平面图类的线性规模普适点集

Stefan Felsner 数学研究所，柏林工业大学，德国

Hendrik Schrezenmaier 数学研究所，柏林工业大学，德国

Felix Schröder 数学研究所，柏林工业大学，德国

Raphael Steiner 理论计算机科学研究所，计算机科学系，苏黎世联邦理工学院，瑞士

arXiv:2303.00109v1 [cs.CG] 28 Feb 2023

摘要

如果平面上的有限点集 P 对某类平面图 $\mathcal{C}$ 是 n-通用的，那么 $\mathcal{C}$ 中每个具有 n 个顶点的图都可以进行无交叉直线绘制，且其顶点位于点集 P 中。

对于所有平面图构成的类，通用点集大小的已知最佳上界为二次，而已知最佳下界关于 n 为线性。

已知某些平面图类存在大小接近线性的通用点集；然而，除了外平面图以外，对于其他有意义的图类，尚无真正的线性界。

本文证明，对于具有 n 个顶点的二部平面图类，存在大小为 $2n-2$ 的通用点集。同一个点集对于最大度为 3 且具有 n 个顶点的平面图类也具有通用性。本文结果所用的点集称为爆炸双链。我们还证明，该点集能够实现更多平面图的平面直线嵌入，具体而言，所有具有单侧哈密顿圈的平面图的子图均可如此嵌入。

二部图的这一结果还意味着：每个 n 个顶点的平面图都有一种 1弯折绘图，使其所有弯折和顶点都包含在一个大小为 $4n-6$ 的特定点集中；对于同一问题，这改进了 Löffler 和 Tóth 所给出的 $6n-10$ 界。

2012 ACM 学科分类 图与曲面

关键词和短语 图绘制、通用点集、单侧哈密顿、双页书嵌入、分离分解、四边形剖分、2-树、次三次平面图

资助 *Stefan Felsner*：德国研究基金会项目 FE 340/12-1。*Hendrik Schrezenmaier*：德国研究基金会项目 FE 340/12-1。*Raphael Steiner*：德国研究基金会研究训练小组 2434 复杂性的层面项目和苏黎世联邦理工学院博士后奖学金

致谢 我们对 HenryFörster、Linda Kleist、Joachim Orthaber 和 Marco Ricci 深表感谢；他们在 GG-Week 2022 期间的讨论促成了我们关于次三次图证明中分离 2-圈问题的解决方案。

1 引言

给定一族平面图 $\mathcal{C}$ 和一个正整数 n，若点集 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ 是该类图的**-通用点集**，则称其为$\mathcal{C}$ 类的 n-**通用** 点集；也就是说，对于$\mathcal{C}$ 中任意一个具有 n个顶点的图 $G \in \mathcal{C}$，都存在其直线无交叉绘制 G，使得 G 的每个顶点都放置在 P中的某个点上。

确定平面图类的通用集最小规模，是几何图论中的一个基本问题，参见 Open Problem Garden 中的问题 [17] 。更具体地说，我们要为类 $\mathcal{C}$寻找一个n-通用点集的最小规模 $f_{\mathcal{C}}(n)$ 的良好界。

Schnyder [21] 证明，对于 $n \geq 3$，$[n-1] \times [n-1]$-网格构成平面图的 n-通用点集，即使预先指定了平面图的组合嵌入也成立。这说明 $f(n) := f_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2 \in O(n^2)$，其中 $\mathcal{P}$ 是所有平面图构成的类。从渐近意义上说，$f(n)$ 的二次上界仍是目前最好的结果。这个界只有乘法常数有所改进；Bannister 等人 [5]给出的当前上界为 $f(n) \leq \frac{1}{4}n^2 + O(n)$。对于平面图的若干子类 $\mathcal{C}$，已知更好的上界：Gritzmann 等人的一项经典结果 [13] 表明，每个具有 n 个顶点的外平面图，都可以直线嵌入到一般位置的任意点集上，因此 $f_{\text{out-pl}}(n) = n$。对于二外平面图、简单嵌套图以及有界路径宽度的图类 [4, 5]，已知近线性上界 $f_{\mathcal{C}}(n) = O(n \cdot \text{polylog}(n))$。最后，对于平面 3-树（也称阿波罗网络或堆叠三角剖分）构成的类 $\mathcal{C}$，Fulek 和 Tóth [12]证明了 $f_{\mathcal{C}}(n) = O(n^{3/2} \log n)$。

至于下界，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有平面图类 $\mathcal{C}$，平凡下界 $n \leq f_{\mathcal{C}}(n) \leq f(n)$ 均成立。当前的下界 $f(n) \geq 1.293n - o(n)$ 由 [20] 利用平面 3-树证明；关于下界的早期工作，请参见 [6, 8, 9, 15] 。

Choi、Chrobak 和 Costello [7] 最近证明，若要以高概率成为 n 个顶点的平面图的通用点集，则从单位正方形中均匀随机选取的点集大小必须为 $\Omega(n^2)$。这表明，大小为 $o(n^2)$ 的通用点集——如果存在的话——不会具有良好的形态，例如，其最短距离与最大距离之比会很大。

本文研究一种特定的有序点集 H（爆炸双链），并将 H 中大小为 $2n-2$ 的初始部分记为 H_n。令 $\mathcal{C}$ 为所有满足以下条件的平面图 G 构成的类：它们在点集 H_n 上有平面直线绘图，且 $n = |V(G)|$。也就是说，H_n 构成了 $\mathcal{C}$ 的一个 n-通用点集。

如果一个图是某个图的生成子图，而该图存在一种平面嵌入，使其包含一个单侧哈密顿圈，则称该图为 POSH（部分单侧哈密顿）（定义见第2节）。此前，Alam 等人在变形地图的背景下研究过含有单侧哈密顿圈的三角剖分。 [2] 他们猜想，每个平面 4-连通三角剖分都有单侧哈密顿圈。后来，Alam 和 Kobourov [3] 发现了一个有 113 个顶点的平面 4-连通三角剖分，它没有单侧哈密顿圈。

我们的主要结果（定理3）是，每个 POSH 图都属于 $\mathcal{C}$。我们定义

$\mathcal{C}' := \{G : G \text{ 是 POSH}\}$。

定理3促使我们进一步研究$\mathcal{C}'$。积极的一面是，我们证明了每个二部平面图都是 POSH 图（证明见第4节）。接着，我们利用针对二部图的构造，证明次三平面图在第5节中具有 POSH 嵌入。另一方面，我们还证明并非所有 2-树都是 POSH 图。最后，我们在第7节提出一些猜想和开放问题。

Löffler 和 Tóth [16]此前使用过爆炸双链。他们证明，每个有 n 个顶点的平面图都能在 H 的一个子集 S_n 上进行 1弯折绘图，其中$|S_n| = 6n - 10$。我们关于二部图的结果给出了更好的界：

▶ **推论1.** 存在一个大小为 $4n-6$ 的点集 $P = H_{2n-2}$，使得每个有 n个顶点的平面图都能进行 *1*弯折绘图，且弯折和顶点均位于 P上。

证明。 平面三角剖分的对偶图是一个具有 $2n-4$ 个顶点的无桥3-正则图；根据彼得森定理，它具有完美匹配 [19]。因此，至多细分 $n-2$ 条边，就能使任意一个具有 n 个顶点的平面图成为二部图。因此，大小为 H_{n+n-2}的点集$2(n+n-2)-2 = 4n-6$足以容纳所有具有 n个顶点的平面图的1弯折绘图。◀

Kaufmann 和 Wiese 研究了对弯折位置没有限制的 1弯折绘图和 2 折线段绘图的通用性 [14]，他们证明，任意一个含有 n个元素的点集，都可作为平面图的 2 折线段绘图的通用点集。

2 点集与 POSH 图类

本节定义爆炸双链 H 和 POSH 图类$\mathcal{C}'$，并证明对于每个 $n \geq 2$，H 中大小为 $2n-2$ 的初始部分 H_n 都是$\mathcal{C}'$的 n-通用点集。

若实数序列 $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $y_1 = 0$, $y_2 = 0$，则称其为爆炸的；相应的点集 $H = \{p_i, q_i | i \in \mathbb{N}\}$，其中 $p_i = (i, y_i)$ $q_i = (i, -y_i)$，若对所有 $n \in \mathbb{N}$，y_{n+1} 都足够大，使得经过 $H_n = \{p_i, q_i | i \in [n]\}$ 中两点的直线与直线 的所有交点都严格位于 和之间，则称该点集为爆炸双链。它是 $p_1 = q_1$ 且 $p_2 = q_2$，因此 $|H_n| = 2n-2$。图1展示了 H_6。这完全描述了爆炸双链的序型。注意，这里给出的坐标可以取为整数，但 H_n 的最大坐标相对于 n 呈指数增长，这对于该序型来说是不可避免的。不过，最大距离与最小距离之比并非如此：我们可以改变构造，令 $y_i = i$，同时让 x 坐标增长得足够缓慢，从而得到相同的序型，但最大距离与最小距离之比为线性。

现在给出具有此序型的点集 H 的显式构造。

满足 $y_1 = 0$、$y_2 = 0$ 和 $y_{i+1} > 2y_i + y_{i-1}$（对所有 $i \geq 2$）的实数序列 $Y = (y_i)_{i\geq 1}$ 是爆炸序列。注意，若 $\alpha > 1+\sqrt{2}$，则 $y_1 = y_2 = 0$ 和 $y_i = \alpha^{i-3}$（对 $i \geq 3$）是一个爆炸序列，例如 $\alpha = 3$。给定一个爆炸序列 Y，令 $P(Y) = (p_i)_{i\geq 1}$ 为满足 $p_i = (i, y_i)$ 的点集，并令 $P(Y) = (q_i)_{i\geq 1}$ 为满足 $q_i = (i, -y_i)$ 的点集，即关于 x 轴反射后的点集。

令 $H = H(Y)$，其中 Y 是某个爆炸序列。对于两个点 p 和 q，令 $H(p, q)$ 表示 H 中位于有向直线 $\overrightarrow{pq}$ 的开右半平面内的点集。注意，[1]

$$H(p_i, q_j) = \begin{cases} (p_k)_{k\leq j} \cup (p_k)_{k>i} \cup (q_\ell)_{\ell<j} & \text{if} \quad i > j \\ (p_k)_{k<i} \cup (q_\ell)_{\ell<i} & \text{if} \quad i = j \\ (p_k)_{k<i} \cup (q_\ell)_{\ell\leq i} \cup (q_\ell)_{\ell>j} & \text{if} \quad i < j \end{cases}$$

此外，若 $i < j$，则 $H(q_i, q_j) = H(p_i, q_j) \backslash \{q_i\}$；若 $i > j$，则 $H(p_i, p_j) = H(p_i, q_j) \backslash \{p_j\}$。这些侧向条件刻画了爆炸双链的序型。

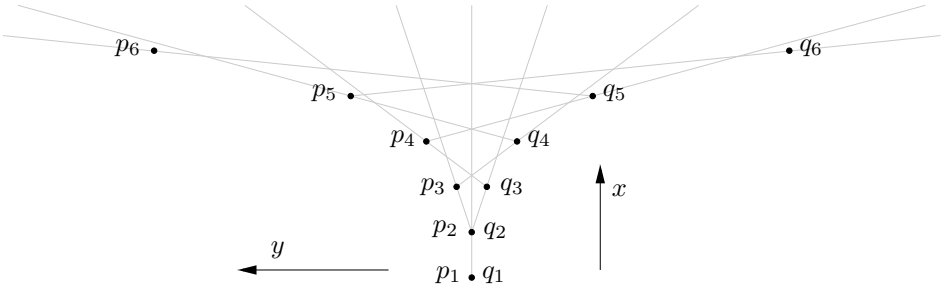


图1 旋转坐标系中的一个点集示例 H_6。

[1] 当 i 或 j 属于 {1,2} 时，以下内容可能会将定义该半空间的两个点之一列出，并将其第二个名称作为半空间的成员。为确保正确性，必须忽略此类列举。

若平面图 G 具有一条特殊边为 vu 的单侧哈密顿圈，则它有一条哈密顿圈 ($v = v_1, v_2, \ldots, v_n = u$)，满足： vu 与外面关联；对于每个 $j = 2, \ldots, n$，哈密顿圈中与 v_j 关联的两条边，即边 $v_{j-1}v_j$和 $v_{j+1}v_j$，在由 $v_1, \ldots, v_j, v_{j+1}$诱导的子图中，按 G的循环次序相邻。特别地，单侧条件取决于哈密顿圈、其方向及其特殊边。借助边界为该哈密顿圈的闭有界区域 D，可以对第二个条件作更直观的改述：在 G 的嵌入中，对于每个 j，所有满足 $i < j$ 的后向边 v_iv_j 要么画在 D 内部，要么画在 D的开外部。令 V_I 为顶点集合，其中的顶点 v_j 有一条满足 $i < j - 1$ 的后向边 v_iv_j画在 D 内部，且 $V_O = V \setminus V_I$。集合 V_I 由仅在 D 内部有后向边的顶点组成，而 V_O 中的顶点则仅在 D外部有后向边。

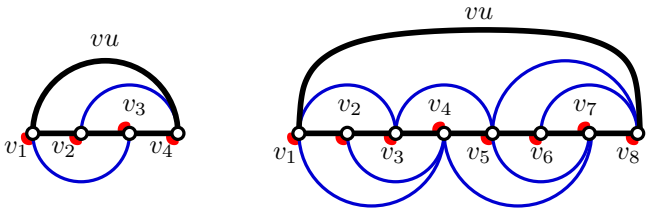


图 2 K_4 以及一个略大的图，两者都具有单侧哈密顿圈。红色角表示没有回边的一侧。

回忆一下，$\mathcal{C}'$ 是由那些作为某个具有单侧哈密顿圈的平面图的生成 子图的平面图组成的类。值得注意的是，所有子图都是POSH图。

▶**命题2。** *POSH*图的任何子图都是*POSH*图。

证明。 根据定义，删边会保留POSH性质，因此只需证明删去一个顶点也能保留该性质。设 G 是一个POSH图，并设 G' 是它的一个超图，且具有单侧哈密顿圈。现在，删去 v 之后，在 G'中沿哈密顿圈连接它在该圈上的两个邻点（如果这条边尚不存在），可以沿着 v 在该圈上的两条边完成。这样得到的是 $G \setminus v$ 的一个超图，且具有单侧哈密顿圈。◀

3 嵌入策略

我们对 POSH 图的兴趣源于以下定理。

▶**定理3.** 设 G' 为 *POSH*，且 $v_1, \ldots, v_n$ 是平面超图 G 中定义在相同顶点集上的单侧哈密顿圈。则存在 G' 在 H_n 上的无交叉嵌入，使得 v_i 被放置在 p_i 或 q_i上。

证明. 只需描述超图 G 在 H_n上的嵌入。证明中，我们假设在 G的平面绘图中，序列 $v_1, \ldots, v_n$ 沿着 D 的边界逆时针方向遍历。对于每个 i 顶点 v_i，若 $v_i \in V_I$，则将其嵌入在 $\bar{v}_i = p_i$；若 $v_i \in V_O$，则将其嵌入在 $\bar{v}_i = q_i$。

令 $G_i = G[v_1, \ldots, v_i]$ 为 G 由$\{v_1, \ldots, v_i\}$诱导的子图。路径 $\Lambda_i = v_1, \ldots, v_i$ 将 G_i分隔开。左部 GL_i 由 G_i 与 D的交集组成，右部 GR_i 是 G_i 去除所有位于 D内部的边后所得的部分。 GL_i 与 GR_i的交集为 Λ_i，并集为 G_i。 G_i 的逆时针边界游走由一条从 v_1 到 v_i 且包含在 GR_i 中的路径∂R_i，以及一条从 v_i 到 v_1 且包含在GL_i中的路径组成；令 ∂L_i 为这条路径的反向路径。

令 G_i 为平面图 G_i 的直线绘图，其中将每个顶点 v_j 放置在对应的 $\bar{v}_j$处。若 G_i 的顶点 $\bar{v}$ 与点可见 p 之间的线段 $\bar{v}p$ 与 G_i的一条边没有交叉，则称该顶点 $\bar{v}$ 能够看见点 p 。通过对 i 使用归纳法，我们证明：

1. 该绘图 G_i 是平面的，即没有交叉。
2. G_i 和 G_i 具有相同的外边界游走。
3. 。的每个顶点 ∂L_i 在 G_i 都能看到所有点 p_j ，且 $j > i$ 的每个顶点 ∂R_i 在 G_i都能看到所有点 q_j ，且 $j > i$。

当 $i = 2$ 图 G_i 只是一条边时，三个断言显然成立。对于性质3，只需回想一下，由 p_1 和 p_2 张成的直线将 H_n的 p侧与 q侧分隔开。

现在假设 $i \in \{3, \ldots, n\}$的性质对 G_{i-1}成立，并且假设 $v_i \in V_I$（ $v_i \in V_O$ 的情形可用对称的论证处理）。这意味着 v_i 的所有后向边都位于 D 内部，因此 v_i 的所有邻点都属于 ∂L_{i-1}。由于 $v_i \in V_I$，我们有 $\bar{v}_i = p_i$；而 G_{i-1} 的性质3意味着，可以将连接到 $\bar{v}_i$ 的边添加到 G_{i-1} 中，且不会引入交叉。这就是 G_i的性质1。

由于 G_{i-1} 和 G_{i-1} 具有相同的边界游走，并且 v_i （分别为 $\bar{v}_i$）属于 G_i （分别为 G_i）的外面，而且由于 v_i 在 G_i 中的关联边与 G_i中的 $\bar{v}_i$ 相同，因此 G_i 和 G_i 的外部游走再次彼此相等，即性质2。

令 j 为满足 $v_j v_i$ 是一条边的最小对象，并注意到 ∂L_i 是通过取 ∂L_{i-1} 的前缀（其最后一个顶点为 v_j ）并附加 v_i得到的。由 $\bar{v}_j$ 和 $\bar{v}_i = p_i$ 张成的直线，将 G_i 中与 $\bar{v}_i$ 关联的所有边，与满足 $\ell < j$ 和 $\bar{v}_\ell \in \partial L_i$ 以及 $k > i$的所有线段 $\bar{v}_\ell p_k$ 分隔开来。这表明， G_i 中的 ∂L_i 的每个顶点都能看到满足$k > i$的所有点 p_k 。为证明性质3的第二部分，假设某条边 $\bar{v}_i \bar{v}_j$ 穿过从 $\bar{v}_l$ 到 q_k的视线， $k > i$，参见图3。首先注意到，只有在 $l \leq j$时这才可能发生；否则， $\bar{v}_j \bar{v}_l$ 会将 $\bar{v}_i = p_i$ 和 q_k分隔开，因为如 $x = i$ 所示， p_i 位于左侧，而根据定义，如 $x = k$ 所示， q_k 位于右侧。由于根据构造 $j = l$ 是不可能的，我们只剩下 $l < j$这一情形。于是， $\bar{v}_i$ 和 $\bar{v}_l$中的一个（不妨设为 $\bar{v}$）位于有向直线 $\bar{v}_j q_k$的右侧。然而，这意味着 $\bar{v}_j \bar{v}$ 的左侧有 q_k ，这与 $x = k$处 q_k 的定义相矛盾。至此，性质3得证，归纳步骤也随之完成。

最后， G_n 的性质1推出该定理。 ◀

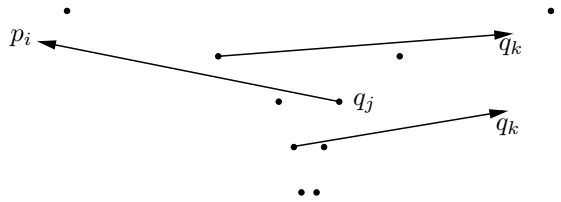


图3 来自 ∂R_i 的顶点，见 q_k

4 平面二分图

本节将研究二部平面图，并证明它们具有 POSH 性质。

▶ **定理4**。 每个二部平面图 $G = (V, E)$ 都是一个平面图的子图；该平面图具有相同的顶点集 V，并且含有一个单侧哈密顿圈，也就是说， G 是 *POSH* 图。

证明。 四边形剖分是所有面度数均为四的平面图。等价地说，它们是极大平面二分图，也就是说，除星图外，任意二部平面图都是某个四边形剖分的子图。因此，由于 POSH 图在取子图后仍是 POSH 图，只需对四边形剖分证明该定理即可。

设 Q 是一个四边形剖分， V_B 和 V_W 分别是二着色中的黑色顶点和白色顶点。将外面的两个黑色顶点标记为 s 和 t。下文提到四边形剖分时，均指赋予了 s 和 t 的嵌入的四边形剖分。分离分解是一个二元组 $D=(Q,\ Y)$，其中 Q 是一个四边形剖分， Y 是 Q 的边的一种定向和着色，颜色为红色和蓝色，且满足：

1. 与 s 和 t 关联的边分别以红色和蓝色进入。**2.** 每个顶点 $v\notin\{s,\ t\}$ 都关联着一个非空的红色边区间和一个非空的蓝色边区间。若 v 是白色顶点，则按顺时针次序，每种颜色区间中的第一条边为出边，其余边均为入边。若 v 是黑色顶点，则该颜色区间中按顺时针次序最后一条边为出边（见图4）。

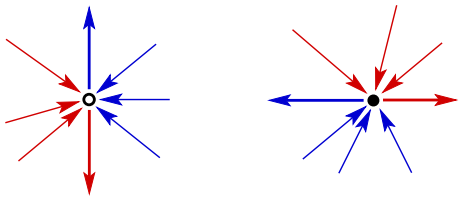


图4 白色顶点和黑色顶点处的边定向与着色 .[10]

de Fraysseix 和 Ossona de Mendez [18]定义了四边形剖分 Q 的分离分解。他们证明了分离分解与二定向之间存在双射（二定向是指对 Q 的边进行定向，使得每个顶点 $v\notin\{s,t\}$ 的出度均为 2），并通过一种与流和匹配相关的论证，证明了 Q 存在二定向。Felsner 等人 [11]，给出了分离分解存在性的归纳证明；该证明基于识别各个面上的对顶点。

在分离分解中，红色边构成一棵指向 s 的树，蓝色边构成一棵指向 t 的树。两棵树分别将所有顶点 $v\notin\{s,t\}$连接到各自的根。Felsner 等人（[10, 11]）证明，两棵树的边可以由一条曲线分隔；这条曲线从 s 出发，在 t 结束，并穿过 Q 的每个顶点和每个内面。这条曲线称为**赤道线**。

如果将 Q 重新绘制，使赤道线映射到 x轴， s 为该直线的左端点， t 为右端点，那么红树和蓝树就会分别成为绘制在 x轴所界定的上、下半平面中的**交替树**（定义见下文[11], ）。请注意，这样绘制 Q 就是一种双页书嵌入；为了强调书的两页上绘制的图是交替树，我们称之为**交替双页书嵌入**。

交替树是一种平面树 T，其平面绘制满足： T 的顶点位于 x轴上彼此不同的位置，且所有边都嵌入在 x轴上方的半平面内（或全部位于轴下方）。此外，对于每个顶点 v，其所有邻点都位于同一侧：要么全部在 v 左侧，要么全部在 v右侧。在这种情况下，我们分别称该顶点 v为交替布局中的**右顶点**或**左顶点**。请注意，在这两棵树中，每个顶点在其中一棵树里是左顶点，在另一棵树里则是右顶点。

设 Q 是一个具有 n 个顶点的平面四边形剖分，且 S 是 Q的一个分离分解。设 $s=v_1$， v_2、……、 $v_n=t$ 是基于 Q的交替双页书嵌入的脊柱

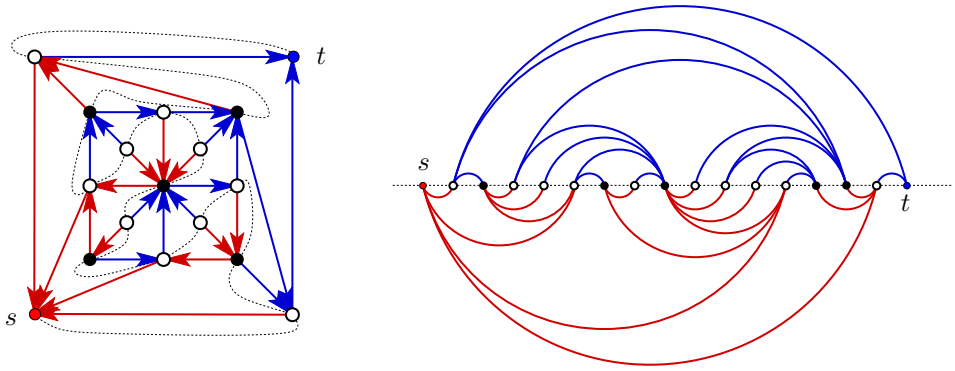


图 5 一个带有分离分解的四边形剖分 Q S，以及由 S[10]的赤道线诱导的交替双页书嵌入。

。设 Q^+ 由 Q 添加 v_nv_1 以及所有尚未属于 Q 的边集的 v_iv_{i+1} 得到。根据构造， v_1，v_2、……、 v_n 是 Q^+ 的一个哈密顿圈；由于这些树是交替的，黑色顶点向左只有蓝色边，而白色顶点向左只有红色边。因此，该哈密顿圈是单侧的，反向边为 $v_nv_1 = ts$。所以 Q 是 POSH。◀

值得注意的是，反向读取哈密顿圈，即v_n， v_{n-1}，……， v_1，仍然是单侧的，此时反向边为 $v_1v_n = st$。

5 平面次三次图

本节将介绍′的另一个大子类$\mathcal{C}$。回顾一下，3-正则图也称为三次图，而次三次图中的所有顶点的度至多为 3。

▶**定理 5**。 每个平面次三次图 G 都是某个平面图 G'的生成子图，该平面图具有一种嵌入，其中包含单侧哈密顿圈；也就是说， G 具有 *POSH* 嵌入。

▶ 注 6. 注意，我们不声称该定理适用于所有平面次三次图。然而，据我们所知，不存在不是 POSH 的连通平面次三次图。

为证明这一点，我们使用定理4和以下引理：

▶**引理 7**。 设 G 为一个次三次图。则 G 存在一个匹配 M，使得收缩 M 中的所有边后得到一个二分多重图。

证明。 设 (X, Y) 是 G 的顶点集的一个划分，使得割的大小，即 G 中一端点位于 X 且另一端点位于 Y的边数，达到最大。我们断言， $G[X]$ 和 $G[Y]$ 在 G 中的诱导子图是匹配。假设一个顶点$v \in X$ 在 $G[X]$中至少有两个邻点。那么 v 在 Y中至多有一个邻点，因此将 v 从 X 移至 Y 会使割的大小至少增加一条边，这与最大性矛盾。对 $G[Y]$同样适用。

令 M 为 G 中的匹配，它由 $G[X]$ 和 $G[Y]$中的所有边组成。收缩 M 中的边会将 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 转变为独立集，从而得到一个二分多重图 G/M。◀

平面图 D 的分离 k-圈 是长度为 k的简单圈，即包含 k 条边，且圈的内部有 D 的顶点。

▶**引理 8**。 设 G 是一个次三平面图。那么 G 存在一个平面嵌入 D_G 和一个匹配 M，使得在 D_G 中收缩 M 的所有边后，得到的二分多重图不含分离 *2*-圈。

证明。 设 G 是一个次三平面图。不失一般性， G 是连通的；否则，我们先处理各个连通分支，然后以所有连通分支都与外面相邻的方式嵌入 G 。

注意，2-圈只能通过收缩三角形的一条匹配边或四边形的两条匹配边产生。考虑 D 的一个嵌入 G ，使分离 3-圈的数量最少；在此基础上，使分离 4-圈的数量也最少。

▶**断言 1**。 D 没有分离 *3*-圈。

证明。 示意图见图 6。我们首先证明 D 没有分隔菱形，即两个共享一条边的三角形 $e = uv$, 其中至少一个是分离 3-圈。否则，将 u 放得非常靠近 v。此时 e 较短，我们重新布置 u 的另外两条边，使它们贴近 v对应的边。由于包含 e 的三角形之一原本被假设为分离的，新绘制的图中分离 3-圈更少，从而产生矛盾。

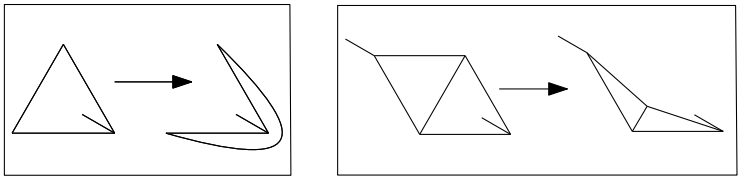


图 6 消除含有内部顶点的三角形的步骤。左侧的步骤 ft
消除孤立分隔三角形，而右侧的步骤处理分隔菱形 s.

我们现在可以证明 D 没有分离 3-圈。若 T 是一个分离 3-圈，则必有一条边从 T 中的某个顶点 v 通向其内部。由于 v 的度至多为 3，它没有边连到 T的外部。于是，我们可以将 T 中不与 v 相 incident 的边 e 重新绘制，使其紧贴另外两条边。新图中分离 3-圈的数量再次减少：事实上，如果重新绘制的边属于另一个 3-圈，那么 T 就是一个分隔菱形的一部分。◀

现在选取一个基数最小的边集 M ，使得将其收缩后得到一个二分多重图。引理 7 的证明表明， M 是一个匹配。在这些匹配中，我们选择 M ，使得含有M 中 2 条边的分离 4-圈数量最少。这样的分离 4-圈称为被 M覆盖。

▶**断言 2.** M 不包含任何分离 *4*-圈。

证明。 设 $Q = v_1v_2v_3v_4$ 是一个分离 4-圈，使得 v_1v_2 且 $v_3v_4 \in M$ 且 v_1有一条边 e_I 通向内部，因此没有通向外部的边。

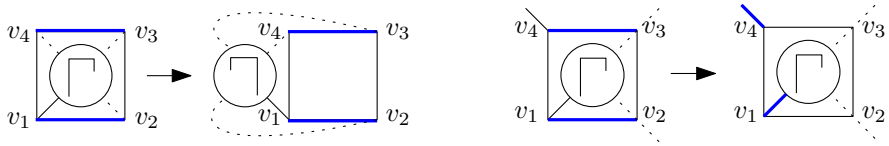


图 7 消除含有内部顶点的四边形的步骤。右侧的情形无法应用左侧的重新绘制，因为我们要改变蓝色匹配以避免出现分离 2-圈。

如果 v_4 也没有通向外部的边，我们将 D 改为一个绘图 D'，方法是将 Γ 中位于 D 内部的部分关于 v_1v_4反射到 Q 外部，重新绘制为 Γ，见图 7。在 D' 中，原来的分离 4-圈不再具有分离性。我们断言，没有创建出由 M 覆盖的新的分离 3-圈或分离 4-圈。该断言与 D 或 M的选择相矛盾。

为证明该断言，注意到 $S = \{v_2, v_3\}$ 是一个 2-分隔集，除非 Q 是 D 的外面，因此我们先假设情况并非如此。于是，一个分离的 3-或 4-圈必定位于 S 的一侧，因为在 $Q \cup \Gamma$ 中，除去它们之间的边后，它们之间的最短路径长度为 3；唯一的例外是 v_2 和 v_3 都与 Γ 的同一个顶点相邻，此时 Q 是外面，产生矛盾。令 X 为 $G \setminus S$ 中包含 Γ 的连通分支。D' 中位于 3-或 4-圈内部且不属于 X 的顶点数保持不变，因为 X 所在的面仍然相同。在 $X \cup S$ 中，唯一未被完整反映的 3- 或 4- 圈是包含边 v_2v_3 的那些圈。由于假设 Q 不是外面，因此 v_2 和 v_3 中至少有一个不与 Γ 连通。因此，这样的圈 C 是一个 4-圈，由 v_2、v_3、v_1 或 v_4 以及 v_2 和 v_4 或 v_1 和 v_3 在 Γ 中的一个公共邻点组成。然而，v_1v_2 或 v_3v_4 将分别是 $M \cap C$ 中唯一的边。这与收缩 M 得到一个二部图这一事实相矛盾。

现在，如果 Q 是 D 的外面，那么唯一没有完整反映出来的圈仍然都包含 v_2v_3。然而，v_2 和 v_3 可能都与 Γ 中的某个顶点相邻：对于 3-圈而言，它们可能是一个公共邻点；对于 4-圈而言，则可能是两个相邻的邻点。由于 v_2 和 v_3 已经被 M 覆盖，因此这个 3-圈不包含 M 中的任何边，而这个 4-圈至多包含其中一条边。因此，这两种情况都与 M 的定义矛盾。

因此，我们知道 v_4 有一条边 e_O 通向外部。这条边不会通向四边形的任何顶点，因为剩下的唯一候选是 v_2，但这将导致三角形 $v_2v_3v_4$ 和 $v_1v_2v_4$ 中有一个是分离三角形。

将匹配 M 改为边集 M'：从中移除 v_1v_2 和 v_3v_4，并加入 e_O 和 e_I。收缩 M' 后仍然得到一个二部图，因为包含我们之前那些边的同四个面圈也分别恰好包含一条新边，所以收缩后它们的大小不变。因此，M' 是一个匹配，因为它与 M 的基数相同，因而同样是极小的。我们得出，M' 不覆盖 v_2 或 v_3，因为 M 在它们处也不包含除 v_1v_2 和 v_3v_4 之外的任何其他边。由于 M' 不包含来自四边形 $v_1, \ldots, v_4$ 的两条边，而 M 是极小的，因此必然存在一个分离四边形，M' 包含其中两条边，而 M 不包含。如果这样的分离四边形 Q 包含 e_I，那么它还必须包含与 v_1 相 incident 的另一条边。它不能包含 v_1v_2，因为我们知道 v_2 没有被 M' 覆盖。因此，它包含 v_1v_4，进而包含 e_O。同样的论证表明，如果它包含 e_O，那么也包含 e_I。这与 M' 的存在矛盾，因为 e_O 和 e_I 的端点分别位于四边形的外部和内部，因此彼此不相邻。◀

因此，我们证明了对 M makessurethat 的选择确保收缩后的平面二部多重图中不会存在分离 2-圈。◀

▶ 注 9。可以通过迭代应用证明中使用的操作，从任意嵌入和匹配出发构造出 D 和匹配 M。

定理 5 的证明。现在令 B 为由 G 通过收缩 M 中的边而得到的平面二部多重图，且不再对嵌入作任何改变。令 B' 为 B 的底层简单图，并令 Q 为一个以 B' 为生成子图的四边形剖分或星图。定理4的证明表明，存在一种从左到右的布局

v_1，...，v_s 将 Q 的顶点置于 x 轴上，使得对于每个 $i \in [s]$，所有满足 $v_j v_i$ 且带有 $j < i-1$ 的边位于一个半平面内，而所有满足 $v_i v_j$ 且带有 $j > i+1$ 的边位于另一个半平面内。删除 Q 中所有不属于 B' 的边，并在该图中复制 B 的重边。这便得到 B 的一个双页书嵌入 Γ 。

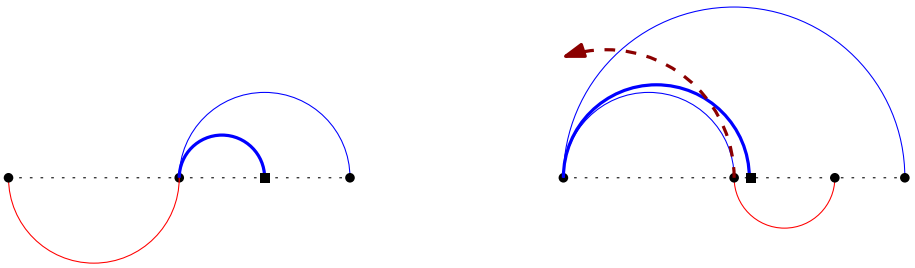


图8 如何添加叶子：叶子绘制为正方形，其新的相邻边加粗。

令 v 为 B的一个收缩顶点。顶点 v 是通过收缩边 $uw \in M$得到的。如果 u 和/或 w 的度不是3，我们就在嵌入中的适当位置添加边，并使其终止于叶子，见图8。例如，要给 u 添加一条边，选择一个与 u 相邻且未收缩成2-圈的面 f。令 e 和 e' 为同时与 v 和 f相邻的两条边。如果 e 与 e' 之间的角包含脊柱（ x轴）的一部分，就将叶子放在脊柱上靠近 v 的位置，并用一条短边将其连接到 v ，短边位于脊柱下方或上方，以满足 v的局部顶点条件。否则，不失一般性地假设它位于上半平面，且边 e 是较靠近脊柱的边。该边是唯一的，因为在 v 处界定 f 的两条边都向上延伸，因此都朝向同一侧，假设为 v的右侧。让新边紧贴 e 延伸，然后将叶子放在 e的另一个端点 x旁边。可能与这条新边交叉的边不能与 e交叉，因此唯一的可能性是与 x 相邻且向上半空间延伸的边。然而，根据 x 的局部顶点条件，这些边必须延伸到其左侧。这些边并不存在，因为任何这样的边都必须与 e'交叉，见图8中的虚线。因此，新边不会与其他边交叉。首先，对每个顶点都执行这一过程。注意，所得图仍然是二部图，局部顶点条件也仍然满足，但现在每个收缩顶点的度都是4。这使得拆分顶点时的分类讨论更容易。

现在，我们说明如何撤销收缩，即在绘图 Γ 中对顶点进行分裂，使得最终得到 $\Gamma^\star$ 的单侧双页书绘图，也就是 G 的一个双书嵌入，其顶点序列为 v_1、.....、v_n，并且对于每个 $j \in \{1$、.....、$n\}$，与 $1 \le i < j$ 相连的后向边 $v_i v_j$ 都绘制在脊柱上，或都绘制在书嵌入的同一页上（全部位于脊柱上方或全部位于脊柱下方）。得到这样的书嵌入后，我们可以删除人工添加的叶子，然后将脊柱边（包括从最右侧顶点到最左侧顶点的后向边）添加到 G 中，从而得到 G 的一个超图 G^+ 。该超图具有一个单侧哈密顿圈，这表明 G 是 POSH。

在接下来说明如何将一个四度顶点 v 分裂成一条边 $uw \in M$ 之前，我们先概述一下各种分裂（即远分裂和局部分裂）的应用顺序。随后，我们将说明这些不同的分裂具体指什么。要分裂所有四度顶点，我们按以下步骤进行：

首先，我们从外部向内部，对所有需要进行远程分裂的顶点进行分裂。更准确地说，在与需要进行远程

[2] 稍后会进一步说明这究竟是什么意思。

分裂的顶点相 incident e 的边上按如下方式定义一个偏序集：每条边 e 定义一个区域 R_e，该区域由 e 与脊柱围成。现在根据区域 R_e的包含序对这些边进行排序。从这个偏序集中选择一条极大边，然后选择一个需要进行远程分裂且与该边相 incident 的顶点。当无法再进行远程分裂时，我们进行所有局部分裂。这些分裂完全是局部的，因此彼此不会发生冲突。因此，可以任意选择它们的顺序。

我们按照顺时针次序将 v 的边标记为 e_1、e_2、e_3、e_4，使得在 G 中，边 e_1、e_2 与 u 相接，而 e_3、e_4 与 w 相接。如果两个角 $\angle e_2e_3$ 和 $\angle e_4e_1$ 合起来同时占据脊柱所界定的两个半平面的一部分，那么可以在 Γ 中表示 v 的点左右各选取一个点，并稍微绕行边 e_i，这样既不会引入交叉，又能使其中一个点与 e_1、e_2 相接，另一个点与 e_3、e_4 相接。添加一条连接这两点的边，即可完成将 v 分裂为边 $uw \in M$。图 9 展示了这种局部分裂的几个实例。

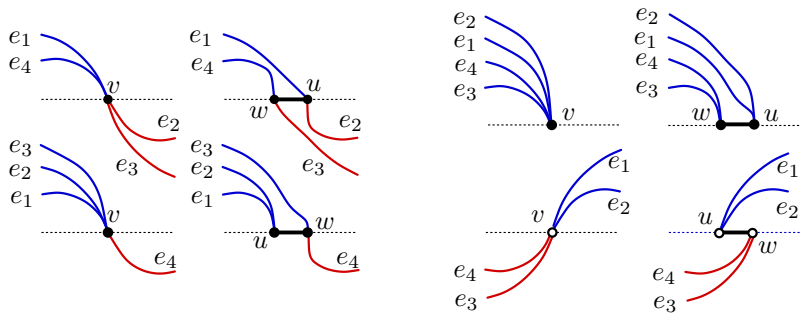


图 9 顶点局部分裂的四种情形 v.

当且仅当 v 的四条边都伸向同一个半空间（例如上方的半空间），且从 x 轴开始按顺时针编号的顺序为 e_4、e_1、e_2、e_3 或 e_2、e_3、e_4、e_1 时，上述关于两个角的条件才不成立。这两种情况只差在交换 u 和 w 的名称，因此可以假设是第一种情况。更重要的区别在于，大多数 e_i 的末端位于 v 的左侧还是右侧。注意，在由 Γ 给出的排序中，所有 e_i 都朝向同一侧，因为它们都位于同一个半平面内。然而，如果 v 不是我们分裂的第一个顶点，那么脊柱上可能会有一条边伸向另一侧，见图 10。对于所有 $i \in [4]$，令 v_i 为 e_i 上不同于 v 的另一个端点。由于重边，某些 v_i 可能重合；不过，我们先讨论它们互不重合的情况。在左侧的情况下，我们将 u 放在 v_1 稍偏左的位置；在右侧的情况下，则将 u 放在 v_2 稍偏右的位置，并用一条脊线边将 u 连接到这个邻近的顶点。在两种情况下，我们都将 w 留在 v 原来的位置。图 10 展示了右侧的情况，图 11 展示了左侧的情况。

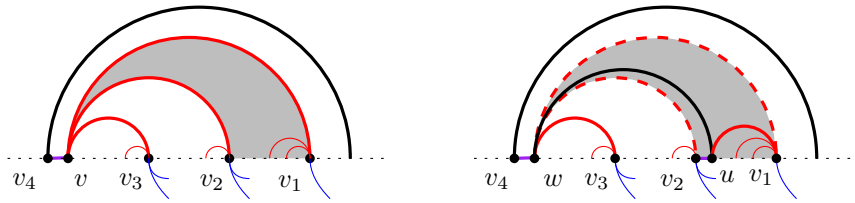


图 10 远程分裂中，除脊线边的邻点外，v_i 位于右侧。

要看出在左侧情形中，边 uv_2 和 uw 完全没有交叉，只需注意，我们可以在原始绘图中分别沿着路径 v_2vv_1 和边 v_1v 附近布置它们（图 11 中以虚线表示）。这里需要注意的是，由于我们选择分裂的顺序，

我们选择进行分裂时， v_1 和 v_2 仍是 B 的原始顶点，也就是说，它们尚未在上半平面中分裂，因此仍没有两条边分别向两侧延伸至上半平面。因此，与添加叶子的论证类似，没有任何与 v_1 相 incident 的边会与 uw 或 uv_2 交叉。右侧情形类似，只需交换 v_1 和 v_2 的角色。

这种分裂是远程分裂。对于上述偏序集结构中的关联关系，顶点不仅被视为与其作为端点的任意边关联， u （或 v_1 ）的脊邻点也被视为与边uw关联。举例来说，考虑图 10（左）中最外侧的黑色边，它被视为与 v关联。

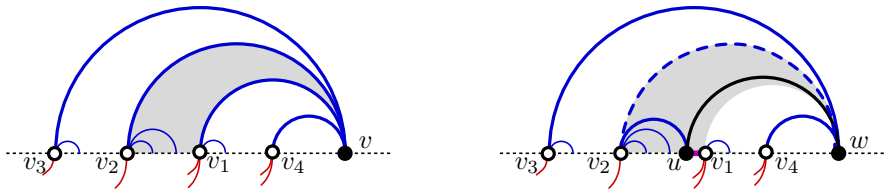


图 11 灰色区域内的远程分裂， v_i 位于上半平面的左侧 .

接下来，我们将说明重边的存在会如何影响不同类型的分裂。首先要注意的是，局部分裂可以照常进行，因为我们完全没有提及端点。

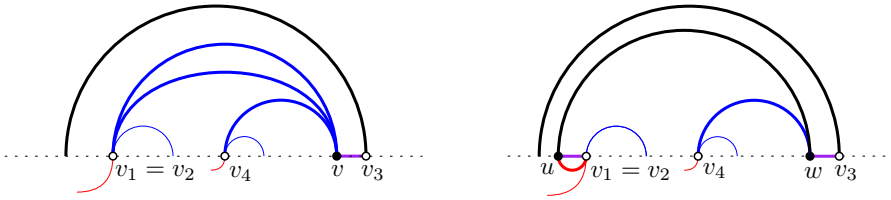


图 12 如果 $v_1 = v_2$，则会形成一条双重脊边。此处 $e_3 = vv_3$ 是一条脊线边。

关于远分裂，首先讨论恰有两条边从一个顶点连到另一个顶点的情况：如图 10 和图 11 所示， $v_2 = v_3$ 和/或 $v_4 = v_1$的情况没有问题，此时我们在图中保留虚线。重边必定相邻，因为不相邻的重边会构成分离 2-圈，而我们在构造中已避免了这种情况。因此，最后需要考虑的重边情况是 $v_1 = v_2$。在这种情况下，我们沿用放置 u 和 w的相同策略，但这会导致 u 和 $v_1 = v_2$之间的脊柱上出现一条重边，见图 12。与后续的局部分裂一样，我们可能会关注两条脊柱边之间的角属于哪个半空间；对此，我们将其中一条边视为脊线边，另一条视为位于脊柱上方或下方的边，具体取决于这两个顶点中右侧顶点的位置。这可能是 u 或 v_1，取决于我们讨论的是左侧还是右侧情况。为了满足单侧性条件，选择这一方向至关重要：这样，右侧顶点的所有左邻点都能通过射入同一半空间和/或沿脊柱边延伸的边到达。

其次，如果左侧顶点 v_ℓ 和右侧顶点 v_r 之间有三条边，例如位于上半平面，那么我们会同时分裂这两个顶点；示意图见图 13。由于这两个顶点之间有三条边，因此只剩下一条边 e 连接 v_ℓ。所以，我们可以在脊柱上找到一个空闲位置，位于 v_ℓ 的正右侧或正左侧，因为边 e 位于另一侧。现在我们将 v_ℓ 分裂为 u_ℓ 和 w_ℓ ，并将 v_r 分裂为 u_r 和 w_r

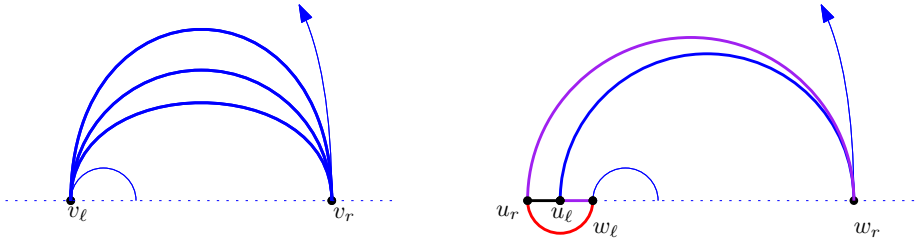


图 13 双重分裂是指同时分裂两个顶点。

同时进行，其中 w_ℓ 和 w_r 是两侧都有边通向其他位置的顶点。从左到右，我们依次放置 u_r，然后将 u_ℓ 放在 v_l 所在位置的正左侧；该位置就是 w_ℓ 的新位置。它们三者由脊柱边连通，只有 u_r 和 w_ℓ 在下半平面有一条边。这些边不会交叉，因为这些顶点彼此足够接近。最后，我们将 w_r 放在 v_r 的位置，并在上半平面添加连接到 w_r 和 w_ℓ 的边。这些边不会交叉，因为任何与它们交叉的边都会与原始绘图中的三重边相交。

这种分裂称为双重分裂。这些分裂完全是局部的，因此可以与最后的局部分裂同时进行。

最后一种情况是，给定顶点的四条边都连到同一个顶点。由于该二部图的最大度为 4，这构成了一个完整的连通分支。这个连通分支对应于三次图中的一个 K_4 连通分支，其中两条互不相邻的边已被收缩。K_4 的一个单侧哈密顿圈如图2所示。我们再进行一次局部双重分裂：用这幅图替换 4 条平行边，并将其嵌入在原来其中一个顶点附近。

定理 5 的证明至此完成。 ◀

6 2-树

根据第 4 节和第 5 节中的正面结果，人们可能会认为“足够稀疏”的平面图是 POSH 的。本节将表明，2-树并非如此。

2-树是一种图：从一个 K_3 开始，反复选择当前图的一条边，并添加一个与该边两个端点相邻的新顶点即可得到该图。我们将这一操作称为在一条边上堆叠一个顶点。

由递归构造可知，具有 n 个顶点的 2-树是一个具有 $2n-3$ 条边的平面图。我们还要指出，2-树是串并联平面图。此外，另一个包含 2-树作为子类且研究得较为充分的类别是（平面）Laman 图。

Fulek 和 Tóth 已证明，平面 3-树具有大小为 $O(n^{3/2}\log n)$ 的 n-通用点集。由于每个 2-树都是某个平面 3-树的诱导子图，因此该界也适用于这一类图。

▶**定理 10.** *存在一个有 499 个顶点的 2-树 G，它不是 POSH。*

证明。 在整个证明中，我们假设给定了一个 2-树 G，以及顶点在 $v_1,\dots,v_n$ 轴上的从左到右的布局 x，使得将脊柱边和反向边 v_nv_1 添加到 G 后，得到一个带有单侧哈密顿圈的平面图。

对于 G 的一条边 e，我们令 $X(e)$ 表示堆叠在 e 上方的顶点集合，并令 $S(e)$ 表示通过在 e 上方堆叠而生成的边集，即 $S(e)$ 中的每条边都有一个顶点属于 e，另一个顶点属于 $X(e)$。我们将一条带有 $i<j$ 的边 $e=v_iv_j$ 的集合 $X(e)$ 划分为

左部 $XL(e) = \{v_k \in X(e)\colon\ k < i\}$，中部 $XM(e) = \{v_k \in X(e)\colon\ i < k < j\}$，以及右部：$XR(e) = \{v_k \in X(e)\colon\ j < k\}$。

▶ **断言 3.** 对于每条边 $|XR(e)| \le 2$。

假设 $|XR(e)| \ge 3$。该集合中的每个顶点，其所有后向边都位于同一侧。其中两个顶点的后向边都朝向 e 中的顶点，且位于同一侧。这意味着会出现一对交叉边，产生矛盾。

▶ **断言 4.** 如果对于所有 $e' \in S(e)$，都有 $|X(e')| \ge 3$，那么 $|XM(e)| \le 3$。

假设 $e = v_iv_j$ with $i < j$ 位于上半平面，且 $XM(e)$ 中有四个顶点x_1、x_2、x_3、x_4。单侧性意味着四条边 x_kv_j 位于上半平面。因此，如果 x_1、x_2、x_3、x_4 从左到右排列，那么边 v_ix_2、v_ix_3 和 v_ix_4 必须位于下半平面。现在令 $e' = v_ix_3$，并考察 $X(e')$ 中的三个顶点。其中两个顶点（例如 y_1、y_2）位于 x_3 的同一侧。先假设 y_1、$y_2 \in X(e')$ 位于 x_3 的左侧。v_ix_2 和 x_2v_j 的边迫使 y_1、y_2 位于 x_2 和 x_3 之间。由于边 x_2v_j，边 v_iy_1、v_iy_2 位于下半平面。x_3 处的单侧性要求 y_1x_3 和 y_2x_3 也位于下半平面。这样就不可避免地出现交叉。

现在假设 $y_1, y_2 \in X(e')$ 位于 x_3 的右侧。边 v_ix_4 和 x_4v_j 保证 y_1, y_2 位于 x_3 与 x_4 之间。由于边 x_3v_j，边 v_iy_1 和 v_iy_2 位于下半平面。现在设 y_1 位于 y_2 的左侧。y_2 处的单侧性要求 x_3y_2 也位于下半平面，因此 v_iy_1 与 x_3y_2 之间存在交叉。至此，断言得证。

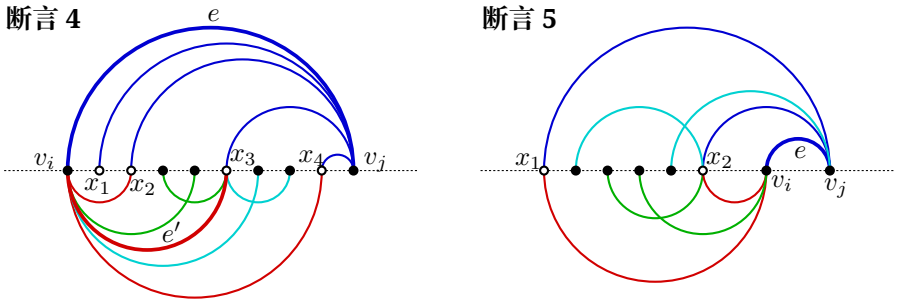


图 14 断言证明示意图。

▶ **断言 5。** 若 $XL(e) \ge 2$，且 x 是 $XL(e)$ 中最右侧的元素，则对于某个 $XL(e') \le 1$ e' $e' \in S(e)$ 与 x 和 $XR(e') = \emptyset$ 均关联。

假设 $e = v_iv_j$ 和 $i < j$ 位于上半平面，且在 $XL(e)$ 中有两个顶点x_1、x_2。我们假设 x_2 是 $XL(e)$ 中最靠右的元素。由v_j 处的单侧性可知，x_1v_j 和 x_2v_j 位于上半平面。现在 x_1v_i 位于下半平面，因此 x_2v_i 也位于下半平面。$X(x_2v_i)$ 和 $X(x_2v_j)$ 中的所有顶点都位于由 x_1v_j、v_jv_i、v_ix_1围成的区域内，特别是，对两者而言，$XR(e') = \emptyset$。反设存在 y_1、$y_2 \in XL(x_2v_i)$ 以及 z_1、$z_2 \in XL(x_2v_j)$。由单侧性，从 x_2 连向四个顶点 y_1、y_2、z_1、z_2 的边都位于同一个半平面内。若它们位于下半平面，且y_1 在 y_2 左侧，则 y_1x_2 与 y_2v_i之间会发生交叉。若它们位于上半平面，且 z_1 在 z_2 左侧，则 z_1x_2 与 z_2v_j之间会发生交叉。矛盾表明，$XL(x_2v_i) \le 1$ 或 $XL(x_2v_j) \le 1$，因为 $x = x_2$，这就完成了该断言的证明。

我们现在可以定义图 G，然后利用这些论断证明 G 不是 POSH。图 G 包含一条 基边 e，并在 e上堆叠七个顶点，即 $|X(e)| = 7$。对于每条

边 $e' \in S(e)$，在 e'上堆叠五个顶点。最后，对于每条以这种方式引入的边 e''，在 e''上堆叠三个顶点。注意，通过在一条边 e''上堆叠引入的边共有 $7 \cdot 2 = 14$ 条、$14 \cdot 5 \cdot 2 = 140$ 条以及 $140 \cdot 3 \cdot 2 = 840$ 条。边的总数为 $995 = 2n - 3$，因此该图有 499 个顶点。

现在假设 G 是 POSH，并令 v_1、…、v_n 为可证明其性质的双页书嵌入中脊柱上的顶点顺序。令 $e = v_i v_j$ 与 $i < j$ 为基边。不失一般性，假设 e 位于上半平面。由断言 3 可得 $|XR(e)| \leq 2$，由断言 4 可得 $|XM(e)| \leq 3$，因此 $|XL(e)| \geq 2$。令 x_1 和 x_2 为 $XL(e)$ 中的元素，使得 x_2 是 $XL(e)$ 中最右侧的元素。于是，根据断言 5，$e' = x_2 v_i$ 和 $e'' = x_2 v_j$ $XR(e') = \emptyset = XR(e'')$。将断言 4 应用于 e' 和 e''，可推出 $|XM(e')| \leq 3$ 且 $|XM(e'')| \leq 3$。因此 $|XL(e')| \geq 2$ 且 $|XL(e'')| \geq 2$。这与断言 3 矛盾。因此，G 不存在能导出单侧无交叉双页书嵌入的脊柱排序。◀

7 结语

我们考察了爆炸双链这一特殊点集（序型），并证明其大小为 $2n - 2$ 的初始部分 H_n 对于具有 n 个顶点的 POSH 图而言是 n-通用的。我们认为 POSH 图类相当丰富。在稀疏图方面，关于二部图的结果或许可以推广；而对于三角剖分，5-连通图中哈密顿回路数量庞大，因此很可能其中存在一个单侧哈密顿回路。 [1]

▶**猜想 11.** 每个无三角形平面图都是 *POSH* 图。

▶**猜想 12.** 每个 *5*-连通平面三角剖分都是 *POSH* 图。

我们已经证明，2-树及其超类串并联图和平面拉曼图并不属于 POSH 图类$\mathcal{C}'$。这些图类是否存在大小呈线性增长的通用点集，仍是一个引人关注的问题。

参考文献

1 A. Alahmadi、R.E.L. Aldred 和 C. Thomassen。5-连通三角剖分中的圈。组合理论杂志 *B* 辑，140：27–44，2020年。网址：`https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895619300486`，.doi:10.1016/j.jctb.2019.04.005。2 Md. Jawaherul Alam、Therese C. Biedl、Stefan Felsner、Michael Kaufmann、Stephen G. Kobourov 和 Torsten Ueckerdt。以最优复杂度计算变形地图。离散与计算几何，50：784–810，2013年。3 Md. Jawaherul Alam 和 Stephen G. Kobourov。4-连通平面图的比例接触表示。载于 *Graph Drawing*，第 *LNCS*7704卷，第211–223页。施普林格，2012。4 Patrizio Angelini、Till Bruckdorfer、Giuseppe Di Battista、Michael Kaufmann、Tamara Mchedlidze、Vincenzo Roselli 和 Claudio Squarcella。k-外平面图的小型通用点集。离散与计算几何，第1–41页，2018年。.doi:10.1007/s00454-018-0009-x。5 Michael J. Bannister、Zhanpeng Cheng、William E. Devanny 和 David Eppstein。超模式与通用点集。图算法与应用杂志，18(2)：177–209，2014年。.doi:10.7155/jgaa.00318。6 Jean Cardinal、Michael Hoffmann 和 Vincent Kusters。关于平面图的通用点集。图算法与应用杂志，19(1)：529–547，2015年。.doi:10.7155/jgaa.00374。

16 类平面图的线性规模通用点集

7 Alexander Choi、Marek Chrobak 和 Kevin Costello。平面图随机通用集的 $\Omega(n^2)$ 下界。arXiv预印本，arXiv1908.07097，2019年。网址： https://arxiv.org/abs/1908.07097。8 Marek Chrobak 和 Howard J. Karloff。平面图通用集大小的下界。ACM SIGACT News，20(4)：83–86，1989年。.doi:10.1145/74074.74088。9 Hubert De Fraysseix、János Pach 和 Richard Pollack。如何在网格上绘制平面图。Combinatorica，10(1)：41–51，1990年。.doi:10.1007/BF02122694。10 Stefan Felsner、Éric Fusy、Marc Noy 和 David Orden。Baxter 族及相关对象的双射。组合理论杂志 A 辑，118(3)：993–1020，2011年。.doi:10.1016/j.jcta.2010.03.017。11 Stefan Felsner、Clemens Huemer、Sarah Kappes 和 David Orden。平面四边形剖分及其相关结构的二进制标记。离散数学与理论计算机科学，12:3:115–138，2010年。12 Radoslav Fulek 和 Csaba D. Tóth。平面三树的通用点集。离散算法杂志，30：101–112，2015年。.doi:10.1016/j.jda.2014.12.005。13 Peter Gritzmann、Bojan Mohar、János Pach 和 Richard Pollack。将平面三角剖分嵌入指定点上。American Mathematical Monthly，98：165–166，1991年。.doi:10.2307/2323956。14 Michael Kaufmann 和 Roland Wiese。将顶点嵌入点上：少量弯折即可绘制平面图。图算法与应用杂志，6(1)：115–129，2002年。.doi:10.7155/jgaa.00046。15 Maciej Kurowski。绘制所有含有 n 个顶点的平面图所需点数的 $1.235n$ 下界。Information Processing Letters，92(2)：95–98，2004年。.doi:10.1016/j.ipl.2004.06.009。16 Maarten Löffler 和 Csaba D. Tóth。单弯折绘图的线性规模通用点集。载于 Graph Drawing，第9411卷 LNCS，第423–429页。施普林格，2015年。.doi:10.1007/978-3-319-27261-0 35.17 Bojan Mohar。平面图的通用点集。Open Problem Garden，2007年。 http://www.openproblemgarden.org/op/small_universal_point_sets_for_planar_graphs。18 Patrice Ossona de Mendez 和 Hubert de Fraysseix。关于定向的拓扑方面。离散数学，229(1–3)：57–72，2001年。.doi:doi.org/10.1016/S0012-365X(00)00201-6。19 Julius Petersen。正则图理论。Acta Mathematica，15(1)：193–221，1891年。.doi:10.1007/BF02392606。20 Manfred Scheucher、Hendrik Schrezenmaier 和 Raphael Steiner。关于平面图通用点集的一则注记。图算法与应用杂志，24(3)：247–267，2020年。.doi:10.7155/jgaa.00529。21 Walter Schnyder。在网格上嵌入平面图。载于第一届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第138–148页。工业与应用数学学会，1990年。