arXiv:2302.14797v2 [math.AC] 6 Jul 2023

关于希尔伯特函数为 (1, 4, k, k, 4, 1) 的 Artin-Gorenstein代数

NANCY ABDALLAH

Abstract. 我们研究了希尔伯特函数为 (1, 4, k, k, 4, 1) 的一些 Artin-Gorenstein 代数的自由分解，并证明，若这类代数具有弱 Lefschetz 性质，则它们都具有强 Lefschetz 性质。在 $k = 4$ 的情形下，我们证明仅凭希尔伯特函数就能确定贝蒂表。对于更高的 k，要确定贝蒂表还需要对代数施加更强的条件。特别地，如果该代数是完全交，或由等次生成理想定义，那么贝蒂表是唯一的。

1. 引言

设 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的标准分次多项式环，$\mathbb{K}$ 的特征为零；设 I 是一个非退化齐次理想（不包含任何线性形式），且 $A = S/I$ 是一个 Artin 代数。A 的希尔伯特函数是函数 $H(A, i) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $H(A, i) = \dim_{\mathbb{K}} A_i$。这些维数由 A, $H(A)$ 的 H-向量给出，即 $(1, h_1, h_2, \ldots, h_s)$，其中 $h_i = H(A, i) > 0$。整数 s 称为 A 的底层次数（使得 $\dim_{\mathbb{K}} A_i \neq 0$ 的最大整数 i）。

考虑环 $R = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$。$S$通过微分作用于 R

$$x_i(X_j) = \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = \delta_{ij}.$$

对于次数为 s 的齐次多项式 F，定义 $I_F = \operatorname{ann}_S(F)$。Macaulay 在 [15], 中证明，$S/I_F$ 是底层次数为 s 的 Gorenstein 代数，并且对于每个底层次数为 s 的 Artin-Gorenstein（AG）代数 $A = S/I$，都存在某个齐次多项式 $F \in R_s$，使得 $I = I_F$。F 称为 I 的 Macaulay 对偶生成元，而 I 称为 F 的 Macaulay 逆系统。

对于有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 S-模 M，希尔伯特–Syzygy 定理 [9] 保证存在一个最小分次有限自由分解，它是一个正合列

$$0 \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

对于 $i \leq n$ 和 $F_i \simeq \oplus_j S(-j)^{b_{i,\ j}}$，其中 $b_{i,\ j} \in \mathbb{Z}$。这些信息可以用贝蒂表表示，它是一个数组，其中位置 (i, j)（按从左到右、从上到下的顺序读取）处的条目为 $b_{i,\ i+j}$（见 [9]）。按此索引方式，贝蒂表的底行编码了 M 的正则度。当 $M = S/I$ 是 Artin-Gorenstein 代数时，M 的正则度与其底层次数一致。

例 1.1. 对于 $F = y_1y_2y_3 \in \mathbb{K}[y_1, y_2, y_3]$，我们有 $I_F = \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2 \rangle$，其最小自由分解由 Koszul 复形给出

$$0 \longrightarrow S(-6) \longrightarrow S(-4)^3 \longrightarrow S(-2)^3 \longrightarrow S \longrightarrow S/I_F \longrightarrow 0,$$

在贝蒂表记法中写作

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13E10、13F55、13D40、13C13、13D02。

Key words and phrases. 阿廷代数，Gorenstein 代数，自由分解，Lefschetz 性质。

```
+--------------+
|       0 1 2 3|
|total: 1 3 3 1|
|    0: 1 . . .|
|    1: . 3 . .|
|    2: . . 3 .|
|    3: . . . 1|
+--------------+
```

对于余维 4、正则度（底层次数）为 3 的 Artin-Gorenstein（AG）代数，其 H-向量为 (1, 4, 4, 1)，并且有三种可能的贝蒂表（见 [3]）。对于 H-向量为 (1, 4, k, 4, 1) 的 AG代数，$k = 4, \ldots, 10$（余维 4、正则度为 4），有 16 种可能的贝蒂表（见[18]）。这两种情况下，相应的代数都具有弱 Lefschetz 性质（见 [10]）。本文研究正则度为 5 的 AG代数的结构。在这种情况下，H-向量为 (1, 4, k, k, 4, 1)，$k = 4, \ldots, 10$。我们首先证明，对于这些代数，弱 Lefschetz 性质蕴含强 Lefschetz 性质；在 [3] 中，作者通过考察一般线性形式的 Jordan 型注意到了这一点。在 [3], 中，作者还猜想此类 AG代数有 36 种可能的贝蒂表。在这 36 种贝蒂表中，只有一种对应于 $k = 4$的情形，另有一种对应于完全交。本文的主要结果是定理 3.4 和 4.2，我们证明了该猜想在这两种情形下成立。

在第 2 节中，我们回顾 Lefschetz 性质的若干定义和结果，并考察余维为 4、正则度为 5 的代数在这种情况下的 Lefschetz 性质。第 3 节讨论 H-向量为 (1, 4, 4, 4, 4, 1) 的 AG代数。第 4 节专门研究完全交。最后，我们在第 5 节提出一些开放问题。

2. Lefschetz Properties

定义 2.1. 设 A 是一个 Artinian 分次代数。我们称

(1) 若存在一个线性形式 $\ell \in A_1$，使得乘法映射 $\ell : A_i \to A_{i+1}$ 对所有 i 都具有最大秩，则称 A 具有弱 Lefschetz 性质（WLP）。ℓ 称为 A 的弱 Lefschetz 元。(2) 若存在一个线性形式 ℓ，使得乘法映射 $\ell^k : A_i \to A_{i+k}$ 对所有 i 和 k 都具有最大秩，则称 A 具有强 Lefschetz 性质（SLP）。ℓ 称为 A 的强 Lefschetz 元。

当 A 是 Gorenstein 时，如果存在一个线性形式 ℓ，使得乘法映射$\ell^{s-2i} : A_i \to A_{s-i}$对所有 $i = 1, \ldots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$都具有最大秩（即双射），则 A 具有强 Lefschetz 性质，其中 s是 A的底层次数。

从定义可知，如果 A 具有强 Lefschetz 性质，那么 A 就具有弱 Lefschetz 性质。在余维 2 的情形下，只要域的特征为零或$p > s$ ([13]), 所有标准分次阿廷代数都具有强 Lefschetz 性质。在余维 3 的情形下，所有完全交（CI）都具有弱 Lefschetz 性质（[13]）；在 [5], 中，作者猜想所有余维 3 的 AG代数都具有弱 Lefschetz 性质。在一篇近期论文（[2]）中，我们证明，斯佩纳数（ H-向量的最大值）不超过 6 的所有余维 3 AG代数，以及具有 H-向量 (1, 3, 4, 5, . . ., $(s-1)$ s^k, $(s-1)$ . . . , 3, 1) 的代数，都具有强 Lefschetz 性质。我们在 [3] 中的计算表明，对于底层次数为 5 的余维 4 AG代数，当斯佩纳数不超过 6 时，强 Lefschetz 性质成立，而且这个界是尖锐的。

W现在回顾海森矩阵的定义及其与强 Lefschetz 性质的关系 .

定义 2.2。（[16], 定义 3.1）设 F 是 R 中的一个多项式，$A = S/\mathrm{ann}_S F$ 是其对应的 AG代数。设 $\mathcal{B}_i = \{\alpha_m^{(i)}\}_m$ 是 A_i 的一个 $\mathbb{K}$-基。F 关于 $\mathcal{B}_i$ 的第 i 个海森矩阵定义为

$$(\mathrm{Hess}^i(F))_{u,v} = (\alpha_u^{(i)} \alpha_v^{(i)} \circ F).$$

我们用 hess$^i(F)$ 表示 Hess$^i(F)$ 的行列式；除一个非零常数倍外，它与基 $\mathcal{B}_i$ 的选取无关。对于 $i = 1$，Hess$^1(F)$ 与通常的海森矩阵一致。

以下由 T. Maeno 和 J. Watanabe 得出的结果，揭示了海森矩阵与强 Lefschetz 性质之间的密切联系。

定理 2.3。设 $A = S/\operatorname{ann}_S F$ 是一个 AG代数。 $\ell = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in A_1$ 是 A 的强 Lefschetz 元，当且仅当对于所有 $i = 1, \ldots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$，hess$^i(F)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$。特别地，乘法映射 $\ell^{s-2i}\colon A_i \to A_{s-i}$ 是双射，当且仅当 hess$^i(F)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$。

以下由 P. Gordan 和 M. Noether 提出的定理在 [11] 中，并于 [14, 定理 1.2], [19], [6] 中重新证明。

定理 2.4（Gordan-Noether）。如果 F 是一个至多用四个变量表示的型，且 $\mathbb{K}$ 的特征为零，那么 Hessian 行列式 hess(F) 恒等于零，当且仅当 F 是一个锥：也就是说，在 Macaulay 对偶性中，如果 F 被 S_1 中的一个线性形式（元素）湮灭。

在 [3], 中，我们的计算表明，对于具有 H-向量 (1, 4, k, k, 4, 1) 的 AG代数，当 k =为 4, . . ., 10 时，只要弱 Lefschetz 性质成立，强 Lefschetz 性质也成立。下面的命题证明了这一结论。

命题 2.5。设 $A = S/I$ 是一个 AG代数，其中 I 是一个非退化齐次理想，且 $H(A)$ =(1, 4, k, k, 4, 1)， $k = 4, \ldots, 10$。如果 A 具有弱 Lefschetz 性质，那么 A 具有强 Lefschetz 性质。

证明。根据 Gordan–Noether 定理（定理 2.4），第一个海森矩阵非零；根据 WLP 性质（中间映射是双射），第二个海森矩阵也非零。由定理 2.3 可得结论。□

3. Artin Gorenstein algebras of H-vector $(1, 4, 4, 4, 4, 1)$

本节考察具有 H-向量 (1, 4, 4, 4, 4, 1) 的 AG 代数。在 [3], 中，我们猜想该 H-向量只有一个贝蒂表，并且所有这些阿蒂亚代数都具有强 Lefschetz 性质。本节将证明这两个断言均成立。

命题 3.1。每个具有 H-向量 (1, 4, 4, 4, 4, 1) 的阿蒂亚代数都具有强 Lefschetz 性质。

证明。根据 [1, 命题 3.3]，此类代数具有弱 Lefschetz 性质。由命题 2.5，强 Lefschetz 性质也成立。□

我们回顾 Macaulay 和 Gotzmann 的定理（ [17] 第7.2节）。对于一个希尔伯特函数为 h_i 的分次代数 S/I，记

$$h_i = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots \text{ and } h_i^{\langle i \rangle} = \binom{a_i + 1}{i+1} + \binom{a_{i-1} + 1}{i} + \cdots,$$

其中 $a_i > a_{i-1} > \cdots$。那么我们有

定理3.2（Macaulay）。在上述设定下，

$$h_{i+1} \leq h_i^{\langle i \rangle}.$$

定理3.3（Gotzmann）。如果 I 由单一次数 t 生成，并且在第一个次数 t中 Macaulay公式取等号，那么

$$h_{t+j} = \binom{a_t + j}{t+j} + \binom{a_{t-1} + j - 1}{t+j-1} + \cdots$$

现在我们证明第一个主要结果。

定理 3.4. 一个希尔伯特函数为 (1, 4, 4, 4, 4, 1) 的阿蒂亚代数 A 的贝蒂表为

```
+-----------------+
|       0 1  2 3 4|
|total: 1 9 16 9 1|
|    0: 1 .  . . .|
|    1: . 6  8 3 .|
|    2: . .  . . .|
|    3: . .  . . .|
|    4: . 3  8 6 .|
|    5: . .  . . 1|
+-----------------+
```

证明. 我们知道 Gorenstein 代数的贝蒂表是对称的，并且由于 $h_2(A) = 4$，理想 I 有 6 个二次式，因此 $b_{12} := b_{1,\ 2} = 6 = b_{37}$。为避免使用过多指标，我们将贝蒂表写成如下形式（为简洁起见，省略总维数这一行）。

```
+--------------+
|    0 1  2 3 4|
| 0: 1 .  . . .|
| 1: . 6  b c .|
| 2: . d  e f .|
| 3: . f  e d .|
| 4: . c  b 6 .|
| 5: . .  . . 1|
+--------------+
```

记 I_j 为理想 I的次数为 j 的部分。希尔伯特数 $h_j(A)$ 由$h_j(A) = \binom{3+j}{j} - \dim_{\mathbb{K}}(I_j)$ 给出。对于 $i = 3$ 和 $i = 4$，有 $h_3(A) = 20 - 6 \cdot 4 - d + b = 4$ 以及$h_4(A)$ $= 35 - 6 \cdot 10 - 4d - f + 4b + e - c = 4$。由此得到以下关系

$$b = d + 8 \tag{1}$$

and

$$c - e + f = 3 \tag{2}$$

现在考虑代数 $A = S/J_2$，其中 J_2 是由 I的二次式生成的理想。那么，对于 $i \leq 2$，$h_i(S/J_2) = h_i(A)$，且 A 和 S/J_2 的贝蒂表前两行相同。由于 $h_2(S/J_2) = 4 = \binom{3}{2} + \binom{1}{1}$，由定理3.2可得，$h_3(S/J_2) \leq h_2^{<2>}(S/J_2) = \binom{4}{3} + \binom{2}{2} = 5$。另一方面，$h_3(S/J_2) = 20 - 6 \cdot 4 + b \leq 5$ 且 $b \leq 9$。结合方程1，我们得到$b \in \{8, 9\}$。我们要证明情形 $b = 9$ 不可能发生。

假设 $b = 9$，即 $h_3(S/J_2) = h_2^{<2>}(S/J_2)$。根据定理3.3，$h_4(S/J_2) = \binom{3+2}{2+2} + \binom{1+2-1}{2+2-1} = 5$，但 $h_4(S/J_2) = 35 - 6 \cdot 10 + 9 \cdot 4 + b_{24}(S/J_2) - c$。因此 $c = b_{24}(S/J_2) + 6 \geq 6$。

现在我们研究 S/J_3 和 S/J_4 的贝蒂表，其中 J_3 和 J_4 分别是由 I 中次数至多为3（分别为4）的生成元所生成的理想，并证明 $c \in \{2, 3\}$，这与 $c \geq 6$ 在 $b = 9$情形下的不等式相矛盾。

对于 $j = 3$,4，S/J_j 的贝蒂表的前 j 行与 A 的相同，并且对于 $i \leq j$，$h_i(S/J_j) = h_i(A)$。于是，$h_3(S/J_3) = 4 = \binom{4}{3}$，根据 Macaulay

$$h_3^{<3>} = 5 \geq h_4(S/J_3) = 35 - 60 - 4d + 4b + e - c = 7 + e - c.$$

因此，$c \geq 2 + e \geq 2$。由方程 2 可得 $f \leq 1$。另一方面，$h_4(S/J_4) = 4 = \binom{4}{4} + \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}$，再次根据 Macaulay，

$$h_4^{<4>}(S/J_4) = 4 \geq h_5(S/J_4) = 56 - 120 - 10d - 4f + 10b + 4e + e - 4c - f.$$

利用方程 1 和方程 2，我们得到 $c \leq 3$，这与假设矛盾。因此，$b = 8$ 和 $d = 0$。

现在我们有 $b=8$、 $c\in\{2,3\}$、 $d=0$、 $e=f+c-3$ 和 $f\in\{0,1\}$。只需证明$f=1$ 不可能出现。

由于 $d=0$，理想 I 没有三次生成元。这意味着 S/J_2 和 A 共享贝蒂表的前三行，并且 $h_4(S/J_2) = 35-60+32+e-c$。如果 $f=1$、$e-c=-2$ 和 $h_4(S/J_2)=5=\binom{5}{4}$，那么

$$h_4^{<4>}(S/J_2)=6\geq h_5(S/J_2)=56-120+80+4e+b_{25}(S/J_2)-4c-1,$$

这给出 $b_{25}(S/J_2)\leq -1$，产生矛盾。剩下的情形正是所需情形，可通过使用 Macaulay2 进行计算得到。□

例3.5。理想 $I=(x_1x_3-x_2x_4, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_3x_4, x_4^2, x_1^4x_2, x_1^4x_4, x_1^5)$ 定义了一个 H-向量为 (1, 4, 4, 4, 4, 1) 的 AG代数，其贝蒂表如定理 3.4 所示。

4. 完全交

在上一节中，我们看到，某些希尔伯特函数会对阿蒂亚代数环可能具有的贝蒂表施加严格限制。因此，自然会问是否还存在其他能够严格限制贝蒂表的条件。本节中，我们考虑 I 为完全交的情形。我们证明，对于余维为 $c=4$ 、正则度为 $r=5$ 的 AG代数，完全交条件确定了希尔伯特函数和贝蒂表。

为证明我们的定理，我们首先证明，对于余维和底层次数相同的情形，若 I 为等次生成理想，则 $A=S/I$ 恰有一个贝蒂表。

命题4.1. 设 $A=S/I$ 是一个底层次数为 5 的 AG代数。若 I 是等次生成的，则$H(A)=$ (1,4,10,10,4,1)，且贝蒂表为

```
+-------------------+
|       0  1  2  3 4|
|total: 1 10 18 10 1|
|    0: 1  .  .  . .|
|    1: .  .  .  . .|
|    2: . 10  9  . .|
|    3: .  .  9 10 .|
|    4: .  .  .  . .|
|    5: .  .  .  . 1|
+-------------------+
```

证明。如果 I 是等次生成的，贝蒂表有以下两种型之一

```
   +-------------+          +-------------+
   |    0 1 2 3 4|          |    0 1 2 3 4|
   | 0: 1 . . . .|          | 0: 1 . . . .|
   | 1: . a b . .|          | 1: . . . . .|
(1)| 2: . . e . .|     (2)  | 2: . d e . .|
   | 3: . . e . .|          | 3: . . e d .|
   | 4: . . b a .|          | 4: . . . . .|
   | 5: ....    1|          | 5: ....    1|
   +-------------+          +-------------+
```

我们首先证明表（1）不可能出现。假设 A 的贝蒂表为（1）。由于 A的 H-向量为（1, 4, k, k, 4, 1），$k=4,\ldots,10$，那么 I 有 $a=10-k$ 个二次生成元。我们计算 $i=3$ 为 4 、 5 时的 $h_i(A)$。 $h_i(A)=\binom{3+i}{i}-\dim_{\mathbb{K}} I_i$，其中 I_i 是分次理想 I的 i^{th} 分次分量。当 $i=3$时， $h_3(A)=20-(4a-b)=k$；当 $i=4$时， $h_4(A)=35-(10a-4b-e)=4$；当 $i=5$时， $h_5(A)=56-(20a-10b-4e-e)=1$。因此， k, a, b, e 是非负整数

该方程组的解

$$\begin{cases} k &= 10-a \\ k &= 20-4a+b \\ 4 &= 35-10a+4b+e \\ 1 &= 56-20a+10b+5e \end{cases}$$

该方程组唯一的整数解是（k,a,b,e）$=(6,4,2,1)$，这给出了一个完全交，但由 4 个二次式构成的完全交的贝蒂表为

```
+----------------+
|       0 1 2 3 4|
|total: 1 4 6 4 1|
|    0: 1 . . . .|
|    1: . 4 . . .|
|    2: . . 6 . .|
|    3: . . . 4 .|
|    4: ....    1|
+----------------+
```

而此时底层次数为 4，矛盾。

现在我们知道，A 的贝蒂表具有表 (2) 的形式。由于 I 没有二次式，$H(A)=(1,4,10,10,4,1)$，因此 I 由 10 个三次式生成，所以 $d=10$。现在，由于$h_4(A)=35-\dim I_4=35-(4d-e)=4$，于是 $e=9$，我们得到了所需的贝蒂表。□

现在我们可以证明第二个主要定理。

定理4.2. 设 A 是一个完全交，其 H向量为 $(1,4,k,k,4,1)$。那么 A的贝蒂表为

```
    +----------------+
    |       0 1 2 3 4|
    |total: 1 4 6 4 1|
    |    0: 1 . . . .|
(3) |    1: . 3 . . .|
    |    2: . 1 3 . .|
    |    3: . . 3 1 .|
    |    4: . . . 3 .|
    |    5: . . . . 1|
    +----------------+
```

特别地，H向量为 $(1,4,7,7,4,\quad\quad 1)$.

证明. 由于 A 是一个完全交，I 至多有四个二次生成元。因此 k 不可能是4或5。若 $k=6$，则 I 是一个由4个二次式生成的等次生成理想。根据命题4.1，这是不可能的。若 $k=10$，则 I 有十个三次生成元，因而不是完全交。剩下的情形是 $k=7$、8、9。

假设 $k=9$。理想 I 由一个二次式（$b_{12}=1$）和另外三个次数为3、4或5的生成元生成。由于一个生成元上不可能有奇异关系，$b_{23}=b_{34}=0$。因此 h_3（A）$=\binom{6}{3}-$维数 $I_3=20-$（$4\cdot 1+b_{13}$）$=9$，而 $b_{13}=7$，这并不构成完全交。

现在假设 $k=8$。在这种情况下，I 有两个二次生成元，以及两个次数为 3、4 或 5 的生成元（即 $b_{13}+b_{14}+b_{15}=2$）。两个二次式至多有一个线性奇异关系。因此，b_{23} 要么是 0，要么是 1。因此，$h_3(A)=20-(4\cdot 2+b_{13}-b_{23})=8$，而 $b_{13}=4-b_{23}$ 只能是 3 或 4；这与 $b_{13}\le 2$矛盾。

因此，我们证明了 $H(A)=(1,4,7,7,4,1)$，所以 $b_{12}=3$ 和 $b_{13}+b_{14}+b_{15}=1$。如果 $b_{13}=0$,$h_3(A)=20-(4\cdot 3-b_{23})=7$ 和 $b_{23}=-1$，则会导致矛盾。因此，A 的贝蒂表具有以下型

```
+--------------+
|    0 1  2 3 4|
| 0: 1 .  . . .|
| 1: . 3  b . .|
| 2: . 1  e . .|
| 3: . .  e 1 .|
| 4: . .  b 3 .|
| 5: . .  . . 1|
+--------------+
```

现在 $h_3(A) = 20 - (12 + 1 - b) = 7$ 和 $b = 0$； $h_4(A) = 35 - (3 \cdot 10 + 1 \cdot 4 - e) = 4$ 和 $e = 3$。由此得到所需的表，该表是可实现的（见下例）。□

例 4.3. 设 $I = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^3)$。 $A = S/I$ 是一个余维为 H 的 CI-向量 $H(A) = (1, 4, 7, 7, 4, 1)$，其贝蒂表如表（3）所示。Macaulay 对偶生成元为 $F = X_1X_2X_3X_4^2$。

备注 4.4. Anthony Iarrobino 指出，利用 [7, 定理 2.3.11] 可以简化证明的一部分：对于余维 4 的完全交，若 $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ 是 I（其 $2 \le d_1 \le d_2 \le d_3 \le d_4$）的生成元次数，则 $s + 4 = \Sigma_i d_i$。对于情形 (1, 4, k, k, 4, 1)， D 只有一种选择： $D = (2, 2, 2, 3)$。这迫使 k 为 7，并给出贝蒂表的第二列和第四列。

注 4.5. 注意，对于 H 向量 (1, 4, 7, 7, 4, 1)， [3] 中猜想存在 9 种可能的贝蒂表，并且下列贝蒂表对应的所有 AG代数都具有强 Lefschetz 性质。

```
+----------------+----------------+----------------+----------------+
|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|
|total: 1 4  6 4 1|total: 1 6 10 6 1|total: 1 6 10 6 1|total: 1 7 12 7 1|
|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|
|    1: . 3  . . .|    1: . 3  2 . .|    1: . 3  2 . .|    1: . 3  . . .|
|    2: . 1  3 . .|    2: . 3  3 . .|    2: . 2  4 1 .|    2: . 1  6 3 .|
|    3: . .  3 1 .|    3: . .  3 3 .|    3: . 1  4 2 .|    3: . 3  6 1 .|
|    4: . .  . 3 .|    4: . .  2 3 .|    4: . .  . 3 .|    4: . .  . 3 .|
|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|
+----------------+----------------+----------------+----------------+
|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|       0 1  2 3 4|
|total: 1 7 12 7 1|total: 1 9 16 9 1|total: 1 9 16 9 1|total: 1 6 10 6 1|
|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|    0: 1 .  . . .|
|    1: . 3  2 . .|    1: . 3  2 . .|    1: . 3  3 1 .|    1: . 3  3 1 .|
|    2: . 3  4 . .|    2: . 3  6 3 .|    2: . 4  5 1 .|    2: . 4  7 3 .|
|    3: . 1  4 1 .|    3: . 3  6 3 .|    3: . 1  5 4 .|    3: . 3  7 4 .|
|    4: . .  2 3 .|    4: . .  2 3 .|    4: . 1  3 3 .|    4: . 1  3 3 .|
|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|    5: . .  . . 1|
+----------------+----------------+----------------+----------------+
```

对于具有如下表格的 AG代数

```
+----------------+
|       0 1  2 3 4|
|total: 1 8 14 8 1|
|    0: 1 .  . . .|
|    1: . 3  1 . .|
|    2: . 2  6 3 .|
|    3: . 3  6 2 .|
|    4: . .  1 3 .|
|    5: . .  . . 1|
+----------------+
```

存在具有强 Lefschetz 性质的例子，也存在弱 Lefschetz 性质不成立的例子。

5. Open problems

我们以几个开放问题结束本文。令 Gor(H) 表示所有具有 H 的 H 向量的阿蒂亚代数（AG）组成的集合。在 [8] 中，S.J. Diesel 证明，在三变量情形下，且基域为代数闭域时

簇 Gor(H) 是不可约的。在四变量情形下，Boij 在 [4] 中证明 Gor(H) 可以由若干个分支组成。

问题 5.1. 研究 Gor(H) 中对应于各种可能 Betti 表的轨迹将很有意思。例如，若将 Betti 表按偏序排列，使得 $\beta \geq \beta'$ if $b_{i,\ j} \geq b'_{i,\ j}$ for all i, j，那么对于 H-向量 (1, 4, 5, 5, 4, 1)，这些 Betti 表之间存在严格包含关系；而对于 (1, 4, 6, 6, 4, 1)，情况则并非如此。

线性形式 ℓ 作用于 Artin 代数 A 时的 Jordan 型，是描述矩阵 Jordan 块分解的分拆；该矩阵表示在 $A_i \xrightarrow{\cdot \ell} A_{i+1}$的分次分量之间乘以一个线性形式的映射。在 [12] 中，作者证明 A 具有强 Lefschetz 性质，当且仅当分拆 $P_{A,\ \ell}$ 与 H-向量共轭。在 [3], 中，通过 Macaulay2 计算可知，具有如 (3) 所示 Betti 表的完全交，其一般线性形式对应的 Jordan 型为 (6, 4, 4, 4, 2, 2, 2)，这意味着此类代数具有强 Lefschetz 性质。

问题 5.2. 证明所有底层次数为 5 的余维 4 完全交都具有强 Lefschetz 性质。

例 5.3. 代数 $A = S/(x_1^2, x_2^2, x_3x_4, x_3^3 - x_4^3)$ 是一个完全交。对于 $\ell = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$，Jordan 型为 (6, 4, 4, 4, 2, 2, 2)，这意味着 A 具有强 Lefschetz 性质。

致谢 作者谨此感谢审稿人、Anthony Iarrobino 和 Hal Schenck 提出的宝贵意见，并感谢 Anthony Iarrobino、Pedro Macias Marquez、Maria Evelina Rossi 和 Jean Vall`es 组织在格勒诺布尔举行的 AMS-SMF-EMS 特别专题会议，主题为 Artin 代数的变形与 Jordan 型。

References

[1] N. Abdallah、N. Altafi、P. De Poi、L. Fiorindo、A. Iarrobino、P. M. Marques、E. Mezzetti、R. M. Mir´o-Roig、L. Nicklasson。Perazzo Artin 代数的希尔伯特函数与 Jordan 型， arXiv:2303.16768, （2023）。[2] N. Abdallah、N. Altafi、A. Iarrobino、A. Seceleanu、J. Yam´eogo。某些余维三 Artin Gorenstein 代数的 Lefschetz 性质， *J. Algebra*、**625** 2023 28 45 , （）, - N. Abdallah、H. Schenck，某些余维四
[3]
Artin-Gorenstein 环的自由分解与 Lefschetz 性质， arXiv:2208.01536, （ 2022 ）。[4] M. Boij。具有给定希尔伯特函数的分次 Gorenstein Artin 代数参数空间的分支， Pacific J. Math. **187** （1999）, 1–11。[5] M. Boij、J. Migliore、R. Mir´o-Roig、U. Nagel、F. Zanello。关于余维三 Artin Gorenstein 代数的弱 Lefschetz 性质， *J. Algebra* **403** （2014）, 48–68。[6] D. Bricalli、F. F. Favale、G. P. Pirola。通过 Gorenstein 环得到的 Gordan 和 Noether 定理，
arXiv:2201.07550 （2022）。[7] W. Bruns、J. Herzog。Cohen–Macaulay 环，
Cambridge studies in advanced mathematics, 39，剑桥大学出版社，（2009）。[8] S.J. Diesel。关于高度为
3 *Paci* 的
c J. Math. **172** 1996 365 397
Gorenstein 代数族的若干不可约性与维数定理，（），-。[9] D. Eisenbud，《面向代数几何的交换代数》，施普林格 GTM 150，（1995）。[10] R. Gondim，关于高阶 Hessian 与 Lefschetz 性质。 *J. Algebra*，489（2017），241–263。[11] P. Gordan 与 M. Noether， ¨关于其 Hessian 行列式恒等消失的代数形式， *Math. Ann.* **10** （1876），547–568。[12] T. Harima、T. Maeno、H. Morita、Y. Numata、A. Wachi、J. Watanabe，Lefschetz 性质，
Springer
Lecture Notes in Mathematics **2080** 2013 , , 施普
林格，海德堡，。[13] T. Harima、J. Migliore、U. Nagel、J. Watanabe，Artin $\mathbb{K}$-代数的弱 Lefschetz 性质与强 Lefschetz 性质。 *J. Algebra*，262（2003），99–126。[14] C. Lossen，何时 Hessian 行列式恒等消失？（关于 Gordan 和 Noether 对 Hesse 猜想的证明）， *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **35** （2004），第 1 期，71–82。[15] F.S. Macaulay，模系统理论中枚举的若干性质，
Proc. London Math. Soc., （）, –。
(2) **26** 1927 531 555
[16] T. Maeno、J. Watanbe，Artin Gorenstein 代数的 Lefschetz 元素与齐次多项式的 Hessian， *Illinois J. Math.* **53** （2009），593–603。

[17] H. Schenck, 《计算代数几何》, *Cambridge University Press*, （2003）。[18] H. Schenck、M. Stillman、B. Yuan。 $\mathbb{P}^n$ *Advances in Theoretical* 中 *and Mathematical Physics* **26** 2022 764 792 的卡拉比-丘三维簇与 Gorenstein 环，，，（），-。[19] J. Watanabe 与 M. de Bondt，关于 Gordan-Noether 齐次形式零海森矩阵理论（改进版），载于：《多项式环与仿射代数几何：PRAAG 2018》，日本东京，2 月 12–16 日（编者：S. Kuroda、N. Onoda 和 G. Freudenburg）， *Springer Proc. Math. Stat.*，319，施普林格，2020 年，第 73–107 页。

Department of Engineering, University of Borås, Borås, Sweden
Email address: nancy.abdallah@hb.se*URL*: https://nancyabdallah.info