arXiv:2303.00103v1 [math-ph] 28 Feb 2023

扭转多层石墨烯中的平带与高陈数

MENGXUAN YANG

ABSTRACT. 受 Wang–Liu 最近发表于《物理评论快报》的工作启发 [WL22]以及 Ledwith–Vishwanath–Khalaf 的工作 [LVK22], 我们研究 Tarnopolsky–Kruchkov–Vishwanath[TKV19] 关于两层 n层 Bernal 堆垛石墨烯以小角度扭转的手征模型，并采用 Becker–Embree–Wittsten–Zworski[BEWZ22]提出的框架。我们证明，该模型的魔角与手征扭转双层石墨烯的魔角完全相同，且重数也相同。对于较小的层间隧穿势，我们计算了逐渐增大隧穿参数时狄拉克点处的能带分离。我们还利用一种新的 theta 函数论证构造了平带本征函数，由此得到一个陈数为 $-n$。

1. INTRODUCTION

当两层或更多层石墨烯上下堆叠并发生扭转时，人们观察到，在某些角度（即魔角），零能带会变平，系统则会变成超导态。

在本文中，我们考虑以下手征模型： [SJGG12] [TKV19] 两层 n-层伯纳尔堆叠石墨烯以小角度 [WL22]扭转而成。扭转多层石墨烯（TMG）的哈密顿量为

$$H_n(\alpha;\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} 0 & D_n^*(\alpha;\mathbf{t}) \\ D_n(\alpha;\mathbf{t}) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

其中

$$D_n(\alpha;\mathbf{t}) := \begin{pmatrix} D(\alpha) & t_1T_+ & & & \\ t_1T_- & D(0) & t_2T_+ & & \\ & t_2T_- & D(0) & \ddots & \\ & & \ddots & & t_{n-1}T_+ \\ & & & t_{n-1}T_- & D(0) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

与 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 以及

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} 2D_{\bar{z}} & \alpha U(z) \\ \alpha U(-z) & 2D_{\bar{z}} \end{pmatrix}, \quad T_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

特别是， $z = x_1 + ix_2$, $D_{\bar{z}} := \frac{1}{2i}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$ 以及

$$U(z) = U(z, \bar{z}) := \sum_{k=0}^{2} \omega^k e^{\frac{1}{2}(z\bar{\omega}^k - \bar{z}\omega^k)}, \quad \omega := e^{2\pi i/3}. \tag{1.4}$$

在方程（1.2）中， $t_k T_+$ （分别是 $t_k T_-$）表示最上层（分别是最底层）与第 k层和第（$k+1$）层之间的隧穿。一般性不失地，我们可以假设所有 t_i都非零；否则， D_n（α；$\mathbf{t}$）可直和分解为更小的矩阵块。

在相应的物理模型中，当两个蜂窝晶格彼此扭转时，会形成一种称为莫尔′晶格的周期性蜂窝超晶格。Bistritzer–MacDonald [BM11] 预言，扭转双层石墨烯（TBG）中周期性莫尔′晶格的对称性会导致能带谱显著变平。TBG手征模型（1.5）由 Tarnopolsky–Kruchkov– Vishwanath [TKV19]通过从 [BM11]所构造的算子中去除某些相互作用项而得到；近期，Becker等人 [BEWZ22] 以及 Becker–Humbert–Zworski [BHZ22a] [BHZ22b]对其进行了更深入的数学研究。近期，Wang–Liu [WL22]和 Ledwith–Vishwanath–Khalaf [LVK22]将TBG手征模型推广为手征TMG模型，这些模型同样具有理想量子几何并支持高陈数能带，

注 1. 对于 $n = 1$，算子 (1.1) 化为手征扭转双层模型 *(TBG)*

$$H_n(\alpha; \boldsymbol{t}) = H(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & D^*(\alpha) \\ D(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

与 t无关，详见 [TKV19] [BEWZ22] [BHZ22a] [BHZ22b]。无量纲参数 α 在 (1.1) 和 (1.5) 中本质上是扭转角的倒数。

注意，势（1.4）满足以下性质：

$$\begin{gathered} U(z + \mathbf{a}) = \bar{\omega}^{a_1+a_2} U(z), \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + \omega a_2), \quad a_j \in \mathbb{Z}, \\ U(\omega z) = \omega U(z), \quad \overline{U(\bar{z})} = U(z). \end{gathered} \tag{1.6}$$

特别地，它关于晶格 3Λ 周期，且

$$\Lambda := \{\tfrac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + \omega a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.7}$$

对偶晶格 $\frac{1}{3}\Lambda^*$ 由 -3Λ 满足以下条件的$\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ 组成

$$\langle \gamma, \mathbf{k} \rangle := \tfrac{1}{2}(\gamma\bar{\mathbf{k}} + \bar{\gamma}\mathbf{k}) \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad \gamma \in 3\Lambda \Longrightarrow \Lambda^* = \sqrt{3}\omega\,(\mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z})\,. \tag{1.8}$$

我们考虑修正平移算子下的广义Floquet条件$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$，其中$\mathbf{a} \in \Lambda$ （定义见方程（2.3））， 即我们研究 H_n（α；$\mathbf{t}$）的谱

满足以下边界条件：

$$H_n(\alpha;\mathbf{t})\mathbf{u} = E(\alpha,\mathbf{k})\mathbf{u},\quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}(z) = e^{i\langle \mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}\mathbf{u}(z),\quad \mathbf{k}\in\mathbb{C}. \tag{1.9}$$

由于手征对称性，谱关于原点对称，我们将其编号如下

$$\begin{gathered}\{E_j(\alpha,\mathbf{k})\}_{j\in\mathbb{Z}^*},\quad E_j(\alpha,\mathbf{k}) = -E_{-j}(\alpha,\mathbf{k}),\quad \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}\\ 0\le E_1(\alpha,\mathbf{k})\le E_2(\alpha,\mathbf{k})\le\cdots,\quad E_1(\alpha,\mathbf{0}) = E_1(\alpha,-\mathbf{i}) = 0,\end{gathered} \tag{1.10}$$

详见§3.1 。点 $\mathbf{0}$、$-\mathbf{i}$ 称为狄拉克点，在物理学文献中通常记作 K 和 K' 。

对于 $E(\alpha,\ \mathbf{k})$ 满足方程 (1.9)，其中 $H_n(\alpha;\ \mathbf{t})$，我们定义如下复数集合：

$$\mathcal{A}_n := \{\alpha\in\mathbb{C} : \forall\,\mathbf{k}\in\mathbb{C},\quad E_1(\alpha,\mathbf{k})\equiv 0\} \tag{1.11}$$

魔角本质上是 α 的倒数。而如果 $E_2(\alpha,\ \mathbf{k}) > 0$，则称 $\alpha\in\mathcal{A}$ 为简单的；$\alpha\in\mathcal{A}$ 的重数定义为满足 $E_j(\alpha,\ \mathbf{k})\equiv 0$ 的 j 的 $(j>0)$ 的数量。

我们的第一个定理指出，扭曲多层石墨烯哈密顿量 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的魔角与扭曲双层石墨烯哈密顿量 $H(\alpha)$ 的魔角一致。

定理 1. 集合 $\mathcal{A}_n$ 与 $n\in\mathbb{N}_+$ 无关。更准确地说，每个 $\alpha\in\mathcal{A}_n$ 的重数均与 n 无关。

因此，我们可以定义 $\mathcal{A}:=\mathcal{A}_n$。这一结果实质上已包含在论文[WL22]中。集合 $\mathcal{A}_1$ （针对 TBG）的谱理论刻画见[BEWZ22]，其中使用了一个 Birman–Schwinger 算子，其谱由 $1/\mathcal{A}_1$给出。

我们的第二个结果研究隧穿参数 $\mathbf{t}$ 对 $\alpha\in\mathcal{A}$ 的作用。当$\mathbf{t}=\mathbf{0}$时，算子 $D_n(\alpha;\mathbf{t})$ 可分解为一个算子 $D(\alpha)$ 与 $(n-1)$ 个算子 $D(\mathbf{0})$ 的直和；后者产生与 $\alpha\in\mathbb{C}$ 无关的狄拉克锥。这些狄拉克锥与任意 $\alpha\in\mathbb{C}$ 对应的能带 $E_1(\alpha,\ \mathbf{k})$ 相连。特别地，对于 $\alpha\in\mathcal{A}$，开启隧穿参数 $\mathbf{t}$ 并使其满足 $t_i>0$ （$1\le i\le n-1$）时，这些狄拉克锥便与平带分离，并形成带隙。我们研究了 $H_2(\alpha;t)$ 的能带分离：

定理 2. 假设 $\alpha\in\mathcal{A}$ 是简单的。对于 $t\ll 1$ 且在$\mathbf{k}=K'$处，$H_2(\alpha;t)$ 的前两个特征值分别为 $E_1(\alpha、\mathbf{k}、\mathbf{t})=0$和 $E_2(\alpha、\mathbf{k}、\mathbf{t})=Ct+\mathcal{O}(t^{3/2})$。

注 2. 常数 C 由命题 5.3计算得出。对于 $H_n(\alpha;\boldsymbol{t})$，我们预计同样的结果也成立。为方便记号，本文仅展示 $n=2$ 的情形。这也为 [WL22]中讨论的能带分离机制给出了一个显式结果。

利用一种新的 theta 函数论证以及 $(2D_{\bar{z}}-\mathbf{k})^{-1}$的预解式公式，对于$\alpha \in \mathcal{A}$ 简单情形，我们构造了 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的平带本征函数。这产生了一个全纯线丛 L （更多详情请参见 §6.3 中的讨论）。

定理 3. 线丛 L 的陈数为 $c_1(L) = -n$。

这证实了 [WL22] 中关于高陈数的观察，该观察依赖于对平带本征函数积分的数值计算（见表 1）。在 [WKL22], 中，平带本征函数被视为秩为 n 的全纯向量丛的截面。我们新的 theta 函数论证给出了显式的解析构造，并回答了 [LB22] 提出的问题。

我们在讨论其与物理学的关系后结束引言：

整数霍尔效应。 在低温下，对于二维电子气，随着磁场变化，霍尔电导会在若干整数倍 $e^2/2\pi\hbar$ 处呈现平台。事实证明，平台处的霍尔电导与底层厄米线丛的陈数 c_1 相关，而这些线丛由基态本征函数导出（通过贝里曲率）。根据久保公式，霍尔电导为

$$\sigma = -\frac{e^2}{2\pi\hbar}c_1$$

在这种情况下，TMG 模型中较高的陈数可产生较高的霍尔电导。

理想量子几何与分数量子陈绝缘体。另一个观察（参见 [WL22]）是，式（6.9）中构造的平带本征函数关于 $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$是全纯的。物理学文献中称这样的平带满足理想量子几何（参见 [CLT+15][OM21][MO21] [WCM+21]），其含义是基本区域 $\mathbb{C}/\Lambda^*$ 上的贝里曲率 $\Omega(\mathbf{k})$ 非零，且与由平带本征函数诱导的 Fubini–Study 度量 $g_{\mathbf{k}}$ 成正比 $\mathbb{C}/\Lambda^*$ 。

据预测并经验证，这种平带具有分数量子陈绝缘体（FCI）[RB11] [BL13], ，它们是二维电子气中传统分数量子霍尔效应在晶格上的推广。例如，FCI 可以出现在如下能带填充下

$$\nu = \frac{k}{(m-1)|c_1|+1}$$

满足 $m,\ k \in \mathbb{N}$ 使得 $k \geq 1,\ m \geq 2$。这里 $k = 1$（分别 $k > 1$）对应阿贝尔态（分别为非阿贝尔态），且对于玻色子（分别为费米子）， m 为偶数（分别为奇数）。FCI 的稳定性被推测源于理想量子几何（参见 [TKV19][WKL22] [LB22]）。

论文结构。在第 2 节，我们研究对称群和不可约表示。这将导出所有 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的所谓受保护的零特征态。在第 3 节，我们回顾 [BHZ22a] 引入的广义布洛赫–弗洛凯理论，并给出魔角的谱刻画。在第 4 节，我们证明定理 1。接着在第5 节，我们证明定理 2。在第 6 节，假设魔角是简单的，我们构造平带本征函数并证明定理 3。

致谢。 作者非常感谢 Maciej Zworski 将他引入魔角领域，并就早期稿件进行了许多有益的讨论并提出了宝贵意见。作者还要感谢 Simon Becker 的有益讨论和提供的各种数值支持，以及 Zhongkai Tao、Jie Wang 和 Jared Wunsch 就本项目进行的有益讨论并对稿件提出意见。

2. Hamiltonians of Twisted Multilayer Graphene

本节研究哈密顿量 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的对称性。对称群与哈密顿量对易，并将函数空间分解为不可约表示。这由此产生了所谓的受保护态。我们还考察了 $\mathbf{t} = 0$ 时具有零特征值的特征态，其中一些态是不受保护的，也就是说，当 $\alpha \in \mathcal{A}$ 时开启层间参数 $\mathbf{t}$，相应的特征分支会脱离平带。

2.1. 哈密顿量的对称性。

2.1.1. 平移对称性。 式（1.6）中的第一个恒等式表明，对于 $L_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(z) := \mathbf{v}(z+\mathbf{a})$,

$$D_n(\alpha;\mathbf{t})L_{\mathbf{a}} = \mathrm{diag}_n\left\{\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} L_{\mathbf{a}} D_n(\alpha;t)\ \mathrm{diag}_n\left\{\begin{pmatrix}\bar{\omega} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega^{\ell}, \quad \ell = 1,2$$

其中，$\mathrm{diag}_n\{(*)\}$ 表示具有 n 个分块的分块对角矩阵。因此，

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}} D(\alpha) = D(\alpha)\mathscr{L}_{\mathbf{a}}, \quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}} := \mathrm{diag}_n\left\{\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} L_{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega^{\ell}, \quad \ell = 1,2. \tag{2.1}$$

因此，对于晶格

$$\Lambda = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(\mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}) \tag{2.2}$$

and

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}} := \mathrm{diag}_n\left\{\begin{pmatrix}\omega^{a_1+a_2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} L_{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(a_1+\omega a_2) \in \Lambda, \tag{2.3}$$

我们得到 Λ 在 $L^2(\mathbb{C};\mathbb{C}^{2n})$ 上的酉作用，或者更准确地说，在 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{2n})$ 上的酉作用，其中有 一个 $\mapsto \mathscr{L}_{\mathbf{a}}$。我们还可以将 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ 的作用以分块对角的方式扩展到 $L^2(\mathbb{C};\mathbb{C}^{4n})$ 或 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})$，从而得到

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}H_n(\alpha)=H_n(\alpha)\mathscr{L}_{\mathbf{a}},\quad \mathbf{a}\in\Lambda. \tag{2.4}$$

2.1.2. 旋转对称性。 (1.6) 中的第二个恒等式表明

$$[D(\alpha)\mathbf{u}(\omega\bullet)](z)=\bar{\omega}[D(\alpha)\mathbf{u}](\omega z).$$

因此，将其应用于 D_n（α，$\mathbf{t}$）中的方程（1.2），可得

$$[D_n(\alpha;\mathbf{t})\mathbf{u}(\omega\bullet)](z)=\bar{\omega}[JD_n(\alpha;\mathbf{t})J^*\mathbf{u}](\omega z), \tag{2.5}$$

$$J:=\mathrm{diag}(1,1,\bar{\omega},\omega,\bar{\omega}^2,\omega^2\cdots,\bar{\omega}^{n-1},\omega^{n-1}). \tag{2.6}$$

类似地，对于 $D_n^*(\alpha;\mathbf{t})$，有

$$[D_n^*(\alpha;\mathbf{t})\mathbf{u}(\omega\bullet)](z)=\omega[JD_n^*(\alpha;\mathbf{t})J^*\mathbf{u}](\omega z).$$

因此，对于 $\mathbf{u}\in L^2(\mathbb{C};\mathbb{C}^{4n})$，

$$\mathscr{C}'\begin{pmatrix}J&\\&J\end{pmatrix}H_n(\alpha;\mathbf{t})\begin{pmatrix}J^*&\\&J^*\end{pmatrix}=H_n(\alpha;\mathbf{t})\mathscr{C}', \tag{2.7}$$

$$\mathscr{C}'\mathbf{u}(z):=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{2n}&\\0&\bar{\omega}\mathrm{Id}_{2n}\end{pmatrix}\mathbf{u}(\omega z). \tag{2.8}$$

因此，我们得到

$$\mathscr{C}H_n(\alpha;\mathbf{t})=H_n(\alpha;\mathbf{t})\mathscr{C},\quad \mathscr{C}:=\mathscr{C}'\begin{pmatrix}J&\\&J\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.1.3. 额外对称性。 我们记录了涉及 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的一些额外作用和对称性。

$$H_n(\alpha;\mathbf{t})=-\mathscr{W}H_n(\alpha;\mathbf{t})\mathscr{W}^*,\quad \mathscr{W}:=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathscr{W}\mathscr{C}=\mathscr{C}\mathscr{W},\quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathscr{W}=\mathscr{W}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}, \tag{2.10}$$

这意味着 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的谱是偶对称的。

注 3。 使用 (3.6)中引入的记号，我们还有

$$H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})=-\mathscr{W}H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})\mathscr{W}^*.$$

这意味着，对于 $E_j(\mathbf{k})\geq 0$ 的每个特征值 $H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$，都存在另一个特征值 $E_{-j}(\mathbf{k})\leq 0$，使得 $E_{-j}(\mathbf{k})=-E_j(\mathbf{k})$。

2.1.4. 函数空间上的群作用。 根据 [BEWZ22],, 由于 $\mathscr{C}\mathscr{L}_{\mathbf{a}} = \mathscr{L}_{\bar{\omega}\mathbf{a}}\mathscr{C}$，我们可以将这两个作用组合成一个与$H_n(\alpha;\ \mathbf{t})$:

$$G := \Lambda \rtimes \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3 \ni k : \mathbf{a} \to \bar{\omega}^k\mathbf{a}, \quad (\mathbf{a}, k)\cdot(\mathbf{a}', \ell) = (\mathbf{a} + \bar{\omega}^k\mathbf{a}', k + \ell), \\ (\mathbf{a}, \ell)\cdot\mathbf{u} = \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathscr{C}^{\ell}\mathbf{u}. \tag{2.11}$$

对 3Λ 取商后，我们得到一个有限群，它在 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})$ 上酉作用，并且与 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 对易:

$$G_3 := G/3\Lambda = \Lambda/3\Lambda \rtimes \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_3. \tag{2.12}$$

限制到各个分量上， G （分别地， G_3）也在 $L^2(\mathbb{C};\mathbb{C}^{2n})$（分别地， $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\ \mathbb{C}^{2n})$）上作用，我们对这些作用也使用相同的记号。结合前面的讨论，我们得到以下

命题 *2.1*。算子 $H_n(\alpha;\ \boldsymbol{t})$: $L^2(\mathbb{C};\mathbb{C}^{4n}) \to L^2(\mathbb{C};\ \mathbb{C}^{4n})$ 是一个无界自伴算子，其定义域为 $H^1(\mathbb{C};\ \mathbb{C}^{4n})$。算子 $H_n(\alpha;\ \boldsymbol{t})$ 与由 *(2.11)* 给出的群 G 的酉作用对易，并且

$$\operatorname{Spec}_{L^2(\mathbb{C})} H_n(\alpha;\boldsymbol{t}) = -\operatorname{Spec}_{L^2(\mathbb{C})} H_n(\alpha;\boldsymbol{t}).$$

当 $L^2(\mathbb{C})$ 替换为 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda)$ 且 G 替换为 G_3由 (2.12)给出时，同样的结论仍然成立。在这种情况下，谱是离散的。

2.2. 零特征处的受保护态。 为证明算子 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 存在受保护的零特征态，我们首先考虑 $L^2(\mathbb{C})$（分别为 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda)$）上的 G（分别为 G_3）的所有不可约表示。

2.2.1. 不可约表示。 回顾 [BEWZ22第 2 节中的内容。2], 的不可约酉表示 $\mathbb{Z}_3^2$ 是一维的，具体为

$$\pi_{\mathbf{k}} : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathsf{U}(1), \quad \pi_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) = e^{i\langle\mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}, \\ \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + a_2\omega), \quad a_j \in \mathbb{Z}_3, \quad \mathbf{k} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\omega(\omega k_1 - k_2),\ k_j \in \mathbb{Z}_3, \\ \langle\mathbf{a},\mathbf{k}\rangle = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{k}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{k}) = \tfrac{2\pi}{3}(k_1a_1 + k_2a_2). \tag{2.13}$$

G_3 的不可约表示在 $\mathbf{k} \in \Delta$ 时是一维的（由 $\Delta(\mathbb{Z}_3) := \{(k,k)\ k \in \mathbb{Z}_3\}$ 给出——注意， $\langle\mathbf{k}\ \omega\mathbf{a}\rangle = \langle\mathbf{k},\ \mathbf{a}\rangle$, $\mathbf{a} \in \Lambda/3\Lambda$, 当且仅当 $\mathbf{k} \in \Delta$），

$$\rho_{k,p}((\mathbf{a},\ell)) = \bar{\omega}^{\ell p}\pi_{(k,k)}(\mathbf{a}),$$

或对于三维的 $\mathbf{k} \notin \Delta$:

$$\rho_{\mathbf{k}}((\mathbf{a},\ell)) = \begin{pmatrix} \omega^{\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{\langle\mathbf{k},\omega\mathbf{a}\rangle} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\langle\mathbf{k},\omega^2\mathbf{a}\rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\ell} \in \mathsf{U}(3).$$

对于属于 $\mathbf{a} \mapsto \omega\mathbf{a}$ 转置的同一轨道的 $\mathbf{k}$，这些表示是等价的，因此只有两种。

定义如下函数空间：

$$L^2_{k,p} := \left\{\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n}) : \ \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathscr{C}^{\ell}\mathbf{u} = e^{i\langle \mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}\bar{\omega}^{\ell p}u\right\} \tag{2.14}$$

因此有 11 个不可约表示：9 个一维表示和 2 个三维表示。我们可以将 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})$ 分解为 11 个正交子空间：

$$L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n}) = \left(\bigoplus_{k,p\in\mathbb{Z}_3} L^2_{k,p}\right) \oplus L^2_{(1,0)} \oplus L^2_{(2,0)}. \tag{2.15}$$

鉴于命题2.1 我们定义

$$H_{k,p}(\alpha;\mathbf{t}) := H_n(\alpha;\mathbf{t}) : L^2_{k,p} \cap H^1(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n}) \longrightarrow L^2_{k,p}, \tag{2.16}$$

其中 $H_{(1,0)}$ 和 $H_{(0,1)}$ 的定义类似。若无歧义，我们在此省略维数常数 n。

2.2.2. 受保护的零特征态。 我们先考虑 $\alpha = 0, \mathbf{t} \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^{n-1}$ 的情形。在 $\alpha = 0$ 处，$H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的核为

$$\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})} H_n(0;\mathbf{t}) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2n}, \mathbf{e}_{2n+2}, \mathbf{e}_{4n-1}\},$$

其中集合 $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{4n}$ 构成 $\mathbb{C}^{4n}$ 的标准基。现在我们考虑 $G_3 = \mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ 在 $\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})} H_n(0;\mathbf{t})$ 上的作用，其中 $\mathbf{a} = \frac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + a_2\omega), (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_3^2$：

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_1 = \omega^{a_1+a_2}\mathbf{e}_1, \quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_{2n} = \mathbf{e}_{2n}, \quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_{2n+2} = \mathbf{e}_{2n+2}, \quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_{4n-1} = \omega^{a_1+a_2}\mathbf{e}_{4n-1},$$
$$\mathscr{C}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathscr{C}\mathbf{e}_{2n} = \bar{\omega}^{1-n}\mathbf{e}_{2n}, \quad \mathscr{C}\mathbf{e}_{2n+2} = \bar{\omega}\mathbf{e}_{2n+2}, \quad \mathscr{C}\mathbf{e}_{4n-1} = \bar{\omega}^{n}\mathbf{e}_{4n-1}.$$

若 $n \neq 3k$ 对于 $k \in \mathbb{N}$ 成立，则 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2n}, \mathbf{e}_{2n+2}, \mathbf{e}_{4n-1}$ 在群作用 G_3 下属于 $L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})$ 的不同不可约表示，其中

$$\mathbf{e}_1 \in L^2_{1,0}, \quad \mathbf{e}_{2n} \in L^2_{0,[1-n]}, \quad \mathbf{e}_{2n+2} \in L^2_{0,1}, \quad \mathbf{e}_{4n-1} \in L^2_{1,[n]},$$

其中 $[k] \in \{0,1,2\}$ 满足 $[k] \equiv k \mod 3$。因此，若 $n \neq 3k$ 和 $\alpha = 0$，则这些不可约表示 $H_{k,p}(0;\mathbf{t})$ 各有一个零特征值。由于 $\mathscr{W}$（见（2.10））与 G_3 的作用可交换，$H_{k,p}(\alpha;\mathbf{t})$ 的谱关于 0 对称（见命题 2.1），由此可知，对于上述每个 k, p，$H_{k,p}(\alpha;\mathbf{t})$ 在 0 处有一个特征值。

当对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $n = 3k$ 时，我们有

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{4n-1} \in L^2_{1,0}, \quad \mathbf{e}_{2n}, \mathbf{e}_{2n+2} \in L^2_{0,1}.$$

由于$\mathbf{e}_{4n-1}$和$\mathbf{e}_{2n}$始终是$H_{1,0}(\alpha;\mathbf{t})$和$H_{0,1}(\alpha;\mathbf{t})$各自的特征函数，因此它们自然是受保护的零特征态。谱的对称性

$H_{1,0}$ （分别为$H_{0,1}$）意味着$H_{1,0}(\alpha;\mathbf{t})$和$H_{0,1}(\alpha;\mathbf{t})$在0处都具有两个受保护的特征值。由于

$$\begin{aligned}\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})} H_n(\alpha;\mathbf{t}) = \ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{2n})} D_n(\alpha;\mathbf{t}) \oplus \{0_{\mathbb{C}^{2n}}\} \\ +\{0_{\mathbb{C}^{2n}}\} \oplus \ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{2n})} D_n^*(\alpha,\mathbf{t}),\end{aligned} \tag{2.17}$$

we 得到了关于 0 处对称受保护本征态的以下结果 :

命题 2.2. 对于所有 $\alpha \in \mathbb{C}$ 以及任意 $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^{n-1}$

$$\ker_{L^2_{1,0}} D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) \neq \emptyset, \quad \ker_{L^2_{0,[1-n]}} D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) = \{\mathbf{e}_{2n}\}.$$

注 4. 文献 [WL22] 也利用微扰理论讨论了受保护态，针对 $\mathbf{t}$ 无穷小的情形。这里我们采用不同的方法，证明对于所有 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-1}$，零特征态均受到保护。

2.2.3. 未受保护的零特征态与能带分离。 现在我们考虑$\mathbf{t} = 0$的情形，即上下 n层之间没有隧穿。我们证明，在这种情况下， $4n-4$ 的零特征态 $H_n(\alpha;0)$ 还有额外的未受保护零特征态；所谓未受保护，是指开启隧穿参数 $\mathbf{t}$时，它们会导致能带分离（参见第5节）。

算子 $D_n(\alpha;0)$ 可分解为一个扭曲双层算子$D(\alpha)$（见方程（1.3））与 $D(0) = \mathrm{diag}(2D_{\bar{z}}, 2D_{\bar{z}})$ 的直和。 $H_n(\alpha;0)$ 的核为 $4n$ 维，由 $\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^2)} D(\alpha)$、$\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^2)} D^*(\alpha)$ 以及 $(2n-2)$ 个 $\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^2)} D(0)$ 的直和构成:

$$\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})} H_n(\alpha;0) = \{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1,2,2n+1,2n+2} \cup \{\mathbf{e}_j\}_{j\neq 1,2,2n+1,2n+2}$$

其中

$$\Phi_i(\alpha) = (\varphi_i(\alpha), 0_{\mathbb{C}^{4n-2}}), \quad \Phi_{2n+i}(\alpha) = (0_{\mathbb{C}^{2n}}, \psi_i(\alpha), 0_{\mathbb{C}^{2n-2}}), \quad i = 1,2;$$
$$D(\alpha)\varphi_i = 0, \quad D^*(\alpha)\psi_i = 0, \quad i = 1,2.$$

我们可以再次考虑 $G_3 = \mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ 对 $\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})} H_n(\alpha;0)$ 的作用，其中$\mathbf{a} = \frac{4}{3}\pi i\omega$ $(a_1 + a_2\omega), (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_3^2$。

为简洁起见，我们只讨论情形 $n = 2$。由此可得

$$\Phi_1 \in L^2_{1,0}, \quad \mathbf{e}_4 \in L^2_{0,2}, \quad \Phi_6 \in L^2_{0,1}, \quad \mathbf{e}_7 \in L^2_{1,2}, \tag{2.18}$$
$$\{\Phi_2, \mathbf{e}_8\} \subset L^2_{0,0}, \quad \{\mathbf{e}_3, \Phi_5\} \subset L^2_{1,1}. \tag{2.19}$$

与前面的讨论类似，对于 $t = 0$，这些不可约表示$H_{k,\ell}(\alpha;0)$ $(k = 0,1;\ \ell = 0,2)$各自有一个零特征值，而$H_{\ell,\ell}(\alpha;0)$ $(\ell = 0,1)$则有两个零特征值。 $\mathscr{W}$ 与 G_3 的可交换性表明，$H_{k,\ell}(\alpha)$各自在0处有一个特征值。然而，根据上一小节对 $\ell = 0,1$的讨论，$\ker H_{\ell,\ell}(\alpha;t) = \emptyset$ 表明，$H_{\ell,\ell}(\alpha;0)$的零特征函数对 $\{\Phi_2,\mathbf{e}_8\}$ 和$\{\mathbf{e}3, \Phi_5\}$ 会在开启隧穿参数 t时消失。这

实际上，这正是狄拉克带与平带分离的起因，相关讨论见第5节。

同样的论证适用于任意 $n \in \mathbb{N}$，其中所有不可约表示$H_{k,\ell}(\alpha; 0)$ 都可能有多个零特征函数。唯一受保护的零特征态是与特征函数 $\{\Phi_1, \mathbf{e}_{2n}, \Phi_{2n+2}, \mathbf{e}_{4n-1}\}$ 对应的特征分支。

3. 布洛赫–弗洛凯理论

本节介绍哈密顿量 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 关于平移算子 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$，一个 $\in \Lambda$的布洛赫–弗洛凯理论，该理论给出了算子 $H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 的能带结构（参见方程 (3.6)），其中 $\mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*$。

3.1. 广义弗洛凯理论方法。我们沿用 [BHZ22a] 对具有 $\in \Lambda$ 的算子 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ 的Floquet理论讨论，这种理论已隐含地出现在物理学文献中（参见 [TKV19]）。这种Floquet 理论的一个优点是，平带处的集合 $\ker_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^2)} D(\alpha)$（其维数为九，参见 [BHZ22a，第 3.3] 节）会分解为九个不同 $\mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*$ 所对应的 $\ker_{L^2_{\mathbf{0}}(\mathbb{C}/\Lambda;\mathbb{C}^2)}(D(\alpha) + \mathbf{k})$ 的元素（下文 (3.8) 给出了 $L^2_{\mathbf{0}}$ 的定义）。这种广义弗洛凯理论也简化了能带分离机制的阐述（参见第 5 节）。

我们首先定义 $\mathbb{C}$ 上的内积为

$$\langle z, w\rangle := \frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

注意，若 $z \in \Lambda$ 和 $w \in \Lambda^*$，则有 $\langle z, w\rangle = 2\pi\mathbb{Z}$。

The 广义Floquet条件针对 $\mathbf{w} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C};\mathbb{C}^{4n})$ 表述如下 s:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{w}(z) := e^{i\langle \mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}\mathbf{w}(z), \quad \mathbf{a} \in \Lambda, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*, \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{a}, \mathbf{k}\rangle = 2\pi(a_1k_1 + a_2k_2)/3, \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + \omega a_2) \in \Lambda, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega(\omega k_1 - k_2) \in \mathbb{C}/\Lambda^*, \quad 0 \le k_j < 3.\end{gathered} \tag{3.2}$$

我们考虑满足Floquet条件（3.1 ）且由扭曲平移算子 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$:定义的Floquet谱（关于谱的离散性，参见命题3.1）

$$H_n(\alpha;\mathbf{t})\mathbf{w}_j(\alpha,\mathbf{k}) = E_j(\alpha,\mathbf{k};\mathbf{t})\mathbf{w}_j(\alpha,\mathbf{k}), \tag{3.3}$$

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{w}_j(\alpha,\mathbf{k}) = e^{i\langle \mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}\mathbf{w}_j(\alpha,\mathbf{k}), \quad \mathbf{a} \in \Lambda, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*. \tag{3.4}$$

我们定义

$$\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k}) := e^{-i\langle z,\mathbf{k}\rangle}\mathbf{w}_j(\alpha,\mathbf{k})(z), \quad \mathbf{a} \in \Lambda, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*, \tag{3.5}$$

由此得到 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}_j(\alpha,\ \mathbf{k})\ =\mathbf{v}_j(\alpha,\ \mathbf{k})$。接着我们考虑算子

$$H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t}):=e^{-i\langle z,\mathbf{k}\rangle}H_n(\alpha;\mathbf{t})e^{i\langle z,\mathbf{k}\rangle}=\begin{pmatrix}0 & D_n(\alpha;\mathbf{t})^*+\bar{\mathbf{k}}\\ D_n(\alpha;\mathbf{t})+\mathbf{k} & 0\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

满足边界条件 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}\ =\mathbf{v}$ ，从而得到 等价的 Floquet谱：

$$H_{\mathbf{k},n}(\alpha;\mathbf{t})\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k})=E_j(\alpha,\mathbf{k},\mathbf{t})\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k}),\quad \mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k})=\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k}),\quad \mathbf{a}\in\Lambda. \tag{3.7}$$

注意，$\mathbf{v}_j(\alpha,\mathbf{k})$ 还取决于 $\mathbf{t}$ ，但为简便起见，此处将其省略。这表明我们将 $H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 视为定义在某空间上的自伴算子

$$L^2_{\mathbf{0}}=L^2_{\mathbf{0}}(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n}):=\{\mathbf{v}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}/3\Lambda,\mathbb{C}^{4n}):\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}=\mathbf{v},\ \mathbf{a}\in\Lambda\} \tag{3.8}$$

其定义域为 $H^1_{\mathbf{0}}:=L^2_{\mathbf{0}}\cap H^1(\mathbb{C}/3\Lambda;\ \mathbb{C}^{4n})$。注意，我们有时会稍微滥用 $L^2_{\mathbf{0}}$ 的记号，将其限制在子空间 $\mathbb{C}^2$ 或 $\mathbb{C}^{2n}$ 上，在该空间中 $\mathbb{C}^{4n}$ 算子$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ 是对角的。

另一方面 wo，我们可以定义广义Bloch变换（参见 [TZ23，第 5]章）：

$$\mathcal{B}u(z,\mathbf{k}):=\sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}e^{-i\langle z+\mathbf{a},\mathbf{k}\rangle}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}u(z) \tag{3.9}$$

容易验证其满足

$$\mathcal{B}u(z,\mathbf{k}+\mathbf{p})=e^{-i\langle z,\mathbf{p}\rangle}\mathcal{B}u(z,\mathbf{k}),\quad \mathbf{p}\in\Lambda^*,$$
$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}'}\mathcal{B}u(\bullet,\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}e^{-i\langle z+\mathbf{a}+\mathbf{a}',\mathbf{k}\rangle}\mathscr{L}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}u(z)=\mathcal{B}u(\bullet,\mathbf{k}),\quad \mathbf{a}'\in\Lambda,$$

因此 $\mathcal{B}u(\bullet,\ \mathbf{k})\in L^2_{\mathbf{0}}$。由 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 与 $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ 的可交换性，我们有

$$\mathcal{B}H_n(\alpha;\mathbf{t})=H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})\mathcal{B}.$$

固定 $\mathbf{k}\ \in\mathbb{C}/\Lambda^*$时，$H_{n,\ \mathbf{k}}\ =\ \mathcal{B}H_n\mathcal{B}^*$ 在 $L^2_{\mathbf{0}}$ 上的作用为（3.6）中的算子。因此，修正后的 Bloch变换 产生了 $E_j(\alpha,\ \mathbf{k},\ \mathbf{t})\ j\in\mathbb{N}H_n$的本征函数能带，$\mathbf{k}(\alpha;\mathbf{t})$，其中 $\mathbf{k}\ \in\Lambda^*$。

注 5. 在 $\mathbb{C}/\Lambda^*$ 中，我们将两个特殊点 $\mathbf{k}\ =\ (0、0)\ =\mathbf{0}$ 记为 K ，并将 $\mathbf{k}\ =(1、1)\ =\frac{1}{\sqrt{3}}\varpi\hbar(\omega-1)\ =-\mathbf{i}$ 记为 K'，这与物理学文献中的记法一致。

3.2. **Floquet理论与表示。** 我们进一步定义如下空间（参见分解（2.15））：

$$L^2_{\mathbf{p}}:=\{\mathbf{u}\in L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n}):\mathscr{L}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}=e^{i\langle\mathbf{a},\mathbf{p}\rangle}\mathbf{u},\ \ \forall\,\mathbf{a}\in\Lambda\},$$
$$L^2(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^{4n})=\bigoplus_{\mathbf{p}\in3\Lambda^*/\Lambda^*}L^2_{\mathbf{p}}. \tag{3.10}$$

注意，对于

$$\mathbf{p}\in\Delta=\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\omega(\omega p-p):p\in\mathbb{Z}_3\},$$

我们有正交分解

$$L^2_{\mathbf{p}} = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}_3} L^2_{p,\ell}, \quad \mathbf{p} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\omega(\omega p - p).$$

注 6. 注意到 $u \in \ker^{L^2_0}(D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) + \mathbf{p})$ 当且仅当对 $v := e^{i\langle z,\mathbf{p}\rangle}u$, $v \in \ker_{L^2_{\mathbf{p}}} D_n(\alpha;\boldsymbol{t})$成立。

比较 分解（2.15）和（3.10）中的其余各项，我们得到 n

$$L^2_{(j,0)} = \bigoplus_{\mathbf{p}\in\mathscr{O}_j} L^2_{\mathbf{p}}, \quad j = 1,2,$$

其中 $\mathscr{O}_j$, $j = 1,2$ 是在由$\mathbf{p} \mapsto \bar{\omega}\mathbf{p}$ 给出的作用下的两个轨道

$$\mathbb{Z}_3 \setminus \Delta = \mathscr{O}_1 \sqcup \mathscr{O}_2 = \{(1,0),(0,2),(2,1)\} \sqcup \{(2,0),(0,1),(1,2)\}. \tag{3.11}$$

3.3. 魔角的谱刻画。 我们首先介绍算子 $D_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的一些基本性质，其定义域为 $H^1_{\mathbf{0}}$。我们首先注意到

$$\mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D_n(0;\mathbf{t}) = \Lambda^* + \{\mathbf{0},\mathbf{i}\}, \tag{3.12}$$

因为对于 $e_{\mathbf{k}}(z) := e^{-i\langle z,\mathbf{k}\rangle}$,

$$(D_n(0;\mathbf{t}) + \mathbf{k})e_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{k} \in \Lambda^* + \{-\mathbf{i}\}; \quad (D_n(0;\mathbf{t}) + \mathbf{k})e_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{2n} = 0, \quad \mathbf{k} \in \Lambda^* + \{\mathbf{0}\},$$

其中，指数函数 $e_{\mathbf{k}}/\mathrm{vol}(\mathbb{C}/\Lambda)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{k} \in \Lambda^*$构成 $L^2(\mathbb{C}/\Lambda)$ 的一组标准正交基，而 $\{\mathbf{e}_j\}_{1\le j\le 2n}$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 的标准基。由此得到以下命题:

命题 3.1. </style}族 $(\alpha;\boldsymbol{t})$: $H^1_{\mathbf{0}} \to L^2_{\mathbf{0}}$ 是一个指标为 0 的椭圆 *Fredholm* 算子全纯族；并且对于所有 α, $D_n(\alpha;\boldsymbol{t})$ 的谱具有 Λ^*-周期性:

$$\mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) = \mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) + \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \in \Lambda^*. \tag{3.13}$$

证明。由于 $D_{\bar{z}}$ 是二维空间上的椭圆算子，参数子存在（参见 [DZ19，命题 E.32]）意味着其具有 Fredholm 性质（参见 [DZ19，§C.2] 关于 Fredholm 算子的内容）。根据 (3.12)， $D_n(0;\mathbf{t}) + \mathbf{k}$ 对于 $\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0},-\mathbf{i}\}$ 可逆，因此 $D_n(0;\mathbf{t}) : H^1_{\mathbf{0}} \to L^2_{\mathbf{0}}$ 是指标为0的算子。Fredholm 算子族 $D_n(\alpha;\mathbf{t})$ 也同样如此。

为说明 (3.13)，注意，若 $(D_n(\alpha;\mathbf{t}) + \lambda)\mathbf{u} = 0$ 其中 $\mathbf{u} \in H^1_{\mathbf{0}}$，则 $(D_n(\alpha;\mathbf{t}) + \lambda + \mathbf{k})(e_{\mathbf{k}}\mathbf{u}) = 0$ 其中 $e_{\mathbf{k}}\mathbf{u} \in H^1_{\mathbf{0}}$ 对任意 $\mathbf{k} \in \Lambda^*$。 □

因此，对于每个 $\mathbf{k}$，算子 $H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 是一个椭圆微分系统，因此它具有离散谱，该谱进而描述了 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 在 $L^2(\mathbb{C})$ 上的谱:

$$\mathrm{Spec}_{L^2(\mathbb{C})} H_n(\alpha;\mathbf{t}) = \bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{C}/\Lambda^*} \mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t}),$$
$$\mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t}) = \{\pm E_j(\mathbf{k},\alpha,\mathbf{t})\}_{j=1}^{\infty}, \quad E_{j+1}(\mathbf{k},\alpha,\mathbf{t}) \ge E_j(\mathbf{k},\alpha,\mathbf{t}) \ge 0. \tag{3.14}$$

注意，有时我们会省略 $(\alpha, \mathbf{t})$，直接写作 $H_{n,\mathbf{k}}, D_n$ 和 $E_j(\mathbf{k})$，只要不会引起歧义。为得出 (3.14) 中的第二个恒等式，请注意

$$(\lambda - \mathscr{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 - A^*A)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - AA^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & A^* \\ A & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A} := \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

因此，$H_{n,\,\mathbf{k}}$ 在 $L^2_{\mathbf{0}}$ 上的非零特征值由 $\pm$ $D_n + \mathbf{k}$的非零奇异值给出，即算子 $[(D_n^* + \bar{\mathbf{k}})(D_n + \mathbf{k})]^{\frac{1}{2}}$,的特征值，按其重数计。

$\bar{}(D_n^* + \mathbf{k})(D_n + \mathbf{k})$的零特征值（若存在）也与$\bar{}(D_n + \mathbf{k})(D_n^* + \mathbf{k})$的零特征值具有相同的重数，因此特征值 $E_j(\mathbf{k}) = 0$ 恰好被计入两次（对于 $\pm$），这可由恒等式推出

$$\dim \ker_{L^2_{\mathbf{0}}}(D_n + \mathbf{k}) = \dim \ker_{L^2_{\mathbf{0}}}(D_n^* + \bar{\mathbf{k}}), \tag{3.16}$$

这由命题3.1推出：算子 $D_n + \mathbf{k}$ 是一个指标为0的Fredholm算子。

结合方程（3.6），上述讨论给出了在零能量处存在平带的三个等价刻画：

命题3.2。对于 $\alpha \in \mathbb{C}$，下列陈述等价：
(1) $0 \in \bigcap_{\mathbf{k}\in\mathbb{C}}$ 谱$_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{n,\,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ (2) $E_0(\mathbf{k}, \alpha, \mathbf{t}) = 0$ 对所有 $\mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*$。
(3) 谱$_{L^2_{\mathbf{0}}} D_n(\alpha;\mathbf{t}) = \mathbb{C}$。

4. Magic angles of the Twisted multilayer Hamiltonian

魔角是指满足以下条件的角度 $1/\alpha$’：

$$0 \in \bigcap_{\mathbf{k}\in\mathbb{C}} \mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t}) \tag{4.1}$$

如第 3 节所述，哈密顿量 $H_{n,\,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 来自 ***Floquet***理论，其中 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$；而（4.1）意味着 $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 在 0 处有一个 平带，其等价条件如下：

$$0 \in \bigcap_{\mathbf{k}\in\mathbb{C}} \mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t}) \iff \mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D_n(\alpha;\mathbf{t}) = \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

4.1. **TBG 的魔角**。 我们简要回顾 [BHZ22a] 中关于 TBG 平带和魔角的若干结果。

令 $\mathcal{A}$ 表示满足 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的 $D(\alpha)$ 的所有魔角的集合，则 $L^2_{\mathbf{0}}$ 上的 $D(\alpha)$ 的谱为

$$\mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D(\alpha) = \begin{cases} \Lambda^* + \{\mathbf{0}, \mathbf{i}\} & \alpha \notin \mathcal{A}, \\ \mathbb{C} & \alpha \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

由此得到以下命题:

命题 4.1。 设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $E_1(\alpha,\mathbf{k})$ 由 (3.3) 定义，其中 $H(\alpha)$ 由 (1.1) 给出，其中 $n=1$。则

$$\exists\ \mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0}, -\mathbf{i}\} \quad E_1(\alpha,\mathbf{k}) = 0 \iff \forall\ \mathbf{k} \in \mathbb{C} \quad E_1(\alpha,\mathbf{k}) = 0. \tag{4.3}$$

换言之，当且仅当布洛赫特征值在某个0 处为零时，零能带是平带；该点为狄拉克点格子中的$\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0}, -\mathbf{i}\}$， K， K'。

当平带重数为一时，以下结果有助于运用 theta 函数论证构造平带本征函数。

命题 4.2。 设 $\alpha \in \mathcal{A}$。若 $\dim\ker_{L^2_0} D(\alpha) = 1$，则 $\mathbf{u} \in \ker_{L^2_0} D(\alpha)$,$\mathbf{u} \not\equiv 0$ 在 $-z_S + \Lambda$ 处有一阶零点，且无其他零点。

在上述命题中，点 $z_S = \frac{1}{3}(\frac{4}{3}\pi i\omega(-1+\omega))$ 是一个高对称性点（参见 [BEWZ22]）。回忆 $\Lambda = \frac{4}{3}\pi i\omega(a_1 + \omega a_2)$，因此 $-z_S = \frac{1}{3}(-1,1) \in \frac{1}{3}\Lambda$。

4.2. 扭转多层石墨烯的魔角。 在本节中，我们证明以下定理，该定理指出， $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的魔角与 TBG 的魔角重合。

定理 4。 对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $D(\alpha)$ 由方程 (1.3) 定义，我们有

$$\mathrm{Spec}_{L^2_0} D_n(\alpha;\boldsymbol{t}) = \mathrm{Spec}_{L^2_0} D(\alpha) = \begin{cases} \Lambda^* + \{\mathbf{0},\mathbf{i}\} & \alpha \notin \mathcal{A}, \\ \mathbb{C} & \alpha \in \mathcal{A}. \end{cases} \tag{4.4}$$

证明。 根据命题 2.2 和 3.1，对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 两者的谱$_{L^2_0} D_n(\alpha;\mathbf{t})$ 和谱$_{L^2_0} D(\alpha)$ 都包含 $\Lambda^* + \{\mathbf{0},\mathbf{i}\}$ 作为谱，并且它们对于 Λ^*的谱均为 -周期$D(\alpha)$）。因此我们只需考虑 $\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0},\mathbf{i}\}$。

我们定义如下矩阵

$$J_{\mathbf{t},+} := \begin{pmatrix} 0 & t_1T_+R_0(\mathbf{k}) & & & \\ & 0 & t_2T_+R_0(\mathbf{k}) & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & & t_{n-1}T_+R_0(\mathbf{k}) \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{t},-} := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ t_1T_-R_0(\mathbf{k}) & 0 & & & \\ & t_2T_-R_0(\mathbf{k}) & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & t_{n-1}T_-R_0(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $R_0(\mathbf{k}) := (D(0) - \mathbf{k})^{-1}: L^2_0 \to H^1_0$ 对于 $\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0}, \mathbf{i}\}$。我们只需证明，对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 固定的 $D_n(\alpha; \mathbf{t}) - \mathbf{k}$ 可逆，当且仅当 $D(\alpha) - \mathbf{k}$ 可逆，其中$\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0}, \mathbf{i}\}$。根据直接计算和恒等式 $T_+ R_0(\mathbf{k}) T_- = 0$，我们得到如下分解

$$D_n(\alpha; \mathbf{t}) - \mathbf{k} = (\mathrm{Id} + J_{\mathbf{t},+}) \mathrm{diag}(D(\alpha) - \mathbf{k}\ D(\mathbf{0}) - \mathbf{k} \cdots, D(\mathbf{0}) - \mathbf{k})(\mathrm{Id} + J_{\mathbf{t},-}). \quad (4.5)$$

由于 $\mathrm{Spec}_{L^2_0} D(\mathbf{0}) = \Lambda^* + \{\mathbf{0}, \mathbf{i}\}$，当且仅当$D(\alpha) - \mathbf{k}$ 可逆（$\mathbf{k} \notin \Lambda^* + \{\mathbf{0},\mathbf{i}\}$）时，算子 $D_n(\alpha;\mathbf{t}) - \mathbf{k}$ 可逆。□

注 7。分解(4.5) 还表明， $D_n(\alpha;\boldsymbol{t})$ 的平带重数与 $D(\alpha)$的平带重数相同。

5. Band separation with inter-layer tunneling

我们运用微扰理论讨论了 [WL22] 中$\mathbf{t}$ 隧穿开启后出现的能带分离机制。我们建立了一个格鲁申问题，并显式计算了能带的分离。关于格鲁申问题的详细介绍，请参阅 [DZ19，附录 C]。

5.1. **一个格鲁申问题**。 根据恒等式（3.15），$H_{n,\ \mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 的特征值为$^-$ $D_n(\alpha; \mathbf{t}) + \mathbf{k}$的奇异值，即 $[(D^*_n(\alpha;\mathbf{t}) + \mathbf{k})(D_n(\alpha; \mathbf{t}) + \mathbf{k})]^{\frac{1}{2}},$，并按重数计数。为简便起见，我们讨论$\bar{n} = 2$的情形，一般情形本质上相同。我们首先介绍舒尔补公式:

命题5.1。设

$$\begin{pmatrix} P & R_- \\ R_+ & R_{+-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}^{-1} : X_1 \times X_- \to X_2 \times X_+ \quad (5.1)$$

它们是巴拿赫空间上的有界算子，则 P 可逆，当且仅当 E_{-+} 可逆。此外，在这种情况下有

$$P^{-1} = E - E_+ E_{-+}^{-1} E_-, \quad E_{-+}^{-1} = R_{+-} - R_+ P^{-1} R_-. \quad (5.2)$$

证明。 参见 [DZ19，附录C。1]。 □

定义 $D_{\mathbf{k}}(\alpha) := D(\alpha) + \mathbf{k}$ 以及$D_{2,\ \mathbf{k}}(\alpha;\ t) := D_2(\alpha; t) + \mathbf{k}$。我们有

$$D_{2,\mathbf{k}}(\alpha; t) = D_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0) + tT, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_+ \\ T_- & 0 \end{pmatrix}.$$

我们考虑由下式给出的算子 $P^t_{\mathbf{k}} = D^*_{2,\mathbf{k}}(\alpha;\ t) D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;\ t)$

$$\begin{aligned} P^t_{\mathbf{k}} =& P^0_{\mathbf{k}} + tQ + t^2 T^* T \\ :=& D^*_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0) D_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0) + t[T^* D_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0) + D^*_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0) T] + t^2 T^* T \end{aligned}$$

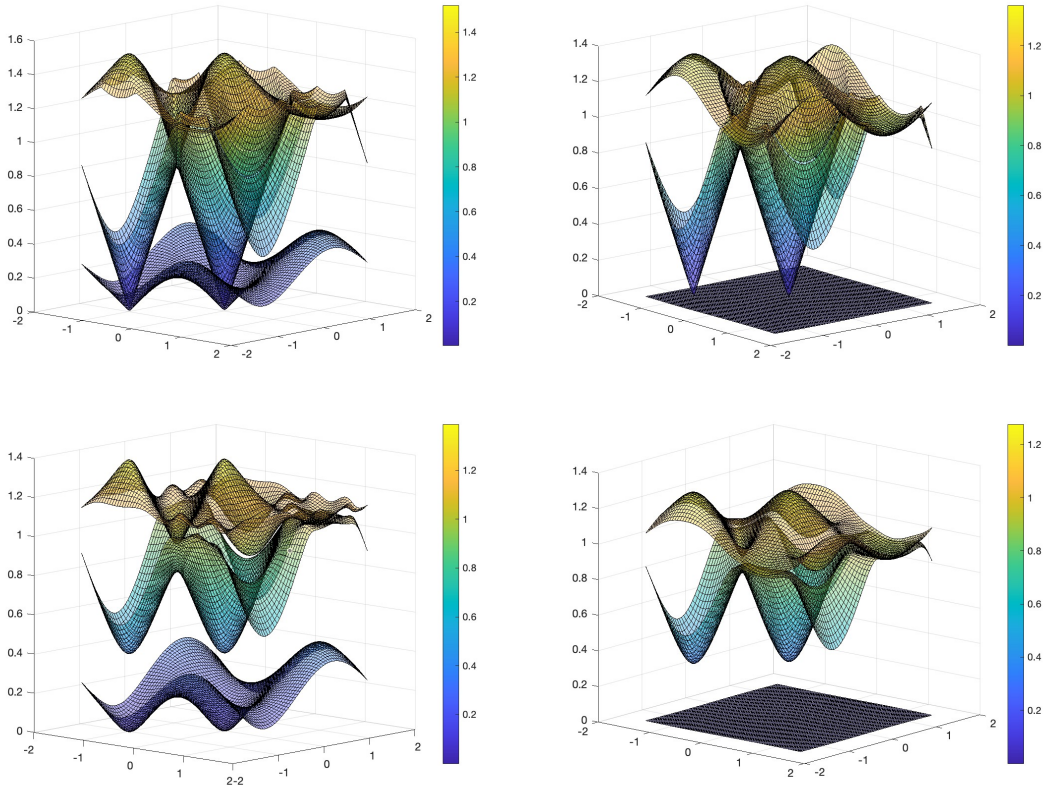

FIGURE 1. 前三条能带的能带结构 $\mathbf{k} \mapsto E_j(\alpha, \mathbf{k}\ t)$ 对应于 $H_2(\alpha; t)$（参见方程 (3.7)），分别在 $H(\alpha)$ 的第一魔角之外（左）和魔角处（右）。上排：$t = 0$；在点 K, K' 处存在两个狄拉克锥。下排：$t = 0.5$；狄拉克能带与平带分离，并且打开了一个带隙。

我们首先考虑算子 $P^0_{\mathbf{k}} = D^*_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0)D_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0)$ 的零谱。根据方程 (2.18) 和 (2.19) 以及 §3.2 的讨论，$\ker D_2(\alpha; 0)$ 由下式给出

$$\Phi_1, \mathbf{e}_3 \in L^2_{-\mathbf{i}}, \quad \Phi_2, \mathbf{e}_4 \in L^2_{\mathbf{0}}. \tag{5.3}$$

这里我们稍微滥用记号，将 $\ker H_2(\alpha; 0) = \{\Phi_1, \Phi_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ 限制为第一分量 $\ker D_2(\alpha; 0)$，这是因为存在直和分解 (2.17)。遵循注6的思路，我们定义

$$\hat{\Phi}_1 := e^{i\langle z, \mathbf{i}\rangle}\Phi_1, \ \hat{\mathbf{e}}_3 := e^{i\langle z, \mathbf{i}\rangle}\mathbf{e}_3, \ \hat{\Phi}_2 := \Phi_2, \ \hat{\mathbf{e}}_4 := \mathbf{e}_4 \in L^2_{\mathbf{0}} \tag{5.4}$$

这些是 $\ker_{L^2_{\mathbf{0}}} H_{2,\mathbf{k}}(\alpha; 0)$ 的元素，或者更精确地说，是 $\ker_{L^2_{\mathbf{0}}} P^0{}_{\mathbf{k}}$ 的元素，分别对应于 $\mathbf{k} = -\mathbf{i}, \mathbf{0}$。

5.2. K' 点处的分析。为了解零谱如何随 $t > 0$ 的开启而变化，我们考虑扰动算子 $P^t_{\mathbf{k}} - z$ 在狄拉克

点 $\mathbf{k} = K' = -\mathbf{i}$:

$$\begin{pmatrix} P_{\mathbf{k}}^t - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{\mathbf{0}}^1 \oplus \mathbb{C}^2 \longrightarrow L_{\mathbf{0}}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \tag{5.5}$$

with

$$R_- : (u_-^{(1)}, u_-^{(2)})^T \mapsto u_-^{(1)} \hat{\Phi}_1 + u_-^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_3, \ R_+ : u \mapsto (\langle u, \hat{\Phi}_1 \rangle, \langle u, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle)^T.$$

ˆ 我们用 $\mathcal{I}$ 表示集合 $\{\Phi_1, \hat{\mathbf{e}}_3\}$。对于 $t = 0$，格鲁申问题（5.5）是可逆的，其逆为

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L_{\mathbf{0}}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \longrightarrow H_{\mathbf{0}}^1 \oplus \mathbb{C}^2 \tag{5.6}$$

with

$$Ev = \sum_{u_j \notin \mathcal{I}} \frac{1}{z_j - z} \langle v, u_j \rangle u_j, \quad E_+ v_+ = R_- v_+,$$

$$E_- v = R_+ v, \quad E_{-+} = \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix}$$

其中，集合 $\{u_j\} \subset L_{\mathbf{0}}^2$ 是 $P_{\mathbf{k}}^0$ 的所有归一化特征函数（对应特征值 $\{z_j\}$）组成的集合。注意，根据方程（1.2）中 $D_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的定义，$P_{\mathbf{k}}^0 = D_{2,\mathbf{k}}^*(\alpha;\, \mathbf{0}) D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;\, \mathbf{0})$ 的特征空间由 $D_{\mathbf{k}}^*(\alpha) D_{\mathbf{k}}(\alpha)$ 与 $D_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{0}) D_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})$ 的特征空间直和而成。因此，我们可以取一组完备基 $\{u_j\}$，其中任意元素 u_j 要么具有 $(u_j^{(1)}, 0_{\mathbb{C}^2})^T$ 的形式，要么具有 $(0_{\mathbb{C}^2}, u_j^{(2)})^T$ 的形式；其中 $\{u_j^{(1)}\}$ 是 $D_{\mathbf{k}}^*(\alpha) D_{\mathbf{k}}(\alpha)$ 的特征函数，$\{u_j^{(2)}\}$ 是 $D_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{0}) D_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})$ 的特征函数。为了处理扰动算子 $P_{\mathbf{k}}^t$，我们使用以下命题。

命题 5.2. 对于 $|t| \ll 1$，$P_{\mathbf{k}}^t - z$ 的格鲁申问题：

$$\mathcal{P}^t = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{k}}^t - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

是可逆的。若其逆 $(\mathcal{P}^t)^{-1}$ 表示为 $\begin{pmatrix} E^t & E_+^t \\ E_-^t & E_{-+}^t \end{pmatrix}$，则

$$E_{-+}^t = E_{-+} + \sum_{k=1}^{\infty} (-t)^k E_-(Q + tT) \big(E(Q + tT)\big)^{k-1} E_+ \tag{5.7}$$

证明。 这可直接由 [TZ23，命题 2 得出。12]。 □

命题5.2 推出

$$E_{-+}^t = E_{-+} - tE_- Q E_+ + t^2 E_-(QEQ - T)E_+ + \mathcal{O}(t^3),$$

with

$$E_-QE_+ = \begin{pmatrix} \langle Q\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_1\rangle & \langle Q\hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\Phi}_1\rangle \\ \langle Q\hat{\Phi}_1, \hat{\mathbf{e}}_3\rangle & \langle Q\hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_3\rangle \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

其中，内积取自空间 $L^2_{\mathbf{0}}(\mathbb{C}/3\Lambda;\mathbb{C}^4)$。$Q$ 的表达式，以及$\hat{}$ Φ_1 和$\hat{}\mathbf{e}_3$ 作为 D_{2}的零特征函数这一事实，$\mathbf{k}(\alpha;\mathbf{0})$ 在 $\mathbf{k} = K'$ 处推出方程（5.8）为零。

现在我们计算 t 中的二阶扰动项。记 $\hat{}\ \Phi_1 = (\varphi_1,\ 0_{\mathbb{C}^2})^T$ 和 $\hat{}\mathbf{e}_3 = (0_{\mathbb{C}^2},\ e_1)^T$，其中 $\varphi_1,\ e_3 \in L^2_{\mathbf{0}}(\mathbb{C}/3\Lambda;\ \mathbb{C}^2)$，则有以下恒等式

$$T\hat{\Phi}_1 = (0_{\mathbb{C}^2}, T_-\varphi_1)^T,\ \ T\hat{\mathbf{e}}_3 = (T_+e_1, 0_{\mathbb{C}^2})^T.$$

算子 $E_-TE_+:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 可表示为以下矩阵

$$\begin{pmatrix} \langle T\hat{\Phi}_1, T\hat{\Phi}_1\rangle & \langle T\hat{\Phi}_1, T\hat{\mathbf{e}}_3\rangle \\ \langle T\hat{\mathbf{e}}_3, T\hat{\Phi}_1\rangle & \langle T\hat{\mathbf{e}}_3, T\hat{\mathbf{e}}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|T_-\varphi_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|T_+e_1\|^2 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

而算子 $E_-QEQE_+:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 可表示为以下矩阵

$$\sum_{u_j\notin\mathcal{I}} \frac{1}{z_j - z} \begin{pmatrix} |\langle T\hat{\Phi}_1, D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j\rangle|^2 & \langle T\hat{\mathbf{e}}_3, D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j\rangle\langle D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j, T\hat{\Phi}_1\rangle \\ \langle T\hat{\Phi}_1, D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j\rangle\langle D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j, T\hat{\mathbf{e}}_3\rangle & |\langle T\hat{\mathbf{e}}_3, D_{2,\mathbf{k}}(\alpha;0)u_j\rangle|^2 \end{pmatrix}.$$

记 $u_j = (u_j^{(1)},\ u_j^{(2)})^T$，上述矩阵可改写为

$$\sum_{u_j\notin\mathcal{I}} \frac{1}{z_j - z} \begin{pmatrix} |\langle T_-\varphi_1, D_{\mathbf{k}}(0)u_j^{(2)}\rangle|^2 & \langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_j^{(1)}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}(0)u_j^{(2)}, T_-\varphi_1\rangle \\ \langle D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_j^{(1)}, T_+e_1\rangle\langle T_-\varphi_1, D_{\mathbf{k}}(0)u_j^{(2)}\rangle & |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_j^{(1)}\rangle|^2 \end{pmatrix}.$$

根据 $P^0{}_{\mathbf{k}}$ 的直和分解，任意特征函数 $u_j = (u_j^{(1)},\ u_j^{(2)})^T$ 都具有 $(u_j^{(1)},\ 0_{\mathbb{C}^2})^T$ 或 $(0_{\mathbb{C}^2},\ u_j^{(2)})^T$ 的形式，因此上述矩阵中的非对角项消失。于是它化为对角矩阵之和

$$\sum_j \frac{1}{z_j^{(2)} - z} \begin{pmatrix} |\langle T_-\varphi_1, D_{\mathbf{k}}(0)u_j^{(2)}\rangle|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_i \frac{1}{z_i^{(1)} - z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_i^{(1)}\rangle|^2 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

其中 $z_i^{(1)} \neq 0$ 和 $z_j^{(2)} \neq 0$ 与

$$(D^*_{\mathbf{k}}(\alpha)D_{\mathbf{k}}(\alpha) - z_i^{(1)})u_i^{(1)} = 0,\ \ (D^*_{\mathbf{k}}(0)D_{\mathbf{k}}(0) - z_j^{(2)})u_j^{(2)} = 0.$$

我们考虑表达式（5.10）中的第一项。注意，$\{u_j^{(2)}\}$ 是 $D^*_{\mathbf{k}}(0)D_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})$ 和 $D_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})$ 的共同特征函数，其谱为

$$\mathrm{Spec}_{L^2_{\mathbf{0}}} D_{\mathbf{k}}(0) = \Lambda^* + \{\mathbf{0}, -\mathbf{i}\} \text{ for } \mathbf{k} = -\mathbf{i}$$

因此，

$$|\langle T_-\varphi_1, D_{\mathbf{k}}(0)u_j^{(2)}\rangle|^2 = z_j^{(2)}|\langle T_-\varphi_1, u_j^{(2)}\rangle|^2.$$

利用 $\langle T_-\varphi_1, e_1\rangle = 0$ 和Plancherel定理，在 $z = 0$ 处我们得到等式

$$\sum_j \frac{z_j^{(2)}}{z_j^{(2)} - z} \begin{pmatrix} |\langle T_-\varphi_1, u_j^{(2)}\rangle|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|T_-\varphi_1\|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

对于 $z = 0$，结合方程（5.9）、（5.10）和（5.11），二阶微扰为

$$E_-(QEQ - T)E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\|T_+e_1\|^2 + \sum_i \frac{1}{z_i^{(1)}} |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_i^{(1)}\rangle|^2 \end{pmatrix},$$

回忆一下，$\{z_i^{(1)}\}$ 是 $D_{\mathbf{k}}^*(\alpha)D_{\mathbf{k}}(\alpha)$的非零特征值集合，其对应的 $L_{\mathbf{0}}^2$特征函数$\{u_i^{(1)}\}$。因此，根据命题 5.1和 5.2，当 $P_{\mathbf{k}}^t$ 接近 $\mathbf{k} = K'$时，零是 $P_{\mathbf{k}}^t$ 的一个特征值。该零特征值对应于 $H_2(\alpha; t)$的平带。

特征 值为算子 $P_{\mathbf{k}}^t$ 对应于 P^0 的狄拉克锥$\mathbf{k}$，其表达式为

$$\lambda_1(t) = t^2\left[\|T_+e_1\|_{L^2}^2 - \sum_i \frac{1}{z_i^{(1)}} |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_i^{(1)}\rangle|^2\right] + \mathcal{O}(t^3),$$

这对应于狄拉克带与平带之间的间隔。由于该特征值由方程的解给出:

$$z - t^2\left[\|T_+e_1\|_{L^2}^2 - \sum_i \frac{1}{z_i^{(1)} - z} |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_i^{(1)}\rangle|^2\right] = 0,$$

代入 $z = \lambda t^2$ 并利用几何级数论证，可得到解 $z = \lambda_1(t)$。

结合对于任意 $t \in \mathbb{R}$在 0 处都有一个受保护态这一事实，可证明以下命题:

命题 5.3。 对于 $t \ll 1$ 且在 $\mathbf{k} = K'$处，$H_{2,\mathbf{k}}(\alpha; t)$ 的前两个特征值分别为 $E_{1,\mathbf{k}}(t) = 0$ 和 $E_{2,\mathbf{k}}(t) = Ct + \mathcal{O}(t^{3/2})$，其中常数为

$$C = \left(1 - \sum_i \frac{1}{z_i^{(1)}} |\langle T_+e_1, D_{\mathbf{k}}(\alpha)u_i^{(1)}\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

6. Flatband eigenfunctions and Chern numbers

本节中，我们利用类似于$H_{n,\mathbf{k}}(\alpha; \mathbf{t})$ 的平带本征函数，在 $E_1(\mathbf{k}\ \alpha;\mathbf{t}) = 0$ 的情形下，针对$\mathbf{k} \in \mathbb{C}/\Lambda^*$ 采用与 [BEWZ22] 类似的 theta 函数论证来构造（另见[LTKV20]）。这一构造还提供了一种显式方法，用于计算该扭曲多层模型中平带的陈数。我们首先回顾一些关于 theta 函数的基础知识。

6.1. **theta 函数回顾**。我们回顾一下，theta 函数 $\theta(\zeta) := -\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\zeta|\omega)$ 定义为

$$\begin{aligned}\theta(\zeta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i(n+\tfrac{1}{2})^2\omega + 2\pi i(n+\tfrac{1}{2})(\zeta+\tfrac{1}{2})), \quad \theta(-\zeta) = -\theta(\zeta),\\ \theta(\zeta+m) = (-1)^m\theta(\zeta), \quad \theta(\zeta+n\omega) = (-1)^n e^{-\pi i n^2\omega - 2\pi i\zeta n}\theta(\zeta),\end{aligned} \tag{6.1}$$

其中

$$\theta_{a,b}(\zeta|\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i(a+n)^2\tau + 2\pi i(n+a)(\zeta+b)), \quad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

函数 $\theta(\zeta)$ 在以下位置有一阶零点

$$\mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z},$$

见 [Mum83]。若考虑

$$g(\zeta) := e^{2\pi i\zeta a}\frac{\theta(\zeta+k)}{\theta(\zeta)},$$

我们得到一个亚纯函数，其在 $\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z}$处有一阶极点，在 $-k+\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z}$处有一阶零点，并满足 $g(\zeta+m+n\omega) = e^{2\pi i(am+(\omega a-k)n)}g(\zeta)$。因此，通过选取 $k = \omega a - b$，我们定义

$$g_k(\zeta) := e^{2\pi\zeta(k-\bar{k})/\sqrt{3}}\frac{\theta(\zeta+k)}{\theta(z)}, \quad k = \omega a - b, \quad a,b\in\mathbb{R}. \tag{6.2}$$

它满足

$$\begin{aligned}g_k(\zeta+m+n\omega) = e^{2\pi i(am+bn)}g_k(\zeta), \quad k = \omega a - b, \quad a,b\in\mathbb{R},\\ am+nb = \tfrac{i}{\sqrt{3}}\left(\zeta_0\bar{k} - \bar{\zeta}_0 k\right), \quad \zeta_0 = m+n\omega, \quad m,n\in\mathbb{Z},\\ g_{k+p\omega-q}(\zeta) = (-1)^{p+q}e^{-2\pi i kp - \pi i p^2\omega}g_k(\zeta), \quad p,q\in\mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

于是我们定义一个关于晶格 $\omega\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ 周期的函数：

$$F_k(\zeta) := e^{2\pi(\zeta-\bar{\zeta})k/\sqrt{3}}\frac{\theta(\zeta+k)}{\theta(\zeta)}. \tag{6.4}$$

6.2. **平带的构造**。我们首先将上面构造的函数移植到晶格 Λ 及其对偶晶格 Λ^*上。回顾方程（2.2），它们表示为

$$\Lambda = \tfrac{4}{3}\pi i\omega(\mathbb{Z}\oplus\omega\mathbb{Z}), \quad \Lambda^* = \sqrt{3}\omega(\omega\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}).$$

我们引入变量变换

$$z = \tfrac{4}{3}\pi i\omega\zeta, \quad \mathbf{k} = \sqrt{3}\omega k$$

在方程（6.2）（6.4）中，从而新函数关于晶格 Λ周期，即我们定义

$$F_{\mathbf{k}}(z) := F_k\left(\frac{3z}{4\pi i\omega}\right), \quad F_{\mathbf{k}}(z+\mathbf{a}) = F_{\mathbf{k}}(z), \ \mathbf{a}\in\Lambda, \tag{6.5}$$

根据 [BHZ22a 引理 3。1]， $F_{\mathbf{k}}$（z）于是是（$2D_{\bar{z}}+\mathbf{k}$）的基本解，意义是

$$(2D_{\bar{z}}+\mathbf{k})F_{\mathbf{k}}(z)=\alpha_{\mathbf{k}}\delta_0(z),\quad \alpha_{\mathbf{k}}\neq 0,\quad \mathbf{k}\notin\Lambda^*,\quad z\in\mathbb{C}/\Lambda. \tag{6.6}$$

因此，的施瓦茨核

$$(2D_{\bar{z}}+\mathbf{k})^{-1}: L^2(\mathbb{C}/\Lambda)\to H^1(\mathbb{C}/\Lambda) \tag{6.7}$$

由 $c_kF_{\mathbf{k}}(z-z')$ 给出，其中 $c_k=\theta'(\mathbf{0})/(\pi\theta(k))=1/\alpha_{\mathbf{k}}$。

回想在 [BEWZ22中，命题 3。4] 对于 $\alpha\in\mathcal{A}$ 简单情形，方程 $(D(\alpha)+\mathbf{k})\mathbf{u}_{\mathbf{k}}=0$ 对任意 $\mathbf{k}\in\mathbb{C}$ 的解可通过 theta 函数方法构造。特别地，对于 $\mathbf{k}\notin\Lambda^*+\{\mathbf{0},-\mathbf{i}\}$ 根据命题 4.1，这意味着 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 $H(\alpha)$ 的一个魔角。回想一下， $H_n(\alpha;\mathbf{t})$ 的魔角与 $H(\alpha)$ 的魔角一致。因此，我们可以类似地构造 $H_{n,\mathbf{k}}(\alpha;\mathbf{t})$ 的所有平带本征函数。

回想根据命题 4.2，对于 $\alpha\in\mathcal{A}$ 简单情形，即平带的重数为一时，$\mathbf{u}\in$ 属于 $L^2_{\mathbf{0}}$ $D(\alpha)$ 在点 $-z_S+\Lambda^*$处为零。因此我们有

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(z):=F_{\mathbf{k}}(z+z_S)\mathbf{u}(z),\quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}}\in L^2_{\mathbf{0}},\quad (D(\alpha)+\mathbf{k})\mathbf{v}_{\mathbf{k}}=0, \tag{6.8}$$

定义函数

$$\Phi_{\mathbf{k}}(z)=(\phi_{1,\mathbf{k}},\phi_{2,\mathbf{k}},\cdots,\phi_{2n,\mathbf{k}})^T\in L^2_{\mathbf{0}} \tag{6.9}$$

with

(1) $\phi_{2j-1,\mathbf{k}}=0$ for $j=2,3,\cdots,n$;
(2) $(\phi_{1,\mathbf{k}},\phi_{2,\mathbf{k}})^T=\Theta_{n-1}(\mathbf{k})\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(z)$;
(3) $\phi_{2m+2,\mathbf{k}}=(\prod_{j=1}^m t_j)\cdot(2D_{\bar{z}}+\mathbf{k})^{-m}\phi_{2,\mathbf{k}},\ m=1,2,\cdots,n-1,$

其中（$2D_{\bar{z}}+\mathbf{k}$）$^{-m}$ 表示预解式（$2D_{\bar{z}}+\mathbf{k}$）$^{-1}$ 的 m 次幂： $L^2_{\mathbf{0}}\to L^2_{\mathbf{0}}$并且

$$\Theta_{n-1}(\mathbf{k}):=[\theta(\mathbf{k})]^{n-1} \tag{6.10}$$

容易验证，上文定义的 $\Phi_{\mathbf{k}}(z)$ 满足方程

$$(D_n(\alpha;\mathbf{t})+\mathbf{k})\Phi_{\mathbf{k}}(z)=0 \tag{6.11}$$

对于 $\mathbf{k}\notin\Lambda^*$，由于预解式（$2D_{\bar{z}}+\mathbf{k}$）$^{-1}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Lambda^*$ 中可逆。

对于 $\mathbf{k}\in\Lambda^*$，不失一般性，我们考虑 $\mathbf{k}=\mathbf{0}$；否则，乘以 $e^{-i\langle z,\mathbf{k}\rangle}\in L^2(\mathbb{C}/\Lambda)$ 即可将其归约为零的情形。注意，预解式（的施瓦茨核）在 $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ 处是亚纯的，并且有一阶极点，即:

$$(2D_{\bar{z}}+\mathbf{k})^{-1}=\frac{1\otimes 1}{\mathbf{k}}+f_{\mathbf{k}}(z,z'), \tag{6.12}$$

其中 $f_{\mathbf{k}}$ 在 $\mathbf{k}$ 中全纯。函数 $\Theta_{n-1}(\mathbf{k})$ 在$\mathbf{k}$ 中全纯，并且在 $\mathbf{k}=0$处有一个阶数为 $n-1$的零点。因此，每个分量 $\phi_{i,\mathbf{k}},\quad i=1,\cdots,2n$ 均

在 $\mathbf{k}$ 中于 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$处全纯。特别地，上述构造式 (3) 表明，在$\mathbf{k} = \mathbf{0}$处

$$\phi_{2m+2,\mathbf{0}} = 0,\ m = 1, 2, \cdots, n-2; \quad \phi_{2n,\mathbf{0}} = \left(\prod_{j=1}^{m} t_j\right) \int_{C/\Lambda} u_2(z) dm(z), \tag{6.13}$$

其中 $\mathbf{v_0} = \mathbf{u} = (u_1, u_2)$。由此得到 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 处的平带本征函数，前提是上述方程中出现的积分非零。对前五个实魔角进行数值验证后发现，平带的重数均为一（见表 1）。

α	0.586	2.22	3.75	5.28	6.79	8.31
$I(u_2)$	0.2345	0.0542	0.0033	0.0022	0.0013	8.3963×10^{-4}

TABLE 1. 积分 $I(u_2) = \int_{C/\Lambda} u_2(z) dm(z)$ 在（6.13）式中的数值结果：平带本征函数在一个基本区域上的积分 $\mathbb{C}/\Lambda$

注8。这与利用不可约表示得到的受保护本征态结果一致，其中$\mathbf{e}_{2n} \in L^2_{\mathbf{0}}$ 始终是一个零能量受保护本征态。

6.3. **平带的高陈数**。本节假设平带是单重的，并证明上述构造的平带本征函数可导出一个陈数为 $c_1(L) = -n$ 的全纯线丛。关于全纯线丛、贝里联络和陈数的基础知识，请参阅 [TZ23]。

为简洁起见，我们采用§6.1 中的记号。根据方程（6.1）、（6.3）和（6.7），我们得到

$$\Phi_{k+p} = [e_p^{(n)}(k)]^{-1} \tau(p) \Phi_k \tag{6.14}$$

其中

$$[\tau(p) f](\zeta) = e^{-2\pi i(\zeta_1 p_1 + \zeta_2 p_2)} f(\zeta), \quad e_p^{(n)}(k) = [e^{\pi i p_1^2 \omega + 2\pi i k p_1} (-1)^{p_1+p_2}]^n, \tag{6.15}$$

$$\zeta = \zeta_1 + \omega\zeta_2, \quad p = \omega p_1 - p_2, \quad p_j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{6.16}$$

注意

$$\tau(p) : \ker_{L^2_{\mathbf{0}}}(D_n(\alpha; \mathbf{t}) + k) \to \ker_{L^2_{\mathbf{0}}}(D_n(\alpha; \mathbf{t}) + k + p),$$

是一个酉变换。这里我们稍微滥用记号，将$L^2_{\mathbf{0}}$ 和$D_n(\alpha;\mathbf{t}) + k$ 视为重标度晶格空间中对应的部分。按照标准构造，我们定义

$$\begin{aligned} L &:= \left\{ [k, \Phi]_\tau \in (\mathbb{C} \times L^2_{\mathbf{0}})/\sim_\tau : \Phi \in \ker_{L^2_{\mathbf{0}}}(D_n(\alpha; \mathbf{t}) + k) \right\}, \\ [k, \Phi]_\tau = [k', \Phi']_\tau &\ \Leftrightarrow\ (k, \Phi) \sim_\tau (k', \Phi') \ \Leftrightarrow\ \exists p \in \Lambda\ k' = k + p, \quad \Phi' = \tau(p)\Phi. \end{aligned} \tag{6.17}$$

因此，我们得到以下引理：

引理 6.1. 定义 (6.17)给出了一个全纯线丛 $\mathbb{C}/\Lambda^*$:

$$f : L \to \mathbb{C}/\Lambda^* \quad with \quad [k,\Phi]_\tau \mapsto [k] \in \mathbb{C}/\Lambda^*.$$

相应的乘子族由 $k \mapsto e_p^{(n)}(k)$ 给出。

证明。 离散群 Λ^* 在平凡复线丛上的作用，其中 $\Lambda^* \ni p$: $(k,\Phi) \mapsto (k+p,\tau(p)\Phi)$,

$$\widetilde{L} := \{(k,\kappa\Phi_k) : k \in \mathbb{C},\ \kappa \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}_k \times \mathbb{C}_\kappa, \tag{6.18}$$

(其中 Φ_k 定义于 (6.9)) 是自由且适当的，其商映射为$\pi_\tau(k,\kappa\Phi_k) = [k,\kappa\Phi_k]_\tau$。因此，按该作用取商所得的空间 L是一个维数为 2 的光滑复流形。

映射 $(p,k) \mapsto e_p^{(n)}(k)$ 满足关于作用 φ_p 在 $\tilde{L}$上的余循环条件:

$$\varphi_p(k,\kappa\Phi_k) := (k+p, e_p^{(n)}(k)\kappa\Phi_{k+p}),\quad e_{p+p'}^{(n)}(k) = e_{p'}^{(n)}(k+p)e_p^{(n)}(k),\quad p,p' \in \Lambda^*, \tag{6.19}$$

并且对于 $p \in \Lambda^*$。于是，根据方程 (6.14)，我们有 $\pi_\tau((k,\kappa\Phi_k)) = \pi_\tau(k+p, e_p^{(n)}(k)\kappa\Phi_{k+p})$，这给出了 L 作为 $\mathbb{C}/\Lambda^*$上的复线丛结构。 □

厄米结构继承自 $L^2(\mathbb{C}/\Lambda)$，由此在$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$上得到的厄米结构 L 为 (6.18)。在 k,τ 坐标下的 L，我们得到

$$h(k) = \|\Phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{C}/3\Lambda)},$$

由此在 L上得到厄米结构：由 (6.14) 可知

$$h(k) = |e_p^{(n)}(k)|^2 h(k+p),\quad p \in \mathbb{Z}\oplus\omega\mathbb{Z} \cong \Lambda^*. \tag{6.20}$$

于是，我们将陈联络 θ 和贝里曲率 $\Omega = d\theta$ 与厄米度量 h关联起来。因此，线丛 L 的陈数可用乘子法计算如下:

$$\begin{aligned} c_1(L) &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}/\Lambda^*}\Omega \\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\log e_\omega^{(n)}(1) - \log e_\omega^{(n)}(0) - \log e_1^{(n)}(\omega) - \log e_1^{(n)}(0)\right) \\ &= -n. \end{aligned} \tag{6.21}$$

这就完成了定理3的证明。

References

[ALB20] Ahmed Abouelkomsan、Zhao Liu 和 Emil J Bergholtz。莫尔平带中的粒子-空穴对偶、涌现费米液体与分数量子陈绝缘体。《物理评论快报》，124(10):106803，2020。

[BEWZ21] Simon Becker、Mark Embree、Jens Wittsten 和 Maciej Zworski。扭转双层石墨烯中魔角的谱特征。Physical Review B，103(16):165113，2021。[BEWZ22] Simon Becker、Mark Embree、Jens Wittsten 和 Maciej Zworski。扭转双层石墨烯模型中魔角的数学。Probability and Mathematical Physics，3(1):69–103，2022。[BHZ22a] Simon Becker、Tristan Humbert 和 Maciej Zworski。魔角手征模型中平带的精细结构。arXiv 预印本 arXiv:2208.01628，2022。[BHZ22b] Simon Becker、Tristan Humbert 和 Maciej Zworski。魔角手征模型中的可积性。arXiv 预印本 arXiv:2208.01620，2022。[BL13] Emil J Bergholtz 和 Zhao Liu。拓扑平带模型与分数量子陈绝缘体。International Journal of Modern Physics B，27(24):1330017，2013。[BM11] Rafi Bistritzer 和 Allan H MacDonald。扭转双层石墨烯中的莫尔能带。Proceedings of the National Academy of Sciences，108(30):12233–12237，2011。[CLT+15] Martin Claassen、Ching Hua Lee、Ronny Thomale、Xiao-Liang Qi 和 Thomas P Dev- ereaux。陈绝缘体中的位置-动量对偶与分数量子霍尔效应。Physical Review Letters，114(23):236802，2015。[DZ19] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。散射共振的数学理论，第200卷。American Mathematical Soc.，2019。[LAB21] Zhao Liu、Ahmed Abouelkomsan 和 Emil J Bergholtz。扭转双层双层石墨烯中的栅极可调分数量子陈绝缘体。Physical Review Letters，126(2):026801，2021。[LB22] Zhao Liu 和 Emil J Bergholtz。分数量子陈绝缘体的近期进展。arXiv 预印本 arXiv:2208.08449，2022。[LKL+19] Jong Yeon Lee、Eslam Khalaf、Shang Liu、Xiaomeng Liu、Zeyu Hao、Philip Kim 和 Ashvin Vishwanath。扭转双层双层石墨烯中关联绝缘行为与自旋三重态超导性的理论。Nature Communications，10(1):5333，2019。[LTKV20] Patrick J Ledwith、Grigory Tarnopolsky、Eslam Khalaf 和 Ashvin Vishwanath。扭转双层石墨烯中的分数量子陈绝缘体态：解析方法。Physical Review Research，2(2):023237，2020。[LVK22] Patrick J Ledwith、Ashvin Vishwanath 和 Eslam Khalaf。手征扭转多层石墨烯中具有任意陈数的一族理想陈平带。Physical Review Letters，128(17):176404，2022。[MO21] Bruno Mera 和 Tomoki Ozawa。K¨ahler 几何与陈绝缘体：拓扑与量子度规之间的关系。Physical Review B，104(4):045104，2021。[Mum83] D Mumford。Tata Lectures on Theta，第 I 卷。Birh¨auser，波士顿，1983。[OM21] Tomoki Ozawa 和 Bruno Mera。陈绝缘体中拓扑与量子度规之间的关系。Physical Review B，104(4):045103，2021。[RB11] N. Regnault 和 B. Andrei Bernevig。分数量子陈绝缘体。Phys. Rev. X，1:021014，2011年12月。[SJGG12] Pablo San-Jose、Jos´e Gonz´alez 和 Francisco Guinea。石墨烯双层中的非阿贝尔规范势。Physical Review Letters，108(21):216802，2012。[TKV19] Grigory Tarnopolsky、Alex Jura Kruchkov 和 Ashvin Vishwanath。扭转双层石墨烯中魔角的起源。Physical Review Letters，122(10):106405，2019。[TZ23] Zhongkai Tao 和 Maciej Zworski。凝聚态物理中的偏微分方程方法。讲义，2023。

[WCM+21]Jie Wang、Jennifer Cano、Andrew J Millis、Zhao Liu 和 Bo Yang。平带中几何与相互作用的精确朗道能级描述。《物理评论快报》，127(24):246403，2021。[WKL22] Jie Wang、Semyon Klevtsov 和 Zhao Liu。所有拓扑理想平带中模型分数量子陈绝缘体的起源：显式颜色纠缠波函数与精确密度代数。*arXiv* 预印本 *arXiv:2210.13487*，2022。[WKML22] Alexander B Watson、Tianyu Kong、Allan H MacDonald 和 Mitchell Luskin。扭转双层石墨烯中的 Bistritzer-MacDonald 动力学。*arXiv* 预印本 *arXiv:2207.13767*，2022。[WL21] Alexander B Watson 和 Mitchell Luskin。双层石墨烯手征模型中第一个魔角的存在性。《数学物理学杂志》，62(9):091502，2021。[WL22] Jie Wang 和 Zhao Liu。手性扭转多层石墨烯模型中的理想平带层级。《物理评论快报》，128(17):176403，2022。[WZMC21] Jie Wang、Yunqin Zheng、Andrew J Millis 和 Jennifer Cano。扭转双层石墨烯的手性近似：精确的谷内反演对称性、节点结构及其对更高魔角的意义。《物理评论研究》，3(2):023155，2021。[ZJF+11] Fan Zhang、Jeil Jung、Gregory A Fiete、Qian Niu 和 Allan H MacDonald。手性堆叠少层石墨烯系统中的自发量子霍尔态。《物理评论快报》，106(15):156801，2011。

电子邮箱地址：mxyang@math.berkeley.edu

Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA .