得由它们生成的 C_{j_0} 的 JB*-子三重系与 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3(\mathbb{C})$ 等距同构，其中 $e_{11} \cong \text{Å} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \text{ã}$ $e_{22} \cong \text{Å} \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \text{ã}$，且 $e_{12} \cong \text{Å} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \text{ã}$（参见引理 3.10 及前面的讨论）。固定一个酉元 $u \in A_{j_0}$ 后，$A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0}$ 中的三重幂等元 $\mathsf{e} = u \otimes e_{12}$ 和 $\mathsf{b} = u \otimes e_{11}$ 满足 $\mathsf{b} \in (A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0})_2(\mathsf{e})$，其中 $\{\mathsf{b}, \mathsf{e}, \mathsf{b}\} = 0$（见 (3.1) 或引理 1.7(*i*)）。再次应用命题 3.5 可得，算子 $L(\mathsf{b}, \mathsf{e}) : A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0} \to A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0}$ 满足 $v(L(\mathsf{b}, \mathsf{e})) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|L(\mathsf{b}, \mathsf{e})\|$ 于 $B(A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0})$ 中，因此 $n(M) \leq n(A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0}) \leq \frac{1}{2}$.

最后可以假设 (3.2) 中所有 Cartan 因子的秩均为一。若其中一个因子，比如说 C_{j_0}，是一个维数为 ≥ 2 的希尔伯特空间 H，并将其视为 1 型 Cartan 因子。取 H 在某个一维子空间上的极小正交投影 p，并用 1 表示 A_{j_0} 的单位元。元素 $\mathsf{p} := \mathbf{1} \otimes p$ 是 I 型冯·诺依曼代数 $A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$ 中的一个投影，并且 $A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0} = A_{j_0} \overline{\otimes} H$ 与 $\mathsf{p}\,(A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)) \subset (A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))_2(\mathsf{p}) \oplus (A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))_1(\mathsf{p})$ 等距同构。由于 $\dim(H) \geq 2$，仿照定理 2.6(xiv) $\Rightarrow$ (iii) 的证明，我们可以找到两个极小三重幂等元 $\xi_1, \xi_2 \in H$，满足 $\xi_1 \in H_1(\xi_2)$ 和 $\xi_2 \in H_1(\xi_1)$。我们还可以假设 $p = \xi_1 \otimes \xi_1$。考虑 $A_{j_0} \overline{\otimes} H$ 和 $A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$ 中的三重幂等元 $\mathsf{e}_{11} = \mathbf{1} \otimes \xi_1$ 和 $\mathsf{e}_{12} = \mathbf{1} \otimes \xi_2$。我们将 $\xi_j \in H = pB(H)$ 与 $\xi_1 \otimes \xi_j$ 等同。我们知道 e_{11} 是 $A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$ 中的一个投影，$\mathsf{e}_{11} \in (A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))_1(\mathsf{e}_{12})$ 且 $\mathsf{e}_{12} \in (A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))_1(\mathsf{e}_{11})$。不难验证，$A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$ 中的 $\mathsf{e}_{12}^2 = 0$ 以及 $L(\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{11}) : A_{j_0} \overline{\otimes} B(H) \to A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$ 恰好是由二幂零三重幂等元 1 2 e_{12}, 给出的右乘算子，即对所有 $\mathsf{x} \in A_{j_0} \overline{\otimes} B(H)$，都有 $L(\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{11})(\mathsf{x}) = \frac{1}{2}\mathsf{x}\mathsf{e}_{12} = R_{\frac{1}{2}\mathsf{e}_{12}}(\mathsf{x})$。考虑到注 3.4，我们得出 $\frac{1}{4} = v_{B(A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))}(R_{\frac{1}{2}\mathsf{e}_{12}}) = v_{B(A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))}(L(\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{11}))$。引理 3.2 表明 $v_{B(A_{j_0} \overline{\otimes} H)}(L(\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{11})) \leq v_{B(A_{j_0} \overline{\otimes} B(H))}(L(\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{11})) = \frac{1}{4}$。这就证明了 $n(M) \leq n(A_{j_0} \overline{\otimes} C_{j_0}) \leq \frac{1}{2}$.

最后，如果 $M_c = \{0\}$ 且（3.2）中的所有 Cartan 因子都等于 $\mathbb{C}$，JBW*-三重系 M 是交换的，因此 $n(M) = 1$. □

注记 3.7。在 [59, 第 384], Martín 曾询问，当 Y 是 JB*-三重体或 JBW*-三重体的预对偶时，条件 $n(Y) = 1$ 是否蕴含 $n(Y^*)$。= 1Martín 在 [60, 定理

2.1]在 Y 是 JBW*-三重体的预对偶时，给出了肯定的解答。我们的定理 3.6 在 Y 是 JBW*-三重体时，也给出了肯定的回答。

在下一个推论中，我们将[59, 命题 3.3] 推广到 JBW*-三重系统的情形。

推论 3.8. 设 E 是一个 JB*-三重系统。那么，以下条件等价：

(i) $n(E^*) = 1$. (ii) E^* 具有替代Daugavet性质。(iii) E^{**} 具有替代Daugavet性质。(iv) $|\phi(u)| = 1$ 对每个 $u \in \partial_e(\mathcal{B}_{E^{**}})$和每个 $\phi \in \partial_e(\mathcal{B}_{E^*})$都成立。$(v)$ E^{**} 的原子部分与一个交换冯·诺依曼代数（显然是原子的）等距同构。(vi) E （等价地， E^{**}）是交换的。

证明。由于 E^{**} 是带有预对偶 E^* 的 JBW*-三重系统， [59] 中的定理 2.3 保证了命题 (ii)、(iii)、(iv) 与 (v) 之间的等价性。等价关系 $(i) \Leftrightarrow (vi)$ 由定理 3.6 得出。蕴含关系 $(i) \Rightarrow (ii)$ 是 [62, 引理 2.3] 的推论。（蕴含关系 $(vi) \Rightarrow (iv)$ 也可以由定理 2.6 以及交换冯·诺伊曼代数的标准理论推出。）□

命题 3.5 一直是根据数值指标刻画 JBW*-三重系统交换性的有力工具。然而，在一般 JB*-三重系统中，三重幂等元的存在性几乎无从实现。为了对一般情形有新的认识，我们接下来的目标将是命题 3.5 的以下强化版本。

命题 3.9. 设 E 是一个 JB*-三元组。假设存在一个元素 a 属于 E，使得内理想 $E(a)$ 包含一个范数为 1 的二幂零元 b，相对于其作为 JB*-代数的自然结构而言，即 $\{b, r(a)\ b\} = 0$。考虑元素 $c := b \circ_{r(a)} b^{*_{r(a)}}$，它在 JB*- 代数 $E(a)$ 中非零且为正。则算子 $T = L(b, c) + L(c, b^{*_{r(a)}})$ 满足 $\|T\|_{B(E)} = 1$，且 $^{v_{B(E)}}(T) = \frac{1}{2}$.。因此，在此情形下， $\frac{1}{e} \leq n(E) \leq \frac{1}{2}$。

在证明此命题之前，我们先考虑一个技术引理。

引理 3.10. 设 b 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中一个非零的二幂零元。则元素 $(b \circ b^*) \circ b = \frac{1}{2}\{b, b, b\}$ 非零且为二幂零。

证明。 我们先从第一个等式开始。由于 $\mathfrak{A}$ 的三元乘积由式（1.2）中的表达式唯一确定（参见 [55, 命题 5。5]），由关于 b 的假设很容易验证：

$$\{b, b, b\} = 2(b \circ b^*) \circ b - (b \circ b) \circ b^* = 2(b \circ b^*) \circ b.$$

显然，根据 JB*-三重系统定义中的第三条公理， $\{b, b, b\}$ 非零。

根据 Shirshov–Cohn 定理（见[45, 定理 2.4.14] 或 [74, 推论 2.2]），由 $\{b, b^*\}$ 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数 $\mathfrak{B}$ 是一个 JC*-代数，也就是说，它是某个 C*-代数的 JB*-子代数。因此，

存在一个 C^*-代数 A，使得 $\mathfrak{B}$ 是 A的 JC*-子代数。在这种情况下，$b^2 = 0$ 也属于 A，并且

$$(b \circ b^*) \circ b = \left(\frac{bb^* + b^*b}{2}\right) \circ b = \frac{1}{4}(bb^*b + b^*bb + bbb^* + bb^*b) = \frac{1}{2}bb^*b = \frac{1}{2}\{b,b,b\} \in \mathfrak{A},$$

这意味着 $\left[(b \circ b^*) \circ b\right]^2 = \frac{1}{4}(\{b,b,b\})^2 = \frac{1}{4}(bb^*b)^2 = \frac{1}{4}bb^*bbb^*b = 0$ 属于 A, $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{A}$。 □

命题的证明 *3.9*。显然可以假设 a 是一个范数为 1 的元素。与命题陈述中一样，令 $c = b \circ_{r(a)} b^{*r(a)} = \{b,b,r(a)\} \in E(a) \subset E$。为简化记号，我们将 $\circ$ 和 * 分别记作 JB$^{\circ_{r(a)}}$ 代数 $^{*r(a)}$ 的 Jordan 乘积和对合*-代数 $E(a)$，。

请注意，根据 Kaup–Banach–Stone 定理[55, 命题 5。5]，JB 代数中元素之间的三重乘*积由表达式（1.2）唯一确定。根据引理 3.10，$\{b,b,b\} = b^{[3]}$ 是 $E(a)$ 中的二幂零元。

我们断言

(3.3) $2b \circ c = \{b,b,b\} = b^{[3]}$ 也是 JB*-代数 $E(b \circ b^*) = E(c)$ 中的一个二幂零元

（需要提醒读者的是，我们改变了 Jordan 乘积和对合）。具体而言，根据 [51, 定理 10]，，由 b 生成的 $E(a)$ 的 JB*-子代数 $\mathfrak{B}$（按等距意义）同构于某个 JB*-代数 $C_0(K, \mathcal{Q}_3)$，其中 $K \subset [0, \|b\|]$ 是包含 0 的某个紧集，且 $\mathcal{Q}_3 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}\right\}$。此外，在此表示下，元素 b对应于函数 $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$。因此，$b \circ b^* \equiv \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2/2 & 0 \\ 0 & t^2/2 \end{pmatrix}$，并且

$$b^{[3]} = 2(b \circ b^*) \circ b = 2c \circ b \equiv \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

此外，$r(c) = r(b \circ b^*) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 属于 $\mathfrak{B}^{**}$。

由于 $\mathfrak{B}(b \circ b^*) = \mathfrak{B}^{**}(r(b \circ b^*)) \cap \mathfrak{B}$，它包含 $b^{[3]}$。因此，$b^{[3]}$ 属于 $E(b \circ b^*)$。我们可以在 $\mathfrak{B}$中计算运算

$$b^{[3]} \circ_{r(b \circ b^*)} b^{[3]} \equiv \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得出 $b^{[3]}$ 在 $\mathfrak{B}(b \circ b^*)$ 中是二幂零的，并且也在 $E(b \circ b^*)$ 中 $= E(c)$ 中。这就完成了对断言（3.3）的证明。

另一方面，根据定义，元素 $c = b \circ_{r(a)} b^{*r(a)}$ 在 JB*-代数 $E(a)$ 中是正的；又由于 $E(a)$ 是 E 的内理想，我们得出 $Q(c)(E) = \{c,E,c\} \subset E(a)$，因此 $E(c) \subset E(a)$，且 $r(c)$ 与 $E(a)^{**}$ 中的支撑投影重合。因此，$r(c) \leq r(a)$ 在 $E(a)^{**}$（以及E^{**}）中，因为 c 在后一个 JB*-代数中是正的。于是，$E(c)$ 是 $E(a)$ 的 JB*-子代数。

显然，我们有 $b \in \mathfrak{B}(b \circ b^*) \subset E(c)$。因此，根据两段之前证明的结果，$b \circ_{r(c)} c = b \circ_{r(a)} c = b \circ_{r(a)} (b \circ_{r(a)} b^{*r(a)}) = \frac{1}{2}b^{[3]}$ 在 $\mathfrak{B}(b \circ b^*)$ $(\subset E(c) \subset E(a))$ 中是幂零的。由此可得，$b \circ_{r(c)} c$ 在 $E(c) \subset E(a)$ 中是幂零的。

正如在 [15, 命题 2.4] 和 [36, 引理 2.5], 的证明中基本确立、并在 [32, 引理 3.9(i)], 中明确指出的，存在一个等距三重嵌入 Ψ，将 E^{**} 嵌入含幺 JBW*-代数 $\mathfrak{A}$ 中，并将 $r(c)$ 映射为 $\mathfrak{A}$. 中的一个投影 p。$\mathfrak{A}$ 的 Jordan 乘积和对合分别记为 $\circ$ 和 $*$。注意，将 Ψ 与E 到其二重对偶的自然嵌入复合后，也可将 Ψ 视为从 E 到 $\mathfrak{A}$. 的等距三重嵌入。由于 $\Psi(r(c))$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影，且 c 在 $E_2^{**}(r(c))$ 中为正，因此 $\Psi(c)=\tilde{c}\geq 0$ 在 $\mathfrak{A}$ 中成立。

现在我们将注意力转向 T 上由 $T=L(b,c)+L(c,b^{*r(c)})$ 定义的有界线性算子 E^{**}。由于 b、c 和 $b^{*r(c)}$ 全都属于 E，映射 T 将 E 映射到 E 中，因此可以将其视为 $B(E)$ 中的算子。注意，由三元乘积分别弱*连续性和戈德斯廷定理可知，$(T|_E)^{**}=T$。显然，$\Psi|_E: E\to\Psi(E)$ 是一个满射线性等距映射和三重同构；通过赋值 $S\mapsto\tilde{S}:=\Psi S\Psi^{-1}$，我们可以将 $B(E)$ 与 $B(\Psi(E))$ 视为相同。显然，$\tilde{T}=\Psi T\Psi^{-1}=L(\tilde{b},\tilde{c})+L(\tilde{c},\tilde{b}^*)$，其中 $\tilde{b}=\Psi(b)$、$\tilde{c}=\Psi(c)$，并且由于 $\tilde{c}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中为正，$*_{r(\tilde{c})}$ 与 $\mathfrak{A}$ 中的对合重合（回顾 $\Psi(r(c))=p$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影）。

此外，由于 $\Psi(E)$ 是 $\mathfrak{A}$ 和 b、$\tilde{c}$、$\tilde{c}^*\in\Psi(E)$ 的 JB*-子三元组，映射 $T=L(b,\tilde{c})+L(\tilde{c},b^*)$ 也可以视为 $B(\mathfrak{A})$ 中的一个算子。根据后者，并考虑到 (1.2) 中 JB*-代数里的三元乘积表达式，$T\in B(\mathfrak{A})$ 具有如下形式

$$\begin{aligned}\tilde{T}(z)&=L(\tilde{b},\tilde{c})(z)+L(\tilde{c},\tilde{b}^{*r(\tilde{c})})(z)=\{\tilde{b},\tilde{c},z\}+\{\tilde{c},\tilde{b}^{*r(\tilde{c})},z\}\\&=(\tilde{b}\circ\tilde{c})\circ z+(z\circ\tilde{c})\circ\tilde{b}-(\tilde{b}\circ z)\circ\tilde{c}+(\tilde{c}\circ\tilde{b})\circ z+(z\circ\tilde{b})\circ\tilde{c}-(\tilde{c}\circ z)\circ\tilde{b}\\&=2(\tilde{b}\circ\tilde{c})\circ z=2M_{\tilde{b}\circ\tilde{c}}(z)=M_{2\tilde{b}\circ\tilde{c}}(z),\end{aligned}$$

对所有 $z\in\mathfrak{A}$ 均成立。显然，$\|\tilde{T}\|_{B(\mathfrak{A})}=\|M_{2\tilde{b}\circ\tilde{c}}\|_{B(\mathfrak{A})}=\|2\tilde{b}\circ\tilde{c}\|=\|\tilde{b}^{[3]}\|=\|\tilde{b}\|^3=\|b\|^3=1$。此外，

$$\|\tilde{T}|_{\Psi(E)}\|_{B(\Psi(E))}=\|T\|_{B(E)}\geq\|T(r(c))\|=\|\{b,c,r(c)\}+\{c,b^{*r(c)},r(c)\}\|=\|2b\circ_{r(c)}c\|=1.$$

由于 $\|T\|_{B(E)}=\|T|_{\Psi(E)}\|_{B(\Psi(E))}\leq\|T\|_{B(\mathfrak{A})}=1$，我们推出

$$\|T\|_{B(E)}=\|\tilde{T}|_{\Psi(E)}\|_{B(\Psi(E))}=\|\tilde{T}\|_{B(\mathfrak{A})}=1.$$

现在，利用 $b\circ_{r(c)}c=\{b,r(c)\,c\}$ 是 $E(c)$ 中的二幂零元（见 (3.3)），我们得到 $\tilde{c}\circ_p b=\{\tilde{c},p,b\}=\{\Psi(c)\;\Psi(r(c))\;\Psi(b)\}$ 在 $\Psi(E)(\tilde{c})$ 中是二幂零的，因此在 $\mathfrak{A}(\tilde{c})$ 和 $\mathfrak{A}$ 中也成立，因为 $\Psi(r(c))=p\geq r(\tilde{c})$ 是 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的一个投影。接下来，我们利用引理 3.2 和 3.3 得到$v_{B(E)}(T)=v_{B(\Psi(E))}(\tilde{T}|_{\Psi(E)})\leq v_{B(\mathfrak{A})}(\tilde{T})=v_{B(\mathfrak{A})}(M_{2\tilde{b}\circ\tilde{c}})=\frac{1}{2}\|2\tilde{b}\circ\tilde{c}\|=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\|T\|_{B(E)}$。这表明 $n(E)\leq\frac{1}{2}$。

事实上，算子 T的数值半径恰好为$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\|T\|_{B(E)}$。也就是说，由于 $2b\circ c$在 $E(c)$ 中是 2-幂零的（参见（3.3）），且 $T|_{E(c)}: E(c)\to E(c)$与由元素 $2b\circ c$给出的Jordan乘法算子一致，即对所有 $z\in E(c)$，$T(z)=2(b\circ c)\circ z$，引理 3.2 和 3.3 推出 $v_{B(E)}(T)\geq v_{B(E(c))}(T|_{E(c)})=v_{B(E(c))}(M_{2b\circ c})=\frac{1}{2}\|M_{2b\circ c}\|=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\|T|_{E(c)}\|=\frac{1}{2}\|T\|$。□

我们回顾一下，如果 a JB*-三重系统 E 中由 a、$E(a)$ 生成的内理想 E 是一个结合 JB*-代数（参见[49] 和 [14, 第 196]页），则称元素 a 为阿贝尔元或交换元。若 E 不含非零阿贝尔元，则称其为反极小型。Bunce、Chu 和 Zalar 在研究二次对偶为 I 型 JBW*-三重系统的 JB*-三重系统 E 时引入了这一概念，这显然类比于 C*- 代数和 JB*- 代数 [14, §3] 中的极小型与后极小型概念。

推论 3.11。设 E 是一个含有非交换元素的 JB*-三重系统。则 $\frac{1}{e} \leq n$（E） $\leq_1 {}_2$。如果 E 是反极小型，则结论显然成立。

证明。 设 E 含有一个非交换元素 a. 内理想 $E(a)$ 是一个非结合 JB*-代数，因此它含有一个非零二幂零元（参见定理 2.2）。所需结论由命题3.9得出。 □

正如我们在定理 2.6中已经指出的，JB*-三重系统的交换性 E 会因 E中存在一个非交换元素而遭到破坏。不过，“非交换”这一病态性质实际上可由存在一个元素 $a \in E$ 满足 $L(a,\ a) \nsubseteq E(a$ 来刻画。我们已经计算了含有非交换元素的非交换 JB*-三重系统的数值指标。接下来我们将看到，可以对结论稍作改进。

定理 3.12。设 E 是一个 JB*-三重系，则以下陈述成立：

(a) 当且仅当 E 是交换的时， $n(E) = 1$ 。 (b) $n(E^*) = n(E^{**})$ 当且仅当 E 是非交换的。 (c) 如果由于 E^{**} 的原子部分中存在秩大于或等于 2 的 Cartan 因子，使得 E 是非交换的，则有 $\frac{1}{e} \leq n$ (E) $\leq \frac{1}{2}$。

证明。 根据引理 3.1，我们总可以假设 E 是非交换的。由于 E 是交换的当且仅当 E^{**} 如此，故结论 (b) 由定理 3.6 得出。

鉴于第 2 节中的结果，我们可以假设以下陈述之一成立：

(1) E^{**} 的原子部分 $\mathcal{A}_{E^{**}}$ 含有一个秩大于或等于 2 的 Cartan 因子。

(2) E^{**} 的原子部分是复希尔伯特空间的 ℓ_∞-和，这些空间被视为 1 型 Cartan 因子，且其中至少一个的维数大于或等于 2。

我们断言，假设 (1) 成立，JB*-三重系统 E 含有一个非阿贝尔元素，因此命题 3.9 将推出 (c) 中的结论。因此，我们假设 E^{**} 的原子部分中含有一个秩为 ≥ 2 的 Cartan 因子 C 。仿照定理 2.6 (xiv) $\Rightarrow$ (iii) 的证明进行推理，我们可得 C 含有一个 JB*-子三重系统，它与 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3($ $\mathbb{C})$ $=$ß Å $\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \beta & \delta\end{matrix}$ ã : $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$TM 等距同构。此外，我们可以在 E^{**} 中找到两个正交的极小三重幂等元 e_{11}, e_{22} 以及一个秩 2 三幂等元 e_{12} ，使它们生成的 JB*-子三重系统在某个满足 $e_{11} \cong$ Å 1 0 0 0 ã $e_{22} \cong$ Å 0 0 0 1 ã，且 $e_{12} \cong$ Å 0 1 1 0 ã 的三重同构下，等距同构于 $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_3(\mathbb{C})$（参见 [37, 引理 3.10 及其之前的讨论]）。在所引证明中，我们还说明了如何利用定理 3.3],中的 JB*-三重系统的 Kadison 传递性定理，在 [15, 中找到范数为一元素 $a, b \in E$ ，使得 $a = e_{11} + P_0($ $e_{11} + e_{22})(a)$ $= e_{11} + a_0$ 且$b = e_{12} + P_0(e_{12})(b)$ $= e_{12} + b_0$. 。我们注意到 $E_0^{**}(e_{12})$ $= E_0^{**}($ $e_{11} + e_{22})$。元素$c = Q(b)(a)$ $= e_{22} + Q(b_0)(a_0)$ $= e_{22} + c_0$ 属于 $E(b)$，且 $c_0 \in E_0^{**}(e_{12})$。考虑到

由于 $r(b) = e_{12} + r(b_0)$，不难利用正交性验证：

$$(c \circ_{r(b)} c^{*_{r(b)}}) \circ_{r(b)} c = (e_{22} \circ_{e_{12}} e_{11}) \circ_{e_{12}} e_{22} + (c_0 \circ_{r(b_0)} c_0^{*_{r(b_0)}}) \circ_{r(b_0)} c_0$$
$$= \frac{1}{2} e_{12} \circ_{e_{12}} e_{22} + (c_0 \circ_{r(b_0)} c_0^{*_{r(b_0)}}) \circ_{r(b_0)} c_0 = \frac{1}{2} e_{22} + (c_0 \circ_{r(b_0)} c_0^{*_{r(b_0)}}) \circ_{r(b_0)} c_0,$$

and

$$(c \circ_{r(b)} c) \circ_{r(b)} c^{*_{r(b)}} = (e_{22} \circ_{e_{12}} e_{22}) \circ_{e_{12}} e_{11} + (c_0 \circ_{r(b_0)} c_0) \circ_{r(b_0)} c_0^{*_{r(b_0)}}$$
$$= 0 + (c_0 \circ_{r(b_0)} c_0) \circ_{r(b_0)} c_0^{*_{r(b_0)}}.$$

由前两个恒等式可推得 $(c \circ_{r(b)} c^{*_{r(b)}}) \circ_{r(b)} c \neq (c \circ_{r(b)} c) \circ_{r(b)} c^{*_{r(b)}}$，因此$E(b)$ 作为 JB*-代数是非结合的。这就完成了定理的证明。□

根据我们目前掌握的知识和工具，我们无法得出每个非交换的 JB*-三元组E 都具有数值指标 $\leq \frac{1}{2}$. 审视定理 3.12 的证明，我们注意到，只有非交换 JB*-三元组的一个非常特殊的情形尚未确定。下面的开放问题涵盖了唯一剩下的情形：

问题 3.13. 设 E 是一个非交换的 JB*-三元组，满足其 E^{**} 的原子部分是复希尔伯特空间的一个（无限）ℓ_∞-和，这些复希尔伯特空间被视为 1 型 Cartan 因子，且其中一个的维数大于或等于 2。不等式 $n(E) \leq \frac{1}{2}$ 是否成立?

前一个问题与下一个问题直接相关。

问题 3.14. 设 E 是一个 JB*-三重系统。假设对每个 $a \in E$，由 a 生成的内理想都是一个结合的 JB*-代数。我们知道，这一假设不足以得出 E 是交换的；例如，将希尔伯特空间视为 1 型 Cartan 因子即可说明这一点。不过，我们能否得到一个结构结果，描述这类 JB*-三重系统 E 的具体形式?

正如我们在引言中所述，对于每个 C*-代数 A （分别地，对于每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$），当且仅当 A （分别地， $\mathfrak{A}$）是非交换的时，有 $n(A) = \frac{1}{2}$ （分别地， $n(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$ ）（分别参见 [50] 和 [51], ）。这些论证依赖于考察 C*-代数（分别地，JB*-代数）的二次对偶，并应用相应的 Russo-Dye 定理以及含幺 C*-代数和 JB*-代数中酉元的丰富性。就下界而言，我们在定理 3.6 和 3.12 中给出的估计不够精确。即使在 JBW*-三重系统中，酉三重幂等元通常也不存在，因此无法使用经典论证；这也凸显了下面这个作为本文结尾的开放问题的重要性与难度。

问题 3.15. 设 E 是一个 JB*-三重体。不等式 $n(E) \geq \frac{1}{2}$ 是否成立?

致谢

两位作者均获安达卢西亚自治区政府资助，项目编号为 FQM375 和 PY20 00255；另获项目 PID2021-122126NB-C31 资助，该项目由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和“欧洲区域发展基金：建设欧洲的一种方式”资助。第一作者获西班牙大学部资助的 FPU21/00617 项目资助，资助单位为格拉纳达大学。第二作者获 IMAG–María de Maeztu 项目资助，项目编号为 CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/501100011033。

References

1. Acosta, M. D. & Peralta, A. M. JB*-三重系统的一种替代性邓福德-佩蒂斯性质。《季刊数学》52, 391–401 (2001). 2. Alfsen, E. M. & Shultz, F. W. 算子代数态空间的几何（波士顿，MA：Birkh¨äuser, 2003). 3. Baker, A. B. A. & Botelho, F. 向量值函数空间的数值指标。《线性与多重线性代数》70, 2117–2126 (2022). 4. Barton, T. & Timoney, R. M. 约当三重乘积的弱*连续性及其应用。《斯堪的纳维亚数学》59, 177–191 (1986). 5. Battaglia, M. JBW-三重系统的序论类型分解。《季刊数学》牛津版，第 II 辑，42, 129–147 (1991). 6. Becerra-Guerrero, J., L´ópez P´érez, G., Peralta, A. M. & Rodgr´íguez-Palacios, A. 巴拿赫空间闭球中的相对弱开集，以及有限秩实 JB^*-三重系统。《数学年刊》330, 45–58 (2004). 7. Bonsall, F. F. & Duncan, J. 赋范空间上算子的数值域及赋范代数元素的数值域（剑桥大学出版社，剑桥。伦敦数学会，伦敦，1971). 8. Bonsall, F. F. & Duncan, J. 数值域 II（剑桥大学出版社，剑桥。伦敦数学会，伦敦，1973). 9. Bouldin, R. 乘积的数值域。II。《数学分析及其应用杂志》33, 212–219 (1971). 10. Boyko, K., Kadets, V., Mart´ín, M. & Werner, D. 巴拿赫空间的数值指标与对偶性。《剑桥哲学学会数学论文集》142, 93–102 (2007). 11. Braun, R., Kaup, W. & Upmeier, H. 约当 C^*-代数的全纯刻画。《数学杂志》161, 277–290 (1978). 12. Bunce, L. J., Chu, C. H. & Zalar, B. JB*-三重系统的结构空间与分解。《斯堪的纳维亚数学》86, 17–35 (2000). 13. Bunce, L. J. & Chu, C.-H. JB^*-三重系统中的紧算子、乘子与拉东-尼科迪姆性质。《太平洋数学杂志》153, 249–265 (1992). 14. Bunce, L. J., Chu, C.-H. & Zalar, B. 序列弱连续 JB^*-三重系统的分类。《数学杂志》234, 191–208 (2000). 15. Bunce, L. J., Fern´ández-Polo, F. J., Mart´ínez Moreno, J. & Peralta, A. M. JB*-三重系统的 Saitˆo-Tomita-Lusin 定理及其应用。《季刊数学》57, 37–48 (2006). 16. Bunce, L. J. & Peralta, A. M. 算子代数上压缩投影的像。《数学分析及其应用杂志》272, 55–66 (2002). 17. Burgos, M., Fern´ández-Polo, F. J., Garc´és, J. J., Mart´ínez Moreno, J. & Peralta, A. M. C^*-代数、JB*-代数及 JB*-三重系统中的正交性保持映射。《数学分析及其应用杂志》348, 220–233 (2008). 18. Burgos, M. J., Peralta, A. M., Ram´írez, M. & Ruiz Morillas, M. E. 载于《代数与分析中的约当结构会议论文集：献给 El Amin Kaidi 60 岁生日》，西班牙阿尔梅里亚，2009年5月20日至22日，65–88（阿尔梅里亚：阿尔梅里亚大学，代数与分析系，2010).´19. Cabrera Garc´ía, M. & Rodr´íguez Palacios, A. 非结合赋范代数。第 1 卷：Vidav-Palmer 定理与盖尔范德-奈马克定理，xxii+712 （剑桥大学出版社，剑桥，2014).

20. Chica, M., Mart´ín, M. & Mer´í, J. Banach 空间上秩为 1 的算子的数值半径。《季刊数学》65, 89–100 (2014). 21. Chica, M. & Mer´í, J. 平面上若干范数族的秩为 1 的数值指标。《线性与多重线性代数》63, 1817–1828 (2015). 22. Chu, C.-H. & Iochum, B. 冯·诺伊曼代数中 Jordan 三重系统的补空间。《美国数学学会会刊》108, 19–24 (1990). 23. Chu, C.-H. & Mellon, P. JB*-三重系统中的邓福德-佩蒂斯性质。《伦敦数学学会杂志》第二辑 55, 515–526 (1997). 24. Chu, C.-H., Neal, M. & Russo, B. 正规压缩投影保持类型。《算子理论杂志》51, 281–301 (2004). 25. Crabb, M. J., Duncan, J. & McGregor, C. M. C^*-代数交换性的刻画。《格拉斯哥数学杂志》15, 172–175 (1974). 26. Dang, T. JB^*-三重系统之间的实等距映射。《美国数学学会会刊》114, 971–980 (1992). 27. Dineen, S. 巴拿赫空间二次对偶上的完备全纯向量场。《斯堪的纳维亚数学》59, 131–142 (1986). 28. Dineen, S. & Timoney, R. M. JB^*-三重系统的中心。《斯堪的纳维亚数学》62, 327–342 (1988). 29. Dixmier, J. C^*-代数，由 Francis Jellett 从法文译出，xiii+492（North-Holland Publishing Co., 阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977）。30. Duncan, J., McGregor, C. M., Pryce, J. D. & White, A. J. 赋范空间的数值指标。《伦敦数学学会杂志》第二辑 2, 481–488 (1970). 31. Edwards, C. M. & R¨uttimann, G. T. JB^*-三重系统中内理想的刻画。《美国数学学会会刊》116, 1049–1057 (1992). 32. Edwards, C. M., Fern´andez-Polo, F. J., Hoskin, C. S. & Peralta, A. M. JB*-三重系统单位球的面结构。《纯粹与应用数学杂志》641, 123–144 (2010). 33. Edwards, C. M. & R¨uttimann, G. T. 双对偶 JB*-三重系统中的紧三重幂等元。《剑桥哲学学会数学论文集》120, 155–173 (1996). 34. El Amin, K., Morales Campoy, A. & Rodriguez Palacios, A. C^*-代数乘积的几何性质。《落基山数学杂志》31, 197–213 (2001). 35. Fern´andez-Polo, F. J., Mart´ínez, J. & Peralta, A. M. 实 JB*-三重系统之间的满射等距映射。《剑桥哲学学会数学论文集》137, 709–723 (2004). 36. Fern´andez-Polo, F. J. & Peralta, A. M. JB*-三重系统对偶空间中的闭三重幂等元与弱紧性。《伦敦数学学会杂志》第二辑 74, 75–92 (2006). 37. Fern´andez-Polo, F. J. & Peralta, A. M. 低秩紧算子与 Tingley 问题。《数学进展》338, 1–40 (2018). 38. Friedman, Y. & Russo, B. $C_0(K)$ 上的压缩投影。《美国数学学会汇刊》273, 57–73 (1982). 39. Friedman, Y. & Russo, B. 交换算子三重系统的函数表示。《伦敦数学学会杂志》第二辑 27, 513–524 (1983). 40. Friedman, Y. & Russo, B. JBW^*-三重系统预对偶的结构。《纯粹与应用数学杂志》356, 67–89 (1985). 41. Friedman, Y. & Russo, B. JB*-三重系统的 Gel'fand-Na¨ımark 定理。《杜克数学杂志》53, 139–148 (1986). 42. Hamhalter, J., Kalenda, O. F. K. & Peralta, A. M. 有限三重幂等元与有限 JBW*-三重系统。《数学分析及其应用杂志》490. 编号 124217, 64 (2020).

43. Hamhalter, J., Kalenda, O. F. K., Peralta, A. M. & Pfitzner, H. 冯·诺伊曼代数及 JBW^*-三重系统预对偶中的弱非紧性度量。《泛函分析杂志》278. 编号 108300, 69 (2020). 44. Hamhalter, J., Kalenda, O. F. K., Peralta, A. M. & Pfitzner, H. JB*-三重系统的 Grothendieck 不等式：Barton-Friedman猜想的证明。《美国数学学会汇刊》374, 1327–1350 (2021). 45. Hanche-Olsen, H. & Størmer, E. Jordan算子代数 viii+183（Pitman（高级出版项目），波士顿, MA，1984）。46. Harmand, P., Werner, D. & Werner, W. 巴拿赫空间及 Banach代数中的 M-理想（柏林：Springer-Verlag，1993）。47. Horn, G. & Neher, E. 连续 JBW^*-三重系统的分类。《美国数学学会汇刊》306, 553–578 (1988). 48. Horn, G. JBW^*-三重系统预对偶与理想结构的刻画。《斯堪的纳维亚数学》61, 117–133 (1987). 49. Horn, G. I型 JBW*-三重系统的分类。《数学杂志》196, 271–291 (1987). 50. Huruya, T. C^*-代数的赋范空间数值指标。《美国数学学会会刊》63, 289–290 (1977). 51. Iochum, B., Loupias, G. & Rodr´ıguez-Palacios, ´A. C^*-代数的交换性与 JB^*-代数的结合性。《剑桥哲学学会数学论文集》106, 281–291 (1989). 52. Kadets, V., Mart´ın, M., Mer´ı, J., P´erez, A. & Quero, A. 关于相对于某算子的数值指标。《数学论文集》547, 1–58 (2020). 53. Kadets, V., Mart´ın, M. & Pay´a, R. Banach空间数值指标的最新进展与开放问题。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报 A 辑：数学》100, 155–182 (2006). 54. Kaup, W. 对称复Banach流形的代数刻画。《数学年刊》228, 39–64 (1977). 55. Kaup, W. 复 Banach 空间中有界对称域的黎曼映射定理。《数学杂志》183, 503–529 (1983). 56. Kaup, W. & Upmeier, H. Banach 空间中的 Jordan代数与对称Siegel域。《数学杂志》157, 179–200 (1977). 57. Mart´ın, M. 关于 Banach 空间数值指标的综述。《数学摘录》15, 265–276 (2000). 58. Mart´ın, M. Banach 空间的等距变换群与对偶性。《泛函分析杂志》255, 2966–2976 (2008). 59. Mart´ın, M. C^*-代数与 JB^*-三重系统的替代Daugavet性质。《数学新报》281, 376–385 (2008). 60. Mart´ın, M. 关于 Banach 空间数值指标与对偶性的正面与负面结果。《美国数学学会会刊》137, 3067–3075 (2009). 61. Mart´ın, M., Mer´ı, J. & Quero, A. 算子理想与张量积的数值指标和 Daugavet 性质。《地中海数学杂志》18. 编号 72, 15 (2021). 62. Mart´ın, M. & Oikhberg, T. 一种替代Daugavet性质。《数学分析及其应用杂志》294, 158–180 (2004). 63. Mart´ın, M. & Pay´a, R. 向量值函数空间的数值指标。《数学研究》142, 269–280 (2000). 64. Mart´ın, M. & Villena, A. R. $L_\infty(\mu, X)$ 的数值指标与 Daugavet 性质。《爱丁堡数学学会论文集》第二辑 46, 415–420 (2003).

65. Mer´ı, J. & Quero, A. 关于平面上绝对对称范数的数值指标。《线性与多重线性代数》69, 971–979 (2021). 66. Neal, M. & Russo, B. 压缩投影与算子空间。Trans. Am. Math. Soc. 355, 2223–2262 (2003). 67. Neher, E. 网格方法下的 Jordan 三重系统（Springer，Cham，1987）。68. Olsen, G. H. 关于复 Lindenstrauss 空间的分类。《斯堪的纳维亚数学》35, 237–258 (1975). 69. Rodr´ıguez Palacios, ´A. 一则关于 Jordan C*-代数及相关主题的 Vidav-Palmer 定理。J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 22, 318–332 (1980). 70. Ryan, R. A. 巴拿赫空间张量积导论（伦敦：Springer，2002）。71. Sakai, S. C^*-代数与 W^*-代数（Springer-Verlag，柏林，1971）。72. Takesaki, M. 算子代数理论。I vii+415 （Springer-Verlag，纽约-海德堡，1979）。73. Werner, D. 函数空间上算子的 Daugavet 方程。J. Funct. Anal. 143, 117–128 (1997). 74. Wright, J. D. M. Jordan C^*-代数。密歇根数学杂志 24, 291–302 (1977).

(D. CABEZAS)

Departamento de Análisis Matemático Facultad de Ciencias Universidad de Granada 18071 „, , , Granada , Spain.
Email address: dcabezas@ugr.es

（A.M.Peralta）

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada (IMAG) Departamento de Análisis , , , , , Matemático Facultad de Ciencias Universidad de Granada 18071 Granada Spain.
Email address: aperalta@ugr.es