arXiv:2303.00130v2 [math.AT] 5 May 2023

装饰映射图的 Leray 余层收敛

JustinCurry 奥尔巴尼大学，纽约州立大学，美国

WashingtonMio 佛罗里达州立大学，
塔拉哈西，佛罗里达州

TomNeedham 佛罗里达州立大学，
塔拉哈西，佛罗里达州

Osman BeratOkutan 马克斯·普朗克数学科学研究所，莱比锡，
德国

FlorianRussold[1] 格拉茨工业大
学，奥地利

摘要

我们提出了装饰映射图，作为 Mapper 图的一种推广，能够捕获数据集更多的拓扑信息。装饰映射图可视为 Reeb 图上胞腔Leray余层的离散近似。我们通过证明相对于覆盖序列的胞腔Leray余层会在覆盖分辨率趋于零时收敛到实际的 Leray 余层，为这一构造奠定了理论基础。

2012年 ACM 主题分类计算数学 → 代数拓扑；计算理论 → 计算几何

关键词与短语Leray 余层、Reeb 图、Mapper、收敛

资助

Justin Curry：获美国国家科学基金会资助，项目编号 CCF-1850052；获美国国家航空航天局资助，项目编号 80GRC020C0016 *Washington Mio*：获美国国家科学基金会项目资助，项目编号 DMS-1722995 *Tom Needham*：获美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2107808 *Florian Russold*：获奥地利科学基金（FWF）资助：W1230

1 引言

Reeb 图及其离散对应物——Mapper 图——是计算拓扑学中的重要工具 [2, 3, 8, 14]。它们可用于数据可视化 [10, 12]，、通过 Reeb 图之间的距离比较标量场 [1, 6, 7]，以及数据骨架化 [9]，等。给定连续映射 $f\colon X \to \mathbb{R}$，Reeb 图 R_f 概括了 X 的零维连通性。在实践中，我们处理定义在离散数据集 P 上的映射 $f\colon P \to \mathbb{R}$，此时 Reeb 图由 Mapper 图取代。构造 Mapper 图时，先选取 $f(X)$ 或 $f(P)$ 的覆盖 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$，再对 $f^{-1}(U_i)$ 的连通分支进行聚类或取其连通分支，将得到的每个连通分支收缩为一个顶点，并在对应的连通分支有公共点时连接相应的两个顶点。文献 [6, 11] 表明，Reeb 图可视为余层；相对于某个覆盖的胞腔 Reeb 余层会收敛到 Reeb 余层，只要该覆盖的分辨率趋于零。这为使用有限覆盖提供了理论依据，

[1] 通讯作者* 这是在 CG:YRF 2023 上所作报告的摘要。为惠及学术界，现将其公开；应将其视为预印本，而非经过正式评审的论文。因此，预计这项工作将发表于有正式论文集的会议和/或学术期刊。

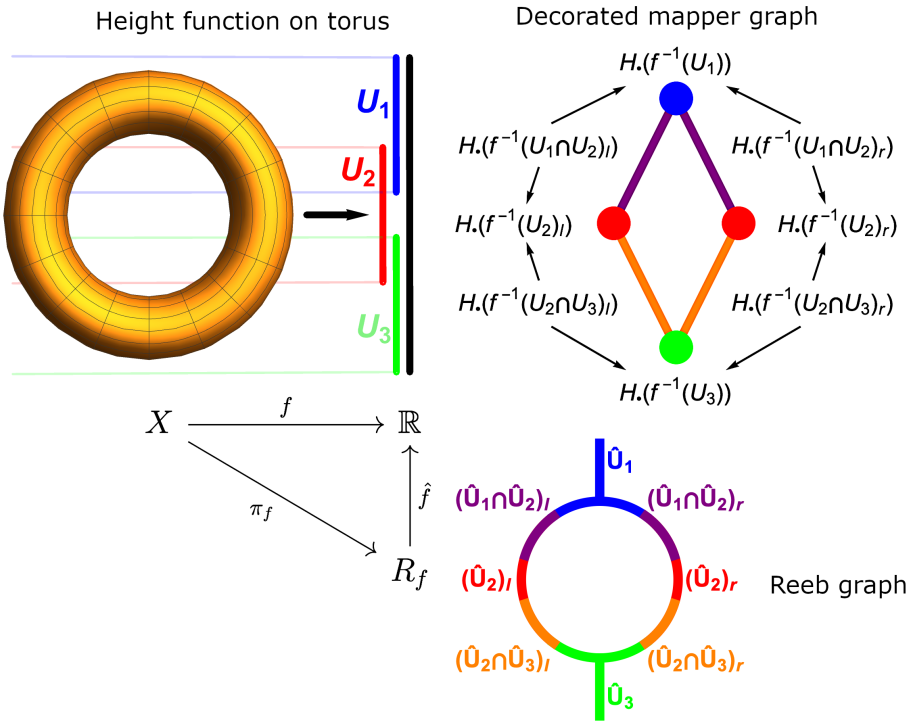

图1 沿 Reeb 图上的诱导映射 $\hat{f}$ 拉回 $f(X)$的覆盖$\mathcal{U}$，并将其细化为连通分支，得到 R_f的覆盖 $\hat{\mathcal{U}}$。装饰映射器图是该覆盖的神经复形，并以商映射 π_f下 $\hat{\mathcal{U}}$ 中交集的原像的同调 $H_\bullet\left(\pi_f^{-1}(-)\right)$ 作为装饰。由于 $f=\hat{f}\circ\pi_f$，这类似于使用 f下原像的连通分支。

从理论上证明了使用有限覆盖的合理性。这种方法的一个局限是，Reeb 图/Mapper 图无法捕捉高维拓扑特征。为克服这些局限，我们引入装饰映射图。装饰映射器图会在 Mapper 图相应的顶点和边上，收集 $f^{-1}(U_i)$ 和 $f^{-1}(U_i\cap U_j)$ 的连通分支在所有次数 $H_\bullet(-):=\bigoplus_{n\geq 0}H_n(-)$ 上的同调（可根据点样本推断）；参见图1。它可视为 Reeb 图上 Leray 余层的离散近似。在本文摘要中，我们证明，对于任意有限一维覆盖 $\mathcal{U}$，当覆盖的分辨率趋于零时，相对于该覆盖的胞腔Leray余层会收敛到实际的 Leray 余层。

2 Leray 余层

Leray（预）余层 [4,5,15] 刻画空间 X 沿连续映射 $f\colon X\to Y$观察时的同调。具体而言，它为每一对开子集 $V\subseteq W\subseteq Y$记录其同调以及诱导映射 $H_\bullet\left(f^{-1}(V)\right)\xrightarrow{H_\bullet(f^{-1}(V)\subseteq f^{-1}(W))}H_\bullet\left(f^{-1}(V)\right)$。我们进一步假设，$X$是紧的，并且对于每个 $V\subseteq Y$，$H_\bullet\left(f^{-1}(V)\right)$是有限维的。

▶**定义 1**（Leray（预）余层）。 我们通过以下赋值定义连续映射 $f\colon\ X \to Y$ 的分次 *Leray*（预）余层 L^f ： 对于所有 $V \subseteq W \subseteq Y$ 开

$$\mathcal{L}^f(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}^f_n(V) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} H_n\big(f^{-1}(V)\big)$$
$$\mathcal{L}^f(V \subseteq W) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}^f_n(V \subseteq W) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} H_n\big(f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)\big)\,.$$

在实践中，我们无法获取整个Leray余层。我们只能获得其在有限覆盖上的取值所给出的胞腔版本 [4,4.1.6] $f(X)$。开覆盖 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ $f(X)$定义了一个单纯复形 $\mathcal{N}_\mathcal{U} \coloneqq \{\sigma = (i_0, \dots, i_k) \mid \mathbf{U}_\sigma \coloneqq U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$，称为$\mathcal{U}$的神经复形。若$\mathcal{U}$ 是有限的且其神经复形是一维的，则称$\mathbf{U}$ 为有限一维覆盖，并将$\mathcal{N}_\mathcal{U}$的面关系记为 $\leq$，即 $\sigma \leq \tau \iff \sigma$ 是 τ 的一个面。

▶ **定义 2** (胞腔Leray余层)。我们将关于覆盖 U 的胞腔*Leray*余层 $D_\mathcal{U}L^f$ 定义为 $N_\mathcal{U}$ 上的余层，其赋值如下：对所有 $\sigma \leq \tau \in N_\mathcal{U}$

$$D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f(\sigma) \coloneqq \mathcal{L}^f(U_\sigma)$$
$$D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f(\sigma \leq \tau) \coloneqq \mathcal{L}^f(U_\tau \subseteq U_\sigma)\,.$$

ˆ若 $\pi_f\colon\ X \to R_f$ 是从 X 到 Reeb 图的商映射，且 $\mathcal{U}$ 是 R_f的一个覆盖，则我们将装饰映射器图定义为 $D_\mathcal{U}\mathcal{L}^{\pi_f}$；见图1。

3 收敛

显然，这一离散化过程可能会丢失信息。这引出了一个问题： $D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f$对 $\mathcal{L}^f$的表示有多好? 为比较 $\mathcal{L}^f$与 $D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f$，我们定义一个过程，将 $D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f$ 变换为 Y上的一个（预）余层。我们希望仅凭 $D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f$中的信息，近似求得 $\mathcal{L}^f$ 在任意开集 $V \subseteq Y$上的取值。为此，我们定义子复形$K_V \coloneqq \{\sigma \in \mathcal{N}_\mathcal{U} \mid U_\sigma \cap V \neq \emptyset\} \leq \mathcal{N}_\mathcal{U}$，它可视为$V \subseteq \bigcup U_\sigma$的单纯逼近；见图2。此外，若 $V \subseteq W$，则可得到一个包含 $\iota\colon\ K_V \hookrightarrow K_W$.$^{\sigma\in K_V}$

▶ **定义 3** (连续延拓)。 设 U 是 Y 的有限一维覆盖。我们通过以下赋值，将 $C_\mathcal{U}D_\mathcal{U}L^f$ 定义为 Y 上的一个（预）余层：对于所有 $V \subseteq W \subseteq Y$ 开

$$C_\mathcal{U}D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f(V) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \Big(H_0\big(K_V; D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f_n|_{K_V}\big) \oplus H_1\big(K_V; D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f_{n\text{-}1}|_{K_V}\big)\Big)$$
$$C_\mathcal{U}D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f(V \subseteq W) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \Big(H_0(\iota)_n \oplus H_1(\iota)_{n\text{-}1}\Big)$$

其中 $H_i\big(K_V;\ D_\mathcal{U}L^f_n|_{K_V}\big)$ 是将余层 $D_\mathcal{U}L^f_n$ 限制到 K_V 上后所得的余层的次数为 i 的同调 *[4, 6.2.2]*，而 $H_i(\iota)_n$ 是由 $\iota\colon\ K_V \hookrightarrow K_W$ 诱导的余层同调映射，参见 *[13, A.17]*。

如 $[4, 5, 15]$,所示，若$\mathcal{U}$是 $f(X)$的有限一维覆盖，则连续延拓给出$C_\mathcal{U}D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f(V)$, $\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} H_n\Big(f^{-1}\big(\bigcup_{\sigma\in K_V} U_\sigma\big)\Big)$ 它近似于 $H_\bullet\big(f^{-1}(V)\big)$；见图2。下面的命题表明， $C_\mathcal{U}D_\mathcal{U}\mathcal{L}^f($ $V \subseteq W)$也给出了正确的诱导映射。

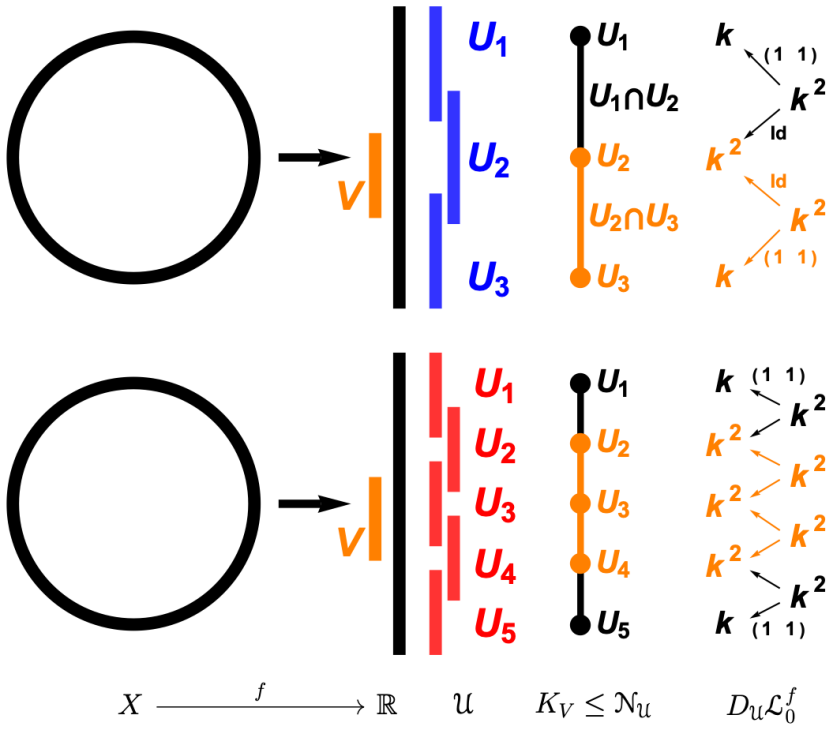

图2 该图展示了 $D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_0^f \cong D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}^f$ 在 $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ 上相对于两个分辨率不同的覆盖的情况，以及到 K_V 的限制 $D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_0^f|_{K_V}$（橙色）。同调的系数取自域 k $C_{\mathcal{U}}D_{\mathcal{U}}$ V $\cong k \ncong$，未标注的箭头表示恒等映射。对于粗覆盖，我们得到 $H_0\left(f^{-1}\ V\ \right)$ $C_{\mathcal{U}}D_{\mathcal{U}}$ ^{f} V $\cong k^2 \cong H_0\left(f^{-1}\ V\ \right)$ $\mathcal{L}^f()()$；而对于更精细的覆盖，我们得到 $\mathcal{L}()()$。

▶ **命题 4**。 设 U 是 $f(X)$的有限一维覆盖。则对所有 $V \subseteq W \subseteq Y$ 开集，以下图表交换，且水平箭头均为同构：

$$\begin{array}{ccc} H_0\left(K_V; D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_n^f|_{K_V}\right) \oplus H_1\left(K_V; D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_{n-1}^f|_{K_V}\right) & \xrightarrow{\cong} & H_n\left(f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma\in K_V} U_\sigma\right)\right) \\ \downarrow{\scriptstyle H_0(\iota)\oplus H_1(\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n\left(f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma\in K_V} U_\sigma\right)\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma\in K_W} U_\sigma\right)\right)} \\ H_0\left(K_W; D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_n^f|_{K_W}\right) \oplus H_1\left(K_W; D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}_{n-1}^f|_{K_W}\right) & \xrightarrow[\cong]{} & H_n\left(f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma\in K_W} U_\sigma\right)\right) \end{array} .$$

为了讨论收敛，我们必须为（预）余层定义距离。假设 Y 是一个度量空间，并且所有涉及的（预）余层都是可构造的 [4, 11.0.10]。对于每个 $\epsilon > 0$，定义 $V^\epsilon := \{y \in Y \mid d(y, V) < \epsilon\}$。现在，我们将定义在 Y 上的（预）余层 F 与以下对象相关联：$F^\bullet := \{(F^\epsilon)_{\epsilon\geq 0}, (F_\epsilon^\delta\colon\ F^\epsilon \to F^\delta)_{\epsilon\leq\delta}\}$，这是定义在 Y 上的一个参数化（预）余层族，令 $F^\epsilon(V) := F($ $V^\epsilon)$。由此，我们可以将两个（预）余层 F和 G 之间的距离定义为 $F^\bullet$和 $G^\bullet$的交错距离，即 $d(F, G) := d_I(F^\bullet, G^\bullet)$。记 res(U) := sup sup $d(x, y)$ 为开覆盖 U 的分辨率。现在我们可以证明$U\in$U $x,y\in U$

如果覆盖 $\mathcal{U}$的分辨率趋于零， $C_{\mathcal{U}}D_{\mathcal{U}}\mathcal{L}^f$就收敛到 $\mathcal{L}^f$。

▶ **定理5**。 如果 $f\colon\ X \to Y$连续，且 U 是 $f(X)$的有限一维覆盖，那么

$$d\big(C_{\mathcal{U}} D_{\mathcal{U}} \mathcal{L}^f, \mathcal{L}^f\big) \leq res(\mathcal{U})\,.$$

如果我们只考虑$\mathcal{L}_0^f$，即$\mathcal{L}^f$的零次部分，那么定义3和定理5中的构造就特化为 [11]中收敛结果的阿贝尔化。

4 未来工作

定理5保证，如果我们选择分辨率为 $\leq \delta$的覆盖，那么胞腔Leray余层就是连续版本的 δ-近似。这一结果为使用有限覆盖提供了理论依据。由于实际中我们必须处理来自有限点集的映射，在未来工作中，我们计划研究在什么条件下能够根据 X的有限样本推断映射 f: $X \to Y$的胞腔Leray余层；参见 [2]。

参考文献

1 Ulrich Bauer、Xiaoyin Ge 和 Yusu Wang。Reeb 图之间的距离度量。载于《第三十届计算几何年会论文集》，SOCG'14，第464–473页，美国纽约州纽约市，2014年。计算机协会。 doi:10.1145/2582112.2582169。2 Adam Brown、Omer Bobrowski、Elizabeth Munch 和 Bei Wang。随机Mapper图的概率收敛与稳定性。《应用与计算拓扑学杂志》，5(1)：99–140，2021年。doi:10.1007/s41468-020-00063-x。3 Hamish Carr、Jack Snoeyink 和 Ulrike Axen。在所有维度中计算等值树。《计算几何》，24(2)：75–94，2003年。第四届CGC计算几何研讨会特刊。doi:https://doi.org/10.1016/S0925-7721(02)00093-7。4 Justin Curry。《层、余层及应用》。博士论文，宾夕法尼亚大学，2014年。arXiv:1303.3255。5 Justin Curry、Robert Ghrist 和 Vidit Nanda。用于计算胞腔层上同调的离散Morse理论。《计算数学基础》，16，2013年。doi:10.1007/s10208-015-9266-8。6 Vin de Silva、Elizabeth Munch 和 Amit Patel。范畴化Reeb图。《离散与计算几何》，55(4)：854–906，2016年。 doi:10.1007/s00454-016-9763-9。7 Barbara Di Fabio 和 Claudia Landi。曲面Reeb图的编辑距离。《离散与计算几何》，55(2)：423–461，2016年。 doi:10.1007/s00454-016-9758-6。8 Herbert Edelsbrunner、John Harer 和 Amit K. Patel。分段线性映射的Reeb空间。载于《第二十四届计算几何年会论文集》，SCG '08，第242–250页，美国纽约州纽约市，2008年。计算机协会。 doi:10.1145/1377676.1377720。9 Xiaoyin Ge、Issam Safa、Mikhail Belkin 和 Yusu Wang。通过Reeb图进行数据骨架化。《神经信息处理系统进展》，24，2011年。10 P. Y. Lum、G. Singh、A. Lehman、T. Ishkanov、M. Vejdemo-Johansson、M. Alagappan、J. Carlsson 和 G. Carlsson。利用拓扑学从复杂数据的形状中提取洞见。《科学报告》，3(1)：1236，2013年。doi:10.1038/srep01236。11 Elizabeth Munch 和 Bei Wang。Reeb空间的范畴表示与 Mapper 之间的收敛。载于《第32届国际计算几何研讨会》（SoCG 2016），莱布尼茨信息学国际会议论文集第51卷，第53:1–53:16页。Dagstuhl城堡莱布尼茨信息学中心，2016年。doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2016年.53。

12 Monica Nicolau、Arnold Levine 和 Gunnar Carlsson。基于拓扑的数据分析识别出一组具有独特突变特征和极佳生存率的乳腺癌患者。美国国家科学院院刊，108：7265–70，2011年04月。doi:10.1073/pnas.1102826108。13 Florian Russold。持久层上同调，2022年。arXiv:2204.13446。14 Gurjeet Singh、Facundo Memoli 和 Gunnar Carlsson。用于高维数据集分析和三维物体识别的拓扑方法。载于*Eurographics*点图形研讨会。Eurographics协会，2007年。doi:10.2312/SPBG/SPBG07/091-100。15 Hee Rhang Yoon 和 Robert Ghrist。分块持久性：通过分布式持久同调进行多尺度特征检测，2020年。 arXiv:2001.01623。