高等教育入门证明课程中的学生意义建构：

一种方法论路径的论证与纲要

Bolanle Salaam 数学与科学教育系 佐治亚大学

提交于2022年1月11日

本文所含笔记于2015年8月至2022年1月11日期间，以约三十四种固定形式逐步形成、撰写、记录并分享。尽管我的想法仍在不断发展，但为使这些想法得以分享，原稿中受版权保护的内容以及附录H和I已被删除。我希望研究人员能继续完善本文所表达的想法。我拥有发布这项成果的唯一权威。

本文档的大部分最终措辞是在我受聘于佐治亚州迪卡尔布县公立学校担任全职教师期间完成的。本预印本谨献给DCPS的学生，以及他们克服自身处境的坚定决心。

目录

第1章：引言.3

问题陈述.3

研究问题.6

第2章：理论框架与文献综述.7

Sfard 的共思理论作为理论框架.7

文献综述.16

第三章：方法.31

参与者与研究环境.33

话语图.33

基于任务的访谈.47

数据收集.53

数据分析.54

数据收集摘要.57

学习摘要.58

参考文献.71

附录A：学生临床访谈方案.81

附录B：教师临床访谈方案.83

附录C：学生任务型访谈方案（任务A）.86

附录D：学生任务型访谈方案（任务B）.91

附录 E：学生任务型访谈方案（任务 C）.95

附录 F：教师任务型访谈方案.99

附录 G：教师最终临床访谈方案.102

第1章：引言

问题陈述

证明构造的行为可以视为一项问题解决任务（Weber，2001年）。Weber（2001年）以下述方

在问题解决任务中，通常会向问题解决者提供一个初始状态，并要求其执行一系

面对问题解决任务的参与者选择如何与任务互动，可以用交际认知理论[1]（Sfard，2008年、

由于证明构造对于深入学习数学至关重要，证明一直是本科数学研究的重点。然而，证明

法、同构等），并非独立于决定该能指或术语之话语用法的共同体或个人而存在。简言之，

[1] 为本研究建立必要背景所使用的术语十分广泛。为方便读者，文中附有交际认知术语表链接。参见：Thurston, A. 和 Wall, K.（编）。（2012年）。发展数学话语——交流研究的一些见解。[专题]。《国际教育研究杂志》，*51*，155-158。 doi: 10.1016/j.ijer.2012.01.003

[2] 为强调能够参与数学问题解决的共同体具有包容性，除了不依赖视觉、书写、口语和／或听觉进行交流的所有群体外，也包括盲人、非言语者、聋盲人士以及更广泛的聋人社群，我使用“接收”一词来指称任务的交流。本研究聚焦的群体由同时属于听觉、书写、视觉、口语和英语交流共同体的成员组成。

教授一个概念，就是描述、协调并举例说明相关话语共同体所界定的、一个术语可接受的用法。

函数这一非证明概念不仅在学生证明构建中发挥着关键作用，对于数学专业学生及

）。

．而且

以

这

——

尤其能

当引

Breidenbach、

Dubinsky、Hav

射（满射）的全体化，

内容。

学生若要“理解”单射和满射，似乎需要通过以听、写、看和口头讲解为重点的教学，接触单射和满射相关的词语使用（例如定义），阅读并使用与这些词语用法相关的符号性视觉中介物，最终判断是否满足适用条件，从而执行特定的常规。在数学教育文献中，学生遇到任务情境时，某一具体的适用条件实例以及由此触发的常规，最接近 Tall & Vinner（1981）所说的学生唤起的概念意象；而个人在处理这些词语时所依据的元规则，以及所有恰当的词语使用实例、导致常规的适用条件和相关视觉中介物，则最接近 Tall & Vinner 所称的概念定义和概念意象，后者被定义为“与该概念相关的总体认知结构，包括所有心理图像及其相关性质和过程”（Tall，1992；Tall & Vinner，1981）。然而，关于一对一函数和满射函数（以及由此产生的单射映射与满射映射这一观念），通常以听、写、看和口头讲解为重点的教学方式具有一些特点，即使学生不符合更广泛的数学共同体规范，也可利用这些特点来构造关于单射函数和满射函数的证明。因此，当任务似乎得到了“正确”的解答时，学生的元规则与数学共同体通行规范之间缺乏一致这一情况，课程教师可能并未察觉。

即使学生关于函数的可复现话语或概念意象尚未形成，或形成得较为松散，他们仍可能通过运用单射性和满射性的定义来回应相关任务并构造证明。正因如此，单射与满射非常适合用于研究学生面对证明任务时的意义建构。此外，

单射尤其值得关注，因为在美国，学生在 K-12 阶段后期便会接触单射，因此在进入大学之前，他们已经积累了关于函数及一对一性质的学习经验。这使我们能够考察学生思维的变化，并将这种变化操作化为人际交流的个体化（Sfard，2008）；由此可以合理地认为，学生进入证明入门课堂时，在函数话语方面并非“白纸一张”，因为教授任何主题时，这种情况都很少见。因此，学生不同的起点是研究学生函数话语随时间变化时的一项重要特征，而非分析上的不便（Vinner & Dreyfus，1989年，第365页）。

本研究所关注的群体（下文称为同时属于听觉、书写、视觉和言语社群的本科生）在入门证明课程中接触单射函数和满射函数时面临的问题错综复杂。学生可能会：（1）难以理解一般意义上的函数概念，而这种困难可能是从以往的教育环境中延续而来的；（2）由于函数表示方式存在差异，难以将先前对函数的“理解”延伸到高等教育环境中；（3）难以理解证明数学命题“意味着”什么；（4）难以掌握证明入门课程中通常教授的证明方法；或（5）难以判断何时以及如何运用已知的证明策略和方法。尽管文献已分别充分记录了学生在证明方面的困难（如 Dreyfus, 1999；Edwards & Ward, 2004；Harel & Sowder, 1998；Moore, 1994；Weber, 2001）以及学生在函数概念方面的困难（如 Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992；Dubinsky & Wilson, 2013；O’Shea, Breen & Jaworski, 2016；Selden & Selden, 1992；Tall & Vinner, 1981；Vinner, 1983；Vinner & Dreyfus, 1989），Thoma & Nardi（2020）强调，关于大学阶段学生对单射函数和满射函数的参与情况，研究仍然十分有限（如 Nardi, Ryve, Stadler, & Viirman, 2014）。尽管这一领域已取得一些初步进展，但在证明这一具体情境下对大学阶段学生学习单射函数或满射函数的研究仍然更为稀少（如 Thoma & Nardi, 2018, 2020；Thoma, (2018)；Bansilal, Brijlall, & Trigueros, 2017）。

这种稀缺现象的原因尚不明确，但我认为可能是：（1）证明入门课程的研究人员和教师并不认为单射与满射证明是学生面临重大困难的领域；或（2）由于学生在证明和函数这两方面分别都存在严重困难，因此在证明课程中考察单射与满射是一项艰巨的任务。即便数学教育文献中对证明及何为证明存在各种不同的定义与信念（Healy & Hoyles, 2000；Harel & Sowder，1998），在这些定义中，证明仍可被视为一种数学概念本身。这可能会使人自然而然地倾向于独立研究证明——它常被视为从计算数学迈向理论数学所必经的一步——并对可能以困难的非证明概念形式出现的混杂变量加以控制。当然，非证明概念通常是证明构造的研究对象，因此研究人员可能会选择那些“掌握”了将作为其研究中证明任务对象的非证明概念的学生（例如 Healy & Hoyles，2000；Weber, 2001）。这类研究设计暗含的假设是：学生在证明构造中遇到的任何困难，大多只是由学生自身在证明方面的困难所致；进一步探究这些困难的性质，有助于阐明学生为何可能在整体上难以应对证明。

这种方法虽然合理，但如果参与研究的研究人员想要声称某位学生“理解”某个数学概念，或“具备”构造证明的能力，仍可能产生问题。此类断言通常依据以下标准：学生已经得出了“正确”的解答，能够回忆定义，或此前接触过相关内容，并以此作为学生“知道”“学习”或“理解”的替代指标，即使这些术语缺乏操作性定义。这些标准是

学生已经得出了“正确”的解答，能够回忆定义，或此前接触过相关内容，并以此作为学生“知道”“学习”或“理解”的替代指标，即使这些术语缺乏操作性定义。很少明确说明对谁而言某个解答才算正确，因此，任何试图评估学生的证明概念、其关于非证明数学内容的概念，并据此对这些概念的状态作出结论的做法，都存在歧义。

研究人员从纯粹的行为主义、心理学或社会文化视角来探讨“知识”时，出现这种歧义是意料之中的。作为研究人员，我们无法洞察学生的内心，尽管使用客体化的认知主义术语会掩盖这一事实；因此，我们必须依靠学生说出的话语，才能略微了解他们如何与数学互动。在这项研究中，我将采用从认知主义视角发展出的、用于研究概念形成与结构的分析工具，但会严格遵循 Sfard（2008）提出的概念的话语定义，以尽量消除这一视角下围绕概念的一些歧义。我也可能借鉴行为主义视角的观点，讨论学生活动的变化，并借鉴社会文化视角的观点，探讨社会互动和外部要求对学生数学行为目标的影响。然而，我并不打算将这些视角务实地拼凑在一起，而是从交际参与主义立场重新界定学生在证明方面的困难和学生在函数元素方面的困难：它们是同一个问题的两个实例，即话语参与者之间可能存在不可通约的话语。

在这篇关于学生在证明和函数方面所面临困难的简要概述中，我介绍了伴随以往学生思维研究尝试而来的认识论和本体论问题。针对这些问题，我纳入了Sfard交际认知框架中的术语，旨在引导读者理解这样一种数学观：数学是一种话语，而这一观点对于严谨且非对象化地研究学生的数学活动似乎是必要的（Sfard，2008）。我所开展的学习可能产生的一项结果，是洞察学生如何在未必适应数学共同体关于单射函数、满射函数和证明的规范的情况下，满足证明入门课程教师的期望；然而，本文所提出的研究主要着眼于洞察学生如何组织数学话语的元素，以理解单射函数和满射函数，诠释相关证明任务的要求，并最终回应这些任务、开展证明构造。

研究问题

1. 在过渡到证明课程的过程中，本科数学学生以何种方式理解并诠释单射、满射和证明教学?

    - 从学生最初绘制的话语图可以看出，在参与过渡到证明课程之前，他们在函数的语境下是如何理解单射和满射的?
    - 随着时间推移，学生在讲座、作业、阅读课程教材以及使用其他学生选择的资源后，对有关证明、单射和满射的话语图做出了哪些改变?

- 学生如何运用有关单射、满射、函数和证明的话语，来解读涉及单射和满射的证明任务情境?
- 学生会运用哪些常规来针对任务情境构造证明?

2. 教师如何解读并理解证明、单射函数和满射函数?

- 从教师的话语图可以看出，他们如何在函数的语境中思考单射与满射?
- 在过渡到证明课程之前，教师预期学生的单射与满射话语会如何组织在其函数话语图中？在过渡到证明课程结束时，教师预期学生的话语（包括证明话语）会如何组织?
- 从教师预期的学生树可以看出，教师预期学生会运用哪些话语来解读涉及单射与满射的任务情境，从而参与证明构造?

3. H学生的话语与教师的话语有何不同?
   - 教师在课程开始前和结束时对学生的单射、满射、函数和证明话语有何期望？这些期望与学生的初始和最终话语图所显示的学生关于单射、满射、函数和证明的话语有何一致之处?
   - 对于每种任务情境，教师对学生将借助哪些话语来解读涉及单射函数和满射函数的证明任务情境并参与证明构造有何期望？这些期望与学生的唤起树和话语图所显示的学生实际借助的话语有何一致之处?
   - 教师根据阅读学生的证明构造，对学生的函数、单射、满射和证明话语有何期望？这些期望与学生的话语图所显示的学生关于函数、单射、满射和证明的话语有何一致之处?
   - 教师阅读学生的证明构造后，关于学生的证明和函数话语有何叙述？这些叙述与教师根据学生的话语图和唤起树对学生的证明和函数话语所作的叙述有何一致之处?

第2章：理论框架与文献综述

Sfard 的共思理论作为理论框架

Sfard（2008年）将共认知描述为一个“涵盖思维（个体认知）和（人际）交流的术语；作为 communication（交流）和 cognition（认知）两个词的结合，它强调这样一个事实：这两个过程是同一现象的不同（人内和人际）表现形式”（第296页，原文强调）。A

数学教育研究中的一个难点在于，许多受关注的现象（例如学生思维）被认为在本质上属于心理或抽象现象。此外，受关注的数学对象本身也往往是抽象的。举一个一般性的例子：“有学习障碍”这一短语意味着什么；或者就本研究的主题而言，成为一个单射函数意味着什么。这些词并不描述物理且有形的现象；相反，它们是人类在一段时间内对抽象概念进行实体化和客体化，并持续经历本体论坍缩的结果。Sfard（2008年）将实体化定义为“用关于对象的谈论取代关于过程的谈论”（第301页），并指出，这可能涉及使用一个新词、术语或符号制品来讨论该过程。与实体化相关的是同一化行为，其定义是：将一个单独的词、术语或符号制品赋予多个此前未被视为相同、但在特定情境下可以互换的对象（Sfard，1998年，第302页）。实体化之后，由此产生的术语、词或符号可能进一步导致该过程的客体化；Sfard将其描述为使用符号制品或名词，仿佛它“指称一个超话语的、自我维系的实体（对象），独立于人类能动性”（第300页）。

作为一个基本例子，目标人群中的成年人往往将数字 7 视为一个自足的实体。他们不再记得，自己还是孩子时，关于 7 的概念需要逐步建构起来；通常，这一过程始于用数数歌来确定一组实际存在或可通过视觉感知的物品的数量。当没有更多实际物体可供对应数数歌中的数字词时，数数歌便结束了，这一人群中的孩子可能会宣布有七件物品。随着孩子反复接触一系列物体，当被要求计数时，数数歌数到七之后便不再需要使用数字词，孩子会逐渐将特定数量的物体与数字词「七」联系起来。通过快速辨数（Beckmann，2013年），孩子可能会开始将一组物品感知为七件，而无需借助数数歌或其他计数策略。随后，7 被引入为一种视觉符号，可与数字词「七」建立联系并互换使用。然而，人们想当然地认为，像「7 个苹果」这样的书面短语只是对客观事实的简单描述，而非历经一段时间、通过多次复杂的话语操作形成的结果。对孩子而言，起初是多个可触及的实物，后来则成为与数字 7 联系起来的恒久指称。尽管 7 并非初级对象（p-对象），而是话语对象（d-对象），这一转变仍会发生。初级对象涵盖可见、可触或仅可听见的事物。初级对象必须是有形的、可通过感知接触到的，并且不是由人类交流创造出来的；即使没有能指，它们也必须独立于人类话语而存在（Sfard，2008年，第169页）。

REDACTED IMAGE

图1：初级对象（p-对象）

尽管我在图1中附上了该对象的像，但这是许多人在一生中逐渐熟悉并曾亲眼观察过的对象之一。在话语

语境中，图1中的对象描绘的是一个初级对象（p-对象）。d-对象可以是初级对象，也可以是复合话语对象；复合话语对象“通过在同一化、封装或实体化的过程中，将名词或代词赋予现存对象而产生”（第298页，原文着重）。从这个意义上说，d-对象可以通过将单个p-对象赋予一组p-对象而产生；或者，d-对象也可以通过将单个p-对象赋予一组先前构造的d-对象而产生。在尚未被命名时，图1中的对象只能被称为p-对象，而不能被称为d-对象。我指出，与图1中的对象通常相关联的名词，在英语中是Gala apple。因此，当图1中的对象如今由Gala apple指称，并由此成为交流对象时，图1中的对象就可以被称为d-对象。Gala apple并非独立存在，而是名词Gala apple是我们文化中流动且不断修订的交流系统的结果。没有我们的交流系统，Gala apple便不存在，而图1中的对象仍然是有形的。

术语嘎啦苹果并非天然具有我们在将一个对象称为嘎啦苹果之前所要求的一系列特征；相反，先前的文化将被观察到的初级对象“拥有”的一组特定特征赋予了术语嘎啦苹果。只有一个p-对象被称为嘎啦苹果，因此，嘎啦苹果可以被称为原子d-对象或简单d-对象。简单d-对象被定义为：任何由对p-对象（例如，嘎啦苹果）进行恰当命名而产生的d-对象，其中一个术语专门与某个特定p-对象相关联（Sfard，2008）。这对关系中的简单d-对象此时充当能指，可用于有效地交流有关某一特定p-对象（例如，图1中的p-对象）的信息。在此示例中，p-对象是能指嘎啦苹果的唯一实现。请注意，由于术语苹果被使用时，通常会使人联想到以不同代词形式呈现的、或不同“类型”的苹果等众多实现，因此能指苹果不会被称为简单d-对象。相反，苹果可以被称为复合d-对象。

复合d-对象是通过再次将“一个名词或代词赋予现存对象（话语对象或初级对象），以进行**同一化、封装或实体化”** 而产生的（第296页，原文着重）。任何被标记为嘎啦苹果的p-对象也可以称为苹果；用于将某个p-对象识别为苹果的所有特征，都包含在我们用来将对象标记为嘎啦苹果的特征之中，但还存在其他被我们用d-对象“苹果”标记、却不被标记为嘎啦苹果的p-对象。在共认知中，苹果是通过同一化产生的。这种同一化源于对一组p-对象所共有的特定特征子集的识别；其中每个p-对象都可能被赋予一个简单d-对象，如嘎啦苹果、麦金塔苹果、青苹果等，而任何具有这些共有特征的p-对象都会被赋予名词“苹果”。

封装的定义是：“将一个名词或代词（能指）赋予一组特定的现存初级对象或话语对象，使得迄今为止以复数形式讲述的这组对象的一些故事，现在可以用单数形式讲述”（第298页，原文着重）。水果杯这一d-对象便可作为例子。如果某个对象被称为水果杯，那么关于水果杯的故事，所指的都是构成水果杯的各个元素组合在一起时的情况。如果说水果杯很贵，这种交流意在谈论作为整体的水果杯，并不适用于构成水果杯的单个物品。我强调，被封装或同一化的对象不必是初级对象或简单d-对象。若干复合d-对象还可以再次被封装或同一化，形成一个新的复合d-对象。

“具体对象”一词专用于特定情形：被封装或同一化的对象是 p-对象，或是通过对这些 p-对象进行同一化和封装而产生的 d-对象。例如，考虑能指“水果”。水果不仅是一个

复合d-对象，但还可以进一步描述为一种具体对象，它由猕猴桃、菠萝、葡萄等d-对象，以及与这些名词各自相关联的p-对象经封装和同一化而产生。猕猴桃、菠萝和葡萄分别是由p-对象经同一化和封装而形成的具体对象（Sfard，2008年）。具体对象可以反复分解为其他具体对象，这一过程会在到达简单d-对象时终止；该简单d-对象的唯一实现以一个独特的p-对象形式存在。简言之，具体对象必须能够通过感知获得。

人类语言的复杂性令人惊叹，因为它能够传达关于那些在物理世界中并无纯粹根基的对象的观念。任何非具体对象，也就是说，任何全部或部分由纯粹话语对象的封装与同一化所产生的对象，都称为抽象对象。例如，在短语“7个苹果”中，7就是一个抽象对象。请回想前文对一个成年人如何在童年时期经过一段时间才形成对7的概念所作的冗长讨论；我试图说明，7并非独立于话语而存在。这与图1中p-对象的具体存在恰恰相反。用于选择该p-对象能指的语言并不重要。如果没有与图1中的p-对象相对应的专有名词，它也不会因此不复存在。虽然“嘎啦苹果”是实体化所产生的d-对象，但在读到或听到“嘎啦苹果”时所实现的p-对象，通常与图1所描绘的相似。所有被称为苹果的p-对象都是如此，因此，“苹果”这一术语及所有相关的p-对象都是具体对象。试图写出抽象对象的实现树——即一种多层次、分层级的书面表征，展示某个术语或符号制品如何分解为连续的对象组成部分——时，不可能以最终抵达纯粹的原子d-对象而告终（Sfard，2008年）。我邀请读者亲自尝试。

像苹果和嘎啦苹果这样的具体对象，通常被视为理所当然、无可争辩且预先存在于“世界中的事物”（Sfard，2008年）；然而，当我们试图向不会说英语的人要一个苹果，或与某人交谈时，若对方所说的苹果指的是一个与美国人通常理解的完全不同的 p-对象，就会产生困难。苹果和嘎啦苹果的概念只与特定的话语共同体相关，也就是能够参与某种话语的个体集合。在这个例子中，话语共同体可能是英语使用者；谨慎起见，也可以说是在美国长大、从小说英语的英语使用者。我所描述的英语使用者和非英语使用者可能对能指“苹果”有着不同实现这一问题，被称为存在不可通约的话语。Sfard 将话语描述为不可通约，是指这些话语“在词语和中介物的使用或常规方面有所不同；不可通约的话语可能会认可看似相互矛盾的叙事”（第299页，原文着重强调）。

长期参与共同话语共同体，往往会促成在交流上有利的本体论坍缩。Sfard（2008）将本体论坍缩定义为：“把所有正在谈论的对象——话语对象（d-对象）和话语外对象（p-对象）——都视为属于同一本体论范畴，即话语产生之前便已存在于世界中的‘事物’，并认为它们之间的相互关系同样是‘客观的’、独立于心智的这一现象”（Sfard，2008，第300页）。例如，将一种被称为“嘎啦苹果”的 p-对象概念在文化中替换为“图1中的对象是一个嘎啦苹果”这一陈述，便体现出人们未意识到语言是建构而成的；后者将其视为一种独立于语言、预先存在于现实世界中的事物。正如我认为自己已经论证的那样，试图仅从初级对象出发讨论所有 d-对象的构建，是一项耗时且往往没有必要的任务

尤其是在与话语共同体的其他成员相处时。本体论坍缩使共同体内部能够高效地交流日益复杂的思想。然而，在有必要区分有形的物理对象、可观察的动作和纯粹的心智对象时，抵制本体论坍缩并按照我所阐述的方式区分对象，是有帮助的。这些区分对于我的研究是必要的。

为了在讨论与本学位论文相关的文献时更加具体，对象还需要进一步解构。我提醒读者，Sfard 将实现定义为一种将能指与另一个对象配对[ ]并需要说明的是，这两个术语之间的区别通常是相对的，而实现也可以充当另一组实现的能指。此外，实现仅限于感知上可及的内容。这正是无法为抽象的 d-对象7 完成实现树的原因。这种树的叶节点只能是一份永无止境的纯粹话语对象清单。

已删节图像

图2：Sfard 列出的实现模态，以部分实现树的形式呈现。需要说明的是，这些模态并不代表交流类型的完整谱系。转载自 Sfard, A.（2008年）。《作为交流的思维：人类发展、话语的增长与数学化》。剑桥大学出版社。

现在，能指、实现、p-对象、简单（原子）话语对象、复合话语对象以及话语对象的抽象或具体性质都已得到仔细界定，我指出，我讨论的仅是话语对象如何产生，并未讨论如何将话语对象操作化。鉴于“对象”一词在数学教育研究中十分常见，我有必要说明在本研究中将如何使用这一术语。根据 Sfard 的说法：“在关于 S 的特定话语中，由 S（或简称对象 S）所指示的（话语）对象，是 S 在该话语中的实现树”（Sfard，2008年，第 166 页）。这个定义具有明确性，能够进行符号表征，并包含递归元素。它表明，话语的定义域与实现树有关。此外，实现以及由此形成的实现树因人而异，因此“使用方式”也因人而异。这一点在定义数学对象时尤其有用。

数学对象是抽象对象，是“由部分可互换的符号制品构成的复杂层级系统”（Sfard，2008年，第 172 页）。相应地，数学话语可以定义为关于数学对象的话语。7 是数学对象的一个例子，3、4 和 + 也同样是数学对象。在模四自然数中进行运算时，符号制品 7 和 3 可以互换（即具有可互换性）。然而，在实数域中进行运算时，情况就并非如此。这正是为什么 Sfard 在描述数学对象的可互换性时必须加入“部分”一词。

此外，理解实数还包含整数话语，而整数话语本身
又包含自然数；自然数则可以实现为具体的数字，而这些数字是符号制品，源自人们在数数歌中与词语长期互动的经验。每当数学对象被视为相同、封装或重新实体化，从而产生新的数学对象时，便会形成一个层级。在每一层封装中，所创造的新数学对象的复杂性都会增加；这一过程不断产生新的数学对象，似乎永无止境。因此，Sfard 将数学描述为自创生的，其定义是“一个既包含谈论对象，也包含谈论本身的系统；当新对象一个接一个地加入时，它便不断‘从内部’生长”（Sfard，2008年，第129页）。简言之，数学话语会自我生成。数学对象就是实现树。

如果数学建立在抽象对象的基础之上，那么如何才能始终确保数学话语共同体的成员对每个数学对象拥有相同或兼容的概念（即能指及其用法）？ 对于更基础的概念，如 7、减法或加法，设计任务来考察一个人在遇到这些词语或需要用到这些概念的情境时如何使用它们，似乎并不困难。但我们如何才能准确判定一个人对同构、环或积分的概念？这显然比判定一个人如何使用“蛇”“树”或“车辆”，以及这些词语的用途要困难得多。孩子走着去上学时，我们无法指认同构、环和积分。如果要深入了解某人对这些抽象对象的概念，我们就只能完全依赖此人对这些对象的交流。

数学教育研究很大程度上围绕学生的思维展开。然而，个体内部的思维对个体以外的任何人来说都是不可见的。研究者描述研究群体中某位参与者的思维时，最差的情况不过是对可观察活动的解读，最好的情况则是逐字复述参与者所交流的自己的想法。因此，同时考察思维与交流是合理的。Sfard（2008年）的共认知理论正是建立在这一理念之上。根据参与主义观点，即“人类发展是对历史形成、由集体共同实践的生活形式进行个体化的过程，”共认知的核心主张是，思维是一种交流形式，而这种交流既可以是人际的，也可以是个体内部的（第262页）。这种交流未必需要通过语言进行；不过，人类语言递归且自指的特性，使我们的活动以及我们对这些活动的交流能够随时间变得更加复杂。这种交流往往借助本体论坍缩而得以实现。

根据这一理论，Sfard 将数学视为话语，或称为“一种特殊类型的交流，其独特之处在于它所包含的可接受行动 repertory，以及这些动作与反应行动配对的方式”（第297页）。每一种不同的话语都构成一个共同体（例如学术话语、社会正义话语）；而语言中的话语则“由词汇、认可的叙事、视觉中介物和常规所界定”（Sfard，2008年）。数学

话语可根据任何话语参与者在理论上认可或拒绝叙事的能力，以及其使用具有鲜明数学性质的词汇（即数学对象）来区别于其他话语。数学话语中的认可权威并不属于特定个人，而是该话语的任何成员都可以通过援引某种组合的认可叙事来证实某个叙事。为保持 Sfard 将数学框定为话语这一观点的完整性，我在下文完整列出了 Sfard 对数学话语定义特征的简要描述，但需说明的是，其中某些特征仅适用于特定的交际社群：

1. 词语使用。话语的一个显著特征是其所使用的关键词。在数学中，这些关键词主要是（但并非 exclusively）表示量和形状的词语。尽管许多与数字相关的词语可能出现在非专业的日常话语中，但学校或学术界所实践的数学话语规定了更为严谨、规范的词语使用方式。词语使用是一个至关重要的问题，因为它等同于他人所谓的“词义”，决定了使用者能够对世界说些什么（也因此能够在世界中看见什么）。

2. 视觉中介是可见的对象，人们在交流过程中对其进行操作。日常话语通常由独立于话语而存在的物质事物的像来中介，而科学话语和数学话语往往涉及专门为这种特定交流形式而创造的符号制品；例如，可以想想科学铭文或数学代数符号。与交流相关的对视觉中介的操作往往会变得自动化并内化于身体之中。例如，可以想想以明确规定的方式用眼睛扫描中介物的程序。经过一定的经验积累，这一程序会被记住、激活，并在对特定话语提示作出直接回应时得到实施，而不需要经过刻意的决策，也不需要明确回忆关于这些运算的言语性指令。

3. 叙述是任何一系列话语，只要其框定为对对象、对象之间关系，或对象所涉及或产生的过程的描述，并且可借助特定话语的证实程序予以认可或驳斥。获得认可的叙述通常被称为真实。不同话语对认可的术语和标准可能有很大差异，而且在很多情况下，交谈者之间的权力关系实际上可能发挥重要作用。这一点对于社会科学以及历史或社会学理论等人文学科叙述而言确实如此。数学话语被设想为不应受任何因素影响，唯一例外是叙述之间纯粹的演绎关系。在学术数学话语中，经协商一致认可的叙述称为数学理论，其中包括定义、证明和定理等话语建构。

4. 常规是特定话语所具有的重复性模式。具体而言，无论是观察数学词语和中介物的使用，还是追踪关于数字或几何形状的叙事的创作与论证过程，都能发现数学规律。事实上，数学话语的几乎所有方面都能看到这种重复性模式：例如数学

> 分类形式、关注环境的数学方式，以及将情境视为“相同”或不同的方式；这些对话者在适当情况下运用数学话语的能力至关重要，而类似的例子不胜枚举。（Sfard，2008，第134–135页）

Sfard 对叙事的描述十分重要，因为认可或否定是特定于话语的。数学话语由众多话语构成；在一种话语中可以得到认可的内容，在另一种话语中可能会遭到否定。因此，Sfard 对数学话语与学术数学话语的区分是恰当的。尽管叙事很重要，但在 Sfard 将数学描述为话语时，我最感兴趣的是她对常规的讨论。如果我将概念定义为能指及其用法，那么我会将常规视为概念的构成基块，并认为将与某个能指配对的所有常规及其实现集合起来，就构成了一个人对某个数学对象的概念。词语使用、视觉中介物和叙事本身都是常规的元素。常规也可以包含在更大的常规之中。

常规。

从数学作为话语的视角来看，常规这一概念对我的研究和数据分析尤为重要。常规定义为“一组描述重复性话语行动的元规则”（Sfard，2008年，第208页），并可分为三个特征：适用条件、行动过程和结束条件。适用条件规定了常规“何时”应当使用，是话语参与者在实施某一特定常规之前希望得到满足的情形。行动过程，或程序，是在特定适用条件下实施的常规“如何”运作。结束条件则是话语参与者希望在终止常规之前得到满足的情形。这种闭合条件界定了另一个“何时”，具体而言，是指常规何时可以被视为已完成，且达到了话语参与者满意的程度。

常规的类型。

根据 Sfard 的说法，“可认可”一词“表示该叙述可以依据给定数学话语中明确定义的规则予以认可或否定”（第224页）。数学中最基本的认可叙事示例包括公理和定义。当这些公理和定义按照话语中明确定义的规则，用于推导另一则叙述时，推导出的认可叙事通常称为定理（第224页）。若干此类认可叙事汇集起来，便构成一个数学理论体系（第224页）。在一项常规过程中，除了对叙事的操作外，还可能包含话语行动和实践行动。话语行动具有交流性质，而实践行动则会使对象或环境发生物理变化（第236页）。现在，既已给出这些术语的定义，我可以进一步阐述常规的不同类型：探索、行动和仪式。

探索是指在“产生或论证出可认可的叙述”时终止的常规，因此有助于数学理论的发展。探索常规有三种子类型（第224页）：（1）构造性探索是产生新的可认可叙述的话语过程；（2）论证性探索是有助于决定是否

认可先前构建的叙述的动作；（3）回忆性探索是“人们为能够唤起过去认可的叙述而进行的过程”（第225页）。在认可一则叙述的过程中，这三种探索通常交织在一起。值得注意的是，论证和回忆依赖于话语中先前认可的叙述。数学中的创造力空间存在于构造性探索之中。

Sfard 将行动定义为“一套规则，用于规范一系列有模式的动作；与探索不同，这些动作会产生或改变对象，而不仅仅是叙事”（第236页）。当数学话语中的参与者（即话语参与者，下文称为数学实践者（Sfard，2008））认为自己已完成环境或对象的转化，以实现一项实践任务时，这类常规便告终。其目标并非围绕对象产生叙事，而是转化对象。请注意，同一套教学指令交给两位数学实践者，可能使一位数学实践者进行探索，而另一位数学实践者则采取行动。

Sfard 将仪式定义为“话语行动的序列，其主要目标（结束条件）既不是产生认可叙事，也不是改变对象，而是与他人建立并维系联系”（第241页）。这类常规强调社会认可，在那些一心想着“得出老师会判为正确的答案”的学生身上可以看到。这些常规可能涉及在被视为权威的人物面前表现，而且高度依赖情境。不过，仪式也体现在专家按照规范使用专业词汇来指称数学对象的方式上。遵循仪式，专家便能确保自己向另一位专家传达了本意，从而与先前的数学家维系联系。

常规可以是数学实践者特有的，尽管多位数学实践者可能会对相似的程序采用相同的适用条件和结束条件。在任务情境中——任务情境被定义为一个人认为自己需要做某事的任何情境（Sfard，2008；Lavie、Steiner 和 Sfard，2018）——适用条件可能决定哪些提示会促使数学实践者执行某一特定常规。根据 Sfard 的说法，提示是

> 情境中的元素，其出现会提高某一常规得以表现的可能性。提示可以是言语性的，也可以是环境性的；可以由他人提供，也可以由自己呈现，并且会成簇出现。只有某些提示组合足以促使常规表现。当一个人似乎严格遵循某一既定行动过程，表现出比经验丰富的数学实践者所认为适当的程度更依赖情境线索时，我们便称其话语（或仅指该既定行动过程）是情境化的……与某一既定行动过程相关的一些提示会起到话语框定因素的作用，也就是说，它们会激活某些话语，同时抑制另一些话语。（Sfard，2008，第209页，原文着重）

请注意，即便采用不同的适用条件且具有不同的闭合条件，两位数学实践者也可能实施相似的程序。因此，学生执行教师预期的程序，不应被视为证据，证明该学生在更有经验的数学专家认为适当的情境下，也会实施同样的程序。然而，这恰恰是数学课堂和数学教育研究中偶尔会作出的假设。

文献综述

在分析数学教育研究中常用的研究方法后，学习与理解通常通过规范遵循这一隐含标准来评估（例如，Breidenbach 等，1992；Dubinsky & Wilson, 2013；Wilson，2007）；这一点可从研究方法及后续分析中看出：研究者将学生的作业与规范化构造进行比对，并以学生给出“正确”答案以及回忆定义的情况（或缺乏这些情况）作为学生进展的指标。规范可定义为元话语规则，下文简称元规则，即话语共同体广泛认可并实施的规则（Sfard，2008，第204页）。在本研究中，话语共同体指数学共同体。此外，这一共同体还包括被视为专家的人士、数学家、数学教授、数学教育工作者，以及参与数学话语的学生参与者。在需要明确区分时，学生参与者将称为学生数学实践者，而数学家和数学教授将称为专家数学实践者。元规则“界定话语参与者试图生成并证成对象层叙事时活动中的模式”（第201页），而对象层规则则是“关于话语对象行为规律的叙事”（第201页）。因此，我使用“规范”一词时，指的是专家数学实践者在试图生成并证成有关数学对象的叙事时广泛接受的活动模式。“课堂规范”一词则用于指称数学课程教授认可的活动模式，这些模式与学生数学实践者在课堂中的行为相一致，或是对他们的行为有所要求。

当研究者试图考察学生数学实践者对规范的遵循时，往往会倾向于依据学生数学实践者的书面或口头话语，作为其遵循这些规范的证据。虽然我已表示认同，书面和口头话语能够为了解学生思维和概念提供有用信息，但任何进一步研究学生是否遵循规范的尝试，都需要阐释每位学生数学实践者用来支配其活动的条件。针对文献中缺乏此类阐释的情况，我指出，数学专家共同体的元规则（规范）往往与学生数学实践者的元规则不同（例如，Erlwanger，1973）。 如果存在这种差异，那么可以合理地预期，研究者会立即察觉学生与专家相比在元规则上的不一致；然而，这一预期的前提是学生展现出一种与通常采用的常规相冲突的书面或口头常规。如果学生数学实践者展现的常规与预期的常规相似，甚至完全一致，研究者和课程教师便可能将这一常规视为其遵循数学共同体规范的证据。于是，人们可能会据此认定学生已经“学会了”或“理解了。”

如前所述，后一点虽然很有趣，但并非本学位论文的重点，尽管共话语观确实通过将学习定义为话语的变化，对“学习”一词进行了操作化。关于学习或理解意味着什么的思考，已在其他地方得到深入探讨（例如，Sfard，2001，2008；Barwell，2007），我也认同 Sfard 的观点，即用于评估学习和理解的常见工具，更多评估的是话语能力（Sfard，2008）。前文提到，学生可能在规范化数学话语之外，以完全相同或相似的方式实施常规；这一可能性颇为有趣，在考察学生如何组织并运用其数学话语的元素时，或许会遇到这种情况。基于此，我将使用“意义建构”一词取代学习和理解，以涵盖所有学生的数学话语，而

不仅仅是那些被大多数典型数学专家视为令人满意的话语。

关于意义建构的研究。

Schoenfeld 在其开创性著作中对意义建构的阐述（1991年），梳理了学习和理解在描述学生如何处理并回应数学信息时所指的多种方式，同时也质疑了将表现和行为视为学生遵循数学共同体公认规范的可靠指标。Schoenfeld 提及的意义建构类型如下所述，而这些类别不一定互不相交。

赋予符号以意义。

在这种意义建构观中，Schoenfeld 指的是学生在不同语境与数学语言之间进行转换的能力。他指出："……将故事转化为算术运算……这一行为本身就是意义建构；是赋予数学符号以意义的行为。"（Schoenfeld，1991年，第322页）学生一旦得到符号，便可以依据预期应遵循的形式系统进行符号运算。关于这类系统，Schoenfeld 指出："形式系统并不指涉任何事物。形式系统由符号集合以及操作这些符号的规则构成。只要遵守规则，所得结果在该系统内就是有效的"（Schoenfeld，1991年，第311页）。从这种意义建构观来看，学生可能会借助关键词来"钻空子"。例如，在证明入门课中，教师通过一系列示例展示了完全相同的步骤后，学生可能会把"用 δ-ε 定义求函数极限"与"列出一个不等式"联系起来。然而，这并不表明学生将这一过程与定义联系起来，也不表明他们赋予这一过程所得结果的意义符合数学共同体规范。在一个初等情形中，这可以用这样的学生为例：他在应用题中看到"更多"一词，便立即在题目中能识别出的表示数词的数字符号之间放上加号，而不考虑题目中的其他信息是否表明单纯进行加法并不恰当。Weber（2001年）将这种意义建构称为句法知识或句法理解。

行为。

关于行为作为一种意义建构方式，Schoenfeld 指出：

> 行为是最深层次的意义建构。在学校教育的语境中，这种行为体现为建构一套能够带来对良好表现的表扬、尽量减少冲突、融入社会等结果的行为。还有什么能比这更合理呢？因此，问题在于，在一种语境（作为制度的学校教育）中合理的同一行为，可能会违反另一种语境（数学与数学家的文化）中的意义建构规范。（Schoenfeld，1991年，第340页）

在这种意义建构观下，Schoenfeld强调外部回应（无论积极还是消极）对学生数学学习可能产生的影响。Cobb（2000a）在其关于聚焦于学生数学学习与发展的基于课堂的研究的评论中，进一步阐释了这种影响：

> 学生参与其中的课堂微文化深刻影响着他们试图实现的目标、他们对何种内容才算是可接受的数学解释的理解，事实上，也影响着他们关于在学校中理解和开展数学意味着什么的一般信念。因此，即使主要关注点是构建有关学生转变其数学能力之过程的心理模型，记录由课堂共同体所建立的微文化仍然至关重要。（Cobb，2000a，第311页）

学生可能会根据他们认为教师希望看到的内容来改变解题方法；如果未能获得积极回应（例如取得“B”等级），或者收到教师纠正这一形式的被感知为消极的回应，他们就会放弃这些方法，无论这些方法是否被认定为正确。为了确保所提出的解答符合教师期望，学生有可能——事实上，在证明中这种情况甚至很常见——诉诸于记忆和模仿他们看到教师进行的过程，而不顾自己所产生内容背后的意义（Moore，1994）。例如，一名学生可能在完成一门入门微积分课程后，能够运用高中微积分中常见且已被其微积分教师判定为正确的极限法则来计算极限；但进入过渡到证明课程后，只有在教师多次示范并调用ε-δ定义之后，他才似乎开始诉诸ε-δ定义。尽管该学生能够运用微积分法则计算极限，也能够使用ε-δ论证证明极限存在，但他可能仍然无法讨论这些法则与极限的ε-δ定义之间的关系。

模式识别与规则创建。

在这种意义建构观下，学生可能会识别出相似问题集合中的共同特征，并尝试根据这些特征确定解决问题的规则。如果教师倾向于在新授内容讲解后立即布置习题集，让学生有机会练习刚刚学到的内容，那么学生可能会确定如何在一组习题中得出“正确”解答，随后将这一技巧始终应用于该习题集中的所有问题。例如，Schoenfeld提到过一群小学生：他们在初次学习减法后，被提供了若干道形式为 a - _ = b 的变化量未知的减法问题。这些问题都没有偏离这一格式。第二组问题则包含了各种起始量未知、变化量未知和结果未知的减法问题。关于第一组问题，Schoenfeld指出：“这类习题集具有一个有趣且意料之外的特性。一旦你弄清楚如何解决第一道问题（在本例中，即用较大的数减去较小的数），这种方法就适用于所有问题”（Schoenfeld，1991年，第321页）。然而，在第二组问题中，学生仍然诉诸为第一组问题建立的规则集，从而得出了若干“错误”且不合逻辑的答案。再次强调，学生能够确定如何得出“正确”答案，并不意味着其得出正确答案的过程本身符合规范化数学话语中的逻辑。这

种意义建构观可以被视为与作为意义建构的行为相联系；但在这种观念下，学生可能会创建并遵循规则，而不一定会从教师那里接收到确认性输入。正如Erlwanger（1973）所示，学生创建的规则集有时会导致“错误”解答，但这并不一定会使学生放弃其规则集。这些具有个体特征的规则集可以被称为元规则；在此实例中，它们指的是学生在试图证实对象层面叙事时所采取的动作及其活动模式（Sfard，2008，第201页）。

遵循既定的数学文化。

在这种意义建构观中，人们通常认为，学生已经接受了与既定数学文化（规范）一致的内容解释。这些学生并非只是猜测或模仿别人对他们的期望，而是将其与已有的（也可以说是“正确的”）数学知识（话语）联系起来。Schoenfeld通过描述一个高中生的情境，暗示有些学生缺乏这种意义建构；这个情境正是说明为什么研究证明课程中的意义建构如此重要的关键所在

> 为了探讨高中生对几何的理解，我给学生们出了一道证明题。题目……写在黑板上。学生们毫不迟疑地给出了完整且正确的解答。他们口述答案，我则把证明写在黑板上。从头到尾，整个过程不到三分钟。（Schoenfeld，1991年，第317页）

Schoenfeld 接着要求学生画出与他们刚刚写下的证明相对应的作图。在这第二项任务中，学生提出了四种解法，但只有一名学生能够判断哪种作图是正确的。Schoenfeld 指出，无法将证明与其实际“意义”联系起来的情况很常见：“看到这种情况出现在如此有才华、水平如此高的学生身上，我感到很惊讶，但有大量文献记载……高中生和大学生几乎看不出演绎欧几里得几何与他们被要求解决的密切相关的作图题之间有什么联系”（Schoenfeld，1991年，第319页）。在此例中，Schoenfeld 推测，或许是行为层面的意义建构使然，学生记住了若干个证明，其中任何一个都有可能出现在期末考试中，而复现这样的证明能为他们在考试中赢得不少分数。虽然这些学生都能写出证明，却无法利用刚刚写下的证明中的必要细节，画出作图（即证明中描述的对象）。尽管学生的证明是“正确的”，但他们对刚刚描述的内容所形成的概念，并不足以使他们在面对 Schoenfeld 随后提出的任务时作出进一步推理。

在 Schoenfeld 所识别的意义建构类型中，大多数教师似乎希望学生在数学发展过程中遵循既定的数学文化（即用认知主义术语来说，与数学家普遍具有的概念意象相一致），同时还要求学生恰当地赋予符号以意义。然而，学生的行为、模式识别和规则创建，可能会让他们看起来遵循了既定的数学文化，尽管实际情况并非如此。随着学生在数学专业的学习不断深入，该学生那些特立独行的

规则集可能会越来越难以应付。然而，如果学生拥有一套高度复杂的行动和仪式化常规，那么他们缺乏规范化数学话语这一点很可能不会被察觉。

学生意义建构研究的不同目标包括：考察学生在问题解决中所做的推理和选择，构建学生假设的“知识”结构像并探究何时会调用该结构，以及“知识”结构随时间发生的变化（例如，Adiredja，2021年；Plaxco 与 Wawro，2015年）。意义建构研究比数学教育研究中的学习、理解和知识等术语用法更灵活，也不太可能因这些术语的日常用法而引发意识形态争论，因此，研究意义建构能让研究者在分析学生的数学活动时，将环境中的所有相关特征纳入考量。

关注意义建构有助于洞察书面课程、实施课程与达成课程之间的不一致，也使教师能够调整教学，针对各种意义建构模式进行教学。通过考察学生的思维及影响这些思维的因素，我们可以提出改进证明教学的建议。关于信念、成功/失败策略和观念的既有研究发现，可为学生证明构建尝试的“是什么以及为什么”提供背景，而关注意义建构则有助于阐明学生数学活动的“谁、什么、何时、何地、为什么以及如何”。Schoenfeld 对意义建构的分析提出了重要问题：(1) 学生是否知道自己何时偏离了既定的数学文化？(2) 如果学生意识到了这一点，这是有意为之的吗？

我注意到，许多学生确实觉得数学毫无意义。Schoenfeld（1991年）指出：“他们信任教师；问题所处的学校情境迫使他们表现出学校式的行为；他们认为问题应该是合理的，应该能从题目给出的数据中推导出答案，等等”（Schoenfeld，1991年，第320页）。这种预期使学生放弃批判性思考，也不再自然而然地质疑呈现给他们的内容。学生并不认为自己对数学拥有自主权。如果问题是由教师——课堂中的权威人物——提出的，那么学生就会认定问题必然有解，只不过也许只有教师才能完全理解。Schoenfeld将这种状态称为“非推理”或“意义建构暂停”，并将意义建构暂停定义为“暂不要求问题陈述合乎逻辑”（Schoenfeld，1991年，第316页）。他进一步指出，这种“非推理”源于学校教育本身的性质。他指出

> 这一论点的核心是：课堂（更广泛地说，学校）是文化环境，其中的日常活动与实践界定并赋予其中学科内容以意义；文化传递的意义——学生通过身处其中的经历而逐渐理解的数学内涵——未必与预期的意义相符。（Schoenfeld，1991年，第320页）

学生倾向于处于非推理状态，这可能对课程产生深远影响。

意图意义与学生最终理解的意义之间的差异，在课程语境下由 Kilpatrick（2009年）作了很好的阐述；课程可分为三个有时会相互重叠的阶段：意图阶段（在其他文献中也称为书面课程）、实施阶段（在其他文献中也称为实施课程），以及达成或实现阶段。

意图课程反映管理者或课程编写者的观点，实施课程反映教师的意向和观点，而达成课程反映学生的观点（Kilpatrick，2009年）。当三个阶段彼此协调时，预期学生能够按照课程负责者的意图，准确地掌握并理解内容。教师对所教内容的意向可归入实施阶段，而学生在接受教学结束时所具备的知识结构，则可归入达成阶段。因此，问题在于，学生在课程中所获得的“意义”往往与教师和课程编写者的意图截然不同。但是什么导致了各阶段之间的不协调？如果假设教师按照书面课程（意图课程）实施课程，但学生的达成课程仍各不相同，那么各阶段之间的脱节可能归因于个体学生认知层面的差异，以及对该认知产生影响的环境影响[3]。

Schoenfeld 提出了一种可能的解决方案，以应对数学教育研究中未经过操作化便使用“学习”和“理解”这两个术语所引发的认识论与本体论问题：将这些用法统一归于“意义建构”这一名称之下。然而，尽管 Schoenfeld 用“知识”来描述研究人员无法观察到的学生心智状态，他仍大量提及“知识”。我再次强调，研究人员充其量只能对学生的话语（口头或书面）进行推理，并根据这些推理得出结论。然而，Schoenfeld 认为学生所进行的意义建构包括模式识别、规则创建、符号运算、行为和规范遵循，而这些都可以用 Sfard 的共思理论中的精确术语加以解释。

我通过以下方式将 Schoenfeld 和 Sfard 的论点联系起来：（1）Sfard 所说的行动涵盖了符号运算；（2）行为和模式识别则体现在 Sfard 的常规之中，而常规也包括仪式；（3）模式识别和规则创建也可以被视为学生创建的叙事、对象层规则和元规则；（4）如果学生使用的对象层规则和元规则与规范化数学话语相符，那么根据 Sfard 的理论，它们就会被视为认可的叙事和规范；使用规范化数学话语即是遵循既定的数学文化。因此，Schoenfeld 对意义建构的描述与 Sfard 的共认知理论相容，所以我将把意义建构操作化为围绕对象展开的话语参与者特定的话语集合。在本研究中，这些对象具有数学性质。

Sfard（2008年）的交际认知理论独具特色，它使研究人员能够在不对学生心理状态进行客体化的情况下讨论学生数学，同时又涵盖了用于研究学生数学的主要理论和分析工具的思想。交际认知已被用于研究诸多主题，其中包括：七年级学生如何在此前未接触过函数的情况下发展其函数话语（Nachlieli & Tabach，2012年）；动态几何环境在提高儿童识别形状能力方面的作用（Sinclair & Moss，2012年）；学生非正式代数话语向正式代数话语的变化（Caspi & Sfard，2012年）；书面课程与实施课程的等价性（Newton，2012年）；以及语言对数学学习的影响（Kim、Ferrini-Mundy与Sfard，2012年）。交际认知中的统一性理念是常规。为了讨论在学生证明、单射和满射以及分析

[3] 我将具身认知（Nunez、Edwards 和 Matos，1999）纳入认知范畴。关于我的观点与 Sfard 将具身化视为自动化这一观点之间的对比，可参见我的研究方法。

学生数学这些领域中已经开展的先前工作，我将偶尔使用这些研究人员所采用的术语。在适当情况下，我将使用交际认知的术语来操作化经客体化的词汇，或明确区分术语的交际认知用法与其他用法。

证明与证明过程研究。

过去几十年来，研究者多次尝试找出学生在证明方面遇到困难的潜在原因（例如，Moore，1994年；Dreyfus，1999），也提出了相应的解决方案（例如，Carrascal，2015；Edwards & Ward，2004年）。Selden & Selden（2008）推测，学生如果在高中毕业后继续深造之前有过构造简单证明的经验，或许就能减少或消除证明构造方面的困难。然而，Weber & Mejia-Ramos（2014年）考察了美国大学生和数学家的信念后指出，学生对证明持有的无益信念，可能正是在这类大学前的证明经历中形成的。类似地，Coe and Ruthven（1994）发现，英国接受过以证明为重点的中学课程的大学生，所依赖的证明策略大多已经程式化（其运用方式类似于共识认知仪式，而非共识认知常规），并且依赖于接触相关内容的经历。此外，即使这些学生确实构造出了证明，这些证明也被发现具有局限性（第52页）。过去25年来出现的类似发现表明，目前在较早阶段引入证明，并未解决高等教育阶段学生的证明困难问题，甚至可能使问题恶化。

聚焦于高等教育阶段的证明时，证明研究的探究方向可归为四个主要类别：研究学生的尝试及其对成功或失败的感知、学生和教师的信念、证明理论，以及对认知变化和意义建构的研究。这些类别有时会相互交织。

成功、失败与尝试研究。

旨在考察证明构造是否成功的研究，往往会让研究人员认为具备证明能力的参与者参与其中，并试图阐明这些参与者采用何种方法来构造证明（例如，Savic，2015年）。这些研究的参与者可能是学生、职前教师、数学研究生，也可能是数学家。这些参与者所采用的方法可能由其自行报告（例如，Duffin & Simpson，2002年）。研究设计者随后可能通过创建一个框架或图，将这些参与者的策略概括其中，从而针对学生证明构建困难的问题提出解决方案（例如，Zazkis、Weber、Mejia-Ramos，2015年）。然而，研究人员更常研究学生更广泛的证明构造尝试，并在研究的分析阶段对这些尝试的特征进行分类（例如，Bell，1976年；Weber，2001年）。如果这些尝试中显现出规律，便可据此提出结论并构建框架，以反映成功尝试、失败尝试以及持续采用的学生策略之间的共性。

强调证明尝试失败的研究指出了妨碍学生得出完整证明的常见问题（例如，Weber，2001年；Moore，1994年）。值得注意的是，Moore（1994年）通过考察以往的证明文献，归纳出学生困难的七种类别：（1）未能陈述定义；（2）未能直观地理解概念的含义；（3）证明时未能运用概念意象；（4）缺乏

概括和运用示例的能力；（5）不知道如何根据定义选择证明结构；（6）未能理解数学语言和符号；（7）不知道如何开始证明过程。Edwards & Ward（2004年）在Moore将定义视为学生困难来源这一发现的基础上，进一步考察了学生在证明尝试中对定义的运用，并探讨了学生的信念。尽管参与者在完成任务的过程中可以查阅解题所需的定义，Edwards & Ward仍从学生的任务作答中归纳出四个普遍存在、妨碍证明构造的问题：（1）许多学生对数学定义的分类方式不同于数学家；（2）即使学生能够正确陈述并解释定义，他们运用定义的方式仍不同于数学家；（3）即使显然没有其他行动过程可选，许多学生运用定义的方式仍不同于数学家（第415—418页）。

尽管研究持续指出本科数学学生在证明方面存在困难，但研究表明，即使这些困难被认为可以通过学生掌握概念性知识而得到解决，这也未必意味着学生能够写出证明（Weber，2001年）。Weber考察了他认为具备概念性知识以及运用证明某一陈述所需事实之能力的研究生和本科生。然而，他样本中的研究生能够构造规范证明，而本科生通常无法证明所给出的陈述。Weber将研究生的成功与本科生无法构造证明的失败进行了对比，并得出结论：研究生与本科生之间的关键差异在于，博士生知道哪些定理和技巧会有用，也知道何时采用符号运算是处理问题最有效的方式。Weber将这种能力称为策略性知识。

Zazkis、Weber和Mejia-Ramos（2015年）有意研究了他们认为是“成绩优异的数学专业学生”的学生，以确定这些学生共同采用的策略，以及这些策略是否也能确保遵循这些策略的数学专业学生取得成功。作者向这些学生呈现了一些新颖任务，这些任务所需的知识不超过对第一学期微积分概念的熟悉程度；研究发现，这些学生在创作证明时倾向于采用研究人员所称的“目标策略”和“霰弹枪策略”。在目标策略中，学生“会深入理解自己正在证明的陈述，根据这种理解选择一个计划，构建一个说明该陈述为何为真的图形论证，并将这一图形论证形式化为证明”（Zazkis、Weber和Ramos，2015年，第15页）。采用霰弹枪策略时，学生会“在读完陈述后立即开始尝试不同的证明计划，并在遇到困难的第一时间放弃某个计划”（Zazkis、Weber和Ramos，2015年，第16页）。

在霰弹枪策略中，学生迅速排除某些技巧，是为了找到解决问题最快的方法。如果需要投入太多功夫，学生便认为一定有更好的方法来处理问题（这或许可以归因于个别学生的信念）。另一方面，目标策略被描述为需要深入理解当前任务，以确定所要求的结果为何成立。尽管作者并未声称这些技巧是成功学习高等数学的必要条件，但研究中“成功”完成证明任务的六名学生都采用了这些策略。

如前文所述，霰弹枪策略类似于 Duffin & Simpson（2006）所描述的穷举法，其中作者认为，这类强力法

需要大量接触各种技巧，这意味着学生必须掌握足够多的证明策略，才能取得成功。Duffin & Simpson 发现，随着学生数学教育水平的提高，这种技巧会变得无效，或者导致证明失败；最终，学生一旦进入研究生数学课程，便会完全放弃这种方法（Duffin & Simpson，2006）。霰弹枪策略或穷举法，与高等数学课程对学生的要求背道而驰。

学生和教师对证明的信念。

证明特定信念研究关注参与者对证明的信念，并能帮助我们理解参与者在证明活动中为何会做出特定选择（例如，Knuth, 2002年；Weber & Mejia-Ramos, 2014年；Balacheff, 1988；Brown, 2017年；Stylianou, Blanton, & Rotou, 2015年）。这类研究通常有三种形式：（1）学生对何为证明的信念；（2）[illegible]列如，Healy & Hoyles, 2000）；以及（3）对何种证明具有说服力的信念（Knuth, 2002年）。尽管有许多研究探讨了这些类型的信念，但与本研究相关的文献比较了大学教师和／或数学教育研究者与学生、职前教师及在职教师的信念。

在大学阶段，数学教授表示，他们在数学课程中讲解数学命题的证明时，假定学生能够跟上并理解这些证明；然而，当要求这些数学专业学生独立证明同一数学命题时，他们在复述证明时会诉诸于重复教授使用过的词句（Weber & Mejia-Ramos, 2014年）。Weber 和 Mejia-Ramos 还发现，许多学生对证明阅读和证明目的持有以下四种“无益”的信念中的若干种：（1）学生认为，不应要求他们论证给定证明中的陈述。如果证明中给出了某个陈述，学生便认为应明确说明该断言如何由先前的断言推出；（2）学生认为，理解一个证明完全等同于理解证明中每个陈述是如何得到论证的；（3）学生不认为研读证明是一个耗时的过程；（4）学生认为，不应要求他们绘制图示来帮助理解证明。如果图示有助于学生理解证明，那么就应该在证明中提供该图示。

这些信念与教授认为学生理解证明所必需的条件相悖（例如，证明构造需要时间、绘制图示有所帮助等）。Weber 和 Mejia-Ramos 的研究结果表明，这种信念冲突导致数学专业学生无法达到教授对其自主能力和时间安排的要求，进而未能实现数学课程所预期的数学目标。学生模仿教授的解释，可能表明学生过度依赖回忆是他们在证明构造方面遇到困难的一个原因。

Knuth（2002年）运用数学教育工作者对证明在数学中所起作用的五种常见观点，考察中学数学教师的证明观念。证明在数学中所发挥的五种作用是：（1）验证陈述为真；（2）阐释陈述为真的原因；（3）交流数学知识；（4）通过发现创造新的数学；（5）通过系统化陈述建立公理系统（Knuth，2002年）。Knuth发现，教师关于证明作用的信念与这五种常见观点相似。参与者认为，证明的作用是

：（1）确立真理；（2）解释；（3）数学交流；（4）知识创造／结果系统化；然而，这些信念仅适用于中学数学情境（Knuth，2002年，第386页）。本研究中没有教师指出证明的作用是促进理解；教师依据陈述的真伪来判断所看到的论证是否为证明。当不确定陈述的真伪时，参与者会借助经验性证据来确立确信。

对我的博士论文研究尤为重要的是考察教师评价论证的方法。本研究中的教师获得了五个命题，以及每个命题对应的三至五种证明构造，用以论证这些命题（Knuth，2002年，第391页）。证明构造所采用的方法各不相同。参与者被要求按照一到四的量表对每个论证的有效性进行评分[4] 其中，1分代表教师认为该论证是非证明且无效的论证；设置2分和3分，是为了让教师表达他们认为该论证是证明或不是证明的不同程度的信念；4分则代表他们认为该论证有效。参与者在识别有效论证方面表现出很强的能力，但也将许多非证明评为证明（Knuth，2002年，第391页）。

参与者用于评价论证的标准包括：（1）有效方法，即依据所采用的“形式”方法，而非所使用的推理来判断；（2）数学严密性，即依据证明中的推理来判断，而不考虑所用方法；（3）充分细节，即依据参与者能否理解论证来判断；（4）知识依赖性，即依据理解论证所需的专门知识来判断。细节和知识依赖性用于将论证归类为证明或非证明，而评分的差异则基于教师对方法有效性和数学严密性的看法。最后，最常使参与者信服一项证明的特征包括：（1）具体特征（即使用视觉表征中的特定值）；（2）熟悉性；（3）足够的细节；（4）一般性；（5）证明“说明了原因”；（6）有效方法；以及（7）这一组中的所有论证同样令人信服（Knuth，2002年，第398页）。我预计，参与者在评价证明构造和证明有效性时所采用的许多标准，将与我的博士论文研究中学生参与者所采用的方法一致。

证明理论。

Harel & Sowder（1998年；2007）的证明图式理论（例如 Lee，2015年）为判断学生在个体化过程中可能所处的位置提供了有价值的框架，不过这一过程不一定是线性的，学生也可能同时拥有多个图式。具体而言，作者指出，这些图式代表认知发展的一个阶段，并与智力能力相对应。一个人的证明图式由对该人而言构成确证和说服的内容组成（Harel & Sowder，1998年；2007）。Harel & Sowder（2007）绘制的图示呈现了他们对证明图式类型的辨识与分类，见图3。

[4] Knuth（2002年）采用四点评分量表，为我在学习中对教师参与者使用四点评分量表提供了先例支持。相较之下，我允许教师参与者根据自己的叙述偏好来定义其四点评分量表，并且不对学生证明构造的有效性作出判断。关于叙述评分的进一步讨论，请参阅我的研究方法。

图像已删除

图 3：证明图式示意图。转载自 Harel, G. 与 Sowder, L.（1998）。《学生的证明图式：探索性研究的结果》。载于 A. Schoenfeld、J. Kaput 和 E. Dubinsky（丛书编辑）：《数学教育问题：第 7 卷，大学数学教育研究 III》（第 234–283 页）。doi：10.1090/cbmath/007

证明图式主要分为三类：外部证明图式、经验型证明图式和分析型证明图式。外部证明图式指代表学生之外的一种确信，可分为三类：权威型、仪式型和符号型证明图式。对于这些图式，Harel & Sowder 指出："过早强调数学中的形式化，会使学生认为仪式和形式构成了数学论证。当学生只是照着公式解题时，他们学到的是，保证成功的是对规则的记忆，而不是创造力和发现"（Harel & Sowder，1998年，第246页）。

外部证明图式可以根据用于说服自己的依据概括如下：

- 仪式——论证呈现的仪式。可接受的证明是看起来符合学生对证明预期的证明。
- 权威主义——权威（讲师、教科书等）所说的话。数学被视为已经完成的真理，学生几乎无法对其产生影响。
- 符号的——论证的符号形式。操作符号时，不涉及其含义，也不考虑如何使用这些符号的参数。

第二类证明图式是经验型证明图式。这些证明图式"通过诉诸物理事实或感官经验来验证、质疑或推翻"（Harel & Sowder, 1998年，第252页），并分为两类：归纳型和感知型。具有归纳型证明图式的学生会通过定量验证来说服自己；这些学生会提出

数学论证，检验一个或多个实例中的具体论证。如果这些学生发现了某种模式，他们对论证真实性的信念就会增强。关于感知型证明图式，作者指出：“感知观察是借助初级心理图像进行的——这些图像由感知及感知的协调构成，但缺乏转化或预测转化结果的能力。初级心理图像的重要特征是，它们忽视对象上的转化，或无法完整、准确地预测转化结果”（Harel & Sowder, 1998年）。

最后也是最大的证明图式类别是分析型证明图式。它可以被描述为一种“通过逻辑推演来验证猜想”的证明（Harel & Sowder，1998年）。分析型证明图式的两个主要子类别是变换型证明图式和公理型证明图式。尽管这些证明图式还有子类别，但在本文的文献综述中，我不会进一步细分这些子类别。变换型证明图式的特点是学生能够预见结果。采用这种图式时，学生的行为具有明确意图，并且“涉及运算以及对运算结果的预期”（Harel & Sowder，1998年，第258页）；随着学生在数学学习中逐渐成熟，他们应当朝着这种证明图式发展。这种证明图式的其他显著特征还包括学生能够在头脑中转换像，以及能够考虑论证的一般性。公理型证明图式指的是“一个人认识到，至少原则上，数学论证最初必须源自未定义术语和公理（事实或未经证明便被接受的陈述）”（Harel & Sowder，1998年，第273页）。作者指出，这种证明图式的局限在于：“然而，他或她可能只能处理与其直觉或自明观念相符的公理……”（Harel & Sowder，1998年，第273页）。

大多数学生被认为拥有权威型证明图式，而 Harel & Sowder（1998）指出，学校教育对学生发展出此类图式具有重要影响。他们指出：“这始于初等数学阶段：儿童被迫仓促地使用数学规则来解决算术问题（Harel，1995）；并延续至中等及高等教育数学阶段，在整个课程中，强调的是工具性理解，而非关系性理解”（Harel & Sowder，1998，第247页）。因此，这种学生学习数学的方式可能落入 Schoenfeld（1991）所称的“无意义建构”范畴；学生进行数学活动时，很少关注其意义。

依据 Harel & Sowder（2007）的证明图式框架，采用目标策略（Zazkis, Weber, & Mejia-Ramos, 2015）的学生很可能会被归类为具有分析型证明图式，而使用穷举法和散弹枪方法（Duffin & Simpson, 2005）的学生则很可能会被归类为具有权威型证明图式。然而，很难确定这些学生围绕所评估概念的话语是否符合规范。这一点很重要，因为 Harel & Sowder 的理论明确将专家证明话语视为理想范例。在这项学习中，被归类为具有变换型证明图式的学生，仅仅是根据研究者对学生动作的解释而被赋予这一类别。作者没有探究学生尝试完成任务时的意义建构过程，而是试图对学生在证明构造中的选择进行分类。理论上，散弹枪策略和目标策略都要求学生接触大量证明示例，这很可能会使学生形成一种比分析型更具仪式化特征的证明图式（按照 Harel & Sowder 的定义）。简言之，虽然 Weber 证明了具有学科“知识”的学生仍可能在证明构造上遇到困难，但我认为，学生也有可能在缺乏学科知识的情况下成功进行证明

构造。Harel & Sowder 框架并未探讨非证明类学科知识的作用，以及这类知识如何体现在各类图式之中。

Harel & Sowder 所定义的证明图式中有趣的一点，是将外部证明图式与分析型证明图式区分开来。尽管 Harel & Sowder 指出，学生可能同时拥有多种证明图式，但 Sfard 的共思理论或许可以用来说明：实际上持有外部证明图式的学生如何可能被错误地归类为拥有分析型证明图式，尤其是在学生拥有丰富的证明经验并广泛接触过证明的情况下；这些经验会帮助他们细致地调整自己的一套适用条件。适用条件被定义为这样一些规则，即“通常以非确定性的方式界定在何种情形下，该常规行动过程可能会被个体唤起”（Sfard，2008，第209页），而学生会利用特定任务情境中关键词里的自身线索来进行判断。Sfard 关于常规的观点，尤其是 Sfard 对仪式和行动的定义，仍可能存在于被归入这些证明图式中的学生身上。特别是，如果学生能够成功协调多种仪式，以构造出符合其课程教师期望的证明，那么分析型证明图式在本质上仍可能是仪式化的。

单射与满射函数研究。

过于关注证明构造的成功与失败，可能会掩盖学生实际参与内容学习的程度。单射映射与满射映射广泛存在于抽象代数和实分析等高阶数学课程中，学生必须依靠进入这些课程时已有的关于函数的话语，才能继续顺利学习数学。然而，关于学生对单射和满射“理解”的研究非常少（Thoma & Nardi, 2020；Bansilal, Brijlall, & Trigueros, 2017），这可能是因为学生能够在此类任务中进行仪式化的表现，从而达到教授的要求。相比之下，人们对函数这一母题投入了更多关注，而现有关于学生在单射和满射方面困难的信息，很大一部分是研究学生对函数“理解”的副产品（例如 Moore, 1994；Breidenbach 等，1992）。值得注意的是，函数对高中生而言构成了极大的困难，而且在许多情况下，甚至他们的教师也并不完全了解函数话语中的规范（Briendenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992；Dubinsky & Wilson, 2013）。自然地，对函数话语感到困难的学生，很可能也会在单射函数和满射函数的话语方面遇到困难。

据 Selden & Selden（1992年）的汇编，学生在……方面表现出相当大的困难
函数话语源于以下与数学共同体规范相冲突的常见学生对象层规则：（1）函数必须是一个公

数必须得到
的一
的
一
用于

函数的定义，以及学生用于识别函数的个人元规则（Selden & Selden，1992年）。

此外，学生的实现可能在很大程度上取决于函数如何被指示。函数的常见表征有：（1）

Dubinsky & Wilson（2013）指出，如果学生能够根据多种表征识别函数和单射函

对于持有前文所述任一种话语的学生而言，要在函数范围内建构并运用关于满射和一对一的规范化话语，就必须遇到某些任务情境，迫使他们因自身话语与当前对其的要求相冲突，而放弃或扩充自己关于函数的话语（Sfard，2008）。Sfard 将任何在人际或人内层面上，试图跨越不可通约的话语进行交流的情境称为交际认知冲突。学生或教师意识到这种冲突后，应尝试解决冲突。如果一个关于函数的话语尚未规范化的学生，从未遇到会引发冲突的任务情境，那么他们就没有改变自己话语的动力。现在我将考察一对一和满射的两种定义。

Smith、Eggen 和 St. Andre（2014年，第205-208页）对一对一函数和满射函数的定义如下：

(1a) 函数 $f: A \to B$ 是从 B 上的满射（或称满射）当且仅当 Rng(f) = B(2a) 函数 f: $A \to B$ 是一对一的（或称单射）当且仅当每当 $f(x) = f(y)$ 时，则 $x = y$

如下：

而 Chartand、Polimeni 和 Zhang（2017年，第256—257页）给出了以下定义：

(1b) 函数 $f: A \rightarrow B$ 是满射或满射函数，当且仅当陪域 B 中的每个元素都是某个元素的像

A

(2b) 若对于任意 $f(x) = f(y)$，其中 $x, y \in A$，均有 $x = y$，则称函数 $f: A \rightarrow B$ 为一对一函数

在共认知的术语中，这些陈述是关于单射函数和满射函数的专家认可的叙述。函数 f 被称为从 A 到 B 的满射函数，即当在 A 中的每一点对 f 求值时，所得到的构成值域的对象集合为 B。也可以这样表述：对于 B 中的每个 y，都存在 A 中的某个 x，使得 $f(x)= y$，并且这种关系不一定是唯一的。为了证明一个函数是单射，学生必须回忆：如果函数在定义域 A 中两个点处的值域（Rng）B 中的值相同，那么从定义域中选取的点必定是同一个点。换言之，每当在其定义域中的任意一点对 f 求值时，它都会映射到值域中的唯一一点。定义域和陪域并不局限于自然数、整数、实数等数域，非数值对象的集合也可以作为定义域和陪域。例如，大学可以为学生分配一个由八位数字组成的唯一标识符，其中所有学生姓名的集合为定义域，所有被分配的标识符为值域。对于这些学生中的每一个姓名，都有一个过程可以生成唯一的八位标识符。如果有两名被认为是不同的学生却显示出相同的标识符，那么这两名学生必定是同一个学生。

Moore（1994年）给出了单射（一一函数）的以下等价定义：

(1) 函数 f 是一对一的，当且仅当对于定义域中的任意 x 和任意 y，若 f(x) = f(y)，则 x = y

(2) 若 f 中任意两个不同的元素的第二项都不相同，则称函数 f 为一对一函数

第一种定义在大学课堂和教科书中最为常见，也是 Smith、Eggen 和 St. Andre（2014年）以及 Chartand、Polimeni 和 Zhang（2017年）所采用的定义。Moore 认为，这一定义为学生提供了一种证明函数为一对一函数的方法。这种方法需要在两个任意点处计算 f 的值，然后推导出一个等式；也可以通过推导出矛盾，证明函数不是一对一函数。Moore 指出，学生可能难以将第二种定义（有序对视角）与第一种定义协调起来。我注意到，与其他来源相比，教科书作者和 Moore 给出的一一函数定义在表述上都略有不同。

Moore 断言，学生有时“知道”某个定义，却无法在证明中使用该定义。他举了一个学生的例子：该学生能够使用第二个定义给出一一函数的示例和反例，但无法证明一个

即使采用第一种定义，也应将函数称为一一函数。此外，Moore 发现，学生之所以遇到困难，是因为他们不理解给定的一对一问题的假设；这又反映出 Moore 所指出的另一种与内容本身无关的证明困难：无法理解和运用数学语言。从共认知视角来看，以这些方式遇到困难的学生，可能没有将任何实现或常规与定义中的能指联系起来。

这些关于函数、单射和满射的先前研究表明，问题的提出方式，以及任务情境内外可能充当关键词的能指和实现，对学生进行证明构造而言，可能与不熟悉定义一样构成障碍。即使熟悉相关定义，学生仍可能难以构造证明，尽管可供利用的定义已明确呈现。这些反常现象为我制定本研究所需的方法提供了参考。

第三章：方法

请回忆一下，我旨在回答以下问题：

1. 在过渡到证明课程的过程中，本科数学学生以何种方式理解并建构对单射、满射和证明教学的意义？ 2. 教师以何种方式理解并建构对证明、单射函数和满射函数的意义？ 3. 学生的单射与满射话语与教师的话语有何不同？

交际认知研究者在参与论者中独树一帜，因为其将数学视为话语。将话语置于分析单位的位置，使交际认知研究者能够在开展、分析和报告研究时，最大限度地减少对参与者的解释、客体化以及随后的主体化。尽管这种定位旨在产出能够维护参与者话语完整性的研究，并且在使用研究人员的声音时使其最小化且清晰可辨，但交际认知研究者承认，研究人员本身的存在就可能影响话语和活动。考虑到这一限制，Sfard（2008年）主张，交际认知研究必须遵循五项方法论原则：

- 操作性原则——研究人员必须关注清晰性，并防止自己产生误解。通过对任何具有客体化用法的术语进行操作化，可以实现有效交流。例如，在数学教育研究中，知道、学习和理解这些术语的用法差异很大。它们分别描述了不可知的状态，因此在交际认知研究中使用之前，必须对其进行操作化。我所创建的任何框架或编码都必须经过操作化。
- 完整性原则——学习的目标应是围绕研究对象的全部话语。本学习使用单射函数和满射函数来探究证明构造中的意义建构。因此，数学话语是分析单位，尽管我要求参与者呈现该话语的一部分。学生

在访谈中的话语与分析相关，无论这些
话语特指证明、单射函数或满射函数。

- 情境性原则——一切形式的交互都是学习事件。数据必须置于其情境中呈现。交际认知研究者必须努力“全面记录人类交互”（Sfard，2012年，第8页）。• 交替视角原则——交际认知研究者在分析数据时，必须同时以局内人和局外人的身份行事。研究者与参与者的话语可能不可通约。转换为局外人的角色，有助于研究者排除源自自身经历和偏见的解释。这样，任何阅读研究的人都可以自行得出结论。

- 直接性原则——交际认知研究者应直接报告结果，不加入主观评论。交际认知研究者首先报告参与者说了什么或做了什么。研究者呈现的叙事应明确指出，它们并非“关于世界，而是关于参与者对世界的叙事”（Sfard，2012年，第8页）。研究者据此作出的任何推论性叙事，同样不是关于世界，而是关于研究者对参与者关于世界的叙事所作的叙事。

这些原则与我为回答研究问题而提出的方法一致。初步可行性研究的结果为本文将要描述的方法提供了依据，关于该可行性研究的详细信息见附录 H。在本研究过程中，我将结合使用田野笔记、半结构化临床访谈（Clement，2000；Patton，2015）、基于任务的访谈（Goldin，1997，2000；Maher 与 Sigley，2014），以及对概念图的改编（Novak 与 Cañas，2008；Novak 和 Gowin，1984；Novak、Gowin 与 Johansen，1983；Williams，1998）。我这项研究第一阶段的主要目标是生成研究材料，帮助我预测第二阶段参与者的唤起的话语，并建立典型学生解题路径的模型。与第二阶段参与者进行初次临床访谈的目标是生成

研究阶段	预定时间安排	备选时间安排（第一阶段2发生于2022年秋季）
第一阶段–个体学生阶段和持续进行的分析	二月底/三月初 – 2022年4月	二月底/三月初 – 2022年4月
第二阶段 – 基于课堂的研究阶段，与教师及同意参与研究的学生	5月下旬至8月初 2022	7月下旬至12月初 2022
第3阶段 – 最终临床与教师进行访谈以及整个研究数据分析	2022年7月下旬至8月	2022年12月
第4阶段（可选）– 重复第2阶段和第3阶段	8月初至12月 2022	2023年1月至5月

能够近似反映课程教师和学生参与者在证明入门课程中接受任何教学之前的函数话语的数据。随后，在本阶段剩余时间里，我将在整个学期中进行基于任务的访谈。第3阶段将在

学期结束后进行，届时我将与课程教师进行一次最终临床访谈。本章将阐述我专门聚焦于过渡到证明课程中的学生、研究的大学环境、数据收集方法，以及我拟议的数据分析，并以开展交际认知研究的五项原则为依据。我还列出本研究的两种可能时间安排，具体取决于基于课堂的研究阶段何时开展。

参与者与研究环境

本研究的参与者包括：(1) 修读面向数学专业学生的证明入门课程的本科生，不论该课程的教师是谁；(2) 证明入门课程的教师；以及 (3) 教师参与者同意参与研究的学生。研究第一阶段不依附于任何课堂或教师。我将通过在 UGA Aderhold Hall 发布研究招募信息、获得院系许可后通过院系电子邮件列表向学生发送邮件，和/或请教授明证明入门课程的教师将研究招募信息发送给他们的学生，以招募参与者。参与这一阶段的学生必须修读过渡到证明课程，预计将有 3 至 7 名学生参与此部分研究。研究第2阶段和第3阶段关注一位或多位教师及其课程中的学生。我将通过课程教师发送电子邮件来招募参与者。此外，我还会请教师在课堂上发布研究招募信息。研究其余阶段的教师人选，将根据课程教学的典型性来确定；判断依据是将以往的课程大纲与多所院校教师编写的教学大纲进行比较。以往的证明入门课程大纲应清楚列出课程安排与内容、课程形式、教师的课程目标、对学生的要求以及计划使用的课程教材。典型性将根据样本教学大纲中所列的教学内容和课程形式进行评估。

如果基于课堂的研究部分可供选择的教师有限，我将开展一个额外的基于课堂的研究阶段（第4阶段），以实现课程教学典型性的目标。这将通过为分析接受典型教学的学生与接受非典型课程教学的学生之间的比较数据，强化我的学位论文的整体目标。当前，过渡到证明课程中一种非典型的教学方式，是采用翻转课堂或主动学习形式，而非传统讲授形式。若其他典型性条件均得到满足，单学期和双学期课程的教师仍将被视为具有典型性。所选教师的证明入门课程中的所有学生都将获邀参与基于课堂的研究中的初始培训和话语图环节。经验证学生能够按照培训指南绘制分数的话语图后，将邀请其继续参与研究。我希望邀请十名学生参加首次临床访谈，至少六名学生参加第二次访谈。理想情况下，三名学生将完成第四次访谈。

话语图

概念图。

鉴于利用实现树研究话语发展的历史文献有限（例如，Sfard，2008年；Caspi 与 Sfard，2012年；Newton，2012年；Heyd-Metzuyanim，2012年；

Weingarden、Heyd-Metzuyanim 与 Nachlieli，2019年），我在数学教育文献中寻求其他依据，以支持在我的研究中使用这些工具。Sfard（2008年）提出的感知上易于理解且具有层级性的交际认知实现树，以及作为其符号制品对应形式的符号树，在外观和特征上都与概念图相似（Novak 与 Cañas，2008年；Novak 和 Gowin，1984年）。概念图的开发旨在将知识结构可视化，以帮助学生和教师加深对某一概念的“理解”（Novak 和 Gowin，1984年）。请记住，在交际认知框架中，概念一词被从话语角度定义为一个词或能指及其用法（Sfard，2008年）。

概念图通过将词语放入图示中，并用线条连接这些词语来表示它们之间的联系。通常会在线条上标注连接词（Novak 和 Gowin，1984）。当两个对象与它们之间的连接词连在一起阅读时，对图的作者而言，它们应当构成有意义的命题，且整幅图应呈现层级结构。这些图是在认知主义观点下发展起来的，不过 Novak 和 Gowin 在描述概念图时，充分强调了语言在描述规律和促进有效交流方面的作用。Novak 和 Gowin 对语言的关注，增强了概念图与交际认知视角的契合度，使其适用于分析学生话语的变化，以及学生话语与教师话语之间的差异。

概念图已被用于研究微积分课程中教师、传统课程学生和改革课程学生之间在函数“概念”方面的差异（Williams，1998），以及研究高增益和低增益学生之间函数知识结构的差异

图像已隐藏

图4：为数学复习课程构建的代数概念图。转载自 Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984).《学会如何学习》，第78页。纽约，纽约州：剑桥大学出版社。

（McGowen 与 Davis，2019），并用于评估工程能力（Watson、Pelkey、Noyes 与 Rodgers，2016）。当与学生表现的传统成就测量（例如 SAT）一同考察时，Novak、Gowin 与 Johansen（1983）发现，鉴于学生可自主决定在其概念图中纳入和呈现有关概念的哪些内容，概念图能更好地说明学生对概念的参与程度。然而，他们也发现概念图与课程成绩之间没有相关性，而 SAT 分数与课程成绩则高度相关。这可能表明，SAT 分数和课程成绩衡量的是学生活动中相似的特征；基于 SAT 的传统特征，我假设这些是可以被评估为“正确”与“错误”或“完整”与“不完整”的特征。需要提醒的是，这些图被要求具有层级的结构。值得注意的是，众多关于概念图的研究已确立了其记录和探索概念变化的有效性（Williams，1998，第417页）。具体在数学定义域内，Park（1993年）发现，大学微积分课程学生的概念图评分与后测分数之间存在很强的相关性。需要说明的是，概念图评分（Watson、Pelkey、Noyes 与 Rodgers，2016）的方法可能差异很大，因此会影响其与传统成就测量的相关性。就本研究而言，我不希望建立一个通常依赖于层级的评分系统。我感兴趣的是评估概念图连贯性，并将其与参与者自身的话语相联系。

调整概念图以用于交际认知分析。

为了调整概念图，使其适用于本学位论文，有两个关键特征需要修改。首先，Novak 构想的概念图具有层级结构。然而，在数学领域，许多数学符号、词语和表征在特定条件下可以互换；而另一组条件则可能限制或扩展可互换数学对象的范围。因此，概念图中的层级概念不适用于数学。此外，随着概念不断发展（例如课程中的学生），不应期望作者能够辨认词语之间的层级关系。即便鉴于概念图在数学教育研究中的先例和多种应用方式（例如 Williams，1998年；McGowen 与 Davis，2019年），我决定舍弃概念图中的层级结构，我也仍需说明为何可以取消实现树中的层级要求。为寻找支持或反对这一决定的依据，我重新审视了 Sfard 最初提出的交际认知理论。

尽管我与 Sfard（2008年）都认同，符号制品通常可以互换，因此能指—实现二分法往往并不存在（第164页），但 Sfard 并未提及符号树是否具有层级这一特征，也未提及其是否缺少这一特征，而实现树则不然。在《作为共认知的思维》（Sfard，2008年）中引入符号树这一术语后，Sfard 在文本余下部分交替使用实现树和符号树；这似乎表明，符号树也应具有与实现树相同的性质。此外，Sfard 指出，实现树依赖于唤起情境，因此是不完整的；她明确表示，研究者不可能为某位参与者构建一棵完整的实现树。若无相反证据，我认为这一观点同样适用于符号树。

我重新将重点放在寻找 Sfard 对取消实现树的层级要求所提供的隐含支持上。Sfard 指出：“……一个词、代数符号或

图标应被视为能指还是能指的实现，取决于其使用方式，而非这些研究材料的任何内在属性”（Sfard，2008年，第164页）。然而，Sfard 的观点似乎支持我希望运用实现树或符号树来学习话语的方式。她提到，探索一个人的话语的一种方法，是考察此人对某个能指的所有用法。事实上，这正是 Sfard 对数学对象的定义。回忆一下，Sfard 指出：“数学对象是具有鲜明数学指示物的抽象话语对象”（Sfard，2008年，第172页，原文着重）并且，由 S 所指示的话语对象在一个



图5：复合短语能指与一种可能的部分实现树。该短语通过一系列娴熟的实现过程逐步展开，以确定讨论的对象。转载自 Sfard, A.（2008年）。《作为交流的思维：人类发展、话语的增长与数学化》。剑桥大学出版社。

话语中关于 S 的话语被定义为“该话语中 S 的实现树”（Sfard，2008年，第166页）。作为论证取消实现树层级要求的最后一环，Sfard 对实现树作了如下说明：

> “首先，实现树以及数学对象都是个人建构，尽管它们源自公共话语，而公共话语仅支持此类树的某些版本。作为研究人员，我们可以尝试绘制个人实现树，并将其呈现在图示中……其次，实现树是有关特定个人话语的宝贵信息来源。从一种实现熟练地过渡到另一种实现，是数学问题解决的要旨。此外，一个人将数学话语应用于解决实际问题的倾向，取决于她能否将能指分解为实现树，并使其分支足够长，从而延伸至

> 话语之外，触及熟悉的现实生活对象和经验……这一最后的陈述引出了我的第三点。在分析对话文字记录、试图绘制话语对象时，需要记住，这些个人建构可能高度依赖具体情境；尤其是，它们很容易受到对话参与者以及特定交互中其他具体因素的影响。”（Sfard，2008年，第166页，原文着重）

Sfard 最初对层级的预期，源于她断言数学具有层级性；在规范化数学话语中，我倾向于认同这一点。如果我代替参与者创建实现树，就可以利用自己作为专家数学话语内部人士的身份，以层级的方式组织这棵树；然而，这种结构可能

图片已隐藏

图6：基本二次函数的部分实现树。转载自 Nachlieli、T. 和 Tabach、M.（2012年）。《课堂中数学对象的成长——以函数为例》。《国际教育研究杂志》，51–52，10–27。

未必能反映参与者如何使用能指。如果参与者并未以层级的方式描绘或表明自己对某个能指的用法，那么我就没有理由认定这种特定话语具有层级性。作出相反的推断将违背共认知的原则。

根据我对 Sfard 话语的解释，以下做法似乎较为合适：（1）在描绘学生问题解决时，保留实现树的层级结构，因为这体现了参与者对问题的逐步解析。我注意到，Sfard 意在从根节点开始递归展开实现树，在每个后续实现层中保留有关上位指示符的所有叙事，因此，我将忠实于 Sfard 的实现树和符号树的结构称为本研究中的唤起树或树；（2）为了近似呈现参与者在其数学话语中围绕某个能指的基线话语（即参与者对该数学能指的使用），我将创建符号/实现树的任务交由参与者完成（Sfard，2009年），并取消层级结构的要求。当然，参与者仍可选择以层级结构呈现其话语，但即使没有层级结构，其树仍然有效；（3）为了尽量减少为某个能指创建的基线话语的情境性，只向参与者提供能指作为提示。按照 Williams（1998年）使用“无限制”一词指称概念图的方式，在没有特定任务的情况下创建的树称为无限制树。

有趣的是，Williams（1998）对不受限制的函数概念图进行的一项研究表明，在没有提示的情况下，专家倾向于对数学内容进行层级结构化，而学生的概念图中则基本不存在层级结构。鉴于学生话语的发展，不再要求层级结构；同时，学生可以创建自己的图，而不是由研究者创建；此外，评分目的也不需要层级结构，因此我认为，调整概念图时所面临的第一个问题已经得到解决。

已编辑图像

图7：函数的部分层级的实现树。我将此图重新构想为一幅不受限制的话语图。转载自 Newton, J.（2012年）。探究书面课程与实施课程的初中基于标准的课程之间的数学等价性：聚焦有理数。《国际教育研究杂志》，51-52，66-85。

概念图中需要解决的第二个问题是缺乏话语语境。因此，有必要采用概念的话语定义，使概念图与交际认知框架紧密结合。因此，图中的概念应与其使用方式一同被解读为能指。简言之，概念必须被视为由一个词或符号及其使用方式组成的数学对象。由于允许研究中的参与者创作自己的图，我保留了在概念图中使用连接词这一特征。连接词进一步阐明了参与者意图表达的能指的使用方式。通过这两项修改（可选的层级结构和概念的话语定义），我将本研究中使用的图与原始概念图以及实现树区分开来，并将这种不受限制的话语形式称为话语图或话语概念图（其中，概念是以话语方式或纯粹基于语言的方式定义的）。

虽然概念图并不被视为“通向作者思想的窗口”（Novak 和 Gowin，1984），但我打算将话语图与学生绘制的、具有层级结构的唤起树结合起来使用。这些唤起树对应于学生所遇到的特定任务情境，从而更准确地呈现学生思维。由于这些树是在任务情境中作图的，我可以详细描述个别学生的话语是如何组织的，以及这些话语的哪些部分如何在特定情境中被激活和调用。重申一下，这项学习的后一特点承认情境性对学生数学思维与活动的影响。总之，话语图是一种不受限制、无需层级且独立于情境的实现树形式，其根能指是一个数学对象及其用途。本研究要求参与者只讨论函数对象。学生用来描述其连续实现序列的唤起树，是学生试图传达他们对任务情境的解释。他们不需要针对任务情境讨论数学对象的所有用途，而是指出自己阅读任务时考虑到的具体用途。

话语图的效度。

在确立了从概念图和话语图中移除层级的依据后，我最初着重于证明概念图可以解析为交际认知要素。我聚焦于两项研究，从文献中七位不同的参与者那里收集了十幅函数概念图（Williams，1995年、1998年；McGowan 和 Davis，2019；McGowan 和 Tall，1999），并依据 Sfard 所述、使数学话语区别于其他话语的特征，对这十幅图中的每个概念进行了标注；提醒一下，这些特征包括词语使用、符号中介、叙事（包括认可的叙事）和常规。常规进一步分为探索、行动和仪式；探索又进一步分为作图、论证和回忆。我将初步分析限定在数学话语特征层面以及常规类型的子层面。七位参与者中，两位是微积分教师，其余五位是学生。两位学生修读了大学中级代数课程，并在一个学期内绘制了两到三幅概念图。其余三位学生则由传统微积分学生和改革型微积分学生组成，他们的概念图是在课程结束时绘制的。图中的命题被标记为叙事，而图中的其他特征则相对容易地以临时方式进行标注。然而，由于缺乏访谈数据，我无法为将图中的某些部分标记为行动或仪式而非探索提供依据

。我决定进一步分析这些图，以构思如何以类似 Morgan & Sfard（2016）的方式对这些标签进行操作化。

REDACTED IMAGE

图8：改革微积分教师的专家函数概念图。我重新构想了 Williams（1998）所举的概念图示例，将其视为由数学对象及其之间的关系构成的图。转载自 Williams, C. G.（1998）。使用概念图评估函数的概念性知识。《数学教育研究杂志》，29(4)，414–421。

由于我在预期结构之外使用了概念图和实现树，因此我寻求支持，以便将有关概念图效度的既有文献应用于话语图。为此，我需要证明，要求参与者绘制概念图时，他们提供的表征与话语图会高度相似。鉴于图8中函数专家概念图具有层级组织这一特征，我从研究该图入手（Williams，1998）。首先，我作出一个基本假设：不受限制的概念图和话语图都旨在近似呈现某一特定学术领域中一个阶段、词、符号等的全部潜能，且不借助促使人采取行动的附加短语（即任务情境）。随后，我思考参与者在没有帮助的情况下，可能如何在其话语中表征某个短语或词的全部潜能。Williams（1998）和Novak 与 Cañas（2008）都指出，应要求概念图作者先围绕一个能指进行头脑风暴，列出清单；然后再要求他们在必要时使用连接词，将清单整理成概念图。由于没有任务情境来组织这份清单，我推断，地图作者很可能需要反复梳理清单中的规律，才能将头脑风暴得出的实现整理成概念图。

因此，我试图运用我的函数话语，在图8中识别规律。

在未参照交际认知构念的情况下，我以专家数学话语内部人士的视角，构建了类别以涵盖图中的所有特征。由于专家概念图作者倾向于进行分类，我最初的类别在很大程度上遵循了地图作者所确立的类别。这些类别包括运算、常见类型、性质和定义。随后，我对地图作者未明确命名的图特征进行了分类。图8的专家作者围绕函数呈现了一个术语循环；基于连接的双向性，这些术语似乎被视为与函数指称符相同或等价。其余的图特征包括傅里叶级数、泰勒级数、函数的隐式形式、函数的显式形式、表格被展示为函数，以及作为图像的单个函数是一种常见函数。我认为，如果该图包含一个关于函数常见类型的部分，那么未出现在这一类别中的其他函数可能被视为不常见，或者属于一种无法在未被呈现的情况下进一步分类的函数一般类别（即，图中的隐式和显式形式涵盖了所有尚待定义的函数）。该专家概念图具体包含以下命题：(1) 傅里叶级数是一种由极限（亦称为求导）构成的函数形式，极限是对函数进行的一种运算，而这些级数与作为函数常见类型的三角函数相连接；以及 (2) 泰勒级数是一种由幂构成的函数形式（幂由多项式构成），其中多项式是一种常见函数类型。我将常见类型、傅里叶级数、泰勒级数、隐式和显式视为函数的实例/示例；然而，对于这两种级数由图中另一项构成的说明，值得进一步考察。以下是我最初的类别：

图谱规律	如何识别
等价于（其他名称）	与初始短语或词的可互换性 由表示相等的语言或双向性指示 处于同一层级
对其进行的运算（可以对其所做的操作）	操作初始短语或词的方式， 由发生在能指“上”或“对能指”进行的动作或过程表示 “上”的能指
属性/定义（如何它是被谈论的）	描述语／描述该实例的方式 能指
示例（它“看起来”的样子）	表示初始短语或词的一个实例， 由“是一个”“是一些”“类型”“连接”和 uni- 表示 从能指指向示例的方向性， 从属关系

图9：用于描述概念图共同特征的初步类别。

将这张专家概念图归入类别后，我将初步分类应用于一名改革课程学生的函数图（Williams，1998年，第417页）以及一名传统课程学生的函数图

图像已遮挡

图10：传统微积分学生的函数概念图。转载自 Williams, C. G. (1998年). 使用概念图评估函数的概念性知识。《数学教育研究杂志》. 29(4), 414-421.

（Williams，1998年，第418页）。Williams认为，传统课程学生的图表明其概念理解程度在所有参与者中最低；这里的参与者包括专家组、改革课程学生组和传统课程学生组。与专家概念图不同，学生没有将级数纳入函数。传统课程学生确实将“运算”作为一个连接词，不过在函数运算中，他们只列出了加、减、乘、除。我重新考虑了傅里叶级数和泰勒级数，思考它们为何与专家概念图中的常见函数类型分开。我试图找出如何在不直接干预学生绘图的情况下，促使其在函数话语中提及泰勒级数和傅里叶级数的学生在图中将其表示出来。为此，我似乎需要在话语图培训的指导说明中加入一些内容，鼓励学生每次绘图时都主动提示自己。我希望每张图的话语图指导说明保持一致，使绘图过程中唯一的差别仅在于提供的能指不同。

查看专家的图时，我最初认为，将傅里叶级数和泰勒级数描述为其他函数的复合或许恰当。然而，两位学生似乎都没有将导数视为一个极限过程，因此，让学生在分组时考虑他们头脑风暴所得列表中各项的复合，不太可能促使他们纳入例如泰勒级数这样的内容，即使泰勒级数属于学生话语的一部分。值得注意的是，学生们确实在各自的图中纳入了导数和微分。借助传统课程学生的图，我认为，如果微分在学生话语中的组织方式符合我所列的规律，那么加法、减法、乘法和除法这些运算与微分结合起来，或许可以得到泰勒级数；这取决于微分在话语中的组织方式

。然而，学生的图中对微分的呈现方式受到限制。具体而言，微分只与凹性、临界点、极值和偏微分相关；要协调这名学生图中的各项特征以构造泰勒级数会很困难。不过，这名学生表现出了关于一阶导数和二阶导数的认识。因此，我不再采用范畴运算这一类别，而是将其替换为实例之间的交互。当然，这一类别应涵盖大多数运算和复合。不过，这一类别仍未能在该学生图中所示的导数、一阶导数和二阶导数之间建立联系。

仅以传统课程学生的图谱作为依据，我推测，这样的学生很可能会将导数理解为函数对自身的一个动作，而不是与自身的另一个实例发生关系，也不是自身与另一个函数之间的关系。这促使我进一步将交互细分为实例之间的交互、在单个实例内部产生新实例的动作，以及在实例内部保持当前实例不变的动作。借助实例这一语言，我归纳出了概念图中常见类别的第二个框架：

图谱规律
等价于“词”的词的实例
“词”的实例之间交互的结果
“词”与不同“词”交互的结果 由地图作者独立制作
实例之间交互的结果，该交互创建了一个 新的词实例
实例内创建新实例的动作
实例内保留当前实例的动作
如何谈论一个实例
属于“词”类别的实例

图11：用于描述概念图常见特征的细化类别。

此时，规律已变得越来越具描述性，我从框架中移除了单独的识别策略。我能够用其中一条规律对概念图的大多数特征进行分类，也能够用其中一条规律对专家教师的概念图的所有特征进行分类。Williams（1998）中的三幅图都以某种方式提到了图，但没有一幅图包含图像。考虑到我的学习中的参与者可能会在符号之外加入图画，而这些图画无法通过符号来定义，只能通过知道如何对符号作出反应来理解，我在规律中增加了一个类别，用于表示实例的图像表征。此时，我逐一检查了剩余的六张概念图，并确保每个图的元素都能用一条图谱规律加以标注。

成功对全部十个概念图进行分类后，我回到交际认知框架，并利用图谱规律（相对于上位指示符）将每个话语认知构念操作化。我拟定了以下编码：

话语认知构念与来源		图谱规律
作者作为来源	外部来源	
（可互换） 词语使用	（可互换） 常规仪式	等价于词的词、图示和符号实例 等价于词
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	交互的结果，这种交互发生在.....的实例之间 word
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	词与实数集之间交互的结果和 独立生成的不同词之间交互的结果 由地图作者
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	实例之间交互的结果 从而创建一个新的词实例
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	在实例中创造新实例的动作 实例
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	在实例中维持 当前实例的动作
叙述或 认可叙事 （引用认可者）	规范性认可 叙事（如果 归因于专家 群体）或 常规仪式	如何谈论某个实例
常规（探索 或行为）	常规（行为或 仪式）	属于词这一类别的实例
视觉中介物	视觉中介物	孤立的数学符号
视觉中介物	视觉中介物	孤立的图画

图12：用于描述概念图和话语图共同特征的细化类别。

请注意，我制定这些编码，是为了标记话语图中的每个数学对象，并说明其与初始能指或上位指示符的关系。图所形成的命题构成了地图作者关于该话语的叙事。初始能指会自动标记为能指或词语使用。所有单独出现的图示和符号都应标记为视觉中介物。其余对象必须标记为词语使用、常规或叙述。为对象指定的标签对应于参与者为该命题给出的理由。

在缺乏支持性访谈数据的情况下，规范化数学话语中被视为定理、定义、公理等的任何目标对象，都应标记为认可的叙事。接下来，任何以句子或长形式呈现的目标都标记为叙事。最后，其余对象均标记为常规，不作进一步限定。不对惯例子分类作出判断。在存在支持性数据的情况下，与初始能指相距一个分离度以内的所有目标对象，都根据规律性进行分类。对规律性的选择应由参与者的话语予以支持。随后，根据参与者对支配该目标的命题之来源的描述，应选择作者作为来源或外部权威作为来源下的适当标签。如果参与者引用外部来源作为其话语图中某一元素或叙事（包括关联命题）的理由，则该元素的来源被视为外部来源。命题中作为参与者寻求维持与.....联系的结果而产生的目标数学对象

他人的目标数学对象，或者，如果他们无法进一步解析该对象或命题，或无法为其提供解释，则该元素应自动标记为仪式。在这一层级上，学生能够进一步论证的实现应标记为探索或行为。纯粹的话语惯例应标记为探索，而实践惯例应标记为行动（Sfard，2008年）。需要注意的是，仪式并非一种固有的负面表征。学生的数学话语发展在很大程度上始于仪式（Sfard，2008年）。如果参与者将指数理解为e^x，唯一原因是他们被教导指数函数就是这样表示的（尽管一般而言这是错误的），则该对象应标记为仪式。最后需要指出的是，我对专家教师话语图的分析主要以词语使用、常规和认可的叙事作为标签。视觉中介并未出现。

以这种方式分析学生图谱，目的是对与初始能指相距一个分离度的命题目标进行分类。当然，话语具有递归性，因此，正如我在编码框架中依据初始能指对相近对象进行分类一样，后续的实现也可以再次成为能指。所有与这个新能指相近的连接都可以用同样的方式分类。学生的函数概念图通常会逐步展开后续对象，并进一步延伸到函数主题之外（Williams，1998）。专家则倾向于将图谱聚焦于函数本身。读者可以对比图8和图10，查看相关示例。为最终验证我使用编码捕捉到了概念图中的典型特征，我随后将编码框架应用于图4中的代数图。我能够运用该框架对这幅图的所有特征进行分类。

根据Williams（1995年；1998年），学生持续绘制出与其初始培训不一致的概念图；尽管已确认他们正确绘制了分数的初始概念图，这种情况仍然发生。因此，我预计学生会在话语图的多边形中加入与非数学对象的连接，而这些连接无法构成学生认为有效的命题。对于话语图中的每个非数学对象，如果学生表示他们原本打算将多边形中的非数学词语用作连接两个数学对象的纽带，那么在命题各部分之间没有连接词的情况下，应将该命题解读为“数学对象—非数学对象—数学对象”。在这种情况下，目标对象仍视为与初始能指相距一个分离度。任何不符合这些规范的命题都必须自动标记为常规。如果参与者无法解析某个命题，使其符合培训中所述的结构，那么该命题必须自动标记为仪式，并应询问参与者该命题在其话语中的来源。

在将所有交际认知构念操作化之后，我最后根据最终编码列表，编制了一份简明、非专业化的教学指引清单，供话语图培训使用。这些指引旨在鼓励参与者根据能指，确定其实现列表中各项内容之间的关系。在介绍话语图时，学生将了解到，话语图通常包含：(1) 能指的示例中最概括的类别，直至穷尽所有示例；(2) 用于描述能指一般特征、规律、允许事项和不允许事项的术语或说明；以及 (3) 通过结合头脑风暴会议中的想法可以创造出的内容。这些组合应包括能指如何与其他对象互动、能指如何通过与自身发生关系而产生一个新的能指实例，以及能指如何通过与自身发生关系而保持为等价形式。这些指引会在培训期间给出；如果参与者在创建话语图或树时遇到困难，也可以在学习过程中随时向他们重申。

借助这些具体指引，我预计话语图将像概念图一样，以相同的表征结构呈现相同的数据。

本研究中的话语图。

选修证明入门课程的学生可以参加问题辅导课，以此换取参与本研究第一阶段的机会。此前，我曾与修读过这类课程的数学教育专业学生交谈，因此打算在这一阶段招募佐治亚大学（UGA）高等数学导论课程的数学教育专业学生。我将在阿德霍尔德楼举办安排较为灵活的问题辅导课，每周一至两次，时间从二月下旬左右开始，至春季学期结束为止。学生可根据自身需要决定是否参加问题辅导课。参加辅导课的学生须带来课程中自己感到棘手的任务情境；如果没有自备任务情境，则会获得一个基于课程中较广泛主题的任务情境，该主题是他们认为有难度的内容。我们已取得UGA所开设这一课程的历年及现行教学大纲，以便根据课程安排和重点规划问题辅导课。

在学习的第一阶段，学生参与者将被要求绘制唤起树，以说明他们对任务情境的初始思维。这一阶段的学习允许在学生参与者构造证明时对其进行直接干预和指导。在识别并解释学生参与者在任务情境中能够实现的尽可能多的词语或符号制品后，我将通过让参与者回应我对其进展情况的定向提问，探索他们的实现，从而实施支架式干预教学。如果参与者难以开始绘制树，或者我需要进一步了解该学生如何在其话语中组织数学对象，可能会要求学生在唤起树之外再创建一幅话语图。

在学生的证明过渡课程讲授单射函数和满射函数期间，我将向第一阶段的参与者提供与学习第二阶段所使用任务相似的任务，供他们练习。第一阶段参与者制作的任何树、话语图或证明构造草稿都将被复制，并将研究材料的原件返还给参与者。在这一阶段的学习结束后，本阶段制作的图、构造和树将去标识化、分配化名，并以数字形式重新创建。本阶段收集的研究材料将经过分析，以识别学生在其唤起的话语中的常见或典型解题路径、词语使用和常规特征。该分析将使我能够：（1）设定对第二阶段参与者可能产生的解答和树的预期；（2）将第一阶段参与者所产生丰富话语再现的任务情境添加到第二阶段使用的任务库中；以及（3）识别第一阶段参与者在任务诠释和作答方面存在的困难领域，这些困难也可能出现在第二阶段参与者中。完成初步分析后，将使用与函数、单射或满射相关的研究材料副本，在学习的第二阶段进一步对学生作品进行去标识化处理。

学习的第二阶段从在校内为同意参与的学生和课程教师开展话语图培训开始。这些培训是根据Williams（1998）对参与者进行概念图培训、以生成传统课程学生、改革课程学生和专家函数概念图的描述而设计的。

课程教师将在课程开始前接受培训，而学生参与者则根据各自的时间安排，在课程教师之外另行接受培训。课程开始阶段将为学生开展一次集中培训；如果同意参与且符合学习资格的学生少于十名，则随后还将开展学生培训。我认为，以十名学生开始基于课堂的学习，将使最终至少有三名参与者成为一个现实的目标。在培训期间，将向学生展示教育研究中跨学科被称为“概念图”的不同类型的图示。这些图示包括蜘蛛图、层级概念图和非层级图，并附有对每种图的说明。参与者将获知，他们的图必须将一个术语、像或符号呈现在封闭多边形内。这些多边形可以通过线条与其他多边形相连。学生只能在线条上写下“连接词”（例如 is、are、等价于、等于……）。由连接词相连的两个多边形所形成的结果，应构成学生认为有效的命题。参与者还将获得一份根据我的编码框架制定的教学说明清单。按照 Williams（1998）的做法，将要求学生为分数制作话语图。学生将获得逐步反馈，以帮助他们构建符合培训规范的话语图。制作出符合培训指南的分数话语图的学生，将受邀参加初次访谈，并被要求在家中为函数制作一幅话语图。指导学生凭记忆制作其图；如果他们对该数学对象没有任何熟悉性，就不应在图上放置任何内容。在本学习的访谈过程中，还会进一步使用话语图。

基于任务的访谈

通过基于任务的访谈，可以揭示许多关于学生个体思维的信息（Goldin，1997，2000；Maher & Sigley，2014）。在这种研究设计中，研究者会根据具体的研究问题，为参与者设计一项任务。与结构化访谈（Patton，2015）类似，研究者会预判参与者可能作出的反应，并预先规划在这些反应出现时基于任务的访谈将如何进行。尽管基于任务的访谈在证明研究中很常见（例如 Guler & Dikici，2014），但这种访谈并不自然，因为它让学生脱离了正常的学习环境，因此，访谈过程中发生的任何交互都可能受到访谈者在场的影响（Sfard，2008）。然而，基于任务的访谈也有其优势，它能让访谈者聚焦于参与者之间方法上的个体差异，并在差异出现时进一步探究这些差异。

本研究中的基于任务的访谈。

第二阶段初次学生访谈（附录A）的目标，是让基于课堂的学习研究中的所有学生参与者讨论其初始函数话语图。我将请参与者逐步说明其图谱的构建过程，讨论其中的连接，并澄清其图谱中的双向连接和单向连接。由于学生图谱之间预计存在差异，此次访谈采用半结构式形式，这将使我能够提示学生阐释其话语图中对象之间连接的理由，并评论以下命题的有效性：由单个连接相连的两个数学对象所形成的命题，或在一个多边形内由一个非数学对象相连的两个数学对象所形成的命题。如果学生

表示某个命题在其话语中无效，则会要求学生参与者通过识别其图谱中的数学对象及连续连接，描述他们原本想表达的有效命题。此前使用概念图研究学生的函数概念的研究表明，尽管接受了概念图培训，培训中阐释了真实命题应由两个多边形和一个单独的连接构成，但学生命题通常仍被表达为多个多边形之间的连接（Williams，1998）。在初始分析中，我将利用自己作为数学共同体内部专家的内部视角，识别出不符合专家数学话语规范的命题。虽然我不会向参与者指出这一点，但我会询问参与者这些命题在其话语中的有效性。学生参与者的初始话语图，是我在证明入门课程教学之前能够获得的、对学生函数话语最接近的近似。这次访谈将帮助确立学生参与者与函数相关联的对象基线，从而使我能够探究教学后这些关联发生的变化。根据学生阐释其图谱理由的充分程度，受邀参加此次初次访谈的十名学生中的一部分将受邀在整个学期内继续参与学习。教师的话语图将作为学生函数话语的比较图；学生的最终图谱将作为其初始图谱的比较图。

初次教师访谈（附录B）的一个核心目标，是在确定教师对课程中学生的期望以及对学生的期望的同时，建立教师的函数话语。在此次访谈之前，教师将构建他们个人的函数话语图、他们认为能够代表进入其证明入门课程的学生的函数话语的话语图，以及他们期望学生在学期末具备的函数话语的话语图。最迟将在与教师进行初次访谈前一周收集这些研究材料，以供分析。在访谈期间，教师将讨论他们的个人图，以及他们对学期初和学期末学生函数话语的期望图。我还将请教师讨论他们在学生证明构造解题方法方面的经验，尤其是学生对单射和满射的掌握情况。本次访谈将以讨论教师对学生证明话语在整个学期中发展的期望结束。在此期间，教师将创建一幅他们期望学生在课程开始时具备的证明话语图。

任务A是第二轮学生访谈（附录C）的重点。访谈安排在学生已在证明入门课程中接受了一些教学、学过集合符号，但尚未在该课程中开始学习单射和满射之后进行。在这次访谈中，我会询问学生是否希望对自己的函数图作出任何修改。如果学生画出了任何新图，我会请他们讨论所作的修改。对于没有将证明话语融入函数图的学生，我会询问他们是否能够为证明创建一幅话语图。在这次访谈之前不询问学生有关证明的问题，目的是让学生充分阐释其函数话语，同时减少访谈者对话语组织方式的影响。这有助于辨识学生是否将证明话语纳入函数话语之中、证明话语是否将函数话语纳入其中、他们是否将证明话语与函数话语联系起来但不认为任何一方被另一方纳入，或者学生是否将这两种话语分别呈现。我预计学生会单独画出一幅证明图，或将函数纳入证明图。当学生完成证明图（无论是否与函数话语相连）后，我会告知学生，他们不必将两个对象放在同一幅图中，也不必将一幅图放在另一幅图中，或将它们分开。

随后，我会询问学生参与者，是否认为自己的地图能够呈现当前的函数与证明话语。当学生对自己的地图感到满意时，我会请他们证明或反驳一个函数是否满足给定的定义；该函数很可能以有向图或箭头图表示（例如，Dubinsky & Wilson, 2013）。本任务不使用单射和满射这两个术语，但任务中包含了相应定义，且未标明名称。如果学生完成了任务，我会询问他们能否为自己完成该任务的过程画一棵树；不过，如果学生认为自己的话语图未能准确呈现其函数话语，他们仍然可以修改该图。

在任务 A、B 和 C 中无法开始构造证明的学生，将被要求指出他们认为有助于理解任务的关键词，并开始构建一棵符号/实现树。只要学生没有更多实现可以添加，或表示无法继续进行证明构造，树的构建就可以在任何时候停止。对于这一类学生是否继续参与，将根据其未完成的树、未完成的证明构造以及学习此阶段的话语图，能否为课程教师后续审查提供有趣的三元材料，逐案决定。不会仅仅因为学生无法针对某一项任务构造证明或树，就将其排除在学习之外。然而，学生参与者必须能够通过识别并实现任务中的词语或符号，初步推进符号/实现树的构建，即使这些实现看起来并不能促成可行的构造。访谈结束时收集学生的三元材料，去除身份信息，以数字方式重新构建以匿名化参与者，并标注化名。在针对任务 A 的教师访谈之前，会对任务 A 的所有学生三元组进行初步分析。此外，根据这一分析，从预先整理好的证明任务库中选取下一次访谈的任务（证明任务库的代表性样本见附录C—E）。学生访谈的结构、三元材料的创建与收集，以及后续对任务 B 和任务 C 的分析，大体沿用任务 A 访谈的设计。下文将介绍后续学生基于任务的访谈之间的差异。

任务B是第三轮学生访谈（附录D）的重点。这些访谈将在学生接受如何证明或证伪函数为单射和满射的教学之后进行。在第三次访谈中，学生会看到自己最近绘制的话语图，并被要求做出他们认为必要的修改。随后，学生将收到一项任务，要求他们证明一个函数是单射，另一个函数是满射。起初不会向学生提供这些术语的定义。为了选定这项任务，我从多所大学收集了二十份证明入门课程的期末考试，并分析了这些考试中出现的单射和满射问题类型。难度较低的这类任务在所收集的期末考试中很常见。这项任务的标准解法是：通过分别计算给定函数在两个任意点处的值，再推导出一个等式，从而完成单射性的直接证明。如果学生询问单射函数和满射函数的定义，我会分别向他们提供这两个术语的两种定义。如果学生参与者完成了任务，我会询问他们是否能够绘制一棵树，展示自己处理这项任务的思路；不过，如果他们觉得自己的图未能准确呈现其证明话语和函数话语，仍然可以修改自己的话语概念图。

任务 C 是第四轮学生访谈的重点。这些访谈将在学期末前约一周进行。本次访谈的目标是

在完成一整个学期的证明入门课程以及关于单射函数和满射函数的完整教学后，收集学生最终的话语图。向学生参与者展示他们先前的话语图，并要求他们根据需要进行任何修改。在本次访谈中，将向学生提供两个可能的新任务中的一个。第一个可能的任务难度极低，选自一项先前关于证明课程中学生在考试任务上的数学话语的认知话语研究（Thoma & Nardi，2018，第169页）[5]。该任务要求学生证明：定义域和值域均为整数集的函数是单射、满射、既是单射又是满射，或两者都不是。Thoma 和 Nardi 发现，学生此前只见过从实数集到实数集的此类问题示例，因此在解题时没有考虑定义域。然而，对于针对该任务的规范性证明构造而言，定义域考量至关重要。Thoma & Nardi（2018；2020）发现，学生在针对该任务进行证明构造时依赖先例事件，因此，由于他们套用了将定义域和值域均为实数集的函数分类为单射和满射的仪式，无法完成该任务，未能达到课程教师的要求。如果学生参与者在针对任务A和任务 B 构造证明时表现出明显困难，将使用此任务。

第二个可能的任务复杂度较高，要求学生比先前的任务有更大的自主性，该任务改编自 Breidenbach、Dubinsky、Hawks 和 Nichols 对学生函数发展所做的一项先前研究（1992年，第283页）。选择此任务，是因为它在一定程度上具有符号可操作性，同时也要求学生超越符号方法，完成规范的证明构造。Morgan & Sfard 将任务的粒度定义为“问题解决者在设计解决问题所需的一系列基本步骤时必须作出的最少决策（选择）数量”（Morgan & Sfard，2016年，第113页）。基本步骤是指无法以递归方式进一步拆分为若干部分、且拆分后需要学生作出更多决策的步骤。与本研究中的先前任务相比，这个问题的粒度更大，而学生参与者可能也不熟悉类似任务；这应能促使学生参与者开展有意义的话语探索。两种任务选项一开始都不会向学生提供定义。如果学生参与者完成了任务，我会询问他们能否画出一棵树，展示自己处理该任务的思路；如果他们认为自己的图未能准确呈现其函数话语和证明话语，也仍可修改话语图。鉴于该任务难度较大，我预计大多数学生在撰写证明构造之前，需要先画一棵树来探索自己的话语并进行主动决策。这与先前的任务形成对比；对于先前的任务，我预计有几名学生会根据证明课程中的先例事件，直接开始构造证明。作为替代方案，并视参与者处理任务A和任务B的情况而定，我可能会将 Thoma & Nardi 选项作为任务B中的第二个问题，同时将 Breidenbach 等人的任务分配给所有参与者，作为任务 C。

第二轮、第三轮和第四轮访谈均包含教师环节；每次访谈都在某个任务情境的学生访谈结束后一至两周内进行。在针对任务 A、B 和 C 的教师访谈开始前，会请教师针对每个任务情境完成一个证明构造，呈现他们认为最能代表其学生的做法。教师最多可以创建三个不同的证明构造，认为这些构造与学生的方法最为相似。对于每个构造，教师都会创建一棵树，其中包含教师预计学生会用来解读任务并构造证明的关键词，以及后续的实现，直至能够构造出证明。

[5] 此任务的类似版本见附录C。从先前研究中选取的任务像均已标注，并收录在附录中指定的访谈方案内。

每棵实现树都应尽可能准确地呈现教师对学生在过渡到证明课程过程中可能如何处理任务情境的预判。对于相关任务的教师访谈，我会至少提前两天收集教师的证明构造与树配对材料，以供分析。这段间隔将使我能够运用内部视角，分析教师针对该任务所提交的一对研究材料中包含的数学话语元素。之后，我会将这些研究材料与学生参与者的研究材料进行比较，以作进一步分析，并挑选学生作品三元组，在此次访谈中展示给教师。

针对同一项任务，学生与教师的任务访谈之间相隔一至两周，这段时间间隔将使我能够对学生参与者的三元材料进行初步分析。提醒一下，每项任务的三元材料包括学生针对任务所作的证明构造、相关的树，以及学生在访谈时使用的话语图。在这三次后续访谈中，如果我凭借自己作为数学专家共同体成员的内部视角，判定学生话语中的某些元素未能在学生制作的全部三份研究材料中得到一致体现，那么教师将仅对学生三元材料中的证明构造部分作进一步审查。选择学生三元组时，还会灵活考虑以下因素（即并非必须满足）：（1）学生参与者继续参与研究其余部分的可能性，以便分析完整的话语图序列，并考察话语随时间推移的扩展，从而满足第一个研究问题；（2）学生参与者对其话语的阐释与呈现情况，这可从其先前基于任务的访谈中看出，从而避免我试图推断学生推理、违反共认知原则；（3）学生的证明构造与规范化构造或教师的构造之间的一致性，同时其话语图展现出对函数和证明话语的高度限制性与仪式化特征；以及（4）证明构造稀疏或不完整，同时话语图却内容丰富、细致或规范。我预计，随着时间推移，学生参与者人数减少，各项任务中提交给教师的构造数量也会逐渐减少。

针对每项任务，在与教师进行这些后续访谈（附录 F）时，会请教师讨论其证明构造以及预期学生树。此次访谈将使我能够明确教师预期学生会借助哪些话语来构造证明，以回应任务。访谈方案着重关注数学话语的各个元素（即词语使用、视觉中介、叙事和常规），这些都是教师预期学生会借助它们来解读任务情境的内容。在访谈的后半部分，会向教师提供经过匿名处理并以数字方式重建的证明，这些证明来自预先选定的学生作品三元组，涉及其学生、第一阶段参与者和志愿者。我将邀请佐治亚大学的研究生和数学教育工作者为此提供三元材料。请教师检查每个证明构造，并口头描述这些构造的特征，说明教师如何据此形成叙述，以判断该学生是否具备函数话语和证明话语，具体表现例如：（1）超出预期；（2）达到预期；（3）发展中；（4）未达到预期，以上等级由课程教师界定。教师用于判定材料可接受性的叙述评分，将在课程开始前与教师协商确定。如果教师不希望自行选择叙述评分体系，则将由教师采用上述示例叙述，

教师将被要求描述他们认为学生是如何得出其构造的。随后，教师将通过给证明构造标注相应叙述，最终确定关于该学生话语的叙述。访谈结束后，标注过的证明构造将归还至其对应的学生三元组，以供进一步分析。

完成任务 C 的学生访谈和教师访谈后，将依据以下灵活标准（即非强制性标准）选取学生作品三元组，以便在最终半结构式临床访谈中向教师呈现：（1）学生参与者参加全部四次访谈；（2）从其全部四次访谈中可以看出，学生参与者能够轻松地阐释和表述其话语；（3）学生参与者完成全部三个证明构造，不考虑其正确性；（4）基于我作为数学专家共同体成员的内部视角，判断教师对学生作品三元组中的每件研究材料所作的叙述可能存在差异；（5）通过检查学生的研究材料，尽量降低教师识别出该学生身份的风险。如果截至任务 C 结束时仍有超过五名学生参与者留在学习中，则将根据教师愿意投入最终访谈的时间，确定向教师呈现的三元组数量。最终访谈至少持续一小时。如果截至学期末学习中留有不超过五名学生参与者，则将在最终访谈中向教师展示所有剩余学生参与者的学生作品三元组。

最终访谈（附录 G）将在学期结束后进行，且只与教师开展。仅从那些证明构造带有教师叙述评分标签的学生作品三元组中进行选择，向教师展示学生在相关证明构造时使用的话语图，而该证明构造已由教师评估。这些话语图将以随机选定的顺序呈现给教师，此顺序与向教师展示学生证明构造的顺序无关。教师将被要求查看学生的话语概念图，并判断他们是否认为，拥有这张图的学生能够针对相关任务完成可接受的证明构造，以及该学生的话语是否符合教师对学生在构建这张图时所处课程阶段的预期。教师还需口头说明其推理，并援引学生话语图和任务情境中的证据。教师使用相同的叙述标签，从预先协商确定的叙述标签中选择一个，标注在话语图上。对于此次最终访谈中选出的、与已标记证明构造相关联的所有话语图，均按此方式处理。

随后向教师展示一份标注过的证明构造，并允许其重新阅读该构造及其叙述评分，以重新熟悉自己的评分。接着，向教师展示与该学生作品三元组相关的学生话语图，并请其对自己关于每件相关研究材料的叙述发表评论。提醒一下，教师已在本次访谈中对这幅话语图进行了评分。最后，向教师提供该学生作品三元组中的学生树，并请其发表评论。对所有选定纳入最终访谈的学生作品三元组，都会重复这一程序。本次访谈旨在记录教师的回应，了解其根据阅读学生的证明构造而对学生的函数与证明话语所做的评估，与其借助学生的话语图对这些话语所做的评估之间有多大程度的一致。此外，我还希望记录教师看到该学生作品三元组中的树时所作的评论。

数据收集

第一阶段的参与者需要针对由参与者选定的任务情境以及证明构造绘制受限树。此外，还会向这些参与者提供关于单射和满射的证明任务情境，并请他们据此创建树和证明构造。在这一阶段，可能会请参与者创建话语图。所有树、话语图或证明构造的草稿都会被复制，研究材料的原件则会返还给参与者。本学习阶段结束后，映射、构造和树将进行去标识化、分配化名，并以数字形式重新制作。初步分析完成后，将利用与函数、单射或满射相关的研究材料副本，在学习的第二阶段进一步对学生作品进行去标识化。

记录课堂环境并考察研究材料，有助于深入了解学生话语的发展。在本研究的第2阶段和第3阶段，我将详细记录课堂环境、讲课材料、学生作业、学生活动和课程文本的田野笔记，以记录课堂微文化。这些笔记，结合函数讲座的视频录像及转录、访谈（无论是半结构式临床访谈还是基于任务的访谈）、教师制作的研究材料，以及对学生访谈中学生制作的研究材料的考察，将构成一组丰富的数据，可用于三角互证并支持关于学生话语发展的理论化影响因素。这些数据也能为与学生和教师进行一对一访谈时所说的话语提供背景。

每次讲授函数单元时，都会记录课堂环境和讲座。为尽可能全面地捕捉课堂中的交互和活动，我将在课堂上使用两台摄像机，以从不同角度记录环境及其中发生的对话。课程教师将在课程开始前、学期中的三个时间点以及课程结束后接受访谈。学生参与者将在课程开始时及学期中的三个时间点接受访谈。所有访谈都将由我担任参与式访谈者。虽然我不会试图改变学生话语，但我将自己描述为参与式访谈者，因为访谈者可能会对参与式受访者产生影响。此外，共认知的原则要求将我在访谈中的话语纳入分析（Sfard，2012年）。学生在访谈期间以及完成任务时与我的任何交互都会推动话语发展，因此必须加以考量。每次访谈都会进行视频录像并转录。

在学生访谈中，学生会被要求指出哪些关键词或符号中介了他们对任务情境的解释，并使用这些关键词构建符号／实现树。我将采用内部视角，确定学生参与者在证明构造中的叙事，这些叙事并未由学生在针对具体任务的符号树或实现树中描述。我将采用外部视角探查学生，促使他们进一步阐释树中连续数学对象之间的关系，以及他们如何协调这些对象来构造证明。我将通过一系列提问，鼓励学生阐释所选常规的适用条件、他们的行动过程以及闭合条件。

在第二、第三和第四次教师访谈之前，会请教师构造他们预期学生在回应任务情境时会给出的证明。随后，请他们指出自己认为学生会用来解读任务情境的关键词。教师将构造一棵符号/实现树，以表示他们认为学生可能会用来构造证明的能指实现。在教师

访谈当天，教师将讨论他们的证明构造，并借助预期学生树描述他们预期学生会采用的方法。我将通过一系列提问，鼓励教师阐释其预期惯例的适用条件、预期的行动方案，以及学生可能援引以完成作图的预期闭合条件。每次在基于学生任务的访谈之后进行的教师访谈，都会以教师就学生的话语发展相对于课程目标的情况给出评分或叙述作为结束。

在整个学期中，将收集教师针对布置给学生参与者的任务所作的证明构造和预期学生树，并复印三次。这些构造将被打字整理、去除身份信息，并存入一个以教师参与者化名命名的计算机文件夹。每位学生参与者所作的证明构造、话语图和树都将去除身份信息、复印、以数字方式重新制作，并存入该参与者对应的去身份信息文件夹。

数据分析

学生数据分析。

第一阶段的研究材料将经过分析，以找出学生在唤起的话语中常见或典型的解题路径、词语使用和常规特征。这项分析将使我能够：（1）对第二阶段参与者可能给出的解答类型和树作出预期；（2）将任务情境加入第二阶段使用的任务库，这些情境曾促使第一阶段参与者大量复现话语；以及（3）找出第一阶段参与者在任务诠释和作答方面遇到的困难，这些困难也可能出现在第二阶段参与者身上。完成初步分析后，将使用与函数、单射或满射相关的研究材料副本，进一步对研究第二阶段中的学生作品进行去身份信息处理。本节其余部分主要涉及以班级为基础的研究部分，以及第一阶段研究中产生类似数据的任何方面。

根据共认知的五项原则，选取的数据最初将不附加我对数据的叙述。我们将在学生参与者的基于任务的访谈中，考察图中命题的有效性。因此，图的连贯性由参与者确定。初始和最终的学生图谱以及教师图谱最初将不附带解释性评论，但会描述学生图谱中数学对象的共性。大部分相关分析由课程教师在最终访谈中完成。最初呈现教师对学生作品三元组的叙述时，不作解释。

我将识别每位学生参与者的话语概念图中出现的数学对象和命题，以比较学期初的学生话语，从而确定单个学生在学期开始与学期末之间的话语变化。在课程期间对学生进行访谈的三个时间点，我将以可视化方式呈现参与者是否对其图作出修改以及修改的性质。我将确定在这些时间点中每个时间点作出修改的学生人数及其典型修改性质。将比较学生参与者在任务情境中的关键词识别及相关实现。为保持学生图及其预期话语表征的完整性，我将使用视频和文字记录来

补充学生访谈，并进一步利用任何学生访谈，在其中学生参与者详细说明其如何构建初始图，以及其在整个学期内对话语图进行插入、删除、连接和/或结构重组的理由。我还将利用参与者与访谈者之间的任何一系列话语来进一步支持对学生话语的识别；在这些话语中，学生会评论以下命题的有效性：由单个连接连接的两个数学对象所形成的命题、位于两个数学对象之间多边形内的非数学对象所形成的命题，以及由学生识别出的、通过两个以上数学对象之间的连续连接形成的命题。

采用持续比较法，我将为相似对象、命题、学生认为有效的命题，以及学生图谱中存在的关联建立编码，以进一步描述课程初期学生之间及各学生自身在函数话语方面的异同。我将综合课堂田野笔记、教学大纲、提供给学生的教学资源、函数讲座的视频录制及文字记录，以及学生访谈的视频和文字记录，建立学生在访谈间可能导致图示变更的经历类别。还将运用此方法，归纳学生在每项任务中进行证明构造时使用的常见语言关系。提出的理论将由以下材料加以支持：学生任务型访谈的视频和文字记录、课堂田野笔记、学生话语图、学生符号／实现树、学生证明构造，以及函数讲座的视频录制。

将利用相关基于任务的访谈的视频和文字记录，把学生树的各个部分划分为常规类别。如果学生无法构造由连续的对象实现分支组成的部分符号／实现树，以呈现其证明构造策略，那么该分支将被归类为行为或仪式。若学生诉诸某些解释，明确表示自己是在通过模仿行为来说明其符号／实现树中的分支，那么这些分支也将被判定为仪式。将从课堂田野笔记、课堂上提供的教学资源，以及学生描述某项资源如何促成其符号／实现树或话语图中某个已识别分支的访谈文字记录中，寻找支持或反对学生作品中出现不同常规的证据。常规实例的数量将予以统计。通过对学生文字记录中的描述、证明构造、课堂田野笔记和学生话语图进行三角互证，我将指出每个常规实例的来源，无论其来源是教学、学生选择还是其他因素。针对每种任务情境，将比较不同学生的各项常规的数量、类型和来源，以归纳学生在常规选择方面的共性。

教师数据分析。

我将识别教师的话语图、预期学生树、初始预期学生话语图和最终预期学生话语图中包含的数学对象和命题。为维护教师话语图及其预期话语表征的完整性，我将使用教师初次访谈的视频和文字记录，并参考任何教师访谈，在这些访谈中，教师参与者进一步阐释了他们如何构建话语图和预期学生树。我将通过使用参与者与访谈者之间的任何一系列话语来识别教师函数话语；在这些话语中，教师阐释了他们对话语图中对象之间连接的理由，并

评论由单个连接相连的两个数学对象所形成命题的有效性，以及由两个以上数学对象之间的连续连接所形成、经教师识别的命题。采用持续比较法，我将提出教师函数话语图中包含的对象类别、命题类别和关联类别。

对初始和最终预期学生图谱的分析，旨在确定教师预期学生在学期开始与学期末之间的函数话语变化。我将把教师预期的学生图谱变更以及推测的这些变更性质呈现在图表中。我将利用视频和访谈记录来支持我对这些变更性质的判断，以及教师预期会促成这些变更的课程教学；在这些视频和访谈记录中，教师明确阐述了这些目标，并解释了他们为何对初始预期学生图谱进行插入、删除以及其他关联和/或结构重组，以形成最终预期学生图谱。教师陈述的目标将与教学大纲所体现的预期课程安排以及实际实施的课程安排进行比较，从而提出教师所预期的函数话语变更时间线。

我将使用预期学生话语图、预期学生证明构造和预期学生树，识别教师预期学生在回应任务情境时会援引的数学对象和命题。我将比较教师预期学生树中跨任务出现的数学对象和命题，以推断教师认为为回应该任务情境构造证明所必需的话语，以及为回应全部三个任务情境构造证明所必需的综合话语。

任务A、任务B和任务 C 的教师基于任务的访谈视频及文字记录将用于将教师预期学生树的各个部分归类为数学话语的不同类别，包括词语使用、叙述、符号中介和常规。尽管这种情况出乎意料，如果教师无法构造由连续的对象实现分支组成、且能体现其预期学生证明构造策略的树，那么该分支将被归类为常规行为或常规仪式。若教师援引解释，表明其预期学生会通过模仿行为来解释预期学生树中的分支，那么这些分支也将被判定为仪式。关于是否使用数学话语的四个要素（词语使用、叙述、符号中介和常规）及其子要素，对教师预期学生图谱、作图和树中的分支进行分类，其支持或反对证据将从课堂田野笔记、课堂上提供的教学资源，以及教师描述其所预期的教学内容（这些教学内容会产生预期学生树中某个已识别分支）的访谈记录中收集。常规的实例将予以量化。通过对访谈记录中的教师描述、预期学生证明构造、课堂田野笔记和预期学生话语图进行三角互证，我将指出教师可能预期教学中的哪些部分会成为学生使用特定常规的来源。在数据的组间分析中，将比较每种任务情境下每种常规的数量及其来源与学生的常规数量及来源，以指出学生与教师在常规选择及常规来源方面的共性和差异。

数据的组间分析。

教师的话语图与学生初始话语图中共有的数学对象和命题，将使用根据先前对教师和学生数据的分析所采用的持续比较法创建的编码和类别进行比较。同样，对于每项任务，教师为学生预期的话语图和预期学生树，将与学生的话语图及学生创建的树进行比较。此外，教师根据阅读学生的证明构造，判断学生话语中可能存在或缺失的数学对象和命题，将与证明构造当时实际使用的学生话语图进行比较。

我将制作一张表格，根据学生证明构造和学生话语图，呈现教师关于学生话语的叙述。提醒一下，在学习开始时，教师会选择他们希望用于对学生作品进行评分的叙述。我将根据教师提供的评分差异，对教师在不同研究材料之间保持一致与不一致的叙述进行量化。我还将制作第二张表格，呈现教师在三份研究材料之间的叙述，并量化不同研究材料之间保持一致与不一致的叙述。

数据收集摘要

总之，拟议的学习将按以下方式进行：

- 学习的初始阶段从学期中段持续到学期结束。对参与者作品进行分析，以便为基于课堂的学习设定预期，并确定学生使用的常见解题路径和常规。
- 学习的第二阶段在夏季学期开始前不久或开始时启动。对同意参加的学生和课程教师进行话语图培训。参与者创建函数话语图，并与我分享。课程教师根据其偏好选择用于作品评分的叙述。
- 对所有同意参与的学生和教师进行单独临床访谈并录像，了解他们最初的话语图。澄清任何方向性。收集所有新绘制的话语概念图。教师还提供预期的学生初始话语图和最终话语图。
- 开始课程教学并撰写田野笔记。课程教师向学生介绍集合论。
- 对每位参与者进行第二轮访谈并录像和转录。初始任务中不使用单射和满射术语，但任务中包含相应定义，且未注明名称。收集所有新绘制的话语图。收集教师和所有参与者的证明构造及树。收集教师标注过的学生证明构造。
- 继续观察课程讲座并撰写田野笔记。
- 第三轮关于证明函数是单射或满射的访谈录像与转录。本任务中的函数应当是从实数集映射到实数集，并且能够通过符号运算完成。学生最初不会得到

单射和满射的定义。如果学生询问这些定义，就会为每个术语提供两个定义。收集所有新绘制的话语图。收集教师和所有参与者的证明构造与树。收集教师标记过的学生证明构造。

- 对函数相关教学，以及证明或反驳函数为单射或满射的教学进行录像和转录。
- 学期末前一周，对围绕新任务开展的第四轮访谈进行录像和转录。如果参与者在完成任务B时遇到较大困难，任务 C 应聚焦于一项需要考量定义域的证明或反驳任务（例如 Thoma & Nardi，2020）。否则，任务 C 应增加难度（例如 Breidenbach 等人，1992）。收集新绘制的任何话语图。收集教师和所有参与者的证明构造及树。收集教师批注过的学生证明构造。
- 学期结束。教师将学生的课程成绩提交给其所在大学，第3阶段的学习随之开始。成绩公布给学生后，可以对教师进行访谈。
- 对与教师进行的最终访谈进行录像和转录。收集教师对去标识化学生成果三元组所作的批注。
- （可选）本研究的第4阶段于秋季学期开始前不久启动。如果无法找到合适的课程教师、需要完善研究方案、认为有必要，或遇到新冠疫情危机或其他意外情况，本阶段将重复本研究的基于课堂的研究阶段。如果研究所在大学需要转为线上教学，将向机构审查委员会提交新的申请，以便在线上重复开展本研究。不过，在这种情况下，第4阶段将不再与某位特定教师挂钩。

研究概述

我再次强调，在高等教育阶段的证明语境下，关于单射函数和满射函数的研究十分有限。Thoma（2018）的博士论文在实现我的研究目标方面取得了最大进展：该论文确定了一年级数学学生考试任务的特点、讲师对学生参与大学数学话语的期望及其在设计考试任务时如何运用这些期望，还探讨了学生的学校数学话语与大学数学话语之间的差异，以及由这些差异可能引发的认知话语冲突。

虽然 Thoma 并未明确将非证明内容作为研究重点，但 Thoma 的所有任务都要求学生参与证明构造。我的研究聚焦于证明背景下的函数、单射和满射。对单射函数和满射函数的持续关注，使得研究学生函数话语的时间发展成为可能，同时也能考察证明逐步融入学生数学话语的过程。这包括记录学期初教师和学生的非受限函数话语，以及课程开始一个月后学生的非受限证明话语。共话语观承认，任务情境会引发特定的话语，因此

收集学生表达出的非受限话语至关重要，这样才能尽可能准确地了解学生最初的话语。

Thoma 研究中的教师在半结构化访谈中提供了示例构造，并讨论了他们对学生的期望。Thoma 借助教师对学生证明构造的期望以及与教师访谈的记录，确定教师预期学生使用的话语。在我的研究中，教师预期的证明构建由教师针对学生预期任务解决方式所绘制的层级实现树予以支持。这些实现树在访谈前提供，因此不会受到我的教师访谈方案中提问内容的影响。我还通过半结构化教师访谈的文字记录，进一步支持对教师关于学生话语的期望所作的判断。Thoma 对教师证明构造和访谈记录的处理策略，与其对学生参与者的策略相同。此外，我还借助学生参与者创建的实现树，支持对学生话语表征的分析。具体而言，我将学生证明构造这一行为的产物，与学生通过实现树及非受限话语图表达的策略进行对照。这使我能够比较三份学生作品中的话语特征，包括静态话语和唤起的话语。此外，这也使我能够比较教师叙述中关于学生函数与证明话语发展的内容在不同学生作品之间的异同。相较于彼此，这一研究特点有望展现话语图、实现树／符号树以及完整证明构造在评估方面的优势与劣势。

我们的研究之间的关键差异在于，我设计这项学习，旨在收集学生在三个层面上的话语数据：（1）非受限话语；（2）唤起的话语；以及（3）作图中隐含的话语。这将使我能够评论学生构建证明的路径，以及他们在多大程度上（如果有的话）依赖其非受限话语来回应任务情境。将这些话语与教师的以下预期进行比较：（1）对学生非受限话语的预期；（2）对学生唤起的话语的预期；以及（3）仅根据学生的证明构造，对学生非受限话语的预期，我便能够叙述学生参与证明构造的现状，以及他们在过渡到高等数学时发展非证明性数学话语的情况。

研究问题	子问题	数据收集	数据分析
在哪些方面 do 本科 数学 学生 理解并 领会 单射， 满射， 以及证明 教学中的 过渡到 证明 课程?	学生如何看待 证明课程中的单射和满射 函数的语境 在参加 过渡到证明课程时 从他们最初的 话语图?	学生最初的话语图 学生 学生的最终话语图 学生 初始视频录像 学生访谈和 创建最终图的访谈 已创建 初始 学生访谈和 创建最终图的访谈 被创建 课堂田野笔记	我将识别数学对象和命题 它们存在于每位学生最初的话语概念图中 参与者，以便在学期初比较学生话语 。为维护学生图谱及其 预期的话语表征，我将使用视频和 学生初次访谈的文字记录，并辅以其他 学生访谈的支持，在该访谈中，学生 参与者进一步阐释了他们如何构建自己的 初始图谱。 我将通过以下方式支持识别学生作者的初始 话语：采用参与者与访谈者之间的任意一系列话语，其中 学生阐述他们对其 话语概念图中对象之间连接的理由，并对 命题的有效性发表评论 由两个数学对象通过一条 连接形成，以及由学生识别出的命题，后者由 两个以上数学对象之间的连续连接 形成。采用持续比较法，我将 为相似的对象、命题，以及 学生认为有效的命题和学生中存在的关联建立编码 映射，以进一步描述.....中的相似之处和差异 学生之间的函数话语 课程开始时。
	学生会做出哪些改变 他们的有关证明、单射 话语图，以及关于 满射的映射 讲座的结果， 作业和阅读 课程教材也	课堂田野笔记， 关于教学的笔记 教学资源 （例如教学大纲、教科书）以及 所使用的替代资源 学生使用的（例如教科书、 数字内容）	我将识别出现在每位学生的 话语概念图中的数学对象和命题 参与者，以便在学期初比较学生话语 ，从而能够确定个体的变化

	随着时间推移，使用其他学生 所选资源的情况 如何?	所有话语概念图 都是学生创建的 学习期间	学生在学期初与学期末之间的话语 学期。 对于课程期间进行访谈的三个时间点 我将以可视化方式呈现学生是否 参与者是否修改了自己的图，以及修改的性质 变化。我将确定做出 变化的学生人数，以及在每个 时间点这些变化的典型 性质。 为维护学生图谱及其预期的 话语表征的完整性，我将使用 学生访谈的视频和文字记录，并辅以任何学生 学生参与者进一步说明的访谈 他们如何构建初始图谱，以及他们进行 插入、删除、添加连接和／或进行结构 重组，以调整整个学期中的话语图 课堂田野笔记、教学大纲、 向学生提供的教学资源，以及视频和 学生访谈的文字记录，用于归纳类别 两次访谈之间可能发生的学生经历 并因此导致图示变更。
		首次学生访谈的视频录像 以及 访谈发生的地点 话语概念图 被修改	
		初次访谈的 学生访谈以及 访谈中 话语概念图 被改变	
	学生如何运用 他们关于单射、满射的 函数和证明 话语来理解证明 涉及.....的任务情境 单射和满射?	课堂田野笔记， 记录于 教学资源，以及 所使用的替代资源 学生使用的	在学生访谈中，会要求学生识别关键词 或符号，这些关键词或符号影响他们对任务 情境的解释，并使用这些关键词构建符号／实现树。 我将采用内部视角，来 确定学生参与者证明 构造中未被该学生描述的叙事 在其特定任务的符号树或实现树中。我将 从外部视角探查学生，并让 他们进一步阐释相继的
		学生证明 构造	
		话语概念图 由学生创建	

		学生创建的树 所有视频录像 学生访谈 所有学生的文字记录 访谈 第一阶段参与者的树， 证明构造和 话语图	树中的数学对象，以及学生如何 协调这些对象以构建证明。我将采用一系列提问， 引导学生阐释其所选对象的 适用条件 常规、其行动过程以及闭合条件。 将采用持续比较法来提出 学生之间用于 针对每项任务进行证明构造的常见语言关系。所提出的 理论将通过以下材料得到支持：来自 学生任务型访谈的视频和文字记录、课堂田野笔记、学生 话语图、学生符号／实现树、学生 证明构造，以及函数 讲座的视频录制。
	学生运用哪些常规 来构造 针对任务情境的证明 ？	课堂田野笔记， 记录的笔记 教学资源，以及 使用的替代资源 由学生 呈现话语概念 学生的映射 当前内容的学生树 task 学生证明 构造 所有学生访谈的视频录制 学生访谈	将分析第一阶段的研究材料，以识别常见或 典型的学生解题路径、词语使用和常规特征 体现在他们唤起的话语中。 在第二阶段的学生访谈中，会要求学生 指出促成他们解释的关键词或符号 任务情境，并使用这些 关键词构建符号／实现树。我将采用内部视角 来确定学生参与者的证明中所包含的叙事 构造中尚未被学生描述的叙事 在其任务特定树中。我将采用外部视角 来探查学生，并让他们进一步 阐明连续数学.....之间的关系

		所有学生访谈的文字记录 访谈	树中的对象，以及学生如何协调这些 对象来构建证明。我将采用一套提问方式 鼓励学生阐释他们的 他们所选常规的适用条件、 行动过程以及闭合条件。 相关基于任务的访谈视频及其文字稿 将用于将学生树的每个部分划分为常规 类别。如果学生无法构建由以下内容组成的 部分符号／实现树 后续的对象实现分支，代表他们的 证明构造策略，此分支将被归类为 行为或仪式。诉诸解释的学生 明确说明他们正在进行模仿行为，以此来 解释其符号/实现树中的分支，也会 被判定为仪式。对.....的支持或 针对学生作品中不同常规的呈现 将从课堂田野笔记中收集 课堂上提供的教学资源，以及 学生描述能够 产生其符号/实现 树或话语图中已识别分支的访谈记录。常规的实例将 量化。通过三角互证学生在 文字记录、证明构造、课堂田野笔记和 学生话语图中的描述，我将指出每个实例的来源，无论是 教学的、学生选择的，还是其他来源 的常规。每种常规的数量、类型和来源 将在每个任务情境中跨学生进行比较，以 表明学生在常规选择方面的共性。
		第一阶段参与者的树、 证明构造，以及 话语图	
教师在哪些方面 会	教师如何看待 单射以及	教师的 话语图	我将识别其中出现的数学对象和命题 。为保持教师的话语图

诠释并 理解 证明， 单射 函数，以及 满射 函数?	在.....范围内的满射 函数的语境中 正如其话语 图所示?	所有预期学生树 均由教师创建 所有教师访谈的视频录制 教师访谈 所有教师访谈的文字记录 访谈	教师的图及其预期 话语表征的完整性，我将使用以下视频和文字记录： 教师的初次访谈，并辅以 教师参与者 进一步阐释他们如何构建自己的图，以及 预期学生树。 我将依据教师所说的话来识别教师函数 话语，使用参与者与访谈者之间的任何一系列话语，其中 教师阐释了 他们将自己的对象连接起来的理由 话语图以及对以下内容有效性的评论 由两个数学对象通过单一连接相连而形成的命题 ，以及教师识别的、由连续连接形成的命题 这些连接涉及两个以上的 数学对象。采用持续比较法 ，我将提出对象类别、命题类别， 以及教师函数话语图谱中呈现的关联 。
	教师期望 学生的单射与 满射话语如何 在.....背景下组织 其函数话语 图在过渡之前 转向证明课程？包括 证明话语，如何	教师的预期 学生初始话语 maps 教师预期的 学生期末论述性 maps 所有访谈的视频录制 教师访谈	我将识别初始和最终预期学生图谱中出现的数学对象和命题 存在于初始和最终预期学生图谱中的是 确定教师预期学生的函数 话语在学期初与学期末之间的变化。 我将通过以下材料支持对变化的识别： 教师预期学生图谱，以及视频和 课程教师阐述其作出插入决定时推理过程的教师访谈 文字记录，课程教师在其中阐述其作出插入决定时的推理，

	教师期望学生的话语 能够组织起来 在过渡结束时 过渡到证明课程?	所有教师的文字记录 访谈	删除，以及其他关联和/或结构重组 对其初始预期学生图谱进行调整，以得到最终的 预期学生图谱。 我将呈现教师的预期学生图谱 变更及这些变更的推测性质，并以图表形式展示。 我将借助.....来支持我对这些变化性质的判断 以及教师期望能带来这些变化的课程教学 使用视频和.....的文字记录，以 访谈中教师明确阐述这些目标的内容 并说明他们进行插入、 删除以及其他关联和／或结构重组的推理 从最初的预期学生图谱到最终 预期学生图谱。教师陈述的目标将与 课程大纲所体现的预期课程安排进行比较， 以及实际执行的课程安排，以推断 教师预期的函数话语变更时间线。 教师。
		课堂田野笔记和 对.....所作的笔记 教学资源	
	教师要求学生运用哪些话语 教师要求学生 借以解读任务 涉及.....的情形 单射和满射，以便 进行证明 构造，正如.....所体现的 他们预期的学生树?	教师预期的 学生话语图	在第二次、第三次和第四次访谈之前，教师 会被要求构建他们预期学生将 针对任务情境构建的证明。随后，他们确定关键词 并认为学生将使用这些词来理解任务 情境。教师将构建一棵他们 相信这代表了学生可能会采用的实现方式，以便 构造他们的证明。在教师访谈当天， 教师将讨论他们的证明构造，并 描述他们预期学生使用其 预期学生树所采用的方法。 教师基于任务的访谈视频及文字记录 任务 A、B 和 C 的访谈将用于
		教师预期的证明 任务 A、 B 和 C 的构造	
		教师预期的 学生符号树 任务 A、B 和 C	
		所有视频录像 教师访谈的视频录制	

		所有教师 访谈的文字记录	将教师预期学生 树的每个部分归入数学话语的不同类别。这些类别包括 词语使用、叙述、符号中介和常规。 尽管出乎意料，但如果教师无法构建 由连续的对象实现分支组成的树 以表示他们预期的学生证明构建 策略，则该分支将被归类为常规 行为或常规仪式。借助解释来表达的教师 表明他们期望学生参与 用于解释预期 学生树中各分支的模仿行为，也会将这些分支归类为 仪式。支持或反对使用数学话语的四个要素 （词语使用、叙述、符号 中介和常规）及其子要素来分类 教师预期学生图谱中的分支， 作图和树将从课堂田野 笔记、课堂提供的教学资源以及 教师描述其所预期的教学的访谈记录中 提取，这些教学预期会在其预期学生树的某个已识别分支中 产生结果。常规的实例将被量化。通过对教师的描述进行三角互证， 将教师在 访谈文字记录、预期的学生证明构造， 课堂田野笔记，以及预期的学生话语图， 我将指出教师可能认为学生使用这些常规的 来源所在的教学部分， 具体常规。每种常规的数量和来源 将与学生所使用的数量和来源进行比较 各任务情境中的常规，以指出共性和 常规选择及常规来源方面的差异 在组间分析中，学生与教师之间的 数据分析。

如何 话语 学生 不同于 这些话语 他们的 教师?	教师的期望如何 对学生的期望 单射、满射、 函数和证明 课程前期和课程结束时的话语与 课程结束时的学生话语在 学生关于 单射、满射、 函数和证明的话语，如 其最初和 最终话语图?	学生的初始话语图 学生 学生的最终话语图 学生 教师预期的 学生最初的论述 maps 教师预期的 学生最终的论述 maps 所有教师访谈的视频录制 教师访谈 所有教师 访谈的文字记 录	教师预期的初始和最终学生话语图中共有的数学对象和命题 教师预期的初始和最终学生话语 映射，以及共同的数学对象和命题 学生的初始和最终话语图将进行比较 使用根据先前 对教师和学生数据分别进行分析所采用的持续比较法创建的编码和类别 教师和学生数据分别处理。
	对于每个任务情境，教师的期望如何 教师的期望 学生将借助的话语 学生将利用来 解读证明任务 涉及单射 和满射函数，并 参与证明构造	教师预期的 学生初始论述 maps 教师预期的 学生最终的论述 maps 教师的证明 任务 A、 B 和 C 的构 造	教师的预期 面向学生的话语图中共有的数学对象和命题，以及 每项任务的预期学生树，将与 每项任务的学生树中共有的数学对象和命题，以及学生的 每个任务的学生树以及学生的论述性 映射。

	与.....的话语相一致 学生所借助的 从他们唤起的 树和话语图中可见?	教师预期的 任务 A 的学生树, B 和 C	
		当前学生话语 maps	
		学生创建的树	
		课堂田野笔记, 记录于 教学资源，以及 所使用的替代资源 学生	
		所有访谈的视频录制 访谈	
		所有访谈的 访谈	
	教师对 学生的期望 函数、单射、 满射和证明 话语的期望基于他们的 对学生的证明的解读 构造与.....相一致 学生关于.....的话语 函数、单射、 满射，以及证明，正如..... 其话语所体现的 映射?	课堂田野笔记, 关于教学资源的记录 教学资源，以及 学生使用的替代资源 由学生完成	教师的数学对象和命题 可能存在于或缺失于学生 话语中的数学对象和命题，是根据他们对学生证明 构造的解读，与实际使用的学生话语 图进行比较的，该图是在证明构造过程中使用的。
		教师预期的 学生实现树 以及学生的论述 maps	
		教师叙述 书面课程中的学生证明 构造	
		学生呈现的 话语图	
		每位学生的树 task	

		所有访谈的视频录像 访谈	
		所有访谈的文字记录 访谈	
	教师的.....如何 关于学生的叙事 证明与函数 阅读后的话语 学生的证明构造 与他们关于.....的叙事相一致 学生关于证明与函数的话语 基于.....的话语 学生的话语图 以及唤起树?	课堂田野笔记, 关于.....的笔记 教学资源，以及 学生使用的替代资源 由学生	课程开始前，我将讨论教师希望使用的叙事, 以评估学生的 证明和函数话语的质量。作为默认 示例，教师可以使用以下叙事：超出预期 达到预期、达到预期、发展中或未 达到预期，以评论他们如何看待 与教师的课程目标相比，学生的函数与证明话语 。在每次课程期间进行的学生 访谈之后，教师将 考察一系列证明构造 包括其学生的去标识化的构造。 教师将使用一个词或短语为每个构造标注 这些词或短语来自双方约定的叙事。例如，他们可能会 将一个构造标记为“达到预期”，并将 另一个标记为“未达到预期”。 课程结束后，教师会获得去标识化的 标注了使用时间范围的学生话语图 该时间范围为作者在本学期使用此图的时期。 课程教师仅根据学生在图中表达的函数和证明话语 被要求对每幅图进行标注，使用经双方同意的 叙事中的一个词或短语。 叙事。 所有话语图标注完成后，教授会 看到一名学生的证明构造，以及 教师的书面叙述。随后，教师会 获得这名学生在 进行证明构造时使用的同一张话语图，以及
		教师叙述 关于学生证明的书面课程 构造	
		教师叙述 关于学生的书面课程 话语概念图	
		教师预期的 每项任务的学生树	
		学生的每项任务树 task	
		所有访谈的视频录制 访谈	
		所有访谈的文字记录 访谈	

			教师的书面叙述。我将制作一张表格 呈现教师关于学生的叙述 基于学生证明构造和学生 话语图。我将量化教师在不同研究材料之间一致的 与不一致的叙述，依据 教师提供的评分差异。我将 制作第二个表格，呈现教师 对三个研究材料的叙事，并量化一致的 与不一致的研究材料之间的叙事。

参考文献

Adiredja, A. P.（2021）。学生在极限定义中对时间顺序的困惑：使用片段知识揭示资源。《国际科学与技术数学教育杂志》，52(9)，1295-1321。doi：10.1080/0020739X.2020.1754477

Balacheff, N.（1988）。初中阶段学生证明过程的研究。载于 I. Wirszup 与 R. Streit（编），《第二届UCSMP国际数学教育会议论文集》。弗吉尼亚州雷斯顿：美国全国数学教师理事会。

Bansilal, S.、Brijlall, O. 与 Trigueros, M.（2017）。关于职前教师理解单射和满射的 APOS 研究。《数学行为杂志》，48，22-37。

Barwell, R.（2007）。数学思维的话语建构：研究人员描述的作用。载于 J. H. Woo、H.C. Lew、K. S. Park 与 D. Y. Seo（编），《国际数学教育心理学小组第31届会议论文集》，第2卷（第49-56页）。首尔：数学教育心理学。

Beckmann, S.（2013年）。《面向小学教师的数学：附活动手册》。纽约，NY：培生。

Bell, A.（1976年）。数学情境中学生的证明解释研究。《数学教育研究》，7(1/2)，23-40。

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D.（1992年）。函数的过程观的发展。《数学教育研究》，23，247-285。

Brown, S.（2017年）。谁在那里？关于学生对存在性证明进行推理的学习。《国际本科数学教育研究杂志》，3，466-495。

Carrascal, B.（2015年）。证明、数学实践与论证。《论证》，29(3)，305-324。

Caspi, S., & Sfard. A. (2012年). 自发元算术作为迈向学校代数的第一步. 《国际教育研究杂志》, 51-52, 45-65.

Chartrand, G., Polimeni, A., & Zhang, P. (2017年). 数学证明：向高等数学的过渡（第156-257页）. 纽约, NY：培生.

Clement, J. (2000). 临床访谈分析：基础与模型可行性. 收录于 A. Kelly & R. Lesh（编），《数学与科学教育研究设计手册》（第547–589页）. 新泽西州莫沃：Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P.（2000a）。与教师合作开展教学实验。载于 A. Kelly & R. Lesh（编），《数学与科学教育设计手册》（第307–333页）。新泽西州莫沃：Lawrence Erlbaum Associates。

Coe, R. 与 Ruthven, K.（1994）。高等数学专业学生的证明实践与构念。《英国教育研究杂志》，20(1)，41–53。

Dreyfus, T.（1999）。为什么 Johnny 不会证明。《数学教育研究》，38，85–109。

Dubinsky, E. 与 Wilson, R. T.（2013）。高中生对函数概念的理解。《数学行为杂志》，32(1)，83–101。

Duffin, J. 与 Simpson, A. P.（2002）。独立研究生学习的经历：学习风格的变化。载于 A. D. Cockburn 与 E. Nardi（编），《第26届数学教育心理学会议论文集》第3卷（第305–312页）。诺里奇：数学教育心理学。

Duffin, J., & Simpson, A. (2006). 数学独立研究生学习的过渡。在 F. Hitt、G. Harel 和 A. Selden（丛书编者），CBMS 数学教育议题：

第 13 卷。《大学数学教育研究》IV。（第 233-246 页）。牛津：牛津大学出版社。

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004年). 数学教育研究中的意外发现：学生对数学定义的（误）用。《美国数学月刊》，111(5), 411- 424。

Erlwanger, S. H. (1973). Benny对IPI数学中规则和答案的理解。《儿童数学行为》，1(2), 7-26。

Feldman, J. M., & Lynch, J. G. (1988). 自我生成效度及测量对信念、态度、意向和行为的其他影响。应用心理学杂志，73(3), 421- 435。

Goldin, G. A. (1997). 通过基于任务的访谈观察数学问题解决[专著]。《数学教育研究杂志》，9, 40–177。

Goldin, G. A. (2000). 数学教育研究中结构化、基于任务的访谈的科学视角。载于 A. Kelly & R. A. Lesh（编），《数学与科学教育研究设计手册》（第 517–545 页）。新泽西州莫沃：Lawrence Erlbaum Associates。

Güler, G., & Dikici, R.（2014年）。考察职前数学教师对代数概念的证明过程。《国际科学与技术数学教育杂志》，45(4)，475-497。

Harel, G. 与 Sowder, L.（1998年）。学生的证明图式：探索性研究的结果。载于 A. Schoenfeld、J. Kaput 与 E. Dubinsky（级丛书编者），《CBMS 数学教育议题》第7卷：《大学数学教育研究》第三卷（第234—283页）。doi：10.1090/cbmath/007

Harel, G. 与 Sowder, L.（2007年）。迈向关于证明的学习与教学的综合性视角。载于 Harel, G. Lester（编），《数学教学与学习研究手册》第二版：第2卷（第805—842页）。北卡罗来纳州夏洛特：Information Age Publishing。

Healy, L., & Hoyles, C.（2000年）。代数中的证明观念研究。《数学教育研究杂志》，31(4)，396-428。

Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard. A.（2012年）。数学课堂中的身份认同斗争：论将数学学习视为数学化与身份认同的相互作用。《国际教育研究杂志》，51-52，128-145。

Kilpatrick, J. （2009年）。数学教师与课程变革。PNA，3(3)，107-121。

Kim, D., Ferrini-Mundy, J., & Sfard, A.（2012年）。语言如何影响数学学习？英语和韩语大学生关于无穷的话语比较。《国际教育研究杂志》，51-52，86-108。

Knuth, E. T.（2002年）。中学数学教师的证明观念。《数学教育研究杂志》，33（5），379-405。

Lavie, I.、Steiner, A. 与 Sfard. A.（2018年）。我们赖以生活的常规：从仪式到探索。《数学教育研究》，101，153-176。

Lee, K.（2015年）。学生用于数学证明活动以及对命题进行证伪的证明图式。《数学行为杂志》，41，26-44。

Luchins, A. S.（1942年）。问题解决中的机械化：定势的影响。《心理学专论》，*54*（6），i-95。https://doi.org/10.1037/h0093502

Maher, C. A., & Sigley, R.（2014年）。数学教育中的基于任务的访谈。载于 S. Lerman（编），《数学教育百科全书》（第 579–582 页）。doi: 10.1007/ 978-94-007-4978-8

McGowen, M., & Davis, G. E.（2019）。高增益与低增益本科数学学生概念图的谱分析。《数学行为杂志》，55。

McGowen, M., & Tall, D.（1999年7月）。概念图与示意图：记录数学知识发展的工具。发表于以色列海法举行的国际数学教育心理学小组年度会议。

Meyer, J. H., & Land, R.（2005年）。阈限概念与棘手知识（2）：认识论考量及用于教与学的概念框架。《高等教育》，49(3)，373-388。

Moore, R. C.（1994年）。过渡到形式证明。《数学教育研究》，27(3)，249-266。

Morgan, C., & Sfard, A.（2016）。探究高风险数学考试的变化：一种话语方法。《数学教育研究》，18(2)，92-119。

Nachlieli, T., & Tabach, M.（2012年）。在课堂中生长数学对象——函数的案例。《国际教育研究杂志》，51-52，10-27。

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O.（2014年）。大学层次数学学习与教学的共认知分析：微积分学习中的话语转变案例。《数学教育研究》，16(2)，182-198。

Newton, J.（2012年）。探究书面课程与实施课程在初中基于标准的课程中的数学等价性：聚焦有理数。《国际教育研究杂志》，51-52，66-85。

Norman, F.A.（1993年）。整合关于教师函数及其图像知识的研究。载于 T. Romberg、E. Fennema 和 T. Carpenter（编），《整合关于函数图形表示的研究》（第159-187页）。纽约，纽约州：Routledge。

Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2008年). 概念图理论及其使用方法（报告 IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008，佛罗里达人类与机器认知研究所）。取自：http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984).《学会如何学习》。纽约，纽约州：剑桥大学出版社。

Novak, J. D., & Gowin, D. B., & Johansen, G. T. (1983). 概念图和知识V形图在初中科学学生中的应用。《科学教育》，67(5)，625-645。

Nuñez, R. E., Edwards, L. D., & Matos, J. F. (1999). 具身认知作为数学教育中情境性与语境的基础。《数学教育研究》，39，45-65。

O'Shea, A., Breen, S., & Jaworski, B. (2016). 函数概念测验的开发。《国际本科数学教育研究杂志》, 2, 279–296.

Park, K. (1993年). 传统微积分课程与微积分与Mathematica课程的比较研究（博士学位论文）。取自 https://www.ideals.illinois.edu/bitstream/handle/2142/90293/Park_1993.pdf?sequence=2

Patton, M. Q.（2015年）。《质性研究与评估方法》（第4th 版，第305-324页）。美国加利福尼亚州千橡市：SAGE。

Pettersson, K.（2012年）。函数的阈限概念——一名学生的案例研究：她对该概念理解的发展。瑞典：MADIF-8。可访问：http://www.mai.liu.se/SMDF/madif8/Pettersson.pdf。访问日期：2019年11月21日。

Plaxco, D., & Wawro, M.（2015年）。通过数学活动分析学生对线性代数的理解。《数学行为杂志》，38，87-100。

Savic, M.（2015年）。孵化效应：数学家如何从证明困境中恢复。《数学行为杂志》，39，67-78。

Scheja, M., & Pettersson, K.（2010年）。转化与情境化：对学生关于微积分阈限概念的概念理解进行概念化。《高等教育》，59(2)，221-241。

Schoenfeld, A.（1991年）。关于作为意义建构的数学：对形式数学与非形式数学不幸分离的非正式抨击。载于 J. Voss、D. Perkins 和 J. Segal（编），《非形式推理与教育》（第311-343页）。新泽西州：Erlbaum。

Selden, A., & Selden, J.（1992年）。关于函数概念的研究视角：总结与概述。载于 G. Harel & E. Dubinsky（编），《函数概念：认识论与教学法的若干方面》（MAA Notes 版，第 25 卷，第 1–16 页）。美国数学协会。

Selden, A., & Selden, J.（2008年）。克服学生在学习理解和构造证明方面的困难（报告编号 2007-1）。检索自 ERIC 网站：https://eric.ed.gov/?id=ED518604

Sfard, A.（2001年）。话语的内涵远不止耳闻所及：将思维视为交流，以深入了解数学学习。《数学教育研究》，46，13-57。

Sfard, A.（2008年）。《作为交流的思维：人类发展、话语的增长与数学化》。纽约，纽约州：剑桥大学出版社。

Sfard, A. (2009年). 手势为何引起如此多关注？评论文章。《数学教育研究》，70, 191-200. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9161-1

Sfard, A. (2012年). 引言：发展数学话语——交流研究的一些见解。《国际教育研究杂志》，51-52，1-9。

Sfard, A. (2020). 共认知。载于 S. Lerman（编），《数学教育百科全书》（第 95-101页）。取自 https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100031

Sinclair, N., & Moss. J. (2012年). 变化越多，越趋于相同：动态几何环境中形状识别惯例的发展。《国际教育研究杂志》，51-52，28-44。

Smith, D., Eggen, M., & St. Andre, R. (2014年). 向高等数学的过渡（第 205-208 页）。

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015年). 本科生对证明的理解：证明观念、信念与证明学习的课堂体验之间的关系。《国际本科数学教育研究杂志》，1(1), 91-134。

Tall, D. (1992年) 高等数学思维的过渡：函数、极限、无穷与证明。载于 D. Grouws（编），《数学教学与学习研究手册》（第 495-511 页）。纽约：麦克米伦。

Tall, D., & Vinner, S. (1981). 数学中的概念意象与概念定义：特别关注极限与连续性。《数学教育研究》，12(2), 151-169。

Thoma, A. & Nardi, E. (2018). 从学校到大学数学的过渡：一年级学生考试答卷中尚未解决的交际认知冲突的表现。《国际本科数学教育研究杂志》，4, 161-180。

Thoma, A. & Nardi, E.（2020）。考试答卷中的回忆与论证常规：单射函数和满射函数。欧洲数学教育研究学会第十一届大会，乌得勒支大学，乌得勒支，荷兰。hal-02459923

Thoma, A.（2018）。向大学数学话语过渡：对一年级考试任务、讲师对评估的看法以及 学生考试答卷（博士学位论文）。取自 https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/70208/1/Athina_Thoma_PhD_thesis_2018.pdf

Thurston, A. & Wall, K.（编）。2012年。发展数学话语——交流研究的一些洞见。[特刊]。《国际教育研究杂志》，*51*， 155-158。doi: 10.1016/j.ijer.2012.01.003

Tirosh, D. & Tsamir, P.（1996年）。表征在学生关于无穷的直觉思维中的作用。《国际科学与技术数学教育杂志》，27(1)，33–40。

Vinner, S.（1983）。函数概念的概念定义、概念意象与函数的概念。《国际科学与技术数学教育杂志》，14(3)，293–305。

Vinner, S. & Dreyfus, T.（1989年）。函数概念的意象与定义。《数学教育研究杂志》，20(4)，356–366。

Watson, M. K., Pelkey, J., Noyes, C. R., & Rodgers, M. O.（2016）。使用三种概念图评分方法评估概念性知识。《工程教育杂志》，105(1)，118-146。

Weber, K.（2001年）。学生构造证明的困难：策略性知识的必要性。《数学教育研究》，48(1)，101-119。

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P.（2014年）。数学专业学生对证明阅读的信念。《国际科学与技术数学教育杂志》，45(1)，89-103。

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Niachlieli. T.（2019）。实现树评估工具——考察数学课中的探索性参与。《数学行为杂志》，56(1)，1-13。

Williams, C. G.（1995年，四月）。数学中的概念图作为研究工具。发表于美国教育研究协会年会，旧金山，加利福尼亚州，美国。

Williams, C. G.（1998年）。使用概念图评估函数的概念性知识。

《数学教育研究杂志》，29(4)，414-421。

Wilson, M.（1994年）。一位职前中学教师对函数的理解：整合数学内容与教学法的课程所产生的影响。《数学教育研究杂志》，25(4)，346-370。

Wilson, T. M.，& MacGillivray, H. L.（2007年）。立足基础：……中的数学技能

高等教育新生。《国际科学与技术数学教育杂志》，38(1)，19-41。

Zazkis, D.，Weber, K.，& Mejía-Ramos, J. P.（2015年）。成绩优异者的两种证明策略

数学专业学生。《数学行为杂志》，39，11-27。

附录A：学生临床访谈方案

下午好。我叫 Bolanle Salaam，是佐治亚大学数学教育项目的博士生。我正在开展有关学生思维的研究。这项研究的一个重要部分，是记录学生在整个证明入门课程中关于函数与证明的话语发展。

开始之前，我想提醒您，我会采取一切必要措施，对您在本次访谈中分享的信息保密。您在访谈过程中提供的任何身份识别信息，都会用化名替代。如果访谈中的任何问题让您感到不自在，或者您不想回答，您可以选择不回答该问题。您也可以随时结束访谈。本次访谈大约需要一小时。如果您允许我录音，将有助于我准确记录您的回答。我可以录音吗?

如果参与者同意，则开始录音。

话语图讨论

1. 提示：您之前为函数绘制了这张话语图。您能否向我介绍一下您是如何绘制这张图的?如果参与者提到图上没有写出的对象，或没有解释某种联系，请选择相应的子提示。

    a. 探查问题：你提到了能指—实现。你是在函数的语境下讨论它吗？i. 教学：如果是，你会把它放在图中的什么位置？你能把它画出来吗？b. 提示：你已将能指—实现与能指—实现连接起来，并在图中将能指—实现归入能指—实现之下。你能解释是什么促使你建立这种连接吗？c. 提示：我看到你在能指—实现和能指—实现之间建立了连接。这构成了一个命题。这是你想要表达的意思吗?i. 后续提问：你能描述一下你原本想在这里表达什么吗？你可以阅读任意数量的对象和连接。我只是想知道你在这里想表达关于能指—实现的什么内容。对于图中所有尚未由参与者解释的部分，重复上述步骤。

2. 提示：你还想添加其他内容，或更改图的格式吗？你可以直接在图上书写。

    a. 探查问题：您添加了、删除了、连接到能指、分组或拆分了您的能指—实现，并描述了与此变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。您能解释是什么促使您做出这一变化吗？i. 追问：您将这一变化产生的每个命题都视为真命题。我说得对吗？如果不对，请纠正我。

b. 追问：之前，您描述的是前一张图中能指—实现的状态，因为重复使用是参与者在先前的图中描述的；但现在您描述的是对象的当前连接和重复使用。我总结得准确吗？c. 提示：那么，描述变化现在就是描述图上的定位。如果参与者没有描述变化的全局图影响，这样就能补充描述。您认为这就是您的看法，对吗？

过渡：如果你在访谈过程中想起还有内容要补充到图中，请告诉我。现在，我想谈谈你的一些经历。

学生经历讨论

3. 提示：你能告诉我，你最初是什么时候接触到“函数”这个术语的吗？a. 探查问题：你是在学校环境中初次接触这个术语的吗？i. 探查问题：如果是，你当时上几年级或哪门课程？ii. 探查问题：如果不是，你能描述一下初次接触函数时的情形吗？b. 后续问题：请详细讲讲你接触“函数”这个术语的其他经历。c. 提示：你的函数图中包含了哪些类型的经历？是什么原因让你没有纳入某些经历吗？d. 提示：关于你接触函数的经历，还有什么其他事情是你希望我了解的吗？

4. 提示（可根据时间和学生经历酌情提问）：你能告诉我，你最初是什么时候接触到“证明”这个术语的吗？

a. 探查问题：这是在学校环境中接触到这个概念的吗？i. 探查问题：如果是，你当时上几年级或在修读哪门课程？ii. 探查问题：如果不是，你能描述一下当时接触证明的情境吗？b. 后续追问：请跟我讲讲你在其他情况下接触“证明”一词的经历。c. 提示：关于你接触证明的经历，还有什么是你希望我了解的吗？

最后一个问题：很好。关于你的图，还有什么是你希望我了解的，或者有什么想要修改的吗？我们也可以利用这段时间绘制一份整洁的最终图。

总结收尾：感谢您与我讨论您的思维和过往经历！如果您入选后续访谈，我会与您联系。请别忘了在24小时内完成后续调查，以获得奖励。您的回答不会影响您获得奖励，因此请尽可能如实作答。

附录B：教师临床访谈方案

下午好。我叫Bolanle Salaam，是佐治亚大学数学教育项目的一名博士生。我正在开展有关学生思维和话语的研究。这项研究的一个重要部分，是记录学生在入门证明课程开始前、课程期间以及课程结束时，在证明和函数方面的话语发展。了解您如何看待函数和证明，以及您对本课程中学生思维的看法，将对我很有帮助。

在开始之前，我想提醒您，我会采取一切必要措施，确保您在本次访谈中分享的信息保持匿名。您在访谈过程中提供的任何身份识别信息都会以化名替代。如果在访谈的任何时候，您对某个问题感到不自在，或不想回答，您可以选择不回答。您也可以随时结束访谈。本次访谈大约需要一小时；如果您允许我录音，将有助于我准确记录您的回答。我可以录音吗?

如果参与者同意，则开始录音。

话语图讨论

1. 提示：您之前为函数绘制了这张话语图。能否向我介绍一下您是如何绘制这张图的?如果参与者提及了未写在图上的对象，或没有解释某种联系，请选择相应的子提示。

    a. 探查问题：你提到了能指—实现。你是在函数的语境下讨论它吗？i. 教学：如果是，你会把它放在图中的什么位置？可以画出来吗？b. 提示：你在图中将能指—实现与能指—实现连接起来，并将能指—实现归在能指—实现之下。可以解释一下是什么促使你建立这种连接吗？c. 提示：我看到你在能指—实现和能指—实现之间建立了连接。这构成了一个命题。这是你想表达的意思吗？i. 追问：你能描述一下你原本想在这里表达什么吗？你可以阅读任意多个对象和连接。我只是想知道你在这里想表达关于能指—实现的什么内容。对于图中所有尚未由参与者解释的部分，重复以上步骤。

2. 提示：你还想补充什么，或改变图的格式吗？你可以直接在图上书写。

    a. 探查问题：你对自己的能指—实现进行了添加、删除、连接或分组、拆分，并描述了与这些变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。你能解释是什么促使你做出这些改变吗?

ii. 追问：那么，你认为这项变化产生的每个命题都是真命题。我的理解正确吗？如果不正确，请指正。b. 追问：之前，你描述的是先前图中能指—实现的状态，因为重复使用是参与者在之前的图中描述的；而现在，你描述的是对象当前的连接和重复使用。我这样概括准确吗？c. 提示：那么，描述变化现在就是描述图上的定位。如果参与者没有描述全局图影响，这样做就能体现变化的全局图影响。我理解你是这样看待的吗？

3. 提示：请你绘制一幅话语图，体现你认为典型的新生会如何理解函数；同时，请绘制一幅预期的话语图，体现你希望学生在完成本课程时，其函数话语如何组织起来。这些就是你绘制的学生预期话语图。我们先从初始图谱开始。你能讲讲自己是如何绘制这幅图的吗？

a. 探查问题：你认为学生在哪门课程中接触过你图中的能指—实现或映射部分？i. 后续问题：这也是你首次接触能指—实现或映射部分的时候吗？如果你还记得，你是什么时候首次接触能指—实现或映射部分的？ii. 后续问题：学生进入本课程时，在能指—实现或映射部分方面的准备情况如何？

从函数开始，然后询问教师的预期图中出现的其他能指实现，直至讨论完所有命题。

4. 提示：如果可以的话，你能描述一下自己是如何形成现在这幅函数图的吗？你认为自己是在什么时候达到这种组织程度的？那么，你为学生绘制的预期最终函数话语图又是怎样的呢？

过渡：现在，我想了解一下你对即将教授的证明入门课程的想法。

证明入门课程讨论（另一种做法：将这些问题设计成问卷发放。）

5. 用你自己的话来说，为什么学生应该选修这门课程？a. 追问：你目前是否觉得这门课程实现了你所讨论的目标？ 6. 你希望到学期末时，学生的证明话语会如何组织？如果你愿意，可以为证明画一幅话语图。剩余的问题可以

如果教师在回答问题时已涉及相关内容，则可跳过 5 或 6。若教师认为没有必要，则无需绘制证明图。7. 你认为学生在这门课程的哪些主题上表现最好？a. 追问：就某个主题而言，你希望学生做到什么，才会认为他们掌握得好？8. 你认为这门课程中的哪些主题对学生来说最难？a. 追问：你认为学生在某个主题上遇到困难的来源是什么？9. 关于函数、单射和满射，你在这门课程中与学生相处时有什么体会？10. 你的课程如何应对学生在证明构造方面遇到的困难？

最后一个问题：关于您的课程或总体上过渡到证明课程，您还有什么希望我了解的吗？

总结收尾：感谢你与我讨论你的思维和过往经历！在学生完成一项任务后，我会把该任务发给你。提醒一下，你需要写出至少一种证明构造，反映你预期学生会如何着手完成任务；此外，你还需要画一棵树，反映你预期学生在最终得出构造之前会如何解析这项任务。如果你认为还有其他常见的解题方法，也可以自行补充其他构造和树。我会在下次访谈前向你收集这些内容。期待阅读你对学生任务的回应。

附录C：学生任务型访谈方案（任务A）

欢迎回来，感谢你参与！提醒一下，你可以随时退出参与。对于任何让你感到不自在的问题，你也可以选择不回答。对我来说，录下这次访谈会很有帮助。我可以录音吗？

记录参与者是否同意。

图示变更

我将向你展示上次会面后你认可的图。请告诉我你是否想做任何更改。向参与者展示其函数图。

1. 提示：我看到你对图示变更做了概括性描述。我是否遗漏了你的任何更改？如果没有对学生图谱进行任何更改，请继续讨论证明和证明活动。

    a. 提问：你对自己的能指—实现做了哪些添加、删除、连接或分组、拆分？请描述与这些变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。你能解释是什么促使你做出这些改变吗？i. 追问：所以，你认为由这些变化产生的每个命题都是一个真命题。我的理解正确吗？如果不正确，请纠正我。b. 追问：此前，你描述了前一张图中能指—实现的状态，因为你重复了参与者在先前的图中所描述的用法；但现在，你描述的是当前的连接，并重复了对象的使用情况。我的概括准确吗？c. 提问：这很有意思。你还记得在哪里重复了学生对对象的使用情况，或者你是如何得知这些变化产生了新的命题的吗？i. 针对非教学材料的追问：你提到自己使用了非教学资源。你愿意和我分享一下该资源吗？ii. 追问：是什么让你选择非教学资源，而不是列出涉及变化内容的教学材料？iii. 追问：你对非教学资源的总结是，你描述了一个新的命题，因为你描述了参与者所引用的、作为图变化来源的非教学资源的特征？我的理解正确吗？如果不正确，请纠正我。d. 提问：那么，发生变化的能指—实现现在被描述为在图上的定位。如果参与者没有描述变化的全局图影响，这就意味着你会描述该影响。我的理解符合你的看法吗？e. 提问：关于你的变化，你还有其他想告诉我的吗？有没有什么是我们遗漏的？

重复此过程，直到参与者讨论完所有更改。如果参与者做出其他更改，则针对新更改重复子协议。

证明话语图

现在，我想请你为证明制作一张话语图。你已经学习这方面的内容大约一个月了。请花大约10分钟，尽可能多地写下你对证明的想法，并将其整理成一张话语图。这里有你的函数图和一些材料。完成后请告诉我。向参与者提供其函数话语图、空白纸张和书写材料。不要说明证明图必须画在新纸上，也不要要求它与函数图相连。如果参与者询问应在哪里画图，请说明由他们决定，只要能反映他们对证明的想法，画在他们觉得方便的地方即可。

1. 提示：很好！补充说明一下，你不必分别绘制地图，也可以把两张地图合并或连接起来；如果你认为这样更合适，也可以分别绘制地图、合并或连接起来。你目前的地图是否准确呈现了你对函数和证明的理解？如果参与者回答否，请提供教学。

    a. 教学：请根据需要随意进行修改。

2. 提示：现在你已经绘制好了地图，可以带我了解一下你是如何绘制这张地图的吗？如果参与者提到了地图上没有写出的对象，或没有解释某个连接，请选择相应的子提示。

    a. 探查问题：你提到了能指—实现。你是在证明、函数，还是证明和函数的语境中讨论它？ i. 教学：如果是，它在你的图中应该放在哪里？你能把它画出来吗？ b. 提示：你在图中将一个能指—实现与另一个能指—实现相连，或将一个能指—实现归在另一个能指—实现之下。你能解释一下是什么促使你建立这种连接吗？ c. 提示：我看到你在一个能指—实现和另一个能指—实现之间建立了连接。这构成了一个命题。这是你想表达的意思吗？ i. 后续提问：你能描述一下你原本想在这里表达什么吗？你可以逐一说明任意多个对象和连接。我只是想了解你在这里想表达关于能指—实现的什么内容。

    d. 提示：你还记得自己在哪些地方重复了学生对对象的使用，或者是如何开始在图中描述命题的吗？

        i. 针对非教学材料的追问：你提到使用了非教学资源。你介意把该资源分享给我吗？ ii. 追问：是什么让你选择非教学资源，而不是指出涉及变化内容的教学材料？ iii. 追问：那么，你对非教学资源的总结是，描述新的命题，因为你描述了参与者所引用的、作为图变化来源的非教学资源的特征？我理解得对吗？如果不对，请纠正我。

对参与者尚未解释的图中所有部分，重复上述步骤。

3. 提示：您是否还想添加其他内容，或更改您的图的格式？您可以直接在图上书写。

a. 探查问题：您对能指—实现进行了添加、删除、连接、分组或拆分，并描述了与这一变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。您能解释是什么促使您做出这一变化吗？i. 后续问题：所以，您将这一变化产生的每个命题都视为真命题。我的理解正确吗？如果不正确，请纠正我。b. 后续问题：所以，之前您在先前的图中描述的是能指—实现的状态，因为参与者在其之前的图中描述了重复使用的情况；但现在您描述的是对象当前的连接和重复使用情况。我这样概括准确吗？c. 提示：所以，现在描述变化就是描述其在图上的定位。如果参与者没有描述这一点，这就体现了变化的全局图影响。您是否确认这就是您对这一点的理解？

过渡：如果你在访谈过程中意识到之后还想在图上补充内容，请告诉我。

任务情境（任务库中的示例任务）

1. 好。现在我要请你完成一项任务。请尽力表达你正在思考的所有内容。请务必告诉我，你在这项任务中看到了什么，从而促使你采取行动。如果你不太确定从哪里开始，或者需要更多时间思考，我们可以先开始构建你的树，帮助你探索这项任务要求你做什么，以及你可能的应对方式。之后你可以进行证明构造。向学生提供任务情境。此任务不提供定义。不得使用教科书。

已隐去的图像

已隐去的引文

替代示例任务：$Prove\ that\ for\ f$：实数集 $\rightarrow$实数集，$f(s) = \frac{1}{2^s}\ satisfies\ f(x) = f(y)$ $=> x = y\ for\ all\ x, y\ in\ the domain$。

引出学生话语的适当提示问题：

- 试着重新阅读一下任务。你是否把注意力集中在任务的某个部分上？
- 你现在在想什么？你觉得自己卡在哪里？
- 在这门课中做作业时，如果你遇到困难，通常会怎么做？
- 在这门课中，如果一个问题有多个可供探索的选项，你通常会如何选择？o 我们何不把你目前考虑的选项写在你的树中列出来？这或许能帮助你理清任务。

只有在这次访谈的最后二十分钟内仍未取得进展，且可用的提示问题已用尽时，才应使用此探查问题：

- 你说过……复述参与者说过的任何如果-那么语句。你觉得……这是重复“如果”部分的唯一解法吗？还是你正在考虑其他可能性？根据参与者表达的倾向，选择首先提出的后续问题。

  o 后续问题：假设你确实知道参与者陈述的部分，你会如何完成重复当时的任务？o 后续问题：现在假设你知道先前假设性陈述的错误版本，那么你当时会怎么做？

过渡：(a) 如果学生未完成任务，则进入总结收尾。(b) 否则，继续 .

2. 提示：好的。你能告诉我，这个问题的哪些部分让你想到采用这种方法吗？记录参与者的 任务提示、常规和子常规。询问类似的简单任务，以识别学生在执行常规或抑制方面的规律 。如果参与者尚未创建树，请允许其在描述方法的同时创建树。

a. 探查问题：你最先注意到任务的哪些部分？记录参与者对该参与者用于某种常规的可能关键词的阐释。i. 追问：任务的那部分让你想到了什么？b. 探查问题：你对这个词/符号/复合短语的解释总是如此吗？记录参与者回忆起的其他被唤起的关键词用法以及他们所表达解释的任何适用条件。i. 追问：那么在这门课程中呢？有没有其他情境会让你作出不同的解释？ii.（可选）追问：参与者描述的关键词必须同时出现，你才会执行这种常规吗？在确定自己能够描述这种常规之前，你还需要检查类似任务的其他特征吗？c. 探查问题：还有哪些类型的问题会让你像处理这个问题那样继续进行（如果有的话）？记录参与者所说的、会促使他们执行与本任务相同常规的关键词和适用条件。

d. 提示：你用什么标准来判断自己已经完成了这个证明构造？记录参与者指出的结束条件。e. 提示：你说过，你看到了关键词，它们让你描述了学生所确定的常规；当你能够描述参与者指出的结束条件时，你就知道自己已经完成了。这对吗？f. 提示：任务情境中有没有哪些部分与你处理这个问题的方式无关？i. 追问：我看到任务情境中列出了未使用对象。这些对象与你处理这个问题的方式有关吗？如果有关，请解释一下。g. 提示：这是我在你的证明构造中看到的一个构造要素。你能告诉我是什么促使你写下它吗？i. 追问：我没看到你在树中讨论这个构造要素。你能再详细解释一下你是如何得出这一步的吗？我们会相应地更新你的树。

对参与者描述的任何子常规，重复 b-g。

3. 提示：好的。这是你的话语图。你用这个图中的哪些元素完成了这项任务？如果有，请给我看看。如果参与者能用该图追溯其完整方法，那么让他们画一棵树，照着话语图中相关部分绘制；如果他们还没有画树的话；他们应当包括所用的任何决策话语。如果参与者的常规未在话语图中得到阐明，且学生还没有画树，则让学生在此时画一棵树。

a. 提示：我看到你在一个数学对象和另一个数学对象之间建立了连接。这构成了一个命题。这是你想表达的意思吗？询问参与者的证明构造和树状方法中，是否有任何看起来相互矛盾或相互支持的命题。i. 后续提问：你能描述一下你想在这里表达什么吗？你可以逐一读出任意多个对象和连接。我只是想知道你在这里想对数学对象表达什么。

最后一个问题：在回答我关于你如何构造证明的问题时，你遇到困难了吗？你对自己采用的证明方法有什么看法吗？我们也可以利用这段时间，整理出最终图和树的清晰版本。

总结收尾：感谢你与我分享你的思维！如果你入选后续访谈，我会联系你。别忘了在24小时内完成后续调查，以获得奖励。你的回答不会影响你获得奖励，因此请尽可能如实作答。

附录D：学生任务型访谈方案（任务B）

欢迎回来，感谢你参与！提醒一下，你可以随时结束参与，也可以拒绝回答任何让你感到不自在的问题。录下这次访谈会对我有所帮助。我可以录音吗?

请记录参与者是否同意。

图示变更

我将向你展示上次会面后你批准的图。请告诉我你是否想做任何更改。向参与者展示其地图。

1. 提示：我看到你描述了每次图示变更。我是否遗漏了你的任何更改？如果学生图谱没有任何更改，请继续到任务情境。

    a. 提问：你对能指—实现做了添加、删除、连接能指、分组或拆分等操作，并描述了与这些变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。你能解释是什么促使你做出这些变化吗？i. 追问：那么，你认为由这些变化产生的每个命题都是真命题。我的理解正确吗？如果不正确，请纠正我。b. 追问：之前，你描述了前一张图中能指—实现的状态，因为你重复使用了参与者在其前一张图中描述的内容；但现在，你描述的是对象当前的连接和重复使用情况。我总结得准确吗？c. 提问：这很有意思。你还记得自己在哪里重复使用了学生对能指—实现的使用情况，或者你是如何描述由这些变化产生的新命题的吗？i. 关于非教学材料的追问：你提到自己使用了非教学资源。你愿意和我分享该资源吗？ii. 追问：是什么促使你选择非教学资源，而不是说出那些涉及此次变化内容的教学材料？iii. 追问：那么，你对非教学资源的总结是：你描述了一个新命题，因为你描述了参与者所引用、作为全局图变化来源的非教学资源的特征？我的理解正确吗？如果不正确，请纠正我。d. 提问：那么，你描述变化的方式现在变成了描述图上的位置。如果参与者没有描述变化的全局图影响，这样就会把它放在全局图影响之下。我的理解正确吗？e. 提问：关于你的变化，你还有什么想告诉我的吗？有没有什么是我们遗漏的？

重复此过程，直到参与者讨论完所有更改。如果参与者又提出其他更改，则针对新更改重复子协议。

任务情境（实际任务）

1. 好。现在我要请你完成一项任务。请尽可能清楚地表达你的所有思考。非常重要的一点是，请告诉我你在这项任务中看到了什么，促使你采取行动。如果你对从哪里开始感到有些不确定，或者需要花更多时间思考，我们可以先开始构建你的树，帮助你探索这项任务要求你做什么，以及你可以如何作答。之后你可以进行证明构造。向学生提供任务情境。除非学生提出要求，否则不要为这项任务提供定义。如果学生询问定义，请记录此前在任务上花费的时间。如果学生在这项任务上花费十分钟仍未取得初步进展，则在此时提供定义。不得提供定义以外的任务相关帮助。学生可以在提出要求时查阅课程教材和课程材料，但访谈者必须对此进行详细记录。

$$Prove\ or\ disprove\ that\ \frac{1}{2^x}\ is\ injective\ and/or\ surjective\ from\ \text{实数集}\ \rightarrow \text{实数集。}$$

引发学生话语的适当提示问题：

- 试着重新阅读任务。任务中有没有哪一部分是你正在关注的？
- 你现在在想什么？你觉得自己卡在哪里？
- 在这门课上做作业遇到困难时，你通常会怎么做？
- 在这门课上，如果你在解决一个问题时有不止一个可以尝试的选项，你通常会如何从中选择？ o 不如把你目前正在考虑的选项写在你的树里列出来？这或许能帮助你理清这个任务。

只有在这次访谈最后二十分钟时仍毫无进展，且可接受的提示问题已经用尽的情况下，才应使用此探查问题：

- 你提到要复述参与者说过的任何如果-那么语句。你觉得复述“如果”部分是解决这个问题的唯一方法吗？还是你还在考虑其他可能性？根据参与者表达出的倾向，选择首先提出的后续问题。
    - 后续问题：假设你的那部分陈述，那么你会如何完成当时的任务？ o 追问：现在假设你知道这个假设性陈述的错误版本，那么你当时会怎么做？

过渡：（a）如果学生没有完成任务，则进入总结收尾。（b）否则，继续。

2. 提示：好的。你能告诉我，这道题的哪些部分让你想到了这种解法吗？记录参与者表达的任务提示、常规和子-r常规。询问类似的简单任务，以识别学生常规中的规律

执行或抑制。如果参与者尚未创建树，请允许其在描述解法的同时创建树。

a. 探查问题：你最先注意到任务的哪些部分？记录参与者对其在常规中使用的可能关键词的阐释。i. 追问：任务的那部分让你想到了什么？b. 探查问题：你总是这样解释这个单词/符号/复合短语吗？请记录参与者回忆起的其他被唤起的关键词用法，以及其所述解释的任何适用条件。i. 追问：那么在这门课程中呢？有没有其他情境会让你作出不同的解释？ii.（可选）追问：参与者描述的关键词必须同时出现，你才会执行这个常规吗？在确定可以描述这一常规之前，你还需要考察类似任务的其他特征吗？c. 探查问题：还有哪些类型的问题会让你像处理这个问题那样进行解答（如果有的话）？请记录参与者所说的、会促使他们执行与本任务相同常规的关键词和适用条件。d. 提示：你依据什么标准判断自己已经完成了这项证明构造？请记录参与者指出的结束条件。e. 提示：你说过，自己看到了关键词，这些关键词让你描述了学生指出的常规；而且你知道，当参与者指出的结束条件得到满足时，你就完成了。这样说对吗？f. 提示：任务情境中有没有哪些部分与你处理这个问题的方式无关？i. 追问：我看到任务情境中列出了一些未使用对象。其中有任何对象与你处理这个问题的方式相关吗？如果有，请说明。g. 提示：这是我在你的证明构造中看到的一个构造要素。你能告诉我是什么促使你写下这一点吗？i. 追问：我没看到你在树中讨论这个构造要素。你能再详细说明一下你是如何得出这一点的吗？我们会更新你的树以反映这一点。

对于参与者描述的任何子常规，重复执行 b-g。

3. 提示：好的。这是你的话语图。你的图中是否有任何元素曾用于完成这项任务？如果有，请给我看看。如果参与者能用这张图追溯其完整的解题方法，并且尚未创建树，则让他们绘制一棵树，复制其话语图中的相关部分；他们还应包括所使用的任何决策

话语。如果参与者的常规未通过话语图阐明，且学生尚未创建树，则此时让学生创建一棵树。

a. 提示：我看到你在数学对象和数学对象之间建立了连接。这构成了一个命题。这是你想要表达的意思吗？询问任何似乎与参与者的证明构造和树状方法相矛盾或相支持的命题。i. 追问：你能描述一下你想在这里表达什么吗？你可以逐一阅读任意多个对象和连接。我只是想知道你想在这里表达关于数学对象的什么内容。

最后一个问题：对于我提出的关于你如何构造证明的问题，你是否有任何难以回答的地方？你对自己采用的证明方法有什么看法吗？我们也可以利用这段时间绘制一幅清晰的最终图和树。

总结收尾：感谢你与我讨论你的思维！如果你入选后续访谈，我会联系你。别忘了在24小时内完成后续调查，以获得奖励。你的回答不会影响你接收奖励，因此请尽可能诚实地回答。

附录 E：学生任务型访谈方案（任务 C）

欢迎回来，也感谢你的参与！这将是最后一次学生访谈。提醒一下，你可以随时结束参与。对于任何让你感到不适的问题，你也可以拒绝回答。记录这次访谈将对我很有帮助。我可以录音吗?

记录参与者是否同意。

图示变更

我将向你展示上次见面后你确认的图。请告诉我是否想做任何更改。向参与者展示其地图。

1. 提示：我看到你描述了每一处图示变更。我有没有漏掉你的任何更改？如果学生图谱没有任何更改，请继续进行任务情境。

a. 提示：您对能指—实现进行了添加、删除、连接、分组或拆分，并描述了与这一变化相关的其他能指和实现，以及变化的性质。您能解释一下是什么促使您做出这一变化吗？ i. 追问：所以，您将这一变化所产生的每个命题都视为真命题。我的理解正确吗？如果不正确，请您纠正我。 b. 追问：所以，之前您在先前的图中描述能指—实现的状态，因为重复参与者在其先前的图中描述的使用方式，但现在您描述的是当前的连接，并重复描述学生对对象的使用。我这样总结准确吗？ c. 提示：这很有意思。您还记得自己在哪里重复描述学生对对象的使用，或者是如何开始描述由这些变化产生的新命题的吗？ i. 针对非教学材料的追问：您说自己使用了非教学资源。您愿意与我分享该资源吗？ ii. 追问：是什么促使您选择非教学资源，而不是指明能够说明这一变化内容的教学材料？ iii. 追问：所以，您对非教学资源的总结是：由于描述了参与者所引用的、作为全局图变化来源的非教学资源的特征，因此描述了新命题？我的理解正确吗？如果不正确，请您纠正我。 d. 提示：所以，描述变化现在就是描述其在图上的位置。如果参与者没有描述全局图影响，那么这就构成了对变化的全局图影响的描述。我的理解是，您就是这样看待这一点的，对吗？ e. 提示：关于您的变化，您还有其他想告诉我的吗？有没有什么是我们遗漏的?

重复此过程，直到参与者讨论完所有更改。如果参与者又做出其他更改，则针对新更改重复子协议。

任务情境（任务库中的样例）

1. 好。现在，我要让你完成一项任务。尽你所能，把你正在思考的一切都表达出来。请务必告诉我，你在这项任务中看到了什么，以至于促使你采取行动。如果你有些不确定该从哪里开始，或者需要花更多时间思考，我们可以先开始构建你的树，帮助你探索这项任务要求你做什么，以及你可能采取哪些应对方式。之后你可以进行证明构造。向学生提供任务情境。除非学生提出要求，否则不要为这项任务提供定义。如果学生要求提供定义，请记录在此之前已花费的任务时间。如果学生在这项任务上花了十分钟仍未取得初步进展，则在此时提供定义。除定义外，不应提供针对具体内容的帮助。如果学生要求，可以查阅课程教材及材料，但访谈者必须对此进行详细记录。

Alternate Sample Task: *Prove or disprove that* $h(n) = 3n$ *is injective and/or surjective from* $Z \to Z$。（Thoma & Nardi，2018年，第169页）

Alternate Sample Task: *Let* f, g *be two functions whose domains and ranges are subsets of the set of real numbers*。*Prove or find a counterexample to the following statements*: （a）*If* f, g *are both injective, then it follows that* $f + g$ *is injective*。（b）*If* f, g *are both injective, then it follows that* $f + g$ *is surjective*。（Breidenbach 等人，1992年，第283页）

Alternate Sample Task: *Problems with variations on maps between* 实数集、N、Z →实数集、N、Z

用于引出学生话语的合适提示问题：

- 试着重新读一遍任务。你现在专注于任务的哪一部分？
- 你现在在想什么？你觉得自己卡在哪里？
- 在这门课的作业中遇到困难时，你通常会怎么做？
- 在这门课中，如果你在一个问题上有多个可以探索的选项，通常会如何从中选择？o 我们把你目前正在考虑的选项写在你的树上列出来，怎么样？这或许能帮助你理清任务。

只有在这次访谈的最后二十分钟仍毫无进展，且可接受的提示问题已全部用尽时，才应使用此探查问题：

- 你刚才说过要复述参与者所说的任何如果-那么语句。你觉得重复*“if”*部分是否是解决这个问题的唯一方法，还是您正在考虑其他可能性？首先选择要提出的后续问题，应基于参与者表达的倾向。

    o 后续追问：假设您确实知道重复参与者陈述中的*“if”*部分，那么在那个时候您会如何完成任务？o 后续追问：现在假设您知道该假设性陈述的错误版本，那么在那个时候您会怎么做？

过渡：（a）如果学生未完成任务，则进入总结收尾。（b）否则，继续。

2. 提示：好的。您能告诉我，这个问题的哪些部分让您想到了您的方法吗？记录参与者表达的任务提示、常规和子-常规。询问类似的简单任务，以识别学生常规执行或抑制中的规律。如果尚未完成，在参与者描述其方法时，允许其创建树。

a. 探查问题：你最先注意到任务的哪些部分？记录参与者对其在常规中使用的可能关键词的阐释。i. 追问：任务的那部分让你想到了什么？b. 探查问题：你总是这样解释这个单词/符号/复合短语吗？记录参与者回忆起的该关键词的其他引申用法，以及其所表达解释的任何适用条件。i. 追问：那么在这门课程中特别是怎样的？有没有其他情境会让你作出不同的解释？ii.（可选）追问：参与者描述的关键词必须同时出现，你才会进行这一常规操作吗？在你知道可以描述这一常规操作之前，还需要检查类似任务的其他特征吗？c. 探查问题：还有哪些类型的问题会让你像处理这道问题那样继续作答（如果有的话）？记录参与者所说的会促使其执行与此任务相同常规操作的关键词和适用条件。d. 提示：你用什么标准来判断自己已经完成了这项证明构造？记录参与者指出的结束条件。e. 提示：你说过，自己看到了关键词，这些关键词让你描述了学生指出的常规操作；你还知道，当你描述了参与者指出的结束条件时，自己就完成了。这样说对吗？f. 提示：任务情境中有没有哪些部分与你处理这道问题的方式无关？

i. 追问：我看到任务情境中列出了未使用对象。这些对象与你处理这道问题的方式有关吗？如果有关，请说明。g. 提示：这是我在你的证明构造中看到的一个构造要素。你能告诉我是什么促使你写下它吗？i. 追问：我没看到你在树中讨论这个构造要素。你能再详细说明一下你是如何得出这里的吗？我们会更新你的树来体现这一点。

对于参与者描述的任何子常规，重复 b-g。

3. 提示：好的。这是你的话语图。你在完成这项任务时用到了图中的任何元素吗？如果有，请指出来。如果参与者能够用该图完整地说明其方法，请让他们画一棵树，复制话语图中的相关部分；如果他们尚未创建树的话。他们应纳入自己使用过的任何决策话语。如果话语图没有阐明参与者的常规，并且他们还没有创建树，则让学生在此时创建一棵树。

a. 提示：我看到你在两个数学对象之间画了一条连接。这就构成了一个命题。你想表达的就是这个意思吗？询问任何看起来与参与者的证明构造和树状方法相矛盾或相支持的命题。i. 追问：你能描述一下你想在这里表达什么吗？你可以逐一读出任意数量的对象和连接。我只是想知道你在这里想要表达关于数学对象的什么内容。

最后的问题：在回答我关于你如何构建证明的问题时，你是否遇到了任何困难？对于你采用的证明方法，你有什么评论吗？我们也可以利用这段时间绘制一份整洁的最终图和树。

总结收尾：感谢你与我分享你的思维，并在本学期参与这些访谈。请别忘了在 24 小时内完成后续调查，以领取最后一笔奖励。你的回答不会影响你领取奖励，因此请尽可能如实作答。

附录 F：教师任务型访谈方案

本协议将用于本学期针对任务A、任务B和任务 C 开展的全部三次基于任务的访谈。

开始之前，我想提醒您，我会采取一切必要措施，对您在访谈中分享的信息保密。您在访谈过程中提供的任何身份信息都将以化名替代。如果访谈期间您对某个问题感到不自在，或者不想回答，您可以选择不回答。您也可以随时结束访谈。本次访谈大约需要一小时。为了确保准确记录您的回答，如果您允许，我希望录下访谈内容。请问您是否同意录音?

如果参与者同意，则开始录音。

预期构造与树状图讨论

今天的目的是请您说明自己的证明构造，以及您认为最能体现学生完成指定任务时解题方法的树状图。之后，您将有机会查看去标识化的构造样例。其中一些构造来自您的课堂，另一些则由不在您课程中的参与者、研究生、数学教师和数学授课教师提供。提供者被要求按照他们对证明入门课程学生水平的预期来书写构造。您不会获知所查看的示例构造由谁完成。

1. 提示：你能带我逐步了解你针对指定任务的证明构造吗?
   a. 提示：你预期的作图是否符合你认为该任务可接受的构造？如果符合，请继续回答 1b。i. 追问：如果不符合，请描述你对学生完成该任务时预期的作图所进行的推理。b. 提示：根据访谈进行时已经完成的教学，你认为学生是否接受了必要的教学，能够针对该任务给出你认为可接受的作图？c. 提示：根据访谈进行时已经完成的教学，你认为学生在该任务的哪些方面可能会遇到困难（如果有的话）？ d. 提示：根据访谈进行时已经完成的教学，你认为该任务的哪些方面对学生来说应该不会太难？e. 追问：对于你预期的证明构造，或截至目前我们在这次访谈中的对话，你还有什么意见吗?

2. 提示：你能向我介绍一下你对这项任务的预期学生树吗？这里有你在学期初绘制的预期初始和最终学生话语图副本。解释你的推理时，可以酌情使用这些图。

a. 探查问题：你预计学生会首先注意到任务的哪些部分？请记录参与者对学生在常规中可能使用的关键词的阐释。i. 后续提问：你预期任务的那一部分会让学生想到什么？ b. 探查问题：你是否预期学生在所有数学情境中都会这样理解这个单词/符号/复合短语？请记录参与者回忆起的关键词引发的其他用法。i. 后续提问：那么在这门课程中呢？有没有其他情境会让你预期学生以不同方式理解某个单词、符号或像？ii.（可选。措辞可根据内部判断调整。）后续提问：你描述的关键词是否必须同时出现，你才会预期学生执行这一常规？对于类似任务的其他特征，你是否会预期学生在执行同一常规前先进行考察？ c. 探查问题：是否还有其他类型的问题/问题类别，你会预期学生通过应用你在预期学生树中使用的同一常规来完成？请记录参与者指出的关键词和适用条件，这些内容应能引导学生在本任务中执行同一常规。d. 提示：你预期学生会使用什么标准来判断证明构造已经完成，无须继续作答？请记录参与者指出的结束条件。e. 提示：你表示，你预期学生最初会注意到关键词，并据此描述教师确定的预期常规；而且，他们会通过描述参与者指出的结束条件来判断作图已经完成。这样说对吗？ f. 提示：任务情境中是否有任何部分与你预期学生处理这项任务的方式无关？ i. 后续提问：我看到任务情境中列出了一些未使用对象。它们是否有任何一个与你预期学生处理这项任务的方式有关？如果有，请解释。g. 提示：这是我在你的预期证明构造中看到的一个构造要素。你能告诉我是什么促使你写下它吗？ i. 后续提问：我没有看到你在预期学生树中讨论这个构造要素。你能进一步解释一下，你预期学生会如何讨论尚未解释的作图部分吗？我们会相应更新你的树。

对参与者描述的任何子常规，重复执行 b-g。

3. 提示：关于这项任务，或者你希望学生如何完成这项任务，你还有其他意见吗？

盲法证明构造讨论（预计用时：完成三项构造需 30 分钟）

现在，我将向你展示一系列针对这项任务写成的证明构造。提醒一下，在这份样本中，你可能会看到，也可能看不到来自你课堂的证明构造。请逐一阅读每个构造，评价其质量，并说明如果你的一名学生在作业中提交了这个构造，你会如何使用我们商定的评分量表对其进行评估。我还希望你谈谈你认为构造的作者可能是如何思考这项任务的，以及他们的函数话语和／或证明话语可能是如何组织的。如果你愿意，可以使用你创建的预期学生话语图和树来完成这项工作。我会请你为每个构造写下评估意见。

1. 以下是针对指定任务给出的一个作图样例。请花些时间阅读这个证明构造，并评价其质量。

    a. 探查问题：你依据什么来判断这个构造的质量？ b. 探查问题：你认为作者是如何理解这项任务的？你认为这项任务是如何被理解的？如果有助于说明你的想法，可以将其与为这项任务绘制的预期树进行比较。 c. 探查问题：你认为具有此构造所体现的函数话语的学生，其话语会如何组织？你认为这个学生的话语中有哪些函数话语内容不会出现？ d. 探查问题：你对这个构造还有其他意见吗？

请教师在作图上写下评估意见。对所有示例构造重复执行子协议。

最后一个问题：关于这项任务、你预期的作图、相关的树，或我们今天阅读的示例构造，你有什么意见想告诉我吗？

总结收尾：感谢你与我分享你的思维！期待在下一次访谈中与你交谈。

附录 G：教师最终临床访谈方案

在开始之前，我想提醒你，我会采取一切必要措施，对你在本次访谈中分享的信息保密。你在访谈过程中提供的任何身份识别信息都会替换为化名。如果访谈期间的任何时候，你对某个问题感到不自在，或者不想回答，你可以选择不回答该问题。你也可以随时结束访谈。本次访谈大约需要一小时。如果你允许我录音，将有助于我准确记录你的回答。我可以录音吗?

如果参与者同意，请开始录音。

教师话语图讨论

1. 提示：您之前为函数话语绘制了这张话语图。您想对这张图做任何修改吗？如果参与者提到他们没有写在图上的对象，请让他们将该对象纳入自己对函数的思考中。a. 探查问题：是什么促使您在图上建立新的联系？2. 提示：您之前绘制了预期的初始和最终学生函数话语图。根据本学期课程的进展以及您与学生相处的经历，您是否想改变对学生最终的学生话语概念图将如何组织的看法？a. 探查问题：是什么促使您建立新的联系、重新组织图或删除联系?

学生话语概念图讨论

在本学期中，我向你展示了一系列你所教课程中的学生完成的证明构造，也提供了来自研究前一阶段的参与者和志愿者绘制的话语图。我收集了你查看过的、由你的一名学生绘制的每个构造对应的树和话语图。本样本仅包含你的学生。

在整个学期中，我会向你展示本研究中学生绘制的代表性函数话语图。如果某位学生另行绘制了证明话语图，我也会向你展示。展示这些图时没有特定顺序，也不按照我在本学期中向你展示证明构造时所采用的顺序排列。我希望你谈谈你认为绘制了这些图的学生在每项任务中的表现会如何，以及你认为他们会采用哪些方法来完成任务。你可以引用样本学生话语图中的元素来阐明你的推理。你将在这些图上撰写评论。

1. 提示：这里有一名学生的图或一份代表性话语图样本。请花些时间阅读这幅图，并对图的质量发表意见，说明你有哪些顾虑，并使用我们商定的量表为这幅图评分。

    a. 探查问题：你以什么为依据来判断这幅图的质量?

b. 探查问题：你认为这名学生是如何理解并完成指定任务的？你认为图类似的学生是如何理解这项任务的？c. 你对这幅图还有其他意见吗？

请教师标注话语图。若有多个话语图，请重复此流程。按学生参与者使用相似图时所做的任务对各图进行分组。

学生实现树讨论

现在，我会向你展示你的评述，以及作者在学期中着手完成某项任务时所绘制的话语图；然后，我会向你展示他们的证明构造和你的评述。最后，我会向你展示这名学生绘制的树。这是学生对自己如何思考并完成该任务所作的最佳描述。这三份研究材料均由同一名学生完成，这些学生都是本学期在你课堂上学习的学生。

1. 这是三元话语图，这是三元证明构造。请花些时间比较你对这份样本中两份研究材料的记录。请告诉我，在比较这张图和作图时你有何评论，以及你给这些研究材料打了什么分。

a. 探查问题：对于这张话语图如何导向这一作图，有没有什么让你感到意外？ b. 探查问题：这两份研究材料中，有没有什么让你觉得不足为奇？ c. 探查问题：对于这些研究材料以及你对它们的评述，你还有其他意见吗？

2. 这是该学生针对这项任务的三元树。回忆一下，我向你提供的是该学生在完成这一作图和树时所陈述的、最能代表其函数话语和证明话语的话语图。请告诉我，在比较这棵树与该学生创建的话语图和作图时，你有何评论。

a. 探查问题：在该学生三元组的全部三份研究材料之间，是否有任何令你感到意外之处？ b. 探查问题：在这三份研究材料之间，是否有任何令你感到不意外之处？ c. 探查问题：你还有其他评论吗？

对多个三元组的子协议重复上述步骤。

最后一个问题：在这一学期中，你已经考察了几种作图、树和话语图。关于学生思维，你目前是否有什么想要进一步探究的问题？请分享你对学生的证明话语和函数话语发展过程的任何评论。

总结收尾：感谢你在这一学期中付出的时间并提供意见！