arXiv:2302.14830v1 [math.ST] 28 Feb 2023

植入子图推断中的尖锐阈值

ELCHANAN MOSSEL*°、JONATHAN NILES-WEED†、YOUNGTAK SOHN*、NIKE SUN*和 ILIAS ZADIK*

摘要。我们将高维统计推断中相变的研究与随机图中阈值现象的研究联系起来。

Erd˝os–R´enyi 随机图 $G(n,p)$ 研究中的一个重要问题是：作为 p 的函数， $G(n,p)$ 包含给定子图 $H = H_n$ 的概率是多少。人们针对 H 的许多具体例子研究过这一问题，最早可追溯到 Erd˝os 和 R´enyi 的经典研究（1960年）。近期的研究则针对一般的 H 探讨这一问题，既包括建立尖锐转变与粗糙转变的一般理论（Friedgut 和 Bourgain，1999年；Hatami，2012年），也包括确定转变位置的结果（Kahn 和 Kalai，2007年；Talagrand，2010年；Frankston、Kahn、Narayanan、Park，2019年；Park 和 Pham，2022年）。

在推断问题中，人们常常研究推断的最优准确率如何随噪声量而变化。在各种稀疏恢复问题中，已经观察到一种“全有或全无（AoN）现象”：非正式地说，随着噪声量逐渐增加，推断问题会在某个临界阈值处从近乎完美恢复急剧跃迁至准确率近乎为零（Gamarnik 和 Zadik，2017年；Reeves、Xu、Zadik，2021年）。我们可以将全有或全无视为随机图中尖锐阈值现象在推断中的自然对应物。与针对随机图性质的尖锐阈值所发展出的通用理论相比，全有或全无现象迄今仅在特定推断设定中得到研究，其出现背后的一般理论仍难以捉摸。

本文研究在 Erd˝os– R´enyi 随机图中推断一个 $H = H_n$ 植入图的一般问题，从而自然地将上述两条研究线索联系起来。我们表明，全有或全无问题与一阶矩阈值密切相关，也与所谓 Kahn–Kalai 期望阈值的一种推广密切相关；该推广会扫描 H 中边密度至少为 q的子图。在多种设定下，我们通过证明当且仅当 这一“广义期望阈值”关于 q大致保持常数时，才会出现全有或全无，从而刻画了全有或全无。我们的证明结合了随机图论和贝叶斯推断中的技术。

目录

1. 引言 2 1.1. 概述 3 1.2. 更多动机 4 2. 主要结果 6 2.1. 广义期望阈值 6 2.2. 足够稠密图的几乎全有或几乎全无刻画 8 2.3. 稠密图之外的结果 10 2.4. 来自随机图论的直觉与证明概要 12

*麻省理工学院数学系； °麻省理工学院数据、系统与社会研究所； †纽约大学数据科学中心与库朗数学科学研究所。电子邮件： {elmos,youngtak,nsun,izadik}@mit.edu；jnw@cims.nyu.edu。

3. 一般伯努利模型中的几乎全有或几乎全无：定义与关键充分条件 13 3.1. 一般伯努利推断模型 14 3.2. 指数尺度下的结果 17 3.3. 植入模型中通过截断一阶矩证明“全有”区域 17 3.4. 零模型中通过截断二阶矩证明 “nothing” 区域 19 3.5. 扩展性的联系：推断中的第二个 Kahn–Kalai 猜想 21 4. 足够稠密图在线性尺度下的几乎全有或几乎全无刻画 22 4.1. 定理 2.5 正向：几乎全有或几乎全无蕴含近乎平衡 24 4.2. 定理 2.5 逆向：近乎平衡蕴含几乎全有或几乎全无 26 4.3. 稀疏强平衡图 27 5. 指数尺度下的几乎全有或几乎全无 29 5.1. 在 RWS 条件下确定几乎全有或几乎全无阈值 31 5.2. 一阶矩稳定图满足 RWS 条件 35 5.3. 定理 5.3 正向：几乎全有或几乎全无蕴含一阶矩平坦 35 5.4. 定理 5.3 的逆向：一阶矩平坦蕴含几乎全有或几乎全无 37 6. 结论 38 致谢 39 参考文献 39

1. 引言

我们考虑一种图的统计模型 $H = H_n$，该图均匀随机地植入在 Erd˝os–Ré´nyi 随机图中 $\boldsymbol{G} \sim G(n,\ p)$。也就是说，观测 $\boldsymbol{Y}$ 是完全图 H 中的一个均匀随机副本 K_n（即信号）与来自 Erd˝os–Ré´nyi 测度$\mathrm{Q}_p = G(n$的样本 $p)$（即噪声）的并集。给定观测，目标是近似恢复隐藏信号 H，恢复效果以正确恢复的边所占比例来衡量（见（2.1））。模型在下文的定义2.1中作了形式化说明。本文旨在刻画这一推断问题中的尖锐信息论阈值。

文献中最典型的此类设定或许是植入团模型，其中 H 是一个包含 k 个顶点的团，且 $p = 1/2$ [Jer92]。众所周知，当 $k \geqslant (1+\varepsilon)2\log_2 n$ 时，可以精确恢复 H；而当 $k \leqslant (1-\varepsilon)2\log_2 n$ 时，则不可能。然而，据我们所知，关于在 $k \leqslant (1-\varepsilon)2\log_2 n$ 时能否恢复 H 中一个常数比例这一自然问题，此前尚未有人研究；不过，在这一范围内，针对略有不同的检测框架 [ACV14]，已有强有力的不可能性结果。值得注意的是，文献还研究了其他特定的子图选择，包括 $H = H_n$ 为一棵树 [MST19]，或 $H = H_n$ 为一个哈密顿回路 [BDT+20]的情形。

近年来，关于这类模型中统计恢复保证的研究不断增多，这进一步促使人们更深入地理解这些保证；这一研究方向由 [GZ22] 和 [RXZ21], 开创。他们揭示，若干高维贝叶斯估计模型呈现出尖锐的**“全有或全无”（AoN）相变**：信噪比仅有微小变化，就会将两个区间区分开来：一个区间中，几乎所有隐藏信号都可以恢复（“全有”阶段）；另一个区间中，即使恢复信号的一个固定比例也不可能。这与

高维模型中转变要平缓得多的情形所形成的先前直觉相悖，例如“比例区间”中的压缩感知或广义线性模型[RP19、BKM+19]。

据我们所知，某些推断模型为何会呈现全有或全无现象，而另一些则不会，其根本原因在很大程度上仍不为人所知。这促使我们研究一般的植入子图设定，并提出以下问题：

哪些隐藏图 $H = H_n$ 会导致尖锐的全有或全无转变？
H 的图论性质与尖锐的统计现象有何关联？

值得注意的是，对于“零假设”（不存在隐藏子图）的 Erd˝os–R´enyi 随机图模型 $Q_p = G(n, p)$ 关于特定子图出现概率的尖锐阈值研究历史悠久、成果斐然，可追溯至 [ER60]。这方面的研究近来促成了 Kahn–Kalai 猜想的非凡解决 [KK07、猜想 1], , 该猜想近似确定了一般单调性质的临界阈值 [FKNP21、PP22]。学界对“零假设”模型中的转变已有显著认识，这也让我们有望更深入地理解“植入”（隐藏信号）模型中的信息论转变：

“零”Erd˝os–R´enyi 模型中经过充分研究的阈值现象，与“植入”模型中的统计阈值现象有何关系？

我们的研究主要由这一问题驱动。

1.1. 概述。在本文中，我们旨在刻画图序列 $H = H_n$，对于这些图序列，相关推断问题中会出现尖锐的全有或全无现象。尽管植入团模型通常被表述为固定 $p = 1/2$、令 k 变化，但对于一般的 H，我们采用更为合适的视角，即固定 $H = H_n$、令 p变化。因此，给定$H = H_n$，我们要问是否存在某个临界值 p_{AoN}，使得当 $p \leqslant (1-\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}}$ 时，从信息论角度来看，可以恢复植入子图中 $(1-o(1))$比例的边（“全有”阶段）；而当 $p \geqslant (1+\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}}$ 时，则不可能恢复植入子图中任何非平凡比例的边（“全无”阶段）。换言之，不存在中间的“部分”阶段：在该阶段中，人们能够恢复一部分非平凡比例的边，但同时也必然遗漏另一部分非平凡比例的边。

在本文中，我们通过将全有或全无与 [KK07] 的期望阈值推广相联系，得以刻画大类植入子图模型中全有或全无现象的发生。对于给定的 $H = H_n$，期望阈值 $p_{\mathsf{E}}(H)$ 旨在近似临界阈值 $p_c(H)$，在该阈值处，$G(n,p)$ 很可能包含 H 的一个副本。更精确地说，对于任意图 J，我们将一阶矩阈值 $p_{1\mathsf{M}}(J)$ 定义为满足以下条件的最小 p：$G(n,p)$ 在期望意义下至少包含 J 的一个副本。期望阈值 $p_{\mathsf{E}}(H)$ 是所有子图 $J \subseteq H$ 的一阶矩阈值中的最大值，而“第二个 Kahn–Kalai 猜想” [KK07，猜想 2] 断言，该值与所关注的阈值 $p_c(H)$相差至多一个对数因子。第二个 Kahn–Kalai 猜想已对有界图 H得到证明，参见例如 [Ruc87，定理 4], , 但一般情形仍未解决。（单调性质的 Kahn–Kalai 猜想并不能推出该结论；上述内容中已提到这一点，另见 [MNWSZ22a]。）

在本文中，我们定义 $q \in [0, 1]$ 的广义期望阈值 $\psi_q(H)$ 为所有满足以下条件的子图中一阶矩阈值的最大值：$J \subseteq H$ 使得 J 包含至少q 的边数的 H（定义2.4）。那么 $\psi_0(H)$ 恰好是 Kahn–Kalai 期望

阈值。我们的主要结果是基于结构性质，对一大类隐藏图 H 的 AoN 进行刻画 $\psi_q(H)$。现在我们将主要发现非正式地表述如下：

定理 1.1 （主要结果的非正式表述）。 对于各种图序列族 H_n，在 $G(n$ 中植入 H_n $p)$ 的模型呈现全有或全无，当且仅当 $\psi_q(H)$ 作为 $q \in (0、 1)$ 的函数渐近为常数。

形式化表述见定理 2.5 。作为推论，例如我们可以得到，在 $G(n$ 中植入一个 k-团 $p)$ 的模型呈现全有或全无，当且仅当 k 随着 n 发散（见附录中的推论 3.5）。如上所述，我们的主要结果可能并不容易直观理解。因此，在接下来几节陈述定理时，我们将给出几个说明性例子。此外，在第 2.4 节中，我们通过解释随机图论中的既有结果，以及随机约束满足问题理论中的植入技巧如何暗示这种联系，来提供一般性的直觉。

最后需要指出， [Hul22]发起了一项相关但不可比较的一般性研究，探讨从信息论角度推断隐藏诱导子图 $G(n$的极限。 $p)$相比之下，在我们的设定中，观测 $\boldsymbol{Y}$ 是并集，由 $G(n$ 与 $p)$ 一个隐藏的 H副本构成；也就是说，这个隐藏副本不一定是 $\boldsymbol{Y}$的诱导子图。这一区别使得我们的结果与其不可比较；关于这两个模型之间差异的更多讨论，也请参见 [Hul22， B 节。1] 。

1.2. **进一步的动机**。如上所述，恢复隐藏图的问题与两个主要研究方向直接相关：

1. 随机图中的阈值现象。从 [ER60], 的工作开始，随机图领域的一项主要研究目标便是理解：对于任意给定的图 H，在什么 p 取值下， H 可能出现在 Erd˝os–R´enyi 图 $\boldsymbol{G} \sim G(n$ 中， $p)$。请注意，H 可以是一个固定图，例如三角形 [ER60], ；但也可以是其规模和结构取决于 n的图，例如完美匹配 [ER60] 或哈密顿回路 [P´os76, Kor76]。关于这一问题的近期研究主要沿着两个方向展开：

首先，离散傅里叶分析中的结果 [Fri98、Fri99、Hat12] 刻画了相变呈现尖锐转变或粗糙相变的一般情形。尖锐转变意味着，对于 $G(n,\ p)$ 包含 H 的一个副本的概率在 $p \leqslant (1-\varepsilon)p_c(H)$时接近于零，而在$p \geqslant (1+\varepsilon)p_c(H)$时接近于一。粗糙相变意味着，对于 $p \asymp p_c(H)$的一段非平凡取值范围，该概率始终与零和一保持有界距离。已知的粗阈值刻画可以解释为“低复杂性”条件，而尖锐阈值则对应于不具有低复杂性见证的性质。已有一些猜想将图中的尖锐阈值与计算复杂性联系起来，例如参见 [KS06]。

近期另一条研究路线旨在借助 Kahn–Kalai 期望阈值 [KK07、Tal10] 的（各种变体）粗略确定阈值的位置。下文将进一步讨论这一点。值得注意的是，傅里叶分析文献大多未讨论 $p_c(H)$ 的位置，而期望阈值文献大多未讨论转变的锐度。关于 Kahn–Kalai 猜想的最优结果，其紧致性仅精确到对数因子 [FKNP21、PP22]。

2. **推断问题的阈值行为（全有或全无现象）**。全有或全无现象最早是在稀疏线性回归的背景下被发现的 [GZ22、RXZ21], ，此后又在许多其他模型中得到证实，包括稀疏张量主成分分析 [NWZ20], 伯努利群体检测 [TAS20、NWZ21、COGHK$^+$22]，以及随机图匹配 [WXS22]。一个引人注目的观察是，若干被猜想存在统计—计算间隙的模型中都出现了全有或全无现象，尽管目前尚无严格的联系。

由 [MR$^+$20、NWZ20] 研究的设定包含贝叶斯推断问题：观测到的是受到高斯噪声污染的秩一尖峰。在这一设定下， [NWZ20] 给出了先验分布满足全有或全无现象的一般充分条件，这些条件以噪声方差 σ^2为函数。这些条件相当于一项定量的“反集中”要求，即从先验分布中独立抽样得到的样本不太可能高度相关。

由 [RXZ21、TAS20、LMB22、NWZ21、COGHK$^+$22]考虑的模型是广义线性模型。与高斯情形一样，当先验分布满足适当的反集中条件时，就会出现全有或全无现象（此处以观测数量为函数）。WXS [WXS22], 证明了带噪声的伯努利模型中的全有或全无现象；他们考虑的问题是恢复一对相关随机图之间的对应关系，其中顶点标签经过随机置换。在最后这一情形中，全有或全无现象是随机图密度的函数。

尖锐阈值与AoN现象之间的相似性相当明显。然而，两者所处的背景截然不同。在随机图背景下，我们要寻找的是一个随机出现的图；而在推断问题中，则存在一个受到随机噪声干扰的真实信号。本文通过研究随机图背景下的推断问题，将二者联系起来。本文的一个重要主题是揭示：推断模型中的全有或全无现象，实际上与相应零模型中（各种变体的）期望阈值的行为密切相关；更多讨论见下文。

从**技术角度来看**，本文研究的问题也自然地将两个群体联系起来：一类群体研究随机图的性质，另一类群体研究高维推断。有趣的是，本文中的证明结合了这两个群体的思想与技术：我们的一些条件以不同规模子图的期望阈值来表述，从而细化了 [KK07]中的定义。按照研究期望阈值时的惯例，我们的证明使用了二阶矩方法的各种变体，同时也采用了该领域近期的一些思想，例如“扩散引理” [ALWZ21、FKNP21]中所使用的思想。然而，我们也大量运用了贝叶斯视角，尤其是从植入约束满足问题的研究中借鉴的植入技巧，另见 [ACO08、COGHK$^+$22]。高维推断中的其他概念，例如信息论中的I-MMSE关系[GWSV11]以及统计物理中的西森恒等式 [Nis01] ，也在部分证明中发挥了作用。

最后，我们指出编码理论中一条相关的研究脉络。编码理论的目标是恢复通过噪声信道发送的码字。我们在本文中研究的模型与之有着十分明显的类比。我们的“码字”是植入图，而“信道”则是将其与一个取自 Erd˝ős–R´ényi 测度的样本取并集这一操作。编码理论中的许多结果都可以视为全有或全无陈述（不过针对的是概率误差度量，而非部分恢复度量），因为它们表明，译码错误概率会随着信道噪声的变化从零急剧跃升至一。近期一个引人注目的例子由 [KKM$^+$16] 针对 Reed–Muller 码和擦除信道给出。他们的例子有一个有趣之处：使用了 KKL定理的变体

[KKL88]，利用离散傅里叶分析证明了一个对应于全有或全无的尖锐阈值，进而证明这些码达到了信道容量。

2. 主要结果

本节陈述我们的首个主要结果——定理 2.5。该定理在温和的技术假设下，刻画了足够稠密图中线性尺度下全有或全无现象的发生，并概述其余结果。本节安排如下：

- 在 §2.1 中，我们将形式化定义植入子图模型，并定义此前非正式介绍过的广义期望阈值。
- 在§2.2 中，我们陈述定理 2.5，并给出若干启发性示例。
- 在 §2.3 中，我们概述一些超出足够稠密图中线性尺度下全有或全无这一情形的结果，并介绍若干相关示例。
- 在 §2.4 中，我们根据随机图领域的已知结果，对主要结果作一些直观解释。

2.1. 广义期望阈值。

我们首先将上文讨论的植入子图模型形式化：

定义 2.1（植入子图模型）。设 $H = H_n$ 是一个给定的图。我们用 $v(H) \equiv v_H$ 表示 H 的顶点数，用 $|H| \equiv e(H) \equiv e_H$ 表示 H 的边数。我们始终假设 $v(H) \leqslant n$。设 $\mathcal{S}$ 为完全图 K_n 中 H 的（同构）副本集合，并令 $\mathbf{P}$ 为 $\mathcal{S}$ 上的均匀概率测度。我们研究所谓的植入模型 P^p，其观测为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{H} \sim \mathbf{P}$，而 $\boldsymbol{G}$ 是从$G(n,p)$中独立抽取的样本。目标是从 $\boldsymbol{Y}$ 中恢复 $\boldsymbol{H}$。作为比较，我们还引入零模型 Q^p，其中不存在隐藏的 $\boldsymbol{H}$，观测仅为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G} \sim G(n,p)$。

在全文中，我们将所有定义在 n 个顶点上的图（例如，$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{G}$ 的实例）与其在 $\{0,1\}^{\binom{n}{2}}$. 中自然对应的二进制向量等同看待。在植入子图模型中，我们用正确恢复的边所占比例来衡量“恢复”，这自然对应于最小均方误差 （MMSE）：

$$\mathsf{MMSE}_N(p) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\left\|\boldsymbol{H} - \mathbb{E}[\boldsymbol{H}|\boldsymbol{Y}]\right\|_2^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\|\boldsymbol{H}\|^2 - \left\|\mathbb{E}[\boldsymbol{H}|\boldsymbol{Y}]\right\|^2\right]. \tag{2.1}$$

由于 $\|\boldsymbol{H}\|^2 = e(H)$ 几乎必然成立，最小均方误差必须位于 $[0,\ e(H)]$因此我们始终将其归一化为 $e(H)$。众所周知，最小均方误差关于 p单调不减，下面我们回顾引理 3.2 中的简短证明。鉴于此，自然会问，在什么情况下最小均方误差会出现尖锐的转变。为此，遵循全有或全无相关文献中的做法，我们给出以下定义：

定义 2.2（全有或全无）。我们称定义 2.1 中的模型在临界概率 $p_{\mathsf{AoN}} = p_{\mathsf{AoN}}(N)$ 处呈现全有或全无（*AoN*）转变，如果

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{e(H)} = \begin{cases} 1 & \text{for all } p \geqslant (1+\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}} \\ 0 & \text{for all } p \leqslant (1-\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}}\,, \end{cases}$$

对于任意常数 $\varepsilon > 0$。

如上所述，本文的一个主题是，p_{AoN} 的位置与零模型 $\mathbb{Q}^p$中 H 的子图 J 的一阶矩阈值密切相关。给定，一个K_n的子图 J，一阶矩阈值 $p_{1\mathrm{M}}(J)$ 是使得从零模型 $\mathbb{Q}^p$ 抽样时，J 的预期副本数至少为 1 的 p 最小值。更正式地，对于 $\boldsymbol{G} \sim G(n,\ p)$ 令 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$表示包含在 $\boldsymbol{G}$ 中的 J 副本数。我们将一阶矩阈值$p_{1\mathrm{M}}(J)$ 定义为满足以下条件的 p 值

$$1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G}) = M_J p^{e(J)}, \tag{2.2}$$

tha即，$p_{1\mathrm{M}}(J) \equiv M_J^{-1/e(H)}$, 其中 $M_J \equiv M_{J,\ K_n}$ 是 K_n 中 J 的副本数 .

在下文的定理 2.5 中，我们刻画了一类植入子图出现全有或全无现象的条件H，这些子图足够稠密，更精确地说，$v(H) \to \infty$且

$$e(H) \gg v(H) \log v(H) \tag{2.3}$$

在极限中 $n \to \infty$（定义 4.1）。

我们首先着手确定这类植入子图的全有或全无阈值 p_{AoN}。鉴于经典随机图论，最自然的初步尝试是考察p_{AoN} 是否与子图 $p_{1\mathrm{M}}(H)$ (2.2) 的一阶矩阈值 H相同。答案是否定的，下面的例子 2.3 将对此加以说明。事实上，$p_{\mathrm{AoN}} \neq p_{1\mathrm{M}}(H)$ 的可能性与 Kahn–Kalai 期望阈值背后的思想密切相关，而 [KK07] 以及 p_{AoN}定理 2.5给出的阈值实际上是 Kahn–Kalai 期望阈值的一种变体。

现在让我们更详细地讨论一阶矩阈值（2.2）。注意，$M_H \equiv M_{H,\ K_n}$ 是在 K_n中 H 的副本数:

$$M_H = \frac{n!/(n-v_H)!}{|\operatorname{Aut} H|} = \frac{(n)_{v_H}}{|\operatorname{Aut} H|} \leqslant n^{v(H)}, \tag{2.4}$$

其中 $\operatorname{Aut}(H)$表示 H的自同构群。由此可得

$$p_{1\mathrm{M}}(H) \equiv \left(\frac{1}{M_H}\right)^{1/e(H)} \geqslant \frac{1}{n^{v(H)/e(H)}} \tag{2.5}$$

对任意 H；而这一平凡下界的紧致性取决于 H的自同构群的大小。然而，对于足够稠密的图（按（2.3）的意义），当提升至$|\operatorname{Aut} H| = v(H)^{O(v(H))}$ 次幂时，该因子变得可以忽略不计，因此对于这类图，我们得到如下简化:

$$p_{1\mathrm{M}}(H) = \frac{1+o_n(1)}{n^{v(H)/e(H)}}. \tag{2.6}$$

这将在下文的引理4.2 中予以形式化。

例 2.3（全有或全无转变与一阶矩阈值可能不同）。设 J 是顶点为 $\{1、\ldots\ldots、k\}$ 的一个团。我们按如下方式由 J 构造 H：取 k 个额外顶点 $\{k+1、\ldots\ldots、2k\}$，并对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，在顶点 i 和顶点 $k+i$ 之间连一条边。因此，$H \supseteq J$、$v(H) = 2k$ 和 $e(H) = e(J) + k$。我们考虑将 H 植入 $G(n$ 中的模型 $p)$（定义 2.1）。假设 $k = k_n \to \infty$，并注意到 J 包含了 H 中的大多数边。由于我们关注的是边恢复，因此预期 H 的推断问题会在 $p_{\mathrm{AoN}}(J) = p_{1\mathrm{M}}(J)$ 处呈现全有或全无转变（参见推论 3.5）；事实上，我们将在下文的定理 2.5 中证明这一点（另见例 2.6）。一阶矩

阈值　　对于 H，其阈值远小于 J 的阈值，因此与全有或全无转变不一致：

$$p_{1\mathsf{M}}(H) = \frac{1+o_n(1)}{n^{4/(k+1)}} \ll \frac{1+o_n(1)}{n^{2/(k-1)}} = p_{1\mathsf{M}}(J) = p_{\mathsf{AoN}}(J)\,.$$

（该阈值 $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 可通过直接计算得出，或者参见（2.6）或引理 4.2。）

例 2.3所展示的问题与 Kahn–Kalai 猜想背后的思想密切相关。回顾前文，这些猜想的基本论断是：尽管$p_c(H)$ 可能与 $p_{1\mathsf{M}}(H)$相差甚远，但必定存在一个子图 $J \subseteq H$，使得 $p_{1\mathsf{M}}(J)$ 与 $p_c(H)$相差不大。显然，这与例2.3高度相似，其中几乎全有或几乎全无转变由团 $J \subseteq H$驱动。也就是说，这种转变可以通过期望阈值

$$p_{\mathsf{E}}(H) = \max\left\{p_{1\mathsf{M}}(J) : \varnothing \subsetneq J \subseteq H\right\}. \tag{2.7}$$

特别是，“第二个 Kahn–Kalai 猜想” [KK07，猜想 2] 断言

$$p_{\mathsf{E}}(H) \lesssim p_c(H) \lesssim p_{\mathsf{E}}(H)\log|H|\,, \tag{2.8}$$

此处下界显而易见，而对数因子已知是必要的。我们将在下面的示例2.9中进一步讨论这一点。

与 Kahn–Kalai 猜想类似，自然会问 $p_{\mathsf{AoN}}(H)$ 是否与$p_{\mathsf{E}}(H)$有关。本文研究的是如何将 $p_{\mathsf{AoN}}(H)$ 定位到 $1+o_n(1)$ 倍的精度，而非对数因子的精度。达到这种精度时，事实证明 $p_{\mathsf{AoN}}(H)$ 未必与 $p_{\mathsf{E}}(H)$一致，下面的示例2.8便说明了这一点。原因之一是，在全有或全无的语境下，由于我们关注的是恢复几乎全部边，还是几乎没有边，因此我们预计，只有 H 的线性规模子图才会与这一转变有关。为此，我们对期望阈值作了轻微推广；事实证明，这一推广与全有或全无问题更为相关：

定义 2.4（广义期望阈值）。对于 $q \in [0,\ 1]$ 以及给定的图 $H = H_n$，将 q-约束期望阈值定义为边数至少占 H 中边数 q 比例的子图中最大的一阶矩阈值。也就是说，

$$\psi_q \equiv \psi_q(H) \equiv \max\left\{p_{1\mathsf{M}}(J) : J \subseteq H \text{ with } |J| \geqslant \max\left\{1, |H|q\right\}\right\}. \tag{2.9}$$

In 特别地，$\psi_0(H)$ 与 Kahn–Kalai 期望阈值 $p_{\mathsf{E}}(H)$相同　　.

2.2. **充分稠密图的全有或全无刻画陈述**。以下定理刻画了充分稠密图 H 的全有或全无性质，但需满足额外的技术要求：H 必须是“非局域化”的，这大致意味着 H 不含特别稠密的次线性规模子图。更精确地说，我们要求 H 必须包含一个子图 J，满足 $e(J)/e(H) \geqslant q,$，且 J 在 H 的所有子图中具有近乎最大的密度：

$$\frac{v(J)}{e(J)} \leqslant \min\left\{\frac{v(J')}{e(J')} : \varnothing \subsetneq J' \subseteq H\right\} + \frac{C}{\log n}\,, \tag{2.10}$$

其中 q 和 C 是不依赖于 n的常数。如果 $H = H_n$ 是稠密的，且满足 $\psi_q(H) \geqslant c\cdot\psi_0(H)$ 其中 q 和 c 是正数常数，那么 H 是非局域化的；详情见定义 4.3 。对于稠密离域图，我们有以下结果，它大大推广了例 2.3：

定理 2.5 （充分稠密图的全有或全无刻画）。 假设 $H = H_n$ 足够稠密（ （2.3）或定义 4.1）且是非局域化的（（2.10）或定义 4.3）。那么，植入于 H_n中的 $G(n,\ p)$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_q(H_n)}{\psi_{q'}(H_n)} = 1 \quad \text{for all } q, q' \in (0,1)\,. \tag{2.11}$$

此外，在这种情况下，对于任意 $q \in (0,1)$，$p_{\mathsf{AoN}} = (1+o(1))\psi_q(H)$。

我们称 H_n 为 近乎平衡，如果它满足条件(2.11)（这一术语源于平衡图；参见下文的例 2.7）。我们用以下例子说明定理2.5：

例 2.6 （例 2.3的推广）。 假设 $H = H_n$ 足够稠密（如 (2.3)），且存在一个子图 $J \subseteq H$，使得 (i) J 包含 H的大部分边，$|J|/|H| = 1 - o_n(1)$，并且 (ii) J 的一阶矩阈值捕获了 H的期望阈值，

$$\frac{p_{1\mathsf{M}}(J)}{p_{\mathsf{E}}(H)} = \frac{p_{1\mathsf{M}}(J)}{\psi_0(H)} = 1 - o_n(1)\,.$$

那么，对于任意 $q < 1$，由定义 2.4 可知 $\psi_0(H) \geqslant \psi_q(H) \geqslant p_{1\mathsf{M}}(J) = (1-o_n(1))\psi_0(H)$。这意味着 H 是非局域化的（参见定义 4.3），并满足条件 (2.11)。因此，定理 2.5 表明，植入在 $G(n$中的 $H_n,\ p)$ 模型在 $p_{\mathsf{AoN}}(H) = p_{1\mathsf{M}}(J)$处呈现全有或全无2.3。这是对例

例 2.7 (稠密平衡图)。 假设 $H = H_n$ 足够稠密（按（2.3）的意义），且 平衡，即 H 在其所有子图中具有最大边密度 [ER60，Bol81]:

$$\frac{e(H)}{v(H)} = \max\left\{\frac{e(J)}{v(J)} : J \subseteq H\right\}.$$

这意味着 H 是非局域化的（（2.10）或定义 4.3）。由（2.6）或引理4.2可知，对于所有 $\psi_q(H) = (1+o_n(1))p_{1\mathsf{M}}(H)$ 和 $q \in (0,\ 1]$，均有相应结论，因此满足几乎平衡条件（2.11）。因此，由定理 2.5 可知，在 $G(n$中植入 H 的模型，$p)$在 $p_{\mathsf{AoN}}(H) = p_{1\mathsf{M}}(H)$处呈现全有或全无。这意味着植入团模型的全有或全无结果成立（该结果也通过另一种论证在附录中的推论 3.5中得到证明）。

鉴于例 2.6 和 2.7，人们可能会问，p_{AoN} 是否总是等于期望阈值。接下来我们给出一个简单例子，其中全有或全无阈值与期望阈值不同：

例 2.8 （全有或全无与期望阈值可能不同）。 令 H 为 $J_0, \dots, J_k$的不交并，其中 J_0 是一个 $(2k)$-团，而对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$，$J_i$ 都是一个 k-团，且 $k = \log n$。那么 H 是稠密的，因为 $v(H) = 2k + k^2 = (1+o_n(1))k^2$，而

$$e(H) = \binom{2k}{2} + k\binom{k}{2} = (1+o_n(1))\frac{k^3}{2} \gg v(H)\log v(H)\,.$$

注意，J_0 是 H的最稠密子图，且 $e(J_0)/v(J_0) = (1+o_n(1))k$。利用（2.6）或引理 4.2，我们得到下界

$$p_{\mathsf{E}}(H) = \psi_0(H) \geqslant p_{1\mathsf{M}}(J_0) \overset{(2.6)}{=} \frac{1+o_n(1)}{n^{v(J_0)/|J_0|}} = \frac{1+o_n(1)}{n^{2/(2k-1)}} = \frac{1+o_n(1)}{e}\,.$$

另一方面， J_0 仅占 H中边数的可忽略比例。我们将论证，如果 $|J|/|H|$ 有一个正的常数下界，那么 J 的密度就不会比 $k/2$大很多。为此，将 $v(J) = v_0 + \dots v_k$ 分解，其中 v_i 是$J \cap J_i$ 中的顶点数。于是

$$|J| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{(v_i)^2}{2} \leqslant 2k \cdot \frac{v_0}{2} + k \sum_{i=1}^{k} \frac{v_i}{2} = \frac{k(v_0 + v(J))}{2} \leqslant \frac{k(2k + v(J))}{2}.$$

此外，我们显然有 $|J| \leqslant v(J)^2/2,$，因此，为了使 $|J| \geqslant |H|q$，必须有 $v(J) \gg k$。由此可知，对所有 $|J| \geqslant |H|q$，上面的右侧大约为 $kv(J)/2,$，因此

$$\frac{|J|}{v(J)} \leqslant \frac{k(2k + v(J))}{2v(J)} = \frac{[1 + o_n(1)]k}{2}.$$

此外，显然，通过令大多数 v_i 取值为零或 k，可以渐近地达到该界。因此，当 $q > 0$时，我们有

$$\psi_q(H) = \frac{1 + o_n(1)}{n^{[1+o_n(1)]2/k}} = \frac{1 + o_n(1)}{e^2}.$$

不难验证 H 是非局域化的（（2.10）或定义4.3），因此由定理2.5 可知，该模型在 $p_{\mathsf{AoN}}(H) = 1/e^2,$ 处呈现全有或全无现象，该点低于期望阈值 $p_{\mathsf{E}}(H)$。

2.3. **超越稠密图的结果**。（足够）稠密的图更容易分析的一个原因是，在这种情况下，一阶矩阈值（2.2）可以用简单得多的表达式（2.6）来近似。对于一般图，我们没有类似强有力的刻画，并且预期自同构群的阶会发挥作用。事实上，在下文的例2.11中，我们将说明定理2.5中的稠密假设是必要的。然而，在这项工作中，我们也给出了在以下假设下适用于稠密图范围之外的结果：

1. **一般性的“什么都没有”阶段** 在 §3.5 中，我们给出了一个适用于所有植入子图 H的一般性“什么都没有”结果。在定理 3.15 中，我们证明，当 $p \gg \psi_q(H)$ 对所有 $q > 0$都成立时，其中 ψ_q 是定义 2.4中的广义期望阈值，则一般图中会出现“什么都没有”H (即 $\lim_{N\to\infty}$ 最小均方误差 $_N(p)/e(H) = 1$)。这可以理解为第二个 Kahn–Kalai 猜想的一个近似版本，因为若要出现“什么都没有”，则“噪声” $G(n,\ p)$ 必须已生成 H 的一个与信号几乎不相交的近似副本。更多讨论请见下文例2.9，相关参考文献请见§3.5 。

2. 小型稀疏图的全有或全无 在 §4.3 中，我们证明了一个适用于稀疏区间的结果。在定理 4.9 中，我们证明，对于植入子图规模较小（大小为 $O(\log\ n/\log\log\ n)$）、稀疏且强平衡（定义 4.8 ）的模型，全有或全无现象成立。后者是对 [RV86], 所提出概念的轻微推广，且比例 2.7 中出现的平衡条件更严格。由定理 4.9 可知，若 H 是一棵小树或一个小环——更准确地说，若 $v(H)$ 满足界限 (4.7)——则将 H 植入 $G(n,p)$ 的模型会在 $p_{\mathsf{AoN}}(H) = p_{1\mathsf{M}}(H)$ 处呈现全有或全无现象（见例 4.10）。

3. **指数尺度上的全有或全无**在§3.2 和第5 节中，我们考虑指数尺度上的 AoN 现象（定义3.6），而非线性尺度上的现象（定义2.2），也就是说，转变是针对 $\log p$ 而非 p 本身而言的（当 $p > p_{\mathsf{AoN}}(H)^{1-\varepsilon}$ “无”成立时，而当

$p < p_{\mathrm{AoN}}(H)^{1+\varepsilon}$ “全”成立）。这种对全有或全无现象的放宽，使我们无需任何密度假设即可建立一种刻画，因此也将 H的自同构群纳入考量。在定理5.3中，我们证明，在满足“ 一阶矩稳定”（定义5.1）这一较弱技术条件时，当且仅当$H = H_n$ 是“一阶矩平坦”的，才会在指数尺度上出现 AoN；这意味着

$$\frac{\log \psi_q(H_n)}{\log \psi_{q'}(H_n)} = 1 + o_n(1) \tag{2.12}$$

对所有 $q,\ q' \in (0,\ 1)$（参见定义 5.2，并与几乎平衡条件（2.11）比较）。我们将在下文的例 2.10 中对此进行说明。我们还将证明定位结果定理 5.8，该定理指出，全有或全无阈值与一阶矩阈值在指数尺度上必然重合。

例 2.9 （完美匹配）。 设 H 是一个包含 n 个顶点的完美匹配，因此边数为 $|H| = n/2$。在 Erd˝os–R´enyi 图中恢复植入匹配，最初是物理学文献中提出的一个粒子追踪玩具模型 [CKK+10，SSZ20]。后续研究在密切相关的模型中对植入匹配恢复进行了严格分析，并得出了极为精确的结果 [MMX21，DWXY21]。特别是，在植入匹配模型中通常不会出现全有或全无现象。这里要指出的是，我们的一般性定理并非专为匹配问题量身定制，但仍能给出类似风格的较弱结果。为此，设 J 是 H的任意子图，且满足 $|J| = |H|q$。那么

$$M_J \overset{(2.4)}{=} \frac{(n)_{v(J)}}{|\operatorname{Aut} J|} = \frac{n!/(n-nq)!}{2^{nq/2}(nq/2)!}.$$

由斯特林公式可得

$$p_{1\mathrm{M}}(J) = \frac{1}{(M_J)^{2/(nq)}} = \frac{[1+o_n(1)]e}{n} \exp\left\{\log q + \frac{2(1-q)}{q}\log(1-q)\right\}.$$

指数项在 $0 \leqslant q \leqslant 1$上是递增函数，因此我们得出 $\psi_q(H) = [1+o_n(1)]e/n$对所有 $q \in [0,\ 1]$。接下来可以验证，定理5.3 的条件均得到满足，因此可以得出，在指数级尺度下，当 $p_{1\mathrm{M}}(H) = 1/n$时，存在全有或全无现象。定理3.15 允许我们在一个方向上得出稍强一些的结论，即对于此模型，$p \gg 1/n$ 处于“nothing”区域。然而，对于所有 $p \asymp 1/n,$，观测图中的边总数将为 n量级，因此，即使从观测图的边中随机选取 $n/2$，也会与隐藏匹配有非平凡的重叠。因此，我们预计该模型在 $p \ll 1/n,$ 存在一个“all”相，在 $p \asymp 1/n,$ 附近存在一个“something”相，并在 $p \gg 1/n$存在一个“nothing”相。

我们还要指出，在第二个 Kahn–Kalai 猜想的背景下，已知$p_{\mathsf{E}}(H) = \psi_0(H) \asymp 1/n$（如上述计算所证实），但 $p_c(H) \asymp (\text{对数}\, n)/n$。事实上，为了包含一个完美匹配，该图的最小度数必须至少为 1，而优惠券收集效应导致了对数 n 因子。此外，这也是第二个 Kahn–Kalai 猜想（2.8）中出现对数因子的原因（参见 [KK07，§2]）。

例 2.10 （小型平衡图）。我们在例2.7中看到，稠密平衡图在一阶矩阈值处呈现全有或全无现象。如果 H 是平衡且足够小的，$v(H) \leqslant n^{o(1)}$但不一定稠密，我们可以得到一个较弱的结果：全有或全无现象出现在指数级

尺度上。事实上，对于 $v(H) \leqslant n^{o(1)}$，与（2.6）类似的推理可得

$$\log \frac{1}{p_{1\mathsf{M}}(H)} = \frac{v(H)}{e(H)} \log n - O\left(\frac{v(J)\log v(J)}{e(H)}\right) = [1 + o_n(1)]\frac{v(H)}{e(H)} \log n\,.$$

如果图是平衡的，那么可推出

$$\log \psi_q(H) = [1 + o_n(1)]\frac{v(H)}{e(H)} \log n$$

对所有 $q \in [0,\ 1]$。这意味着定理 5.3 的条件得到满足，因此在 $p = n^{-v(H)/e(H)}$处，我们在线性尺度下具有全有或全无。

例 2.11（带出边的环）。此例说明了定理 2.5 中“稠密”假设的必要性。令 H 由一个位于 k 个顶点上的环 J 以及每个环顶点的一条额外出边构成，因此总共有 $|H| = v(H) = 2k$。假设 $k = \log\log n$，则根据例 4.10，植入于 $G(n、\ p)$ 中的 J 模型在 $p_{\mathsf{AoN}}(J) = 1/n$ 处具有全有或全无。验证对于每个固定的 $q \in [0、\ 1]$，都有 $\psi_q(H) = (1 + o(1))n^{-1}$ 并不困难（关于计算 k-环的 ψ_q 的细节，见例 5.4；计算过程类似）。因此，H 是非局域化的（见定义 4.3），并且是近乎平衡的（条件 (2.11)）。然而，我们声称，植入于 $G(n、\ p)$ 中的 H 模型在线性尺度下不表现出全有或全无（定义 2.2）：对于 $p \leqslant 0。9/n$, 低于$p_{\mathsf{AoN}}(J)$，因此我们预计能够恢复大部分 J。然而，对于 $p \geqslant 0。5/n$, 的顶点中通常会有线性比例的顶点在 $G(n、\ p)$中拥有多于一条出边，这意味着我们将无法恢复 $H\backslash J$中固定比例的边。由此，对于 $0.5/n \leqslant p \leqslant 0。9/n$，我们既不是“全有”，也不是“全无”，因此在线性尺度下不会出现全有或全无（定义 2.2）。然而，定理 5.3 的条件得到满足（事实上，这是例 2.10 的一个特例），因此我们确实在指数尺度下具有全有或全无。

2.4. **来自随机图论的直觉与证明概要**。 最后，我们通过阐述主要结果背后的一些直觉，说明全有或全无与广义期望阈值之间的联系$\psi_q(H)$（参见定理1.1的非正式表述，或定理 2.5 和5.3的正式表述）。

我们先从随机图理论的直觉开始。回顾“第二个 Kahn–Kalai 猜想”（2.8），该猜想用期望阈值 $p_{\mathsf{E}}(H)$来估计 $p_c(H)$。这对应于一种自然想法：$G(n$中出现 H 的一个副本，是由其“最不可能出现”的子图的存在阈值所驱动的，而该阈值可用最大的一阶矩阈值 $p)$ 来衡量。事实上，要使一个图出现在 $G(n$中，显然它的所有子图也都必须出现。$p)$此外，受到有界 H 情形下成熟结果的启发（例如 [Ruc87，定理 5]），我们还预期在 $G(n$中会出现一种“聚类”图景：每当 H 的“最不可能出现”的子图 J 在 $G(n$ 中出现一个副本时，我们预期 H 的多个副本会作为同一个子图 J 的不同扩展而出现，并将其作为核心（从而形成“向日葵”结构）。感兴趣的读者可以注意到，在随机约束满足问题的术语中，向日葵图景 [对应于一种“凝聚相” $^{+}07$]KMRT。不过我们要指出，第二个 Kahn–Kalai 猜想（以及所提出的“向日葵”结构）对于一般的 H仍然是一个开放问题，尽管其若干变体已经得到证明 [FKNP21、PP22、MNWSZ22b]。

现在我们解释上述图景如何引出主要结果——定理 1.1。粗略地说，广义阈值 $\psi_q(H)$（定义 2.4）在 $q \in (0$ 上并非常数，$1)$ 当且仅当

“最不可能出现的”子图 $J \subseteq H$ 具有 $|J|/|H| = q \in (0,1)$。此外，为简单起见，假设 $p' \equiv \max_{J' \neq J} p_{1\mathsf{M}}(J') < p$。根据上文提到的“聚类”直觉，我们预期，只要空图 $G(n,\ p)$ 中有 H 的副本，它们都应当是数量少得多的“较不可能出现的” J 的扩展。现在考虑 $p' < p < p_{1\mathsf{M}}(J)$：由于 $p < p_{1\mathsf{M}}(J)$，空图 $G(n,\ p)$ 不含 J 的副本，因此也不含任何 H。然而，在植入模型中，应当有大量 H 的副本，它们都与植入副本 $\boldsymbol{H}$ 在其“最不可能出现的”子图 $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{H}$ 上相交——这一点可由假设 $p > p'$ 作启发式解释，而“最不可能出现的” $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{H}$ 已经被植入。对于这样的 p，我们预期可以恢复 $\boldsymbol{J}$（因此我们并非处于“全无”阶段），但无法从所有重叠的副本中辨认出真正的 $\boldsymbol{H}$（因此我们并非处于“全有”阶段）。我们的定理证明，这一直觉确实成立；事实上，这一结论是一个等价命题，并且在许多情形下，当且仅当 $\psi_q(H)$ 在 q 上大致为常数时，才会出现全有或全无现象。

上述讨论大多基于启发式图景和随机图论中的最新猜想。这为本文提供了指导性直觉，但我们强调，我们的证明采用了截然不同的方法，直接刻画“全有”和“全无”阶段。具体而言，我们首先结合植入技巧、西森恒等式和二阶矩方法的论证，建立若干不同结果，将植入模型的最小均方误差与 H 的子图结构联系起来（例如参见引理3.8 和3.11）。这些中间结果使我们得以运用上述直觉，得到稠密图的几乎全有或几乎全无刻画 H （第4节），并通过扩展条件得到一般性的“全无”结果（定理3.15）。为了刻画指数尺度下的全有或全无现象，我们首先证明了适用于本问题的一种 I-MMSE关系变体（引理5.9），由此可以确定指数尺度下的全有或全无阈值（定理5.8）。随后，我们结合植入技巧与二阶矩方法的论证，再次运用上一段中的直觉，最终得出指数尺度下的全有或全无刻画（定理5.3）。

3. 伯努利模型中的全有或全无 一般伯努利模型：定义与关键充分条件

本节将在植入子图模型的一种自然抽象中推导一般性工具，我们将其称为伯努利推断模型（定义 3.1），其中图被更一般的二进制向量所取代。

- 在 §3.1 中，我们正式定义伯努利推断模型，并证明定理 3.4，该定理给出了此模型中全有或全无的一个充分条件。• 在 §3.2 中，我们陈述定理 3.7，该定理给出了定理 3.4 在指数尺度上的一个对应结果。我们将在第 5 节中进一步研究植入子图模型的指数尺度。• 在 §3.3 中，我们通过对植入模型进行截断一阶矩计算，证明定理 3.4 和 3.7 中的“全有”结果。• 在 §3.4 中，我们通过对零模型进行截断二阶矩计算，证明定理 3.4 和 3.7 中的“全无”结果。• 在 §3.5 中，我们证明定理 3.14，该定理根据扩散性质给出了伯努利模型的一个“全无”区域。由此，我们推导出定理 3.15；该定理在引言中被提及，是第二个 Kahn–Kalai 猜想的推断版本。

3.1. **一般伯努利推断模型。** 我们首先在本小节中正式定义一般伯努利推断模型。本小节的主要结果是定理 3.4，它给出了此模型在（线性尺度上的）全有或全无的一个充分条件。作为应用，我们将在本小节末证明推论 3.5，刻画植入团模型中全有或全无现象的发生。

定义 3.1 （伯努利推断模型）。 设 N 和 $K \leqslant N$。假设在某个由 $[N]$的 M K 元子集组成的族 $\mathcal{S}$ 上有一个均匀先验 $\mathbf{P}$，即：

$$\mathcal{S} \subseteq \binom{[N]}{K}, \quad |\mathcal{S}| = M,$$

并且对所有 $S \in \mathcal{S}$都有$\mathbf{P}(S) = 1/M$。我们假设该模型是边缘对称的，即对所有 $i \in [N]$都有 $\mathbf{P}(i \in \boldsymbol{S}) = K/N$。记作 $\theta \equiv \mathbf{1}_S \in \{0, 1\}^N$；稍微滥用记号，我们也将 $\mathcal{S}$ 记作向量集合 $\theta = \mathbf{1}_S$（对于 $S \in \mathcal{S}$）。在伯努利推断模型中，我们首先从 $\boldsymbol{S} \sim \mathbf{P}$中采样（隐藏）信号，并记 $\theta^* \equiv \mathbf{1}_{\boldsymbol{S}}$。然后令 $\boldsymbol{V} \subseteq [N]$ 为随机子集，其中 $[N]$中的每个元素均以概率 p独立地包含于其中，因此 $w \equiv \mathbf{1}_{\boldsymbol{V}} \sim \mathrm{Ber}(p)^{\otimes N}$。我们观测到 $\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}$，等价地， $x \equiv \theta^* \vee w$。目标是从 $b\boldsymbol{Y}$中恢复 $\theta^* = \mathbf{1}_{\boldsymbol{S}}$。我们令植入模型 $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}^p$ 表示 $(\boldsymbol{S}、 \boldsymbol{V} 、 \boldsymbol{Y})$ 的联合分布。作为比较，我们令 $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q}^p$ 表示零模型，其中不存在隐藏信号 $\boldsymbol{S}$，因此 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}$ 且 $x = w = \mathbf{1}_{\boldsymbol{V}} \sim \mathrm{Ber}(p)^{\otimes N}$。

上文定义的伯努利模型显然是植入子图模型（定义 2.1）的一种抽象，其中 $[N]$ 对应于 K_n 中所有可用边的集合，而 θ^* 对应于隐藏子图的（边）。请注意，一般的伯努利模型不一定具有由顶点连接而成的边的几何结构。

将（2.1）推广后，我们在伯努利推断模型（因此也在植入子图模型）中采用的“恢复”度量是最小均方误差 （MMSE）：

$$\mathrm{MMSE}_N(p) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\left\|\theta^* - \mathbb{E}[\theta^*|x]\right\|_2^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\|\theta^*\|^2 - \left\|\mathbb{E}[\theta^*|x]\right\|^2\right]. \tag{3.1}$$

由于 $\|\theta^*\|^2 = K$，MMSE 必须介于 $[0, K]$ 之间，因此下文中我们始终用 K 对其进行归一化。回想一下，在植入子图模型中， θ^* 对应于隐藏子图中的边集；因此，MMSE 衡量的是边恢复，而非顶点恢复。

众所周知，$\mathrm{MMSE}_N(p)$ 是 $p \in [0, 1]$ 的非减函数。引言中已经提到（并使用）了这一事实，这里我们简要回顾其证明：

引理 3.2 （MMSE 的单调性）。 最小均方误差$_N(p)$ 是关于 $p \in [0、 1]$的非递减函数。

证明。 *</style}*对于，考虑一个耦合 P，其中 P， w 的边缘分布为 $\mathrm{Ber}(p)^{\otimes N}$， w'的边缘分布为 $\mathrm{Ber}(p)^{\otimes N}$，且 $w \leqslant w'$（逐坐标）。那么，在此耦合下，令 $x = \theta^* \vee w$ 和 $x' = \theta^* \vee w'$，我们有

$$\mathrm{MMSE}_N(p) = \mathbb{E}\Big[\mathrm{Var}(\theta^* \mid x)\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathrm{Var}(\theta^* \mid x, x')\Big] \leqslant \mathbb{E}\Big[\mathrm{Var}(\theta^* \mid x')\Big] = \mathrm{MMSE}_N(p'),$$

其中，第二个等式成立是因为，如果我们已经知道 x，那么知道 x' 不会提供关于 θ^*的额外信息。 □

鉴于引理3.2，自然会问，在哪些情形下最小均方误差会发生尖锐跃迁。因此，我们作出如下定义，将植入子图模型的定义2.2 推广如下：

定义 3.3（全有或全无）。我们称定义3.1 中的模型在临界概率处呈现全有或全无（*AoN*）跃迁 $p_{\mathsf{AoN}} = p_{\mathsf{AoN}}(N)$，如果

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{K} = \begin{cases} 1 & \text{for all } p \geqslant (1+\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}} \\ 0 & \text{for all } p \leqslant (1-\varepsilon)p_{\mathsf{AoN}}\,, \end{cases}$$

对于任意常数 $\varepsilon > 0$。我们有时将其称为“线性尺度下的全有或全无”，以区别于下文定义3.6中的尺度。

本文的目标之一是刻画全有或全无现象成立的条件，并在成立时确定阈值 p_{AoN}的位置。如上所述，本文的一个主题是，p_{AoN} 的位置与零模型 $\mathbb{Q}^p$中的一阶矩阈值密切相关。对于给定的集合族 $\mathcal{S}$（先验分布$\mathbf{P}$ 在该集合族上均匀分布），一阶矩阈值是使得从零模型 $\mathbb{Q}^p$ 抽取的样本中，$\mathcal{S}$ 的元素期望数量至少为一的最小 p 值。更正式地，对于 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}$，令 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})$ 表示包含在 $\boldsymbol{Y}$ 中的 $\mathcal{S}$ 的元素数量，

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \mathbf{1}\{S \subseteq \boldsymbol{Y}\}\,. \tag{3.2}$$

我们将满足以下条件的 p 值定义为一阶矩阈值 p_{1M}

$$1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \mathbb{Q}_p(S \subseteq \boldsymbol{Y}) = Mp^K\,, \tag{3.3}$$

也就是说，$p_{\mathsf{1M}} \equiv M^{-1/K}$。我们使用这个 p 值来指定先验分布所满足的以下增长条件，该条件从上方控制先验分布的两次独立抽样在特定数量的元素上发生重叠的概率：

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant\ell\leqslant K} \frac{1}{K} \log\left(\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{S}'| = \ell)}{(p_{\mathsf{1M}})^\ell}\right) \leqslant 0\,, \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}'$ 是从$\mathbf{P}$ （在 $\mathcal{S}$上的均匀测度）中独立抽样得到的。我们强调，在 [NWZ20], 的表述中，增长条件（3.4）是对先验分布重叠率函数的上界$\mathbf{P}$；该论文证明，类似条件意味着在具有高斯噪声的稀疏估计问题中存在全有或全无阈值。

定理 3.4（增长条件下伯努利推断模型的全有或全无性质）。假设先验分布$\mathbf{P}$满足条件（3.4），并且 $K = K(N) \to \infty$。那么，根据*3.1*）定义的相应伯努利推断模型在 $p_{\mathsf{AoN}} = p_{\mathsf{1M}}$ 处具有全有或全无性质，如（3.3）所定义：也就是说，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{K} = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geqslant (1+\varepsilon)p_{\mathsf{1M}}, \\ 0 & \text{if } p \leqslant (1-\varepsilon)p_{\mathsf{1M}}, \end{cases}$$

对于任意常数 $\varepsilon > 0$。

由定理3.4 可以直接推导出植入团模型中全有或全无的以下刻画：

推论 3.5。考虑在 $G(n,p)$ 中植入一个由 k 个顶点构成的团 H 的模型。
(a) 若 $k = k_n \to +\infty$，则该模型在

$$p_{\mathsf{AoN}}(H) = p_{\mathsf{1M}}(H) = \binom{n}{k}^{-1/\binom{k}{2}}.$$

(b) 若 $k = k_n = O(1)$，则该模型在任何 p 取值下都不呈现全有或全无现象。

为了证明推论 3.5 ，我们回顾所谓的“西森恒等式”。它指的是，二元组 $(\theta^*,\ \theta')$（原始信号与一个来自后验分布的样本）和二元组 $(\theta',\ \theta'')$（来自后验分布的两个独立样本）具有相同的分布。这是贝叶斯法则的一个基本推论：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta^* = \theta_1, \theta' = \theta_2) &= \mathbf{P}(\theta^* = \theta_1)\sum_x \mathbb{P}(x \mid \theta^* = \theta_1)\mathbb{P}(\theta' = \theta_2 \mid x) \\ &= \sum_x \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(\theta^* = \theta_1 \mid x)\mathbb{P}(\theta' = \theta_2 \mid x) = \mathbb{P}(\theta'' = \theta_1, \theta' = \theta_2)\,, \quad (3.5)\end{aligned}$$

而二元组 $(\theta',\ \theta'')$ 显然是可交换的。

推论 *3.5* 的证明。 对于 (a) 部分，根据定理 3.4，只需验证增长条件（3.4）。在植入团模型的背景下，定义 3.1 中的量为

$$M = \binom{n}{k}, \quad K = \binom{k}{2}.$$

设 S 是先验分布 $\mathbf{P}$的一个样本，即 S 是在完全图 K_n中所有 k团里均匀随机选出的。若 S' 是 S的一个独立副本，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S \cap S'| \geqslant \ell)}{p_{\mathrm{IM}}(H)^\ell} &\leqslant \sum_{0\leqslant t\leqslant k} \mathbf{1}\left\{\binom{t}{2} \geqslant \ell\right\}\binom{k}{t}\binom{n-k}{k-t}\binom{n}{k}^{-1+\ell/\binom{k}{2}} \\ &\leqslant \exp(o(k^2)) \sum_{0\leqslant t\leqslant k} \mathbf{1}\left\{\binom{t}{2} \geqslant \ell\right\} n^{k-t}(n^k)^{-1+\ell/\binom{k}{2}} \\ &\leqslant \frac{\exp(o(k^2))}{\exp\{\Theta[\ell^{1/2} - \ell/k^2]\log n\}} \leqslant \exp(o(k^2))\,.\end{aligned}$$

这验证了条件（3.4），结论随即成立。

对于部分（b），我们关注满足以下条件的情形 $p \asymp p_c(H)$ 其中 $p_c(H)$。只需证明，对于任意这样的p，归一化 MMSE 不趋于零或一。根据（3.5），只需证明：若 H'和 H'' 是给定 $Y = H \cup G$时后验分布中的两个样本，那么 H' 与 H''之间的期望边重叠除以 $|H|$ 后，不趋于零或一。为此，回顾 $Z = Z(Y)$ 表示 k-团包含于 Y中的总数。我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_p} Z = \sum_{w=0}^{k} \binom{k}{w}\binom{n-k}{k-w} p^{\binom{k}{2}-\binom{w}{2}}$$

其中 w 为 t 与植入团共享的顶点数。回顾 $k \asymp 1$，我们有 e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_p} Z \asymp \sum_{w=0}^{k} n^{k-w}\frac{(n^k)^{\binom{w}{2}/\binom{k}{2}}}{n^k} \asymp \sum_{w=0}^{k}\left(\frac{1}{n^w}\right)^{1-\frac{w-1}{k-1}} \leqslant O(1)\,.$$

这表明 Z 是一个随机有界随机变量。要使全有或全无成立，唯一可能的情况是 $Z = 1$ 以高概率成立。然而，对于这样的 p 取值，根据标准结果可知，图 $G\backslash H \sim G(n-k,\ p)$ 以非忽略概率包含一个团，这意味着 $Z \geqslant 2$ 以非忽略概率成立。这表明在此 p范围内，归一化 MMSE 不会收敛到零或一，因此不会出现全有或全无现象。□

3.2. **指数尺度的结果。** 在本小节中，我们陈述伯努利模型中关于全有或全无的另一个结果，即下文的定理 3.7。该结果与定理 3.4非常相似，但全有或全无现象发生在更大的尺度上（定义 3.6），且所需条件更弱。定理 3.4 和 3.7 的证明非常相似，因此我们在本节中一并给出。

定义 3.6 （指数尺度上的全有或全无）。 我们称定义3.1 中的模型表现出指数尺度上的全有或全无转变，其临界概率为 $p_{\mathsf{AoN}} = p_{\mathsf{AoN}}(N)$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{K} = \begin{cases} 1 & \text{for all } p \geqslant (p_{\mathsf{AoN}})^{1-\varepsilon} \\ 0 & \text{for all } p \leqslant (p_{\mathsf{AoN}})^{1+\varepsilon} \end{cases},$$

对于任意常数 $\varepsilon > 0$，其中我们还要求 p_{AoN} 与 1 保持有界距离，以使该定义具有意义。

我们注意到，如果 p 与 1 保持有界距离，那么

$$(1+o_n(1))p = \exp\Big(o_n(1) + \log p\Big) = \exp\Big(\Big(1+o_n(1)\Big)\log p\Big),$$

因此，在一个与 1 保持有界距离的阈值处，线性尺度上的全有或全无意味着同一阈值处指数尺度上的全有或全无。反之显然不成立。下面给出增长条件（3.4）的一个变体：

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant \ell \leqslant K} \frac{1}{\log M} \log\left(\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'| = \ell)}{(p_c)^\ell}\right) \leqslant 0, \tag{3.6}$$

我们始终假设 $K = O(\log M)$，这保证了 p_{1M} 与 1 保持有界距离。在此假设下，条件（3.4）蕴含条件（3.6）。

定理 3.7 （在条件（3.6）下指数尺度上的全有或全无）。 假设先验分布 $\mathbf{P}$ 满足 （3.6），并且 $K\to\infty$。那么，按照 $p_{\mathsf{AoN}} = p_c$ 由 （3.3）定义的相关模型，在指数尺度上具有全有或全无性质：也就是说，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{K} = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geqslant (p_c)^{1-\varepsilon} \\ 0 & \text{if } p \leqslant (p_c)^{1+\varepsilon} \end{cases}.$$

对于任意常数 $\varepsilon > 0$。

3.3. **利用植入模型中的截断一阶矩证明“全有”情形。** 本小节证明定理3.4和3.7中的正向（“全有”）结论，说明在这两种情况下，若 p 充分低于 p_{1M}，则（归一化的）最小均方误差趋于零。

引理 3.8 （最小均方误差上界）。 对于任意 $\delta > 0$，若先验分布$\mathbf{P}$ 满足

$$\sum_{\ell\leqslant(1-\delta)K} \mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|S\cap S'| = \ell\Big) M p^{K-\ell} = o_N(1) \tag{3.7}$$

则 最小均方误差$_N(p)/K \leqslant \delta + o_N(1)$。

证明。 回想在植入模型 $\mathrm{P} = \mathrm{P}^p$下，观测为 $Y = S\cup V$，其中 V以概率 p独立地包含 $[N]$ 的每个元素。我们将说明，以高概率，任何 满足 $S'\subseteq Y$的元素 $S'\in\mathcal{S}$ 与植入集合 S的重叠至少为 $K(1-\delta)$。由于贝叶斯估计量 $\hat{}\,\theta^{\mathrm{B}} = \mathbb{E}(\theta^*\,|\,x)$ 是对所有此类 S'的 $\mathbf{1}_{S'}$ 的平均值，因此

由线性性可得 $(\theta^*,\ \hat{\theta}^{\mathrm{B}}) \geqslant K(1-\delta-o_N(1))$ 以高概率成立，因此我们有

$$\frac{\mathsf{MMSE}}{K} \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{K}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\|\theta^*\|^2 - \left(\theta^*, \hat{\theta}^{\mathrm{B}}\right)\right] \leqslant \delta + o_N(1)\,,$$

as 已声称。因此，利用马尔可夫不等式，只要证明以下结论，便可得到所需结果

$$\sum_{\ell \leqslant K\delta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S},\boldsymbol{Y}) = o_N(1)\,, \tag{3.8}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S},\boldsymbol{Y})$ 表示包含在 $\boldsymbol{Y}$ 中且与隐藏信号 $\boldsymbol{S}$ 重叠l 的子集 $S' \in \mathcal{S}$ 的数量。接下来注意到，对任意l，都有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S},\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left|\left\{S' \in \mathcal{S} : |\boldsymbol{S} \cap S'| = \ell\right\}\right| p^{K-\ell} = \mathbf{P}^{\otimes 2}\left(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell\right) M p^{K-\ell}\,. \tag{3.9}$$

上文用到了以下事实：若我们以 $\boldsymbol{S}$ 为条件，并考虑 S' 与 $|\boldsymbol{S} \cap S'| = l$，那么 S' 包含在 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}$ 中的概率，与 $S'\backslash \boldsymbol{S}$ 包含在$\boldsymbol{V}$中的概率相同，即 $p^{K-\ell}$。由此可得 (3.7) 蕴含 (3.8)，从而证明了该结论。□

定理3.4 “全称”结论的证明。 根据引理 3.8，只需验证条件 (3.7) 对任意 $p \leqslant (1-\varepsilon)p_{1\mathsf{M}}$以及任意 $\delta > 0$都成立。我们首先利用关于 p 的假设来界定

$$Mp^{K-\ell} \leqslant M(p_{1\mathsf{M}})^{K-\ell}(1-\varepsilon)^{K-\ell} \overset{(3.3)}{=} M\left(\frac{1}{M}\right)^{(K-\ell)/K}(1-\varepsilon)^{K-\ell} = M^{\ell/K}(1-\varepsilon)^{K-\ell}\,. \tag{3.10}$$

结合增长条件（3.4），可得对所有$l \leqslant K(1-\delta)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{\otimes 2}\left(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell\right) M p^{K-\ell} &\leqslant \exp\left\{-\delta\varepsilon K + \log\left[\mathbf{P}^{\otimes 2}\left(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell\right) M^{\ell/K}\right]\right\} \\ &\overset{(3.4)}{\leqslant} \exp\left\{-\delta\varepsilon K + o(K)\right\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 $K \to \infty$，对 $l \leqslant K(1-\delta)$ 求和可得条件（3.7）成立。结论得证。□

定理3.7 “全称”结果的证明。 同样，根据引理 3.8，只需验证对于任意 $p \leqslant (p_{1\mathsf{M}})^{1+\varepsilon}$以及任意 $\delta > 0$，条件（3.7）均成立。利用关于 p的假设，我们有以下结果，而非（3.10）：

$$Mp^{K-\ell} \leqslant M(p_{1\mathsf{M}})^{(K-\ell)(1+\varepsilon)} \overset{(3.3)}{=} M\left(\frac{1}{M}\right)^{(1-\ell/K)(1+\varepsilon)} = \frac{M^{\ell/K}}{M^{\varepsilon(1-\ell/K)}}\,.$$

结合增长条件（3.6），我们得到以下结果，而非（3.11）：

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\left(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell\right) M p^{K-\ell} \leqslant \frac{\exp(o(\log M))}{M^{\varepsilon(1-\ell/K)}} \leqslant \frac{\exp(o(\log M))}{M^{\varepsilon\delta}}$$

对每个 $l \leqslant K(1-\delta)$。由于我们假设 $K \to \infty$ 且 $K = O(\log M)$，因此有 $\log K \ll K \leqslant O(\log M)$。对 $l \leqslant K(1-\delta)$ 求和可得，条件（3.7）成立，从而证明了该结论。□

3.4. **零模型中“nothing”区域的截断二阶矩证明。** 本小节利用定理 3.4 和 3.7证明否定性（“nothing”）结果：在这两种情况下，如果 p 充分大于 $p_{1\mathrm{M}}$，那么缩放均方误差趋于 1。

回顾一下，在植入模型 $\mathrm{P} = \mathrm{P}^p$ 中，存在一个隐藏信号 $\boldsymbol{S} \sim \mathbf{P}$，我们观测到$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}$，其中 $\boldsymbol{V}$ 是一个独立的 p- 偏置随机集合。现在将其与零模型 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^p$ 进行比较，在零模型中不存在隐藏信号，我们观测到 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}$。注意，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{S} = S, \boldsymbol{Y} = Y) &= \frac{\mathbf{P}(S)\mathbf{1}\{S \subseteq Y\}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y)}{p^{|S|}} = \frac{\mathbf{1}\{S \subseteq Y\}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y)}{Mp^K} \\ &= \frac{\mathbf{1}\{S \subseteq Y\}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\boldsymbol{Z}(Y)$ 如（3.2）所示。因此，在植入模型下，$\boldsymbol{Y}$ 的边缘分布为

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = Y) = \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y). \tag{3.13}$$

也就是说，P 和 Q 之间的拉东–尼科迪姆导数等于 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})$ 与 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})$的比值。一个直接推论是，在 P 下，该比值不太可能很小：

引理 3.9。 对于任意 $\varepsilon > 0$，有 $\mathrm{P}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) \leqslant \varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})) \leqslant \varepsilon$。

证明。 由（3.13）可得

$$\mathbb{P}\Big(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) \leqslant \varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})\Big) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}\Big\{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) \leqslant \varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})\Big\}\frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}\right] \leqslant \varepsilon\mathbb{Q}\Big(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) \leqslant \varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})\Big) \leqslant \varepsilon,$$

如所述。 □

回顾上文，$\boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{Y})$ 表示包含于 $S' \in \mathcal{S}$ 中且与$\boldsymbol{Y}$ 具有 l 重叠的子集数量，其中隐藏信号为 $\boldsymbol{S}$。我们还令 $\boldsymbol{Z}^2(l, \boldsymbol{Y})$ 表示满足$(S', S'') \in \mathcal{S}^2$ 且 $|S' \cap S''| = l$ 和 $S' \subseteq \boldsymbol{Y}$，$S'' \subseteq \boldsymbol{Y}$的对数。以下是（3.12）的推论：

引理 3.10。 对于任意 $0 \leqslant l \leqslant K$，有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{Y}) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{Z}^2(\ell, \boldsymbol{Y})]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}.$$

证明。 由（3.12）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\boldsymbol{Z}_\ell(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{Y}) &= \sum_{S,Y}\frac{\mathbf{1}\{S \subseteq Y\}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}\boldsymbol{Z}_\ell(S, Y) \\ &= \sum_{Y}\frac{\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y} = Y)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}\sum_{S}\mathbf{1}\{S \subseteq Y\}\sum_{S'}\mathbf{1}\{S' \subseteq Y\}\mathbf{1}\{|S \cap S'| = \ell\} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{Z}^2(\ell, \boldsymbol{Y})]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})},\end{aligned}$$

如所述。 □

下一个结果给出了引理3.8的对应结果：

引理 3.11 (MMSE 下界)。 如果先验分布$\mathbf{P}$ 满足

$$\sum_{\ell \geqslant K\delta}\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell)}{p^\ell} = o_N(1), \tag{3.14}$$

那么 最小均方误差$_N(p)/K \geqslant 1-\delta-o_N(1)$。

证明。 令 S' 表示在给定 Y的条件下，来自 S 后验分布的一个样本。我们将证明，对于 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^p$，有如下界

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S\cap S'|}{K}\geqslant \delta\right) = o_N(1)\,.$$

由于 贝叶斯估计量$\hat{}\theta^{\mathrm{B}}$ 是给定 Y时 $\theta' = \mathbf{1}_{S'}$ 的期望，因此

$$\frac{\mathsf{MMSE}}{K} \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{K}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_p}\left[\|\theta^*\|^2 - \left(\theta^*, \hat{\theta}^{\mathrm{B}}\right)\right] \geqslant 1-\delta+o_N(1)\,.$$

现在注意，我们可以应用引理3.9 和3.10 来给出以下界，对任意 $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{|S\cap S'|}{K}\geqslant\delta\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{Z(Y)}\sum_{\ell\geqslant K\delta} Z_\ell(S,Y)\right] \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}Z(Y)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sum_{\ell\geqslant K\delta} Z_\ell(S,Y)\right]\\ &= \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}Z(Y))^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{\ell\geqslant K\delta} Z^2(\ell,Y)\right] \equiv \varepsilon + \frac{p(\delta)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，只需证明 $p(\delta)=o_N(1)$。接下来注意

$$p_\ell(\delta) \equiv \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}Z^2(\ell,Y)}{(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}Z(Y))^2} = \frac{M^2\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)p^{2K-\ell}}{(Mp^K)^2} = \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)}{p^\ell}\,.$$

对$l \geqslant K\delta$ 求和即可得到（3.14）的左侧，从而证明该结论 . □

定理 *3.4* “无事发生”结果的证明。 根据引理 3.11，只需验证条件（3.14）对 $p \geqslant (1+\varepsilon)p_{1\mathsf{M}}$ 以及任意 $\delta>0$ 成立。结合关于 p 的假设与条件（ 3.4 ），可得以下界（对 $l \geqslant K\delta$ ）：

$$\begin{aligned}p_\ell(\delta) &\leqslant \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)}{(1+\varepsilon)^\ell(p_{1\mathsf{M}})^\ell} \overset{(3.3)}{=} \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)M^{\ell/K}}{(1+\varepsilon)^\ell}\\ &\leqslant \exp\left\{\log\left[\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)M^{\ell/K}\right] - K\delta\log(1+\varepsilon)\right\} \overset{(3.4)}{\leqslant} \exp\left\{o(K)-\delta K\log(1+\varepsilon)\right\}.\end{aligned}$$

由于 $K\to\infty$，我们可以对 $l \geqslant K\delta$ 求和，从而得到 $p(\delta)=o_N(1)$，证明至此完成。□

定理*3.7* “无事发生”结果的证明。 同样，根据引理 3.11，只需验证条件（3.14）对$p \geqslant (p_{1\mathsf{M}})^{1-\varepsilon}$ 以及任意 $\delta>0$ 成立。结合关于 p 的假设与条件（ 3.6 ），可得以下界（对 $l \geqslant K\delta$ ）：

$$\begin{aligned}p_\ell(\delta) &\leqslant \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)}{(p_{1\mathsf{M}})^{\ell(1-\varepsilon)}} \overset{(3.3)}{=} \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)M^{\ell/K}}{M^{\ell\varepsilon/K}}\\ &\leqslant \exp\left\{\log\left[\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S\cap S'|=\ell)M^{\ell/K}\right] - \delta\varepsilon\log M\right\} \overset{(3.6)}{\leqslant} \exp\left\{o(\log M)-\varepsilon\delta\log M\right\}\end{aligned}$$

由于 $\log M\to\infty$ 和 $\log K = o(\log M)$，我们可以对$l \geqslant K\delta$ 求和，从而得出 $p(\delta)=o_N(1)$，证明完毕。□

3.5. **与扩散性的联系：推断中的第二卡恩-卡莱猜想。** 本小节的主要结果是定理 3.15，可以将其视为第二 Kahn–Kalai 猜想在推断情形下的一个版本。

定义 3.12（扩展条件）。设 $\mathbf{P}$ 是定义在$[N]$的一个子集族 $\mathcal{S}$ 上的概率测度。对于 $\bar{p} < 1$，如果对于任意子集 $A \subseteq [N]$ 都有以下性质，则称$\mathbf{P}$是 $\bar{p}$-扩展的：

$$\mathbf{P}(A \subseteq \boldsymbol{S}) \leqslant \bar{p}^{|A|}, \tag{3.15}$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 是从$\mathbf{P}$中随机抽取的样本。注意，只需对所有 $A \neq \varnothing$验证该条件即可。

直观地说，增长条件（3.4）要求先验分布 $\mathbf{P}$ 满足扩展条件的一个近似版本；扩展条件是概率组合学中的一个著名条件 [ALWZ21、FKNP21、Rao20、Tao20、BCW21、Hu21、Sto22、MNWSZ22b]。人们不禁会问，广受研究的扩展条件本身是否也蕴含全有或全无现象的某种形式。在本文中，我们证明，任何满足以下扩展条件弱化版本的先验分布，在的广泛取值范围内都满足“全无”性质。

定义 3.13（广义扩展条件）。设 $\mathbf{P}$ 是定义在 $[N]$ 的 K-子集族 $\mathcal{S}$ 上的概率测度。对于 $\delta > 0$，我们称 $\mathbf{P}$ 是 $(\bar{p}, \delta)$-扩展的，如果满足

$$\mathbf{P}(A \subseteq \boldsymbol{S}) \leqslant \bar{p}^{|A|} \tag{3.16}$$

对于任意满足 $|A| \geqslant K\delta$ 的 $A \subseteq [N]$。

下面的定理根据广义扩展条件，为伯努利推断模型确立了一个“nothing”区域：

定理 3.14（广义扩展条件下的“nothing”）。在伯努利推断模型（定义 3.1）中，假设对于每个 $\delta > 0$，$\mathbf{P}$ 都是 $(\delta, \bar{p})$-扩展的，其中 $\bar{p} = \bar{p}_N(\delta)$。那么

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathsf{MMSE}_N(p)}{K} = 1$$

对于所有 $\delta > 0$，任意满足 $p \geqslant 3\bar{p}_N(\delta)/\delta$ 的 p。

证明。根据引理 3.11，只需验证任意常数 $\delta > 0$ 下的条件（3.14）。由于 $\mathbf{P}$ 的支撑集为 K-子集，因此对所有的$l \geqslant K\delta$，有

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell\Big) = \mathbf{E}\Big[\mathbf{P}\Big(|\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}'| = \ell \,\Big|\, \boldsymbol{S}\Big)\Big] = \mathbf{E}\Big[\sum_{A\subseteq\boldsymbol{S}, |A|=\ell} \mathbf{P}(A \subseteq \boldsymbol{S}')\Big]$$

$$\overset{(3.16)}{\leqslant} \binom{K}{\ell}\bar{p}^{\ell} \leqslant \left(\frac{Ke\bar{p}}{\ell}\right)^{\ell} \leqslant \left(\frac{e\bar{p}}{\delta}\right)^{\ell}.$$

因此条件（3.14）对 $p \geqslant 3\bar{p}/\delta$成立。证明完毕。 □

下面给出第二个 Kahn–Kalai 猜想的推断版本，该猜想在§2.3中讨论过：

定理 3.15（任意图的“nothing”）。设 $H = H_n$ 为任意图。当 $p = p_n$ 满足以下条件时，植入 $G(n、\ p)$ 中的H_n 模型处于*“nothing”*区域

$$\liminf_{q\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{p_n}{\psi_q(H)/q} \geqslant 3,$$

当 ψ_q 由 （2.9）定义时。

证明。 根据定理 3.14，只需验证：在 K_n 中的 H 副本上取均匀测度的 $\mathbf{P}$ 满足具有适当参数的广义扩展条件。对于任意非空子图 $J \subseteq H$，令 π_J 表示在 K_n 中的 J 副本上的均匀测度，并令 $\boldsymbol{J}$ 表示从 π_J 中抽取的样本。令 J_0, H_0 为 K_n 中 J 的任意固定副本,。令 $M_{J,H}$ 表示 H 中 J 的副本数。由对称性可得

$$\mathbf{P}(J_0 \subseteq \boldsymbol{H}) = \pi_J(\boldsymbol{J} \subseteq H_0) = \frac{M_{J,H}}{M_J} \leqslant \frac{1}{M_J}\binom{|H|}{|J|} \leqslant \frac{1}{M_J}\left(\frac{|H|e}{|J|}\right)^{|J|} \overset{(2.5)}{=} \left(\frac{|H|ep_{1\mathrm{M}}(J)}{|J|}\right)^{|J|}.$$

若 $|J| \geqslant |K|q$ 且 $p \geqslant ep_{1\mathrm{M}}(J)/q$，则得到

$$\mathbf{P}(J_0 \subseteq \boldsymbol{H}) \leqslant \left(\frac{ep_{1\mathrm{M}}(J)}{q}\right)^{|J|} \leqslant p^{|J|},$$

这就是广义扩展条件。结论得证。 □

4. 足够稠密图在线性尺度下的全有或全无刻画 s

本节的主要目的是证明定理 2.5，该定理刻画了满足温和条件的稠密图在线性尺度下的全有或全无。定理 2.5 的主要结论是，对于稠密图 H，在线性尺度下的全有或全无当且仅当该图近乎平衡，即几乎满足以下情形： H 是完整图中最稠密的子图。基于这一点，本节安排如下：

- 在§4.1 中，我们通过证明对于非局域化的稠密图（定义2.5 ）而言，全有或全无意味着几乎平衡条件（4.3），来证明定理2.11的正向。• 在§4.2 中，我们通过证明对于非局域化的稠密图，条件（2.5 ）意味着全有或全无，来证明定理2.11的反向。• 在§4.3 中，我们证明定理4.9，该定理为不受密度限制的图在线性尺度上满足全有或全无给出了充分条件，但前提是顶点数和边数都非常小。该结果表明，我们对稀疏植入子图的全有或全无仍缺乏充分理解，并将其留作未来研究中一个有趣的方向。

我们先介绍一些预备知识。在本文的其余部分，我们将抽象的伯努利推断模型（定义3.1）专门化为植入子图模型（定义2.1）。回顾一下，定义2.1 和3.1 之间的明确对应关系如下：$[N]$ 是完全图中所有边的集合 K_n， $\mathcal{S}$ 是 H 内部 K_n所有副本的集合，并且$M = |\mathcal{S}|$ 是 H 中不同 K_n副本的总数：

$$M \equiv M_H \equiv M_{H,K_n} = \frac{n!/(n-v(H))!}{|\operatorname{Aut}(H)|} = \frac{(n)_{v(H)}}{|\operatorname{Aut}(H)|} = \binom{n}{v(H)}\Psi_H, \tag{4.1}$$

其中，$\operatorname{Aut}(H)$ 表示 H的自同构群， Ψ_H 表示完全图中 H 的不同副本数量，该完全图包含 $v(H)$ 个顶点。我们有以下平凡界

$$\binom{n}{v(H)} \leqslant M_H \leqslant (n)_{v(H)} \leqslant n^{v(H)}. \tag{4.2}$$

回顾一下，$\mathbf{P}$ 表示 $\mathcal{S}$ 上的均匀概率测度。在植入模型 $\mathbf{P}^p$ 下，我们观测到 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{H} \sim \mathbf{P}$， 而 $\boldsymbol{G}$ 是从 $G(n,p)$ 中独立抽取的样本。第一个

矩阈值 $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 由(2.5)定义。现在我们继续给出引言中非正式介绍的一些定义：

定义 4.1（足够稠密）。 我们称图序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 是足够稠密的，或简称为稠密的，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} v(H_n) = \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{e(H_n)}{v(H_n)\log v(H_n)},$$

其中， $v(H)$ 表示 H中的顶点数，而 $|H| \equiv e(H)$ 表示 H中的边数。

对于稠密图， $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 和 $\psi_q(H)$ 可通过以下引理轻松计算，其证明已在引言中作了概述（见（2.6））：

引理 4.2。 设 H_n 是稠密的（参见定义4.1）。则有

$$p_{1\mathsf{M}}(H_n) = \frac{1+o_n(1)}{n^{v(H)/e(H)}}.$$

因此，令

$$\alpha_q \equiv \alpha_q(H) \equiv \inf\left\{\frac{v(J)}{e(J)} : J \subseteq H \text{ with } |J| \geqslant \max\left\{1, |H|q\right\}\right\}, \tag{4.3}$$

那么，对于任意稠密图 H_n，我们有 $\psi_q(H) = (1+o_n(1))n^{-\alpha_q(H)}$，其中 $0 < q \leqslant 1$。此外，对于任意图 H，我们有下界 $\psi_q(H) \geqslant n^{-\alpha_q(H)}$，其中 $q \in [0,\ 1]$。

证明。 根据定义可得

$$\frac{1}{p_{1\mathsf{M}}(H)} = (M_H)^{1/e(H)} = \left(\frac{(n)_{v(H)}}{|\operatorname{Aut} H|}\right)^{1/e(H)}.$$

接下来注意到，稠密假设意味着

$$1 \leqslant |\operatorname{Aut} H|^{1/e(H)} \leqslant (v(H)!)^{1/e(H)} = \exp\left\{O\left(\frac{v(H)\log v(H)}{e(H)}\right)\right\} = e^{o_n(1)}.$$

类似地，它还意味着

$$\frac{((n)_{v(H)})^{1/e(H)}}{n^{v(H)/e(H)}} = \exp\left\{O\left(\frac{v(H)^2}{ne(H)}\right)\right\} = e^{o_n(1)}.$$

关于 $\psi_q(H)$ 的单侧界这一最后的结论，注意到对于任意图 J,

$$p_{1\mathsf{M}}(J) = \left(\frac{(n)_{v(J)}}{|\operatorname{Aut} J|}\right)^{-1/e(J)} \geqslant \left((n)_{v(J)}\right)^{-1/e(J)} \geqslant n^{-v(J)/e(J)}.$$

该结论得证。 □

以下 条件在（2.10）中引入，并用于定理 2.5 ：

定义 4.3（非局域化）。 设 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 是一个由稠密图组成的图序列。若存在 $0 < q \leqslant 1$ 和 $C < \infty$，它们均与 n 无关，使得

$$\alpha_q(H) \leqslant \alpha_0(H) + \frac{C}{\log n}. \tag{4.4}$$

我们指出，若 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 是稠密的，且满足 $\psi_q(H)\geqslant c\cdot\psi_0(H)$，其中某个 $0<q\leqslant 1$和 $c>0$，那么 H 是非局域化的：由引理 4.2，可得

$$\frac{1+o_n(1)}{n^{\alpha_q(H)}}=\psi_q(H)\geqslant c\cdot\psi_0(H)\geqslant\frac{1}{n^{\alpha_0(H)}},$$

并重新整理可得条件（4.4）。这一事实曾用于第 2 节中的一些例子。

4.1. **定理 2.5 正向：全有或全无蕴含近乎平衡。** 现在我们转向定理 2.5 的证明。

引理 4.4。 设$\mathbf{P}_1$ 为中 H 的副本上的均匀测度，并设$\mathbf{P}_2$ 为中 H' 的副本上的均匀测度。假设 $v(H)\leqslant v(H')$。若 $(\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{H}^2)$ 是从 $\mathbf{P}_1\otimes\mathbf{P}_2$，中抽取的样本，则

$$(\mathbf{P}_1\otimes\mathbf{P}_2)(|\boldsymbol{H}^1\cap\boldsymbol{H}^2|=\ell)\leqslant\frac{2^{v(H')}v(H)^{O(v(H))}}{n^{v_\ell(H,H')}},$$

其中 $v_\ell(H,H')$ 表示具有 l 条边的图中，能够由 H 的一个副本与 H' 的一个副本相交而得到的图的最小顶点数。

证明。 通过直接计数可得

$$(\mathbf{P}_1\otimes\mathbf{P}_2)(|\boldsymbol{H}^1\cap\boldsymbol{H}^2|=\ell)\leqslant\frac{1}{M_H}\sum_{w=v_\ell(H,H')}^{v(H)}\binom{v(H')}{w}\binom{n-v(H')}{v(H)-w}\Psi_H,$$

我们可以将上述界简化为

$$(\mathbf{P}_1\otimes\mathbf{P}_2)(|\boldsymbol{H}^1\cap\boldsymbol{H}^2|=\ell)\leqslant\binom{n}{v(H)}^{-1}\sum_{w=v_\ell(H,H')}^{v(H)}\binom{v(H')}{w}\frac{(n-v(H'))_{v(H)-w}}{(v(H)-w)!}$$

$$\leqslant 2^{v(H')}\sum_{w=v_\ell(H,H')}^{v(H)}\frac{(v(H))!}{(v(H)-w)!}\frac{n^{v(H)-w}}{(n)_{v(H)}}\leqslant\frac{2^{v(H')}v(H)^{O(v(H))}}{n^{v_\ell(H,H')}},$$

如所述。 □

接下来的两个引理给出了从下方（引理4.5）和从上方（引理 4.6）界定归一化 MMSE 的充分条件。

引理 4.5。 假设 $H=H_n$ 按照定义 4.1的含义是稠密的。固定 $q\in(0,\ 1]$。于是有

$$\frac{\mathsf{MMSE}_n(p_n)}{K}\geqslant 1-q-o_n(1).$$

只要 $p\geqslant(1+\varepsilon)/n^{\alpha_q(H)}$ 对于 $\alpha_q(H)$ 按 (4.3)定义即可。

证明。 根据引理 3.11，只需验证条件（3.14），其中 $\delta=q$。根据引理4.4，

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{H}'|=\ell)\leqslant\frac{v(H)^{O(v(H))}}{n^{v_\ell(H)}}$$

其中 $v_\ell(H)\equiv v_\ell(H,\ H)$。由定义（4.3）可知

$$\frac{v_\ell(H)}{\ell}\geqslant\alpha_q(H).$$

因此，只要 $p \geqslant (1+\varepsilon)/n^{\alpha_q(H)},$，我们就有

$$\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = \ell)}{p^{\ell}} \leqslant \frac{v(H)^{O(v(H))}}{(1+\varepsilon)^{\ell}}.$$

对 $l \geqslant Kq$ 求和，并回顾稠密假设，可得（3.14）。 □

引理 4.6。 设 $H = H_n$ 按照定义 4.1的含义是稠密的。采用记号 (4.3)，假设

$$\alpha_q(H) \leqslant \alpha_0(H) + \frac{c}{\log n}$$

对某些 $q \in (0、\ 1)$，其中 c 是一个有限常数。那么当 $\eta > 0$ 充分小时，我们有

$$\frac{\mathsf{MMSE}_n(p_{n_k})}{K} \leqslant 1 - \eta - o_n(1)$$

只要 $p \leqslant (1 - 2c\eta/q)n^{-\alpha_q(H)}$，就有。

证明。 假设对某个 $q \in (0,\ 1)$ 有

$$\alpha_q(H) = \alpha_0(H) + \frac{c_q}{\log n}$$

对于某些 $q \in (0、\ 1)$，其中 c_q 可能取决于 n，但在极限 $n \to \infty$下由 c 有界。令 $J \subseteq H$ 为一个满足 $L \equiv e(J) \geqslant Kq$ 和 $v(J)/e(J) = \alpha_q(H)$的子图。令 $\mathcal{S}$ 表示 K_n中所有 H 的副本构成的集合。与引理 3.8 的证明相同，只需证明以高概率，任何满足 $H' \subseteq \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{G}$ 的元素 $H' \in \mathcal{S}$ 与植入子图 $\boldsymbol{H}$的重叠至少为 $K\eta$。为此，令 $\mathcal{J}$ 表示 K_n中所有 J 的副本构成的集合；于是只需证明，任何满足 $J' \subseteq \boldsymbol{Y}$ 的元素 $J' \in \mathcal{J}$ 与 $\boldsymbol{H}$的重叠至少为 $K\eta$。与引理 3.8 类似，令 $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\ell}(\boldsymbol{S}、\ \boldsymbol{Y})$ 表示包含在 $\boldsymbol{Y}$中且与 $\boldsymbol{H}$重叠为 l 的元素 $J' \in \mathcal{J}$的数量；我们希望证明，对于所有 $\mathrm{l} \leqslant K\eta$，该数量以高概率为零。类似于 (3.9)，有

$$q_{\ell} \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}_{\ell}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{Y}) = (\mathbf{P} \otimes \bar{\mathbf{P}})(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{J}| = \ell) M_J p^{L-\ell},$$

wher $\bar{\ }$e $\mathbf{P}$ 是 $\mathcal{J}$上的均匀测度，且 $M_J \equiv |\mathcal{J}|$。应用引理 4.4 可得 s

$$q_{\ell} \leqslant \frac{(v_H)^{O(v_H)}}{n^{v_{\ell}(J,H)}} M_J p^{L-\ell} \leqslant (v_H)^{O(v_H)} \frac{n^{v_J - v_{\ell}(J,H)}}{(1/p)^{L-\ell}}.$$

由定义（4.3）可知 $v_{\ell}(J,\ H)/l \geqslant \alpha_0(H) = \alpha_0$，且 $v(J)/L = \alpha_q(H) = \alpha_q$。结合关于 α 的假设可得

$$q_{\ell} \leqslant (v_H)^{O(v_H)} \frac{n^{L\alpha_q - \ell\alpha_0}}{(1/p)^{L-\ell}} \leqslant (v_H)^{O(v_H)} e^{Lc_q} \left(\frac{n^{\alpha_0}}{1/p}\right)^{L-\ell}.$$

暂时令 $\varepsilon > 0$ 为任意常数，并设

$$p = \frac{1-\varepsilon}{n^{\alpha_0} \exp(c_q/(1-\eta/q))} \geqslant \frac{(1 - \varepsilon - (3/2)c_q\eta/q)}{n^{\alpha_q}},$$

其中，当 η 足够小时，最后一个估计成立。对于$l \leqslant K\eta \leqslant L\eta/q,$，我们有

$$q_{\ell} \leqslant \frac{(v_H)^{O(v_H)}(1-\varepsilon)^{L-\ell} e^{Lc_q}}{\exp((L-\ell)c_q/(1-\eta/q))} \leqslant \frac{\exp(o(K))}{\exp(L\varepsilon(1-\eta/q))},$$

wh这里最后一个界使用了稠密假设。对$l \leqslant K\eta$求和可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{\ell \leqslant K\eta} \bar{\boldsymbol{Z}}_\ell(\boldsymbol{S},\boldsymbol{Y}) = \sum_{\ell \leqslant K\eta} q_\ell = o_n(1)\,,$$

这意味着最小均方误差满足所需的界。取 $\varepsilon = c_q\eta/(2q)$ 即得结论。 □

定理的证明2.5 正向。令 $\alpha_q \equiv \alpha_q(H)$ 如（4.3）所示。引理 4.5 告诉我们，对于，“全有”不可能成立

$$p \geqslant \frac{1+o_n(1)}{n^{\alpha_q}}$$

对任意 $q \in (0,\ 1)$；由于我们假设全有或全无，这意味着“全无”成立。另一方面，利用非局域化假设（定义 4.3），引理4.6 告诉我们，对于，“全无”不可能成立

$$p \leqslant \frac{1-o_n(1)}{n^{\alpha_{q'}}}$$

当 $q' > 0$ 足够小时；同样，由于我们假设全有或全无，这意味着“全有”成立。如果 $q' \leqslant q$ 那么$\alpha_{q'} \leqslant \alpha_q$。因此，除非……，否则会导出矛盾

$$\alpha_q - \alpha_{q'} = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

对所有 $q,\ q' \in (0,\ 1)$，并且对所有 $q \in (0,\ 1)$，$p_{\mathrm{AoN}} = (1+o_n(1))/n^{\alpha_q}$。 □

4.2. **定理 2.5反向结论：近乎平衡意味着全有或全无。** 以下是在假设 (4.6 ） 2.11）下对引理的加强。

引理 4.7. 设 $H = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 按照定义4.3的含义是非局域化的。如果条件 (2.11)成立，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{MMSE}_n(p) = 0$$

对所有 $p \leqslant (1-\varepsilon)/n^{\alpha_q}$, 以及任意 $q \in (0、\ 1)$。

证明。 固定一个足够小的 $\delta > 0$。记 $K = |H|$，并令 J 为 H 的子图中，在所有边数至少为 $K(1-\delta/2)$ 的子图里达到最大密度的那个，并记为$L = |J|$。令 $\mathcal{J}$ 表示 J 在 K_n中的所有副本构成的集合。与引理 4.6的证明类似，只需证明以高概率，任何满足 $J' \in \mathcal{S}$ 的元素 $J' \subseteq \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{G}$ 与植入子图 $\boldsymbol{H}$的重叠至少为 $K(1-\delta)$。为此，只需证明

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{\ell \leqslant K(1-\delta)} \bar{\boldsymbol{Z}}_\ell(\boldsymbol{S},\boldsymbol{Y}) = \sum_{\ell \leqslant K(1-\delta)} q_\ell = o_n(1)\,, \tag{4.5}$$

其中，正如引理4.6的证明中所述，我们有

$$q_\ell \leqslant (v_H)^{O(v_H)} \frac{n^{v(J)-v_\ell(J,H)}}{(1/p)^{L-\ell}}\,.$$

然后，我们将该界分为两种情形：

(a) 对于$l \leqslant L\eta$，根据假设有 $v(J)/L = \alpha \equiv \alpha_{1-\delta/2}(H)$，而

$$\frac{v_\ell(J,H)}{\ell} \geqslant \alpha_0(H) \equiv \alpha_0 \geqslant \alpha_{q'} - \frac{c}{\log n} \overset{(2.11)}{=} \alpha_q - \frac{c+o_n(1)}{\log n}$$

其中，中间的不等式由非局域化假设（定义4.3）在足够小的 q' 时推出，而最后一个等式对任意 q' 均由（2.11）成立。因此，对于$l \leqslant L\eta$ 以及 $p \leqslant (1-\varepsilon)/n^{\alpha_q},$，有

$$q_\ell \leqslant (v_H)^{O(v_H)} e^{cL\eta} \left(\frac{n^\alpha}{1/p}\right)^{L-\ell} \leqslant \frac{(v_H)^{O(v_H)} e^{cL\eta}}{\exp(L[(1-\eta)\varepsilon + o_n(1)])}$$

通过取 $\eta = \varepsilon/(2c)$ 并对以下各项求和$l \leqslant L\eta$（使用稠密假设），可知所有此类4.5对（l）的贡献为 $o_n(1)$。

(b) 对于 $L\eta = L\varepsilon/(2c) \leqslant l \leqslant L(1-\delta/2),$，我们有

$$\frac{v_\ell(J)}{\ell} \geqslant \alpha_\eta(J) \equiv \alpha_\eta \overset{(2.11)}{=} \alpha_q + o\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

由此可得

$$q_\ell \leqslant (v_H)^{O(v_H)} \frac{n^{L\alpha-\ell\alpha_\eta}}{(1/p)^{L-\ell}} \leqslant e^{o(K)} \left(\frac{n^\alpha}{1/p}\right)^{L-\ell} \leqslant \frac{\exp(o(K))}{\exp(L\delta\varepsilon/2)},$$

利用了稠密假设。对 $L\eta \leqslant l \leqslant L(1-\delta/2)$ 求和可知，所有此类4.5对（l）的贡献为 $o_n(1)$。

结合上述各界即可证明（4.5），从而得证。 □

定理 *2.5* 的逆向证明。令 $\alpha = \alpha_q$ 对于任意固定的 $q \in (0,\ 1)$，并令 $\varepsilon > 0$ 为任意正常数。引理 4.7 告诉我们，对于 $p \leqslant (1-\varepsilon)n^{-\alpha}$，“全部”会发生。另一方面，引理 4.5 告诉我们，对于所有 $p \geqslant (1+\varepsilon)n^{-\alpha}$，“什么都没有”会发生。这就证明了该定理。 □

4.3. **稀疏强平衡图**。鉴于定理2.5的结果，自然会提出这样的问题：对于没有定义4.1中密度要求的一般图，是否也存在全有或全无现象？在本小节中，我们将证明，对于强平衡（见下文）且顶点和边数量足够少的图，全有或全无现象在线性尺度下成立，但对密度不作任何限制。我们尚未完全理解稀疏情形，因此将其留作未来研究中一个有趣的开放问题。

定义 4.8（强平衡）。我们称图 H 是强平衡，参数为$c > 0$，如果满足

$$\frac{|J|}{v(J)-c} \leqslant \frac{|H|}{v(H)-c} \tag{4.6}$$

对所有非空子图 $J \subseteq H$。也就是说，H_n 的子图必须严格比H_n稠密度低，差值由（4.6）给出。情形 $c = 1$ 对应于 [RV86]的定义。

定理 4.9（小型强平衡图在线性尺度下的全有或全无现象）。假设 $H = H_n$ 是强平衡的（定义*4.8*），参数为 $c > 0$，并满足 $v(H_n) \to \infty$，$|H_n| \to \infty$，以及

$$v(H_n) + |H_n| \leqslant \frac{c \log n}{3 \log\log n}.$$

那么，植入于 $G(n,p)$ 的 H_n 模型在 $p_{\mathrm{AoN}} = p_{1\mathrm{M}}(H)$ 处呈现全有或全无现象。

例 4.10 （小树和小环）。 容易验证，树和圈是参数为 $c = 1$ 的强平衡图； [RV86] 也提到了这一事实。定理4.9 表明，如果 H_n 是一棵树或一个环，且

$$v(H_n) \leqslant \frac{\log n}{6 \log\log n}, \tag{4.7}$$

那么，植入 H_n 于 $G(n$中的模型 $p)$ 在 $p_{\mathrm{AoN}} = p_{1\mathrm{M}}(H)$处呈现线性尺度下的全有或全无。参见例5.4，该例讨论了远大于（4.7）的环在指数尺度下的全有或全无。我们还注意到，定理4.9 不适用于含有 k个边且有 k 条额外边的环（例2.11），因为它不是强平衡的。

为证明定理4.9 做准备，我们引入一些新记号。对于子图$J \subseteq H$，沿用先前的记号（4.1），令 $M_{J,H}$ 表示 H中 J 的副本数。给定 K_n中 J 的一个副本 J_0，令 $M_{H|J}$ 表示将其扩展为 H的一个副本的方法数：我们可以将其改写为

$$\frac{M_{H|J}}{M_H} = \mathbf{P}(J_0 \subseteq \boldsymbol{H})$$

其中 $\boldsymbol{H} \sim \mathbf{P}$。另请注意，若 $\boldsymbol{J} \sim \mathbf{P}_J$ 表示 J 在 K_n中的一个均匀副本，则有

$$\frac{M_{H|J}}{M_H} = \mathbf{P}(J_0 \subseteq \boldsymbol{H}) = \mathbf{P}_J(\boldsymbol{J} \subseteq H_0) = \frac{M_{J,H}}{M_J}, \tag{4.8}$$

其中 H_0 表示 H 在 K_n中的一个固定副本。

定理的证明 的证明 4.9。 我们首先指出，关于 $v(H_n)$和 $e(H_n)$的条件蕴含

$$2\Big(v(H) + |H|\Big)\log v(H) - c\log n \leqslant \frac{2c\log n}{3[1 - o_n(1)]} - c\log n \leqslant -\frac{c\log n}{4}. \tag{4.9}$$

根据定理 3.4，只需验证条件（3.4）。对于 $q \in [0,\ 1]$，现在我们给出

$$F_q \equiv \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = |H|q)}{p_{1\mathrm{M}}(H)^{|H|q}} \leqslant \sum_{\substack{F \subseteq H,\\ |F| \geqslant |H|q}} \mathbf{1}\Big\{F \text{ vertex-induced}\Big\} \sum_{\substack{J \subseteq F,\\ |J| = |H|q}} \mathbf{1}\Big\{V(J) = V(F)\Big\} \frac{M_{H|J}}{(M_H)^{1-q}}.$$

要构造另一个带有 $H \cap H' = J$的 H 副本 $H' \subseteq K_n$，我们需要从 $n - v(H)$ 个可用顶点中选取 $v(H) - v(F)$ 个顶点，并从至多 $v(H)^2$条可能的边中选取 $|H|(1-q)$ 条边。这给出了一个粗略的上界

$$M_{H|J} \leqslant \binom{n - v(H)}{v(H) - v(F)} (v(H)^2)^{|H|(1-q)}.$$

接下来请注意，强平衡假设意味着

$$\frac{v(J)}{|J|} \geqslant \frac{v(H)}{H} + \frac{c(1-q)}{|J|},$$

因此 $v(J) \geqslant v_{|H|q}(H) \geqslant v(H)q + c(1-q)$。强平衡假设还意味着

$$|F| \leqslant \frac{|H|(v(F) - c)}{v(H) - c}.$$

如果再计入 F 和 J 的枚举，我们得到

$$F_q \leqslant \frac{(v(H)^2)^{|H|(1-q)}}{(M_H)^{1-q}} \sum_{w=v(H)q+c(1-q)}^{v(H)} \binom{v(H)}{w} \left(\frac{|H|(w-c)}{v(H)-c}\right)^{|H|\frac{w-c}{v(H)-c}-|H|q} \binom{n-v(H)}{v(H)-w},$$

其中，第一个二项式系数表示顶点诱导子图 F 的数量。化简该界可得

$$\begin{aligned} F_q &\leqslant \frac{v(H)^{2|H|(1-q)}}{(M_H)^{1-q}} \sum_{w=v(H)q+c(1-q)}^{v(H)} \Big[v(H)(n-v(H)\Big]^{v(H)-w} \left(\frac{|H|(w-c)}{v(H)-c}\right)^{|H|\frac{w-c}{v(H)-c}-|H|q} \\ &\equiv \frac{v(H)^{2|H|(1-q)}}{(M_H)^{1-q}} \sum_{w=v(H)q+c(1-q)}^{v(H)} \exp f_q(w)\,. \end{aligned}$$

我们声称 t f_q 随 w 递减，因此最后一个求和中的每一项都以上界

$$f_q\Big(v(H)q+c(1-q)\Big) = (v(H)-c)(1-q)\log\Big\{v(H)(n-v(H))\Big\}.$$

我们还有显然的不等式

$$\frac{1}{(M_H)^{1-q}} = 1\Big/\left(\binom{n}{v(H)}\Psi_H\right)^{1-q} \leqslant 1\Big/\binom{n}{v(H)}^{1-q} \leqslant \frac{1}{(n-v(H))^{v(H)(1-q)}}$$

结合上述界可得

$$F_q \leqslant v(H)\cdot v(H)^{2|H|(1-q)} \frac{[v(H)(n-v(H))]^{(v(H)-c)(1-q)}}{(n-v(H))^{v(H)(1-q)}} \leqslant \left(\frac{v(H)^{2(|H|+v(H))}}{(n-v(H))^c}\right)^{1-q}.$$

因此，由（4.9）可得 $F_q \leqslant 1 \leqslant \exp(o(H))$，从而得到条件（3.4）。剩下要验证的是，正如上文所述，f_q 实际上关于 w 是非增的。为此，我们对

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}f_q(w) &= -\log\Big[v(H)(n-v(H)\Big] + \frac{|H|}{v(H)-c}\log\left(\frac{|H|(w-c)}{v(H)-c}\right) + \frac{|H|}{v(H)-c} - \frac{|H|q}{w-c} \\ &\leqslant -\log\Big[2(n-2)\Big] + \frac{|H|\log|H|}{v(H)-c} + \frac{|H|(1-q)}{v(H)-c}, \end{aligned}$$

这里用到了 $v(H)\geqslant 2$（显然当 n 足够大时成立，因为我们假设了 $v(H_n)\to\infty$）。接着，由于 $v(H_n)\to\infty$、$|H_n|\to\infty$ 和 $|H|\leqslant v(H)^2$，我们还可以进一步得到

$$\frac{d}{dw}f_q(w) \leqslant -\log n + \frac{3|H|\log v(H)}{v(H)} \leqslant -\log n + \frac{|H|\log v(H)}{c} \leqslant 0,$$

最后一个不等式再次由（4.9）得出。证明至此完成。 □

5. 指数尺度下的全有或全无

回顾定义 $\psi_q(H)$ 中的广义期望阈值2.4，并定义

$$\lambda_q(H) \equiv \log\frac{1}{\psi_q(H)}. \tag{5.1}$$

接下来我们介绍如下内容：

定义5.1（一阶矩稳定）。 如果对所有 n 均一致成立，则称图序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 是一阶矩稳定 的

$$\lim_{q\uparrow 1}\lambda_q=\lambda_1\,,$$

对于 λ_q，如式（5.1）所示。非正式地说，这意味着，如果 $|J|=|H|(1-o(1))$，那么必有 $p_{1\mathsf{M}}(J)=p_{1\mathsf{M}}(H)^{1+o(1)}$。我们将看到，这等价于要求 $p_{1\mathsf{M}}(J)\leqslant p_{1\mathsf{M}}(H)^{1-o(1)}$；另一个方向自动成立。

定义 5.2（一阶矩平坦）。若图序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 是一阶矩平坦的，则称其为一阶矩平坦，若

$$\frac{\lambda_q(H_n)}{\lambda_{q'}(H_n)}=1+o_n(1)$$

对所有 $q,\ q'\in(0,\ 1)$。

定义5.1和5.2 中的条件应与稠密图情形的结果——定理2.5中出现的条件进行比较：非局域化（定义4.3）和近似平衡（条件（2.11））。作为一个具体例子，例2.3 和2.6 中讨论的带出边的团是非局域化的，但并非一阶矩稳定。

定理 5.3（指数尺度下的全有或全无）。 设 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 为一个图序列，满足 $|H_n|\to\infty$且 $p_{1\mathsf{M}}(H_n)$ 与 *1* 有界地分离。进一步假设 H 在定义 *5.1* 的意义下是一阶矩稳定的，并且 $p_{1\mathsf{M}}(H_n)\to 0$ 或 $v(H)\leqslant n^{o(1)}$之一成立。则，当且仅当 H 是一阶矩平坦的（定义 *5.2*）时，指数尺度下会出现全有或全无。在此情形下，$p_{\mathsf{AoN}}=p_{1\mathsf{M}}(H)$。

本节的主要目的是证明定理5.3，该定理刻画了如下图的指数尺度下全有或全无：其一阶矩阈值趋于零，或者其规模为次多项式。本节安排如下：

- 在 §5.1 中，我们回到定义 3.1 的广义设定，并证明：若先验分布**P** 满足某个“副本弱分离”（RWS）条件，则指数尺度下的全有或全无只能出现在一阶矩阈值处。• 在 §5.2 中，我们证明：若图序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 是一阶矩稳定的（定义 5.1），则**P** 作为 H 在 K_n 中的副本上的均匀测度，满足 RWS。• 在 §5.3 中，我们通过证明若植入子图模型在指数尺度下具有全有或全无，则该图序列必定是一阶矩平坦的，来证明定理 5.3 的正向。• 在 §5.4 中，我们通过证明若图序列是一阶矩平坦的，则相应的植入子图模型在指数尺度下具有全有或全无，来证明定理5.3 的逆向。

定理 5.3 超出了稠密情形的范围——例子 2.9、2.10、2.11见§2.3，以下内容也说明了这一点：

例 5.4（环）。 设 H 是一个具有 k 个顶点的环。若 $J\subseteq H$ 满足 $1<|J|=l<k$，则 J 必须由 p 条不相交路径组成，其中 $1\leqslant p\leqslant l$ 的长度为 l_1,。 。 。 , l_p，且其长度之和为 l。由此可知，$v(J)=l+p$。我们还注意到， J 的一个自同构由其在这些路径的

端点上的作用所确定，因此粗略地说， $|\mathrm{Aut}\ J| \leqslant (2p)^p$。由此可知

$$p_{1\mathsf{M}}(J) \overset{(2.5)}{=} \left(\frac{1}{M_J}\right)^{1/|J|} = \big(1+o(1)\big)\frac{|\mathrm{Aut}\,J|^{1/|J|}}{n^{v(J)/|J|}} \leqslant \frac{1+o(1)}{n}\left(\frac{2p}{n}\right)^{p/\ell} \leqslant \frac{1+o(1)}{p_{1\mathsf{M}}(H)}\,.$$

这表明 J 是一阶矩稳定（定义 5.1）且一阶矩平坦（定义 5.2）。由定理5.3 可知，模型 H_n 植入于 $G(n,\ p)$ 在 $p_{1\mathsf{M}}(H) = (1+o(1))/n$处呈现指数尺度下的全有或全无现象。可与例 4.10 （其仅限于较小的环，但在线性尺度下给出全有或全无现象）以及例2.11 （带出边的环）进行比较。

我们还给出一个即使在指数尺度下也不会出现全有或全无现象的例子：

例 5.5 （指数尺度下缺乏全有或全无现象）。 取 $1 \ll k_2 \leqslant k_1 \leqslant O(\log n)$，其中比值$k_2/k_1$ 是一个小常数 δ。令 $H = H_n$ 为 J_1的 J_2 不交并，其中每个 J_i 都是一个具有 k_i 个顶点的团。于是

$$1-\varepsilon \leqslant \frac{|J_1|}{|H|} \leqslant 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

对于一个较小的常数 $\varepsilon = (1+o(1))\delta^2$。由此可得

$$\lambda_{1-\varepsilon}(H) \leqslant \log\frac{1}{p_{1\mathsf{M}}(J_1)} = \frac{2}{k_1-1}\log n + o(1)$$

另一方面，对于完整图，我们有

$$\lambda_1(H) = \log\frac{1}{p_{1\mathsf{M}}(H)} = \frac{2(1+\Theta(\delta))}{k_1-1}\log n + o(1)\,,$$

因此 H 不是一阶矩平坦的（定义 5.2）。然而，它是一阶矩稳定的（定义 5.1）。由定理 5.3 可知， H_n 植入于 $G(n、\ p)$ 的模型在指数尺度下不具有全有或全无性质。事实上，对于 $p_{1\mathsf{M}}(J_2) < p < p_{1\mathsf{M}}(J_1)$，在指数尺度下可以恢复 J_1，但不能恢复 J_2。

5.1. **RWS 条件下的全有或全无阈值定位**。 本小节将证明，若**P** 满足“副本弱分离”条件（见下文定义 5.6 ），则在指数尺度下，它只能在一阶矩阈值 $p_{1\mathsf{M}}$ （式（ 3.3 ）处表现出全有或全无性质。

定义 5.6 （副本弱分离）。 我们称测度 **P** 满足副本弱分离（RWS），如果

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\log M}\log\left\{\mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{S}'| \geqslant (1-\delta)K\Big)M\right\} = 0\,, \tag{5.2}$$

其中 $\boldsymbol{S}$， $\boldsymbol{S}'$ 是从 **P** 中独立抽取的样本。

在 §5.2 中，我们证明，若 H 按照定义 5.1的意义是一阶矩稳定的，那么在 K_n 中，副本上的均匀测度满足定义 5.6中的 RWS 条件。下面的引理解释了这与之前在定理 3.7的证明中使用的条件（3.6）之间的关系：

Lem引理 5.7。 如果先验分布满足 (3.6) 且 $\log K \ll \log M$，那么它也满足 (5.2)。

证明。 回忆一下，根据（3.3）可知 $p_{1\mathrm{M}} = M^{-1/K}$。由此可得

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|S \cap S'| \geqslant (1-\delta)K\Big)M = \sum_{\ell=K(1-\delta)}^{K} \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S \cap S'| = \ell)}{(p_{1\mathrm{M}})^{\ell}} M^{1-\ell/K}$$

$$\leqslant M^{\delta} \sum_{\ell=K(1-\delta)}^{K} \frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|S \cap S'| = \ell)}{(p_{1\mathrm{M}})^{\ell}} \overset{(3.6)}{\leqslant} M^{\delta} K\delta \exp(o(\log M)) .$$

该结论由回顾假设 $\log K \ll \log M$ 并令 $\delta \downarrow 0$ 得出。 □

定理 5.8 （指数尺度上的全有或全无阈值位置）。 假设 $\mathbf{P}$ 满足 *RWS*，具体而言满足定义 （5.2）中的条件 5.6。如果相应的植入模型在某个临界值 p_{AoN}处于指数尺度上的全有或全无状态，则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log p_{\mathrm{AoN}}}{\log p_{1\mathrm{M}}} = 1,$$

其中 $p_{1\mathrm{M}}$ 是一阶矩阈值，定义见 （3.3）。换言之， $p_{\mathrm{AoN}} = (p_{1\mathrm{M}})^{1+o_N(1)}$。

为证明做准备,令 m_i 表示在给定 $\boldsymbol{Y} = S \cup \boldsymbol{V}$的情况下， $i \in S$的后验概率:

$$m_i \equiv m_i(\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\theta_i \,|\, \boldsymbol{Y}) = \mathbb{P}(i \in S \,|\, \boldsymbol{Y}) = \frac{\boldsymbol{Z}_{\ni i}(\boldsymbol{Y})}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}, \tag{5.3}$$

其中， $\boldsymbol{Z}_{\ni i}(\boldsymbol{Y})$ 表示包含 $i \in S'$的子集 $S' \in \boldsymbol{S}$ 的数量。注意，如果 $i \notin \boldsymbol{Y}$，那么 $\boldsymbol{Z}_{\ni i}(\boldsymbol{Y}) = 0$, 因此 $m_i = 0$。另请注意,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = K \tag{5.4}$$

以概率 1 成立，因为先验分布在大小为 K的集合上均匀分布。下面的引理给出了 $D(p)$的导数关于模型的最小均方误差的一个界:

引理 5.9。 设 $D(p) \equiv D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{P}_p \,|\mathrm{Q}_p)$ 为在植入模型和零模型下 $\boldsymbol{Y}$的分布之间的 *Kullback–Leibler* 散度。那么

$$\frac{d}{dx} D(e^{-x}) \leqslant K - \mathsf{MMSE} .$$

证明。 简记$\mathrm{P} = \mathrm{P}_p$ 以及$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_p$。回顾（3.13）， 可得

$$D(p) = D_{\mathrm{KL}}(\mathbb{P} \,|\, \mathbb{Q}) = \sum_{\boldsymbol{Y}} \mathbb{P}(\boldsymbol{Y}) \log \frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{Y})}{\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y})} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}{Mp^K} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log \frac{\boldsymbol{Z}(S \cup \boldsymbol{V})}{Mp^K}, \tag{5.5}$$

其中 $S \sim \mathbf{P}$且 $\boldsymbol{V} \sim \mathrm{Ber}(p)^{\otimes N}$。接下来注意，对于任意函数 $f(\boldsymbol{V})$，我们有

$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} f(\boldsymbol{V}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{V}) \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{w_i}{p} - \frac{1-w_i}{1-p}\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(f(\boldsymbol{V} \cup \{i\}) - f(\boldsymbol{V} \backslash \{i\})\Big)$$

$$= \frac{1}{p}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{V}) \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1-w_i}{1-p}\right)\right] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(f(\boldsymbol{V}) - f(\boldsymbol{V} \backslash \{i\})\Big) . \tag{5.6}$$

在上述内容中， w_i指示变量表示 $i \in \boldsymbol{V}$。现在考虑 $f(\boldsymbol{V}) = \log \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V})$。如果 $i \in \boldsymbol{S}$, 那么 $f(\boldsymbol{V})$ 不依赖于 w_i。如果 $i \notin \boldsymbol{S}$, 那么 $f(\boldsymbol{V})$ 依赖于 w_i, 并且我们有

$$f(\boldsymbol{V}) - f(\boldsymbol{V}\backslash\{i\}) = \log \frac{\boldsymbol{Z}_{\ni i}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}) + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}\backslash\{i\})}{\log \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}\backslash\{i\})} = \log \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y})}{\log \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}\backslash\{i\})} \overset{(5.3)}{=} \frac{1}{1 - m_i(\boldsymbol{Y})}.$$

将其代入（5.6）得

$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{i \notin \boldsymbol{S}} \log \frac{1}{1 - m_i(\boldsymbol{Y})}.$$

然后，利用对所有 $m \in [-1, 1]$, $m + (1-m)\log(1-m) \leqslant m^2$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} D(p) &= \frac{1}{p}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{i \notin \boldsymbol{S}} \log \frac{1}{1 - m_i(\boldsymbol{Y})} - \frac{K}{p} \overset{(5.4)}{=} \frac{1}{p}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^{N} \left\{ (1 - m_i) \log \frac{1}{1 - m_i} - m_i \right\} \\ &\geqslant -\frac{1}{p}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^{N} (m_i)^2 \overset{(5.4)}{=} \frac{1}{p}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^{N} m_i(1 - m_i) - K \right) = \frac{1}{p}(\mathrm{MMSE}_N(p) - K). \end{aligned} \tag{5.7}$$

通过作变量替换 $p = e^{-x}$, 即可得出该结论。 □

推论 5.10。 若植入模型 P_p 在阈值p_{AoN}处具有指数尺度上的全有或全无性质，则必有 $p_{\mathsf{AoN}} \geqslant (p_{1\mathsf{M}})^{1+o_N(1)}$ 对于 $p_{1\mathsf{M}}$, 如 (3.3)所示。

证明。 取 $\delta > 0$ 并令 $p_0 = (p_{\mathsf{AoN}})^{1-\delta} \equiv \exp(-x_0)$。由于最小均方误差随 p单调不减，因此有 最小均方误差$/K \to 1$ 对所有 $[p_0$一致成立, $1]$。另请注意, $D(1) = D_{\mathrm{KL}}(\mathrm{P}_1 | \mathrm{Q}_1) = 1$, 因此引理 5.9 给出

$$D(p) = D(e^{-x}) = \int_0^x \frac{d}{dt} D(e^{-t})\, dt \leqslant o_N(1) K x = o_N(1) K \log \frac{1}{p},$$

一致地对 $p \in [p_0, 1]$。另一方面，由于 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y}) \geqslant 1$ 始终成立，由 (5.5) 可得

$$D(p) \geqslant \log \frac{1}{M p^K} \overset{(3.3)}{=} K \left\{ \log \frac{1}{p} - \log \frac{1}{p_{1\mathsf{M}}} \right\}$$

对所有 $p \in [0, 1]$ 均成立。结合上述界可得

$$\log \frac{1}{p_{1\mathsf{M}}} \geqslant (1 - o_N(1)) \log \frac{1}{p_0} = (1 - o_N(1))(1 - \delta) \log \frac{1}{p_{\mathsf{AoN}}},$$

令 $\delta \downarrow 0$ 趋于极限，即可得出该结论。 □

下一个引理指出，在 RWS 条件下，于“all”情形中，P_p 与 Q_p 之间的互信息必须接近其最大值 $\log M$:

引理 5.11. 设 $I(p) \equiv I(\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{Y}) = H(\boldsymbol{S}) - H(\boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{Y})$ 表示在植入模型 $\boldsymbol{S}$和 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{V}$ 下的互信息 P_p。假设先验分布 $\mathbf{P}$ 满足 *RWS* 条件（定义 5.6）。如果模型处于*“all”*区域，即 最小均方误差 $/K = o_N(1)$, 那么

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I(p)}{\log M} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\log H(\boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{Y})}{\log M} = 1.$$

证明。 由（3.12）和（3.13）可得，当$\mathbb{P} = \mathbb{P}^p$时，有

$$I(p) = \sum_{S,Y} \mathbb{P}(S,Y) \log \frac{\mathbb{P}(S,Y)}{\mathbf{P}(S)\mathbb{P}(Y)} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log \frac{M}{Z(Y)}, \tag{5.8}$$

注意，在植入模型下，我们以概率 1 有 $1 \leqslant Z(Y) \leqslant M$。于是，引理的断言可改写为

$$1 - \frac{I(p)}{\log M} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log Z(Y)}{\log M} = o_N(1).$$

然后我们将 $Z(Y) = Z_\circ(S、\ Y) + Z_\bullet(S、\ Y)$分解，其中

$$Z_\circ(S,Y) = \sum_{S' \in \mathcal{S}} \mathbf{1}\Big\{S' \subseteq Y, |S \cap S'| < K(1-\delta)\Big\},$$

而 $Z_\bullet(S、\ Y)$是余项。“all”假设意味着，对于任意固定的 $\delta > 0$，我们有

$$\frac{Z_\circ(S,Y)}{Z(S,Y)} \to 0$$

当 $N \to \infty$时依概率成立。接着我们粗略地界定

$$1 \leqslant Z_\bullet(S,Y) \leqslant \sum_{S' \in \mathcal{S}} \mathbf{1}\Big\{|S \cap S'| \geqslant K(1-\delta)\Big\} = M\mathbf{P}\left(|S \cap S'| \geqslant (1-\delta)K \,\middle|\, S\right).$$

结合 RWS假设（5.2）可得

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \log Z_\bullet(S,Y)}{\log M} \leqslant \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}} Z_\bullet(S,Y)}{\log M} \overset{(5.2)}{=} 0.$$

结合上述各界可得 $Z_\circ(S,\ Y) \ll Z_\circ(S,\ Y) \leqslant M^{o_N(1)}$，因此我们以高概率在 $\mathbb{P}$ 下有 $Z(Y) \leqslant M^{o_N(1)}$。 □

推论 5.12。 假设先验分布 $\mathbf{P}$ 满足 *RWS* 条件（定义5.6）。若植入模型 $\mathbb{P}^p$ 在阈值 p_{AoN}处具有指数尺度上的全有或全无性质，则必有 $p_{\mathrm{AoN}} \leqslant (p_{\mathrm{1M}})^{1-o_N(1)}$ 对于 p_{1M} 如 (3.3)所示。

证明。 由于 $Z(Y) \geqslant 1$ 总是成立，由（5.8）可知，对所有 $p \in [0,\ 1]$ 都有

$$I(p) \geqslant \log \frac{1}{p^K}.$$

取 $\delta > 0$ 并令 $p_0 = (p_{\mathrm{AoN}})^{1+\delta}$：这属于“全有”区域，因此结合引理 5.11可得

$$(1 - o_N(1)) \log M = I(p_0) \geqslant \log \frac{1}{(p_0)^K} = K(1+\delta) \log \frac{1}{p_{\mathrm{AoN}}}.$$

两边除以 K 得

$$(1 - o_N(1)) \log \frac{1}{p_{\mathrm{1M}}} \overset{(3.3)}{=} (1 - o_N(1)) \log M^{1/K} \geqslant (1+\delta) \log \frac{1}{p_{\mathrm{AoN}}},$$

令 $\delta \downarrow 0$，结论即得。 □

定理证明*5.8*。 结合推论5.10 和5.12即可得证。 □

5.2. **一阶矩稳定图满足 RWS。** 回顾定义 5.1 ，图序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ 称为 一阶矩稳定 ，如果对所有 $J\subseteq H$ 满足 $|J|\geqslant |H|(1-o(1))$ 的情形，都有$p_{1\mathsf{M}}(J)=p_{1\mathsf{M}}(H)^{1+o(1)}$。另回顾记号 $M_{J,\,H}$ 和 $M_{H|J}$，它们见（4.8）。本小节给出一阶矩稳定性的等价刻画，并证明它蕴含 RWS。

引理 5.13 （一阶矩稳定性的另一种刻画）。 若 $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 与 *1* 保持正距离，则 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 按照定义 *5.1* 的意义是一阶矩稳定的，当且仅当 $M_{H|J}\leqslant (M_H)^{o_\delta(1)}$ 对 $J\subseteq H$ 及 $|J|\geqslant |H|(1-\delta)$一致成立。

证明。 回顾式（3.3）， J 的一阶矩阈值为

$$p_{1\mathsf{M}}(J)=\frac{1}{(M_J)^{1/|J|}}.$$

特别地，注意到 $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 与 **1** 保持正距离，当且仅当 $|H|=O(\log M)$。接下来，对于所有满足 $|J|\geqslant |H|(1-\delta)$ 的子图 $J\subseteq H$，以下结论一致成立：

$$1\leqslant M_{J,H}\leqslant \binom{|H|}{|J|}\leqslant \exp(|H|o_\delta(1))\leqslant (M_H)^{o_\delta(1)},$$

这里用到了假设 $|H|=O(\log M_H)$。现在回顾式（4.8）：

$$\frac{p_{1\mathsf{M}}(J)^{|J|}}{p_{1\mathsf{M}}(H)^{|H|}}=\frac{M_H}{M_J}\overset{(4.8)}{=}\frac{M_{H|J}}{M_{J,H}}=\frac{M_{H|J}}{(M_H)^{o_\delta(1)}}\geqslant \frac{1}{(M_H)^{o_\delta(1)}}.$$

由此可知，对于满足 $|J|\geqslant |H|(1-o(1))$ 的 $J\subseteq H$， $p_{1\mathsf{M}}(J)\geqslant p_{1\mathsf{M}}(H)^{1+o(1)}$ 总是成立；而 $p_{1\mathsf{M}}(J)\leqslant p_{1\mathsf{M}}(H)^{1-o(1)}$ （因此也具有一阶矩稳定性）当且仅当 $M_{H|J}\leqslant (M_H)^{o_\delta(1)}$。□

推论 5.14 （一阶矩稳定性蕴含 RWS）。 设 **P** 是所有H_n 在 K_n中的副本上的均匀先验分布。若 $p_{1\mathsf{M}}(H)$ 与 *1* 保持正距离，且 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 按照定义 *5.1*的意义是一阶矩稳定的，那么**P** 按照定义 *5.6*的意义满足 *RWS*。

证明。 我们可以给出如下界

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|\boldsymbol{H}\cap \boldsymbol{H}'|\geqslant (1-\delta)K\Big)M\leqslant \binom{|H|}{|H|(1-\delta)}\sup\Big\{M_{H|J}: J\subseteq H, |J|\geqslant |H|(1-\delta)\Big\},$$

因此，应用引理5.13 并令 $\delta\downarrow 0$，即可得到所述结论。 □

因此，推论 5.14 告诉我们，定理5.8 适用于一阶矩稳定图。

5.3. **定理 5.3 正向：全有或全无蕴含一阶矩平坦。** 现在我们转向定理5.3的证明。该结果适用于以下图序列类：所有矩阈值趋于零的图，或包含子多项式数量顶点的图。为此，我们引入以下有用的技术条件：

$$\min\Big\{|H|, v(H)\log v(H)\Big\}=o(\log M_H) \tag{5.9}$$

下一个引理说明，(5.9) 恰好在上述情况下成立：

引理 5.15。 我们有以下等价关系：

(a) $p_{1\mathsf{M}}(H)=o(1)$ 当且仅当 $|H|\ll$ 对数 M_H;

(b) $v(H) \leqslant n^{o(1)}$ 当且仅当 $v(H)$ 对数 $v(H) \ll$ 对数 M_H。

如果上述任一条件成立，则 H 满足 (5.9)。

证明。 第一个断言 (a) 由 (2.5) 立即得出。对于第二个断言 (b)，注意到 (4.2) 中的上界表明 $\log M_H \leqslant v(H) \log n$，因此 $v(H) \log v(H) = o(\log M_H)$ 意味着 $v(H) \leqslant n^{o(1)}$。反过来，若 $v(H) \leqslant n^{o(1)}$，则结合 (4.2) 中的下界可得

$$\log M_H \gtrsim v(H) \log \frac{n}{v(H)} \gg v(H) \log v(H) .$$

这就证明了 (b)。 □

回顾一下，我们假设 $p_{1\mathrm{M}}(H)$ 与 1 保持正距离，等价地 $|H| = O(\log M_H)$。因此，引理 5.15 的情形 (b) 包含稠密图（定义 4.1），因为对于此类图，我们有

$$\frac{v(H) \log v(H)}{\log M_H} \ll \frac{|H|}{\log M_H} \leqslant O(1) .$$

然而，如上所述，定理 5.3 的适用范围超出了稠密图。

定理*5.3* 的正向。 我们用反证法。假设全有或全无发生在指数尺度上，但该图并非一阶矩平坦。这意味着对某个 $0 < \delta < q < 1$，必定存在一个子图 $J \subseteq H$ 满足 $|J| \geqslant |H|\delta$ 且

$$\frac{1}{(\exp(\lambda_q))^{1-\delta}} \leqslant p_{1\mathrm{M}}(J)^{1+\delta} .$$

令 $0 < \varepsilon \ll \delta$。由于 H 是一阶矩稳定的，推论5.14 表明，定义在 $\mathbf{P}$ 上、以 H 在 K_n 中的副本为对象的均匀测度满足 RWS（定义 5.6）。由定理5.8 （事实上，由推论5.12）可得 $p_{\mathrm{AoN}} \leqslant (p_{1\mathrm{M}}(H))^{1-o(1)}$。此外，一阶矩稳定假设给出

$$\lim_{q \uparrow 1} \lambda_q = \lambda_1 = \log \frac{1}{p_{1\mathrm{M}}(H)} = \frac{\log M_H}{|H|} , \tag{5.10}$$

因此，当 q 充分接近 1 时，我们也有

$$p_{\mathrm{AoN}} \leqslant \frac{1}{(\exp(\lambda_q))^{1-\varepsilon}} .$$

因此，当 q 接近 1 时，[1]我们可以取 p 使其满足

$$p_{\mathrm{AoN}} \leqslant \frac{1}{(\exp(\lambda_q))^{1-\varepsilon}} \leqslant p \leqslant \frac{1}{(\exp(\lambda_q))^{1-\delta}} \leqslant p_{1\mathrm{M}}(J)^{1+\delta} . \tag{5.11}$$

现在回想一下， $\boldsymbol{H}$ 表示 H的植入副本。由于 p 处于“nothing”区域，以高概率，观测图 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{G}$ 包含另一个 H 的副本 H'，它与植入副本 $\boldsymbol{H}$的重叠可以忽略不计，也就是说

$$\frac{|\boldsymbol{H} \cap H'|}{|\boldsymbol{H}'|} = o(1) .$$

[1]事实上，鉴于（5.10），我们可以取 $q = 1$。不过，在此论证中，我们使用 $q < 1$ 来突出显示需要用到一阶矩稳定性假设的地方。

由此可知，在零模型 $\boldsymbol{G} \sim G(n下，\ p)$ 以高概率包含一个 近似副本，它是 H 的一个子图，含有 $v(H)$ 个顶点，并且只需添加至多 H 条边，即可将其变为 $o(|H|)$ 的一个副本。因此，$\boldsymbol{G}$ 也以高概率包含图 J （5.11）的一个近似副本，因为 $|J| \geqslant |H|\delta$。

令 $\boldsymbol{Z}_\eta = \boldsymbol{Z}_{J,\eta}(\boldsymbol{Y})$ 统计包含在 $\boldsymbol{Y}$ 中的 η-近似 $J' \approx J$ 副本总数——也就是说，统计由 $v(J)$ 个顶点构成、至多添加 $\eta|J|$ 条边便可成为 J 副本的子图。前面的论证表明，在零模型 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^p$ 下， $\boldsymbol{Z}_\eta \geqslant 1$ 以高概率成立。我们将通过证明 $\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{Z}_\eta < 1$来导出矛盾。为此，注意到

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{Z}_\eta = \sum_{J' \approx J} M_{J'} p^{|J'|} \leqslant \sum_{J' \approx J} M_{J'} p^{|J|(1-\eta)} .$$

数量为 $J' \approx J$ 为 $\exp(|J|o_\eta(1))$。另一方面，对于任意满足 $|J'| \geqslant |J|(1-\eta$ 的 $J' \subseteq J$ ），

$$M_{J'} = \frac{M_J M_{J',J}}{M_{J|J'}} \leqslant M_J M_{J',J} \leqslant M_J \exp(|J|o_\eta(1)) .$$

（这与引理 5.13 的简单方向采用相同的推理。）由式（5.11）可得

$$M_J = \frac{1}{(p_{1\mathrm{M}}(J))^{|J|}} \leqslant \left(\frac{1}{p^{|J|}}\right)^{1/(1+\delta)} \leqslant \frac{1}{p^{|J|(1-2\delta/3)}} .$$

合并这些界可得

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{Z}_\eta \leqslant \exp(|J|o_\eta(1)) \frac{p^{|J|(1-\eta)}}{p^{|J|(1-2\delta/3)}} \leqslant \exp(|H|o_\eta(1)) p^{|J|\delta/2} ,$$

其中，最后一个不等式通过取 $\eta \ll \delta$得到。再次回顾式（5.11），现在可得

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{Z}_\eta \leqslant \frac{\exp(o_\eta(1)\log M_H)}{(\exp(\lambda_q))^{|J|\delta(1-\delta)/2}} .$$

最后，回顾式（5.10），当 q 充分接近 1 时，我们有 $|H|\lambda_q \gtrsim \log M_H$，因此可以得出上述界为 $o_N(1)$。□

5.4. 定理 5.3反向：一阶矩平坦蕴含全有或全无。

定理*5.3* 反向的证明。 由于我们假设 $|H_n| \to \infty$ 且 $p_{1\mathrm{M}}(H_n)$ 与 1 相距不为零，因此 $\log |H| \ll |H| \leqslant O(\log M_H)$，所以可以应用定理 3.7。因此，只需验证增长条件（3.6），即

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant\ell\leqslant|H|} \frac{1}{\log M_H} \log\left(\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = \ell)}{p_{1\mathrm{M}}(H)^\ell}\right) \leqslant 0 , \tag{5.12}$$

其中 G_1 和 G_2 是从以下分布独立同分布抽取的样本：$\mathbf{P}$，即 G 在 K_n中所有副本上的均匀测度。现在注意，对于$l \ll |H|$，界（5.12）显然成立，因为在这种情况下

$$\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = \ell)}{p_{1\mathrm{M}}(H)^\ell} \leqslant \frac{1}{p_{1\mathrm{M}}(H)^\ell} = (M_H)^{\ell/|H|} \leqslant (M_H)^{o(1)} .$$

因此，只需对情形 $\delta|H| \leqslant l \leqslant |H|$ 给出界。令 H_0 为 K_n中 H 的任意一个固定副本，并注意到

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\Big(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = \ell\Big) \leqslant \sum_{J_0 \in I_\ell(H_0)} \mathbf{P}(H_0 \cap \boldsymbol{H} = J_0)$$

其中 $I_\ell(H_0)$ 是所有满足 $|J_0| = l$ 的子图 $J_0 \subseteq H_0$ 的集合，这些子图可由 H_0 与另一份 H 的副本取交集得到。接下来我们给出界

$$\mathbf{P}(H_0 \cap \boldsymbol{H} = J_0) \leqslant \mathbf{P}(J_0 \subseteq \boldsymbol{H}) = \frac{M_{H|J}}{M_H} = \frac{M_{J,H}}{M_J}.$$

根据一阶矩平坦条件（定义5.2），再结合一阶矩稳定假设,

$$\frac{\log M_J}{|H|} \geqslant (1 - o(1))\frac{\log M_H}{H},$$

因此我们可以给出界

$$\frac{1}{M_J} \leqslant \left(\frac{1}{M_H}\right)^{(1-o(1))\ell/|H|} \leqslant (M_H)^{o(1)} p_{\mathrm{1M}}(H)^{\ell}.$$

结合这些界并重新整理可得

$$\frac{\mathbf{P}^{\otimes 2}(|\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}'| = \ell)}{p_{\mathrm{1M}}(H)^{\ell}} \leqslant (M_H)^{o(1)} \sum_{J_0 \in I_\ell(H_0)} M_{J,H} \leqslant (M_H)^{o(1)} |I_\ell(H)|^2$$

为完成证明，我们现在断言

$$\log |I_\ell(H)| \leqslant O\Big(\min\Big\{e(H), v(H)\log v(H)\Big\}.\Big).$$

左侧不超过 $O(e(H))$ 显然。对于不等式的另一部分，回想一下， $I_\ell(H)$ 中的图必须表示为 H的两个副本的（顶点诱导）交集。因此，选择 H （$\exp(O(v(H)))$ 种选择）的子图同构类、所用的顶点（$\exp(O(v(H)))$ 种选择），以及将图嵌入这些顶点的方式（$\exp(O(v(H)) \log v(H)))$种选择），即可得到所需结果。根据假设（5.9），我们有

$$\frac{\log I_\ell(H)}{\log M_H} = o(1)$$

对所有$l \geqslant \delta|H|$均成立。证明至此完成。 □

6. 结论

在这项工作中，我们考虑了将一般子图 $H = H_n$ 植入 $G(n$ 中的模型 $p)$。我们证明，在对 H作出各种假设的条件下，植入模型中的全有或全无现象，可以通过零模型中 H 的“广义期望阈值”来刻画$G(n, p)$。（精确表述见定理 2.5 和 5.3 。）一个自然的问题是，能否为所有植入子图 H都得到全有或全无刻画？在更一般的背景下，我们的结果以及第 2.4 节所述的直觉表明，只需研究零模型中“解空间”的结构性质，就可能刻画全有或全无现象（例如，随机约束满足问题的术语中不存在“凝聚相” [KMRT+07]）。进一步探究这种联系将会很有意思。

最后，如上所述，布尔傅里叶分析中的尖锐阈值长期以来被猜想与计算困难性有关，参见例如 [KS06]。这种联系的一个典型例子是，“低复杂度”的布尔电路不会表现出尖锐阈值行为 [KS06，§6]。与此同时，在推断方面，过去十年间大量研究致力于探讨“计算-统计”差距是否存在：在这些区间内，推断任务在信息论上是可行的，但高效算法似乎难以处理。有趣的是，经验观察发现，在存在计算-统计差距的模型中，往往会出现全有或全无现象（这是尖锐阈值在推断领域的对应现象），只有少数令人费解的例外。例如，我们看到植入团模型中会出现全有或全无现象（推论 3.5），而植入匹配问题中则不会出现（例 2.9）。相应地，有大量证据表明植入团问题存在计算-统计差距（例如，[BHK+19，FGR+17，GZ19]），而植入匹配问题则不存在这种差距（最大匹配可在多项式时间内计算，并且在达到信息论阈值之前即可实现非平凡恢复 [MMX21，DWXY21]）。这促使我们提出以下问题：

全有或全无是否构成多项式时间方法某个子类可证明的障碍？

我们认为，这是一个自然且引人入胜的未来研究问题。

致谢

我们感谢以下资助：Simons-NSF资助项目 DMS-2031883（E.M.、Y.S.、N.S. 和 I.Z.）、范内瓦·布什教员奖学金 ONR-N00014-20-1-2826（E.M.、Y.S. 和 I.Z.）、Simons研究员奖 622132（E.M.）、斯隆研究奖学金（J.N.W.）、NSF CAREER资助项目 DMS-1940092（N.S.），以及麻省理工学院 Solomon Buchsbaum研究基金（N.S.）。

参考文献

[ACO08] D. Achlioptas 和 A. Coja-Oghlan。相变带来的算法障碍。载于*2008*年第*49*届*IEEE*计算机科学基础年会，第793–802页。IEEE，2008年。[ACV14] E. Arias-Castro 和 N. Verzelen。稠密随机网络中的社群检测。《统计学年刊》，42(3):940–969，2014年。[ALWZ21] R. Alweiss、S. Lovett、K. Wu 和 J. Zhang。改进的向日葵引理界。《数学年刊》，194(3):795–815，2021年。[BCW21] T. Bell、S. Chueluecha 和 L. Warnke。关于向日葵的注记。《离散数学》，344(7):112367，2021年。[BDT+20] V. Bagaria、J. Ding、D. Tse、Y. Wu 和 J. Xu。通过线性规划恢复隐藏哈密顿圈。《运筹学》，68(1):53–70，2020年。[BHK+19] B. Barak、S. Hopkins、J. Kelner、P. K. Kothari、A. Moitra 和 A. Potechin。植入团问题近乎紧致的平方和下界。《*SIAM*计算期刊》，48(2):687–735，2019年。[BKM+19] J. Barbier、F. Krzakała、N. Macris、L. Miolane 和 L. Zdeborová。高维广义线性模型中的最优误差与相变。《美国国家科学院院刊》，116(12):5451–5460，2019年。[Bol81] B. Bollobás。小子图的阈值函数。《剑桥哲学学会数学学报》，90(2):197–206，1981年。[CKK+10] M. Chertkov、L. Kroc、F. Krzakala、M. Vergassola 和 L. Zdeborová。通过在图像之间传递消息进行粒子追踪实验中的推断。《美国国家科学院院刊》，107(17):7663–7668，2010年。[COGHK+22] A. Coja-Oghlan、O. Gebhard、M. Hahn-Klimroth、A. S. Wein 和 I. Zadik。群组测试中的统计与计算相变。载于学习理论会议，第4764–4781页。PMLR，2022年。

[DWXY21] J. Ding、Y. Wu、J. Xu 和 D. Yang。植入匹配问题：尖锐阈值与无限阶相变，2021年。[ER60] P. Erd˝os 和 A. R´enyi。随机图的演化。Magyar Tud. Akad. Mat. Kutat´o Int. K¨ozl.，5:17–61，1960年。[FGR+17] V. Feldman、E. Grigorescu、L. Reyzin、S. S. Vempala 和 Y. Xiao。统计学算法与检测植入团的下界。《ACM期刊》（JACM），64(2):1–37，2017年。[FKNP21] K. Frankston、J. Kahn、B. Narayanan 和 J. Park。阈值与分数期望阈值。《数学年刊》（第2辑），194(2):475–495，2021年。[Fri98] E. Friedgut。具有低平均敏感度的布尔函数仅依赖于少数坐标。《组合数学》，18(1):27–35，1998年。[Fri99] E. Friedgut。图性质的尖锐阈值及 *k*-SAT问题。《美国数学会期刊》，12(4):1017–1054，1999年。附录由 Jean Bourgain 撰写。[GWSV11] D. Guo、Y. Wu、S. S. Shitz 和 S. Verd´u。高斯噪声中的估计：最小均方误差的性质。《IEEE信息论汇刊》，57(4):2371–2385，2011年。[GZ19] D. Gamarnik 和 I. Zadik。植入团问题的景观：稠密子图与重叠间隙性质，2019年。[GZ22] D. Gamarnik 和 I. Zadik。稀疏高维线性回归：平方误差估计与相变。《统计学年刊》，50(2):880–903，2022年。[Hat12] H. Hatami。具有小总影响的布尔函数的结构定理。《数学年刊》（第2辑），176(1):509–533，2012年。[Hu21] L. Hu。通过两条链进行熵估计：简化向日葵引理的证明。在线文章，https://theorydish.blog/2021/05/19/entropy-estimation-via-two-chains-streamlining-the-proof-of-the-sunflower-lemma/，2021年。[Hul22] W. Huleihel。随机图中隐藏结构的推断。《IEEE网络信号与信息处理汇刊》，8:855–867，2022年。[Jer92] M. Jerrum。大团避开Metropolis过程。《随机结构与算法》，3(4):347–359，1992年。[KK07] J. Kahn 和 G. Kalai。阈值与期望阈值。《组合学、概率与计算》，16(3):495–502，2007年。[KKL88] J. Kahn、G. Kalai 和 N. Linial。变量对布尔函数的影响。载于第29届计算机科学基础年会论文集，第68–80页，1988年。[KKM+16] S. Kudekar、S. Kumar、M. Mondelli、H. D. Pfister、E. S¸as¸o˘glu 和 R. Urbanke。里德-穆勒码在擦除信道上达到信道容量。载于第48届ACM计算理论研讨会论文集，第658–669页，2016年。[KMRT+07] F. Krzakała、A. Montanari、F. Ricci-Tersenghi、G. Semerjian 和 L. Zdeborov´a。随机约束满足问题的吉布斯态与解集。《美国国家科学院院刊》，104(25):10318–10323，2007年。[Kor76] A. D. Kor˘sunov。P. Erd˝os 和 A. R´enyi 关于无向图中哈密顿圈问题的解答。《苏联科学院报告》，228(3):529–532，1976年。[KS06] G. Kalai 和 S. Safra。来自数学、计算机科学与经济学的视角。计算复杂性与统计物理，第25页，2006年。[LMB22] C. Luneau、N. Macris 和 J. Barbier。学习稀疏规则的信息论极限。《统计力学：理论与实验》，2022(4):044001，2022年。[MMX21] M. Moharrami、C. Moore 和 J. Xu。植入匹配问题：相变与精确结果。《应用概率年刊》，31(6):2663–2720，2021年。[MNWSZ22a] E. Mossel、J. Niles-Weed、N. Sun 和 I. Zadik。关于第二个 Kahn–Kalai 猜想。arXiv预印本 arXiv:2209.03326，2022年。[MNWSZ22b] E. Mossel、J. Niles-Weed、N. Sun 和 I. Zadik。扩散引理的二阶矩证明。arXiv预印本 arXiv:2209.11347，2022年。

[MR+20] N. Macris、C. Rush 等。稀疏尖峰矩阵估计中的统计与计算全有或全无相变。《神经信息处理系统进展》，33:14915–14926，2020年。[MST19] L. Massouli´e、L. Stephan 和 D. Towsley。在图中植入树，并将其找回。载于《学习理论会议》，第 2341–2371 页。PMLR，2019年。[Nis01] H. Nishimori。《自旋玻璃的统计物理与信息处理：引言》。牛津大学出版社，2001年。[NWZ20] J. Niles-Weed 和 I. Zadik。稀疏张量主成分分析中的全有或全无现象。载于 H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M. F. Balcan 和 H. Lin（编），《神经信息处理系统进展》，第 33 卷，第 17674–17684 页。Curran Associates, Inc.，2020年。[NWZ21] J. Niles-Weed 和 I. Zadik。“全”为“无”：无噪离散信道的尖锐相变。载于《学习理论会议》，第 3546–3547 页。PMLR，2021年。[P´os76] L. P´osa。随机图中的哈密顿回路。《离散数学》，14(4):359–364，1976年。[PP22] J. Park 和 H. T. Pham。Kahn–Kalai 猜想的一个证明。arXiv:2203.17207，2022年。[Rao20] A. Rao。向日葵的编码。《离散分析》，2:1–8，2020年。[RP19] G. Reeves 和 H. D. Pfister。高斯矩阵随机线性估计的复制对称预测是精确的。《IEEE信息论汇刊》，65(4):2252–2283，2019年。[Ruc87] A. Rucinski。随机图中的小子图——综述。载于《随机图》，第 87 卷，第 283–303 页，1987年。[RV86] A. Ruci´nski 和 A. Vince。强平衡图与随机图。《图论杂志》，10(2):251–264，1986年。[RXZ21] G. Reeves、J. Xu 和 I. Zadik。稀疏线性回归中的全有或全无现象。《数理统计与学习》，3(3):259–313，2021年。[SSZ20] G. Semerjian、G. Sicuro 和 L. Zdeborov´a。稀疏植入匹配问题的恢复阈值。《物理评论 E》，102(2):022304，18，2020年。[Sto22] M. Stoeckl。向日葵引理近期改进的讲义。在线文章，https://mstoeckl.com/notes/research/sunflower_notes.html，2022年。[Tal10] M. Talagrand。许多小集合是否显然很小？载于《第 42 届计算机理论研讨会论文集》，第 13–35 页。ACM，纽约，2010年。[Tao20] T. Tao。基于香农熵的向日葵引理。在线文章，https: // terrytao.wordpress.com/2020/07/20/the-sunflower-lemma-via-shannon-entropy，2020年。[TAS20] L. V. Truong、M. Aldridge 和 J. Scarlett。伯努利群体检测中的全有或全无行为。《IEEE信息论精选领域期刊》，1(3):669–680，2020年。[WXS22] Y. Wu、J. Xu 和 H. Y. Sophie。确定随机图匹配的尖锐重构阈值。《IEEE信息论汇刊》，68(8):5391–5417，2022年。