arXiv:2303.00144v1 [math.AC] 1 Mar 2023

cl-预约化、i-后扩张及相关结构

Sarah Poiani 和 Janet Vassilev

Abstract. 在 Kemp、Ratliff 和 Shah [KRS20],工作的基础上，对于定义在诺特环上的一类模上的任意闭包 cl，我们发展了子模的 cl-预约化理论。对于一类 R-模上的任意内部算子 i，我们还发展了 i-后扩张理论。利用 Epstein, R.G. 和 Vassilev 的对偶性 [ERV23b], , 我们证明，若 i 是与 cl 对偶的内部算子，则这些概念实际上彼此对偶。我们考察了 cl-预核（i-后核），即一个子模的所有 cl-预约化（i-后扩张）的交，以及 cl-预包（i-后包），即一个子模的所有 cl-预约化（i-后扩张）的和，并将其与 cl-核（i-包）进行比较。我们还对诺特环中 cl-闭理想的 cl-预约化进行了分类，其中 cl 是具有特殊部分的闭包。

1. Introduction

Northcott 和 Rees 首先在 [NR54] 中定义并研究了理想的约化。理想 I 的约化是一个与 I 具有相同整闭包的理想 $J \subseteq I$。Rees 在 [Ree87] 中进一步将整闭包和约化的概念推广到模的子模情形。一般而言，一个子模可以有许多个约化，甚至有多个极小约化（即所有约化集合中的极小元）。子模 N 的核（属于 M）是 M 中 N 的所有约化的交，从某种意义上说，它衡量了 N 的约化。如果 N 是基本的，即 N 是它唯一的约化，那么 $\operatorname{core}_M(N) = N$。然而，当 N 有更多约化时，核绝不会是 N 的约化。在 Kemp、Ratliff 和 Shah 最近的一项工作 [KRS20], 中，作者采取了不同的思路，寻找包含于理想 I 中、但与 I 不具有相同整闭包的理想。这些理想中的极大元被他们称为预约化。只要 I 不是基本的，那么 I 的核就包含于 I 的某个预约化中。从某种意义上说，这正是本文工作的出发点。

此外，正如 Epstein 在 [Eps05] and[Eps10], 中将约化推广到了不同的闭包运算一样，我们也将把预约化推广到其他闭包。我们还可以将 Fouli 和 Vassilev 以及 Vraciu [FV10] and [FVV11] ，以及 Epstein, R.G. 和 Vassilev[ERV23a], [ERV23b] 的论文中讨论的 cl-核概念推广为子模的 cl-预核，即所有 cl-预约化的交。人们可能会认为，子模的 cl-预核包含于其 cl-核中，但事实并非总是如此。我们将考察子模上的一些条件，这些条件可以确保这种包含关系成立，同时还将给出一些反例。由于计算子模的 cl-核可能很困难，而且目前只在某些情形下已知 cl-核的公式（参见 [HS95], [Moh97], [CPU01], [CPU02], [CPU03], [PU05],[HT05], [FPU08], [FV10], [FVV11], [ERV23b] and [CFH22]），我们希望在某些情况下，cl-预核能够成为一种有用的工具，为计算子模的 cl-核提供洞见。

承袭 Epstein、R.G. 和 Vassilev [ERG12] [ERV23a], [ERV23b] and [ERV23c], 的研究，我们为诺特局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 的一类模上的内部算子 i 定义了对偶概念——i-后扩张，以及 i-后包。不过，我们也指出，还可以定义其他一些有趣的子模，即 cl-预包和 i-后核；它们有时分别可与 cl-核和 i-包比较。

在某些情况下，我们可以准确确定子模的所有 cl-预约化的形式，以及子模的所有 i-后扩张的形式。特别地，若 N 是 M 的有限生成 cl-基本子模，则每个 cl-预约化都可用 N 的极小生成集来确定。类似地，若 N 是阿廷模 M 中的有限长度子模，且 N 是其在 M 中唯一的 i-后扩张，则这些 i-后扩张可用 M/N 的极小余生成集来确定。

本文组织如下。第2节回顾对运算、闭包运算和内部运算的定义。我们还介绍约化、扩张、核和包，并列举一些本文将用到的这些运算的重要例子。第3节讨论并证明有关 cl-预约化的性质，第4节则分析 i-后扩张。第5节比较可比较闭包对应的 cl-预约化，以及可比较内部算子对应的 i-后扩张。

第6节展示对运算之间的对偶性，以及 cl-预约化与 i-后扩张之间的对应关系。第7节从 cl-约化/预约化和 i-扩张/后扩张的角度讨论子模覆盖的概念，并根据 N 的极小生成集，确定 cl-基本子模 N 的 cl-预约化结构。类似地，我们根据 M/N 的余生成集，对唯一扩张为自身的子模 N 的 i-后扩张进行分类。第8节介绍并探讨 cl-预包、cl-预核、i-后核和 i-后包的概念。第9节指出，当 cl 是具有特殊部分的闭包，且所有强 cl-独立理想都具有特殊部分分解时，也可以确定 cl-闭理想的 cl-预约化结构。

2. Background

我们首先定义对运算；闭包和内部运算是对运算的具体例子。对运算这一概念使我们能够在一个统一框架下处理这些运算，以及定义在 R-模上的其他运算。

定义 2.1。 [ERV23b，定义 2.1] 设 R 为一个结合环，但不一定交换。设$\mathcal{M}$ 为一个（左） R-模类，该类对于取子模和商模运算是闭合的。设 $\mathcal{P}$ 为所有满足 N、$M \in \mathcal{M}$和 $N \subseteq M$ 的 R-模对（N， M）所构成的类。

定义 2.2。 [ERV23b，定义 2.2] 设 $\mathcal{P}$为满足 $L \subseteq M$的对（L， M）的集合，使得当 φ时： $M \to M'$ 是一个同构，且（L， M） $\in \mathcal{P}$，则（φ（L） M'） $\in \mathcal{P}$。对运算是一个函数 p，它将每个对（L， M） $\in \mathcal{P}$映射到 M的一个子模 p（L， M），并且满足：当φ时， $M \to M'$是一个 R-模同构，且（L， M） $\in \mathcal{P}$，则 φ（p（L， M）） $= p$（φ（L） M'）。当（L， M） $\in \mathcal{P}$时，我们称 p 是

- 幂等：如果 $(L, M) \in \mathcal{P}$且 $(p(L, M)\ M) \in \mathcal{P}$，则始终有 $p(p(L, M)\ M) = p(L, M)$。
- 在子模上保序：如果 $L \subseteq N \subseteq M$使得当 (L, M)、$(N, M) \in \mathcal{P}$时，则有 $p(L, N) \subseteq p(N, M)$。
- 具有扩张性：始终有 $L \subseteq p(L, M)$。
- 具有内拓性：始终有 $p(L, M) \subseteq L$。
- 闭包运算：如果它具有扩张性、幂等性，并且在子模上保序。
- 内运算：如果它具有内拓性、幂等性，并且在子模上保序。

注记 2.3. 若 p是一个闭包运算，我们将 (L, M) 上的 p记作 $= L_M^{\mathrm{cl}}$，并称 L为 cl。若 p是一个内运算，我们将 (L, M) 上的 p记作 $= L_{\mathrm{i}}^M$，并称 L为 i。若 $N = N_M^{\mathrm{cl}}$，则称 N在 M中是 cl-闭的。若 $A = A_{\mathrm{i}}^B$，则称 A在 B中是 i-开的。

交换代数中一些常见的闭包运算包括整闭包、紧闭包和基本满闭包。为了之后举例时使用，我们现在将它们定义在交换诺特环的理想上。这些闭包都定义在诺特环上的有限生成模类上。

定义 2.4. 设 R 是一个交换环， I 是 R的一个理想。 I 的整闭包为：

$$I^- := \{x \in R \mid x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \text{ for some } a_i \in I^i\}.$$

请注意，我们使用 I^- 而不是 $\overline{I}$ 或 I_a，因为我们将所有闭包都表示为上标。

20 世纪 80 年代末，Hochster 和 Huneke [HH90] 引入了紧闭包，这是一种等特征环上的闭包运算。这里我们只讨论正特征的情形。

定义 2.5. 设 R 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特环， $I \subseteq R$ 是一个理想。令 $I^{[p^e]} = (x^{p^e} \mid x \in I)$，并设 $R^o = R \setminus \bigcup\{P \mid P$是 $R\}$的一个极小素理想。 I 的紧闭包为

$$I^* := \{x \in R \mid cx^{p^e} \in I^{[p^e]} \text{ for some } c \in R^o \text{ and all } e >> 0\}.$$

Heinzer、Ratliff 和 Rush 在 [HRR02] 中引入了基本满闭包，将其作为一种作用于$\mathfrak{m}$-初等理想的闭包运算。不过，这种运算也可作为环的所有理想集合上的闭包运算。

定义 2.6. 设 R 是一个交换环， I 是 R的一个理想。 I 的基本满闭包为$I^{\mathrm{mbf}} :=(\mathfrak{m}I :\ \mathfrak{m})$。

注意到 $I^* \subseteq I^-$ 由 [HH90] 以及 $I^{\mathrm{mbf}} \subseteq I^-$ 由 [HRR02]；然而，对于一般的诺特环，紧闭包与基本满闭包并不可比。

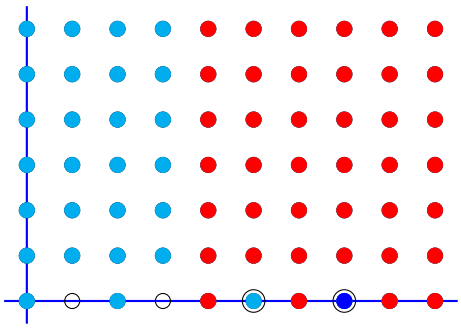


FIGURE 1. (x^4) 中的单项式格 $\subseteq (x^4)^{\mathrm{mbf}} \subseteq (x^4)^* \subseteq T$。

例2.7. 设 k 是特征为 $p>0$的域。若 $R=k[[x,y]]$，则对所有理想 $I^*=I$ 都有 $I\subseteq R$，因为 R是正则环。然而，$(x^3,y^3)^{\mathrm{mbf}}=(\mathfrak{m}(x^3,y^3):\mathfrak{m})=(x^3,x^2y^2,y^3)$。因此在 R中，对于所有理想 $I^*=I\subseteq I^{\mathrm{mbf}}$都有 I。

然而，对于 $S=k[[x^2,x^5]]$，

$$(x^4)^{\mathrm{mbf}}=(\mathfrak{m}(x^4):\mathfrak{m})=(x^6,x^9):(x^2,x^5)=(x^4,x^7)\subsetneq(x^4,x^5)=(x^4)^*=(x^4)^-$$

其中，最后一个等式由 [HH90，推论 5.8] 得出。特别地，在 S 中，对于所有理想 I，都有 $I^{\mathrm{mbf}}\subseteq I^*$。

考虑环 $T=k[[x^2,x^5,y,xy]]$。注意，根据 [HH90，推论 5.8]，有 $(x^4)^*=(x^4)^-=(x^4,\ x^5)$。然而，与 S 中的计算类似，$(x^4)^{\mathrm{mbf}}=(x^4,\ x^7)$，并且

$$(x^4)^{\mathrm{mbf}}\subseteq(x^4)^*=(x^4)^-.$$

我们加入了图1来说明 (x^4) 中的单项式（以红色阴影标出），以及$T\setminus(x^4)$ 中的单项式（以蓝色阴影标出）。x轴上两个圈出的格点表示属于 $(x^4)^*\setminus(x^4)$ 的单项式，其中较深蓝色的格点表示一个属于 $(x^4)^{\mathrm{mbf}}$ 但不属于 (x^4) 的单项式。

而对于理想 $J=(x^4,x^5,y^2,xy^2)$：我们将看到 $J^*=J\subseteq J^{\mathrm{mbf}}=J+(x^2y,x^3y)$。第一个等式由 [HH90, Lemma 4.11], 成立，因为 $T\subseteq k[[x,y]]$ 是一个正则环，而 (x^4,y^2) 在 T 中的原像恰好是 J。图 2 帮助我们理解如何得到 $\mathfrak{m}$-基本满闭包 J。注意，红色格点表示 J 中的单项式，蓝色格点表示 $T\setminus J$中的单项式。坐标为 (1, 0) 和 (3, 0) 的格点没有着色，因为单项式 x 和 x^3 不属于 T。圈出的红色格点是 $\mathfrak{m}J$ 中的格点。注意，极大理想中的每个单项式乘以深蓝色格点所表示的两个单项式（x^2y 和 x^3y）后，所得结果仍属于 $\mathfrak{m}J$；而对于浅蓝色格点所表示的其余每个单项式，至少存在一个极大理想中的元素，使其与该单项式相乘后不属于 $\mathfrak{m}J$。因此 $J^{\mathrm{mbf}}=J+(x^2y,x^3y)$。

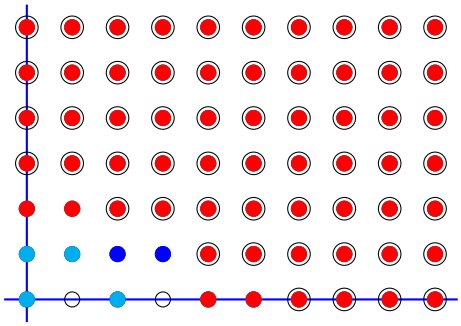


FIGURE 2. $J\subseteq J^{\mathrm{mbf}}\subseteq T$中的单项式格。

由于我们已经得到 I 中的两个理想，一个具有 $I^{\mathrm{mbf}}\subseteq I^*$，另一个具有 $I^*\subseteq I^{\mathrm{mbf}}$，因此我们看到紧闭包与 $\mathfrak{m}$-基本满闭包在 T 中不可比较。□

Northcott 和 Rees [NR54] 将理想 $J \subseteq I$ 定义为理想 I 的约化，若存在某个非负整数 n 使得 $JI^n = I^{n+1}$，并且他们证明 J 是 I 的约化，当且仅当 $J^- = I^-$。Rees 在 [Ree87] 中将约化的概念推广到模的子模。随后，Epstein 在 [Eps05] 和 [Eps10] 中，将交换 Noether 环的理想以及有限生成模的子模的约化推广到闭包运算 cl。我们下面用对运算的语言给出定义，并介绍相关概念 cl-核；该概念最初由 Rees 和 Sally 在 [RS88] 中针对整闭包提出，随后 Fouli 和 Vassilev 在 [FV10] 中将其推广到更一般的闭包运算 cl。

定义 2.8. [ERV23b，定义 2.10] 设 R 是一个诺特环，$\mathcal{M}$ 是一个 R-模类，cl 是定义在模对 (L, M) 的 $\mathcal{P}$ 上的闭包运算，其中 $L \subseteq M$属于 $\mathcal{M}$。假设 (L, M)、$(N, M) \in \mathcal{P}$。

(1) 如果 $L \subseteq N \subseteq L^{\mathrm{cl}}_M$，我们称 L 是 M 中 N 的 cl-约化。(2) 若 L 是 M 中 N 的 cl-约化，且不存在子模 $K \subseteq L$，使得 $(K, M) \in \mathcal{P}$ 且$K^{\mathrm{cl}}_M = N^{\mathrm{cl}}_M$，那么我们称 L 是 M 中 N 的极小 cl-约化。(3) 我们定义 cl-核$_M(N) = \bigcap\{L \mid L \subseteq N \subseteq L^{\mathrm{cl}}_M$，且 $(L, M) \in \mathcal{P}\}$。

虽然我们在上文定义了子模 N 在 M 中的极小 cl-约化，但一般而言，我们并不知道极小 cl-约化是否存在。若它们存在，则

$$\mathrm{cl}\text{-}\mathrm{core}_M(N) = \bigcap\{L \mid L \text{ a minimal cl-reduction of } N \text{ and } (L, M) \in \mathcal{P}\}.$$

定义 2.9。 [Eps05，定义 1.2] 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，cl 是有限生成 R-模的对 $\mathcal{P}$ 上的一种闭包运算。我们称 cl 为中山闭包，若对于有限生成 R-模，如果 $L \subseteq N \subseteq (L + \mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M$，则 $L^{\mathrm{cl}}_M = N^{\mathrm{cl}}_M$。

若 cl 是有限生成模类上的中山闭包，则 Epstein 首先证明了理想的极小 cl-约化存在于 [Eps05，引理 2.2]；随后指出，有限生成模的子模也存在极小 cl-约化 [Eps10，第 1] 节。

在 Kemp、Ratliff 和 Shah 最近的一篇论文 [KRS20], 中，作者将理想 $J \subseteq I$ 定义为预约化，条件是 J 不是 I 的（整）约化；然而，对于所有满足 $J \subseteq K \subseteq I$ 的 K， K 都是 I 的（整）约化。他们还考察了理想集合 I′(I)，其中 $= \{J \subseteq I \mid J$ 不是 $I\}$ 的（整）约化。他们指出，若 I′(I) 非空，则 I′(I) 的极大元是 I 的预约化。极小约化和理想的解析扩张度对他们的研究十分重要。理想 I 的解析扩张度是 I 中代数无关元素的最大个数。以下是受 Vraciu 关于特殊紧闭包和 $*$-独立性的研究启发、由 Epstein 在 [Vra 02] 和 [Eps05] and [Eps10] 中提出的代数无关性的推广。

定义 2.10. 设 R 是一个诺特环，cl 是定义在 R-模上的闭包运算。若 $f_1, \ldots, f_r \in M$ 满足 $f_i \notin (f_1R + \cdots + \hat{} f_iR + \cdots + f_rR)^{\mathrm{cl}}$，则称它们是 cl-独立的。若子模 $N \subseteq M$ 的每个极小生成元集都是 cl-独立的，则称其为强 cl-独立。

Kemp、Ratliff 和 Shah 的许多工作都针对诺特局部环，且整闭包是一种中山闭包。Epstein 证明，当 cl 是中山闭包时，若理想 $L \subseteq N$ 是 M 中 N 的约化，则 L 是 N 的极小 cl-约化，当且仅当 L 是强 cl-独立的。他还将解析扩张度的概念推广到了中山闭包 cl。

定义 2.11.（参见 [Eps05]）设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，cl 是定义在 R-模上的中山闭包。若 N 的任一极小约化的任一极小生成集的基数都相同，则称 N 具有 cl-扩张度。

3. cl-PREREDUCTIONS

对于任意中山闭包以及任意子模 $N \subseteq M$，我们都可以明确定义出 M 的一组子模，使得其闭包严格包含于 N 的闭包中。正如 Kemp、Ratliff 和 Shah 将理想的整闭包 I 中关于 R 的这类集合记作 I′(I) 一样，我们将在其下标中加入闭包运算 cl，并加入模对 $(N, M) \in \mathcal{P}$，将其记作

$$\mathbf{I}'_{\mathrm{cl}}(N, M) := \{L \subseteq N \mid L \text{ is not a cl-reduction of } N\}.$$

注意，对于任意 $L \subseteq N$， $L \notin \mathbf{I}'_{\mathrm{cl}}(N, M)$ 当且仅当 L 是 M 中 N 的一个 cl-约化。如果 $M = R$，我们将省略 R，并记 $\mathbf{I}'_{\mathrm{cl}}(I, R) = \mathbf{I}'_{\mathrm{cl}}(I)$。

$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 可能为空。例如，若 $N=(0)\subseteq M$，则 (0) 是自身的一个 cl-约化，且不含真子模，因此 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}((0)\ M)=\emptyset$。在 [KRS20 的注记 3.5 中，1], Kemp、Ratliff 和 Shah 指出，$\mathrm{I}'(I)$ 非空当且仅当 I 不是幂零理想。然而，与环中理想的整闭包情形不同，当 I 是幂零理想时，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(I)$ 也可能非空。例如:

例 3.1. 令 $R=k[[x,y]]/(x^2y^2)$ 和 $I=(xy)$。注意，(xy) 是 R 的幂零根，也是一个幂零理想。注意，$(0)^{\mathrm{mbf}}=((0):\mathfrak{m})=(0)$，并且

$$(xy)^{\mathrm{mbf}}=(\mathfrak{m}(xy):\mathfrak{m})=(x^2y,xy^2):(x,y)=(xy).$$

我们看到，$\mathrm{I}'_{\mathrm{mbf}}(xy)\neq\emptyset$，尽管它是一个幂零理想。

序运算 ord，由 $\mathrm{ord}(I)=\mathfrak{m}^r$（若 $I\subseteq\mathfrak{m}^r$），但对于任意 $n>r$，$I\nsubseteq\mathfrak{m}^n$，以及 $\mathrm{ord}(I)=\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}^r$ 定义若对所有 $r\in\mathbb{N}$ 都有 $I\subseteq\mathfrak{m}^r$，如 [Vas14b] 中所述，它也是一个中山闭包，其中 $(0)\in\mathrm{I}'_{\mathrm{ord}}(xy)$ 在 R 中，如例 3.1 所示，因为 $\mathrm{ord}(xy)=\mathfrak{m}^2$，且 $(0)=\mathrm{ord}(0)$。

尽管我们在上文给出了存在幂零理想I 且 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(I)\neq\emptyset$的中山闭包运算示例，但紧闭包在某种意义上更类似于理想的整闭包，即当I 为幂零时，$\mathrm{I}'_{*}(I)=\emptyset$。

命题 3.2. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是特征为 $p>0$ 的诺特局部环，则对于任意幂零理想I，$\mathrm{I}'_{*}(I)=\emptyset$。

证明。记幂零根为 N。对于任意幂零理想 I，我们有 $(0)\subseteq I\subseteq N$。根据 [HH90，命题 4.1(i)], $(0)^*=N=I^*$。对于任意理想 $J\subseteq I$，我们有 $(0)\subseteq J\subseteq I$；因此显然，$I$ 没有满足 $J\subseteq I$ 和 $J^*\subsetneq I^*$ 的理想 J。□

由于模中元素的乘法并未定义，除非我们通过张量积扩展乘法；因此，我们通常不讨论 R-模的幂零子模。

根据上述例子和评论，我们看到，Kemp、Ratliff 和 Shah 在 [KRS20] 中针对 $\mathrm{I}'(I)$ 得到的性质，并非都能推广到一般的中山闭包 cl 下的 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。除了定义集合 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 外，我们还可以为一般的中山闭包运算 cl 定义 cl-预约化的概念。

定义 3.3. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。若 $L\subseteq N$,L 不是 N 的 cl-约化，并且对于所有满足 $L\subseteq K\subseteq N$ 的 K，K 是 N 的 cl-约化，则称 L 是 N 的 cl-预约化。

如果 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)\neq\emptyset$，则 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的极大元都是 cl-预约化。我们将 cl-预约化的集合记为 $\mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(N,M)$。注意，如果 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 是所有真包含于 N 中的理想所组成的集合，那么 N 没有 cl-约化。我们通常将 M 的这种子模 N 称为 cl-基本，因为它只有自身一个 cl-约化。

不同于 Kemp、Ratliff 和 Shah 在 [KRS20 中所采用的非幂零假设，对于我们的推广，命题 3.7], 要求 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 非空。

命题 3.4。设 $(R,\mathfrak{m})$ 为诺特局部环，且 cl 为 $\mathcal{P}$（有限生成 R-模的类）上的中山闭包。假设 $(N,M)\in\mathcal{P}$ 使得 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)\neq\emptyset$，则以下结论成立

(1) 假设 $K\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 且 $L\subseteq K$，则 $L\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。（2）令 $L\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。存在一个子模 $\mathfrak{A}\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，它在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 中是极大的，并且$\mathfrak{A}\supseteq L$。（3）假设 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 都是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 中的极大子模。则 $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2\notin\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，且$\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ 是 M 中 N 的 cl-约化。（4）如果 $L,K\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，则或者 $L+K\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，或者 $L+K$是 M 中 N 的 cl-约化。（5）如果 $L\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，则 $L+\mathfrak{m}N\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。（6）如果 $L\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，则 $L^{\mathrm{cl}}_M\cap N\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。（7）如果 $\mathfrak{A}$是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 中的极大子模，则 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M\cap N=\mathfrak{A}$。

证明。（1）如果 $K\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，那么 K不是 N 的 cl-约化。由于 $L\subseteq K$ 且 $L^{\mathrm{cl}}_M\subseteq K^{\mathrm{cl}}_M\subsetneq N^{\mathrm{cl}}_M$，因此 L在 M中也不是 N 的 cl-约化。

(2) 由于 $L\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 且 R 是诺特的，因此存在一个元素 $\mathfrak{A}\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，它在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 和 $\mathfrak{A}\supseteq L$ 中是极大的。

(3) 由于 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 和 $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2 \subseteq N$ 中都是极大的，因此 $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ 是 N 在 M 中的 cl-约化。

(4) 由于 $L,K \subseteq N$，因此 $L+K \subseteq N$。如果 $L+K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，则问题得以解决。如果 $L+K \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，那么根据定义，$L+K$ 是 M 中 N 的 cl-约化。

(5) 假设 $L+\mathfrak{m}N \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。因此，$L+\mathfrak{m}N$是 M 中 N 的 cl-约化。于是 $L \subseteq N \subseteq (L+\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M$。由于 cl 是一种中山闭包，$L^{\mathrm{cl}}_M = N^{\mathrm{cl}}_M$，且 L 是 M 中 N 的 cl-约化，这与我们的假设矛盾。因此 $L+\mathfrak{m}N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。

(6) 假设 $L^{\mathrm{cl}}_M \cap N \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。因此，$L^{\mathrm{cl}}_M \cap N$是 M 中 N 的 cl-约化。于是 $L^{\mathrm{cl}}_M \subseteq N^{\mathrm{cl}}_M = (L^{\mathrm{cl}}_M \cap N^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M \subseteq (L^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M = L^{\mathrm{cl}}_M$，且 L是 M 中 N 的 cl-约化，这与 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 矛盾。

(7) 由于 $(\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N) \subseteq (\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M) \subseteq (\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M$，我们有 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M = (\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M$。根据 (5)，我们知道 $\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。由于 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}+\mathfrak{m}N$且 $\mathfrak{A}$是极大的，因此 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N$，从而$\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M = (\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M$。根据 (6)，我们知道 $(\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M \cap N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，并且根据 $\mathfrak{A}$ 的极大性，我们有 $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M+(\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M)^{\mathrm{cl}}_M \cap N$。□

下　　述命题给出了 cl-预约化始终具有的一些良好性质　　.

命题 3.5。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 $\mathcal{P}$ 上的中山闭包。那么

(1) N 中任何不是 M 中 N 的 cl-约化的子模 $L \subseteq N$，都包含于 M 中 N 的一个 cl-预约化中。(2) 如果 M 中 N 的 cl-预约化是 $\mathfrak{A}$，那么 (a) $\mathfrak{m}N \subseteq \mathfrak{A}$。(b) $\mathfrak{A}$ 在 N 中是 cl-闭的，或者 $\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M \cap N = \mathfrak{A}$。证明。(1) 根据命题 3.4(2)，存在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的一个包含 L 的极大元 $\mathfrak{A}$。这样的 $\mathfrak{A}$ 必定是 cl-预约化，因为任何包含它的子模都必定是 M 中 N 的 cl-约化。(2) (a) 在命题 3.4(7) 的证明中，我们看到 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N$。这意味着 $\mathfrak{m}N \subseteq \mathfrak{A}$。(b) 我们还在命题 3.4(7) 的证明中看到 $\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M \cap N = (\mathfrak{A}+\mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}}_M \cap N = \mathfrak{A}$。

□

特别地，如果子模在 M 中是 cl-闭的，那么 cl-预约化也将是 cl-闭的。

推论 3.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 $\mathcal{P}$ 上的中山闭包。对于每个 cl-预约化 $\mathfrak{A}$of N^{cl}_M, $\mathfrak{m}N_{\mathrm{cl}M} \subseteq \mathfrak{A}$和 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M$。

证明. 注意，$\mathfrak{A}$ 也是 $N_{\mathrm{cl}M}$ 的 cl-预约化，因为 $\mathfrak{A} \in N_{\mathrm{cl}M}$，并且每个满足 $\mathfrak{A} \subseteq L \subseteq N$,$L$ 的子模 L 都是 N 的 cl-预约化，因此也是 N^{cl}_M 的 cl-约化。由命题 3.5(2a)，$\mathfrak{m}N^{\mathrm{cl}}_M \subseteq \mathfrak{A}$；由命题 3.5(2b)，$\mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}}_M \cap N^{\mathrm{cl}}_M = \mathfrak{A}$。□

命题 3.7. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 R 的模上的中山闭包。设 $K \subseteq N \subseteq M$ 是 R 的子模，满足 K 是 M 中 N 的 cl- 约化。那么

(1) $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M) \subseteq \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。（2）对于每个 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，$L \cap K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$。（3）对于 $\mathfrak{A}$of $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$ 的每个极大元，都存在 $\mathfrak{B}$of $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的一个极大元，使得 $\mathfrak{B} \cap K = \mathfrak{A}$。

证明。（1）设 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$。由于 $K \subseteq N$，因此 $L \subseteq K \subseteq N$and $L^{\mathrm{cl}}_M \subsetneq K^{\mathrm{cl}}_M \subseteq N_{\mathrm{cl}M}$。由于 L不是 K 的 cl-约化，因此它不可能是更大的模 N 的 cl-约化。于是 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。

（2）若 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，则 $L \subseteq N$and L 不是 N 的 cl-约化。注意 $L \cap K \subseteq K$。要证明$L \cap K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$，只需证明 $L \cap K$ 不是 K 的 cl-约化。假设 $L \cap K$ 是 K 的 cl-约化。则 $(L \cap K)^{\mathrm{cl}}_M = K^{\mathrm{cl}}_M$。注意 $(L \cap K)^{\mathrm{cl}}_M \subseteq L^{\mathrm{cl}}_M \cap K^{\mathrm{cl}}_M$。由于 K 是N 的 cl-约化，因此 $N^{\mathrm{cl}}_M = K^{\mathrm{cl}}_M \subseteq L^{\mathrm{cl}}_M \subseteq N_{\mathrm{cl}M}$，这与 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 矛盾。因此，$L \cap K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$。

(3) 设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$ 的一个极大元。由 (1)，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M) \subseteq \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。因此 $\mathfrak{A} \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$，且必存在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的一个极大元 $\mathfrak{B} \in$，使得 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$。由 (2)，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$。由于$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \cap K$ 且 $\mathfrak{A}$ 是极大元，我们得到 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cap K$。

□

推论 3.8。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，cl 是定义在 $\mathcal{P}$ 上的一个中山闭包，其中包含有限 R-模对。设 $L\subseteq N$ 是 M 的子模，且 L 是 N 在 M 中的一个 cl- 约化。若 $\mathfrak{A}$ 是 L 的一个 cl- 预约化，则存在 N 的一个 cl- 预约化 $\mathfrak{B}$，使得 $\mathfrak{B}\cap L=\mathfrak{A}$。

证明。由命题 3.7(3)以及 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的极大元是 N 的 cl-预约化（对任意子模 $N\subseteq M$）这一事实可直接得出。□

命题 3.9。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 R 上的模的中山闭包。若 $\mathfrak{A}$ 是 M 中 N 的 cl-预约化，且 $\mathfrak{A}\subseteq K\subseteq N$，则 $\mathfrak{A}$ 是 M 中 K 的 cl-预约化。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是 M 中 N 的 cl-预约化，且 $\mathfrak{A}\subseteq K\subseteq N$，因此 K 是 M 中 N 的 cl-约化。此外，$\mathfrak{A}\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。由命题 3.7(2)，$\mathfrak{A}\cap K=\mathfrak{A}\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$。

假设 $\mathfrak{A}$不是 M中 K的 cl-预约化。那么存在一个极大元 $\mathfrak{B}\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(K,M)$，满足$\mathfrak{A}\subsetneq\mathfrak{B}$，且 $\mathfrak{B}$ 是 M 中 K 的 cl-预约化。由命题 3.7(3)，并且由于对于任意模 N，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的极大元都是 M中 N的 cl-预约化，因此存在一个 N的 cl-预约化 $\mathfrak{C}$，使得$\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{C}\cap K=\mathfrak{B}\supsetneq\mathfrak{A}$。这与 $\mathfrak{A}$是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 中的极大元矛盾。因此，$\mathfrak{A}$是 M中 K的 cl-预约化。□

对于没有循环 cl-预约化的子模，我们得到如下结果，这与 KRS20, Proposition3.13] 中关于没有主预约简的理想的结果类似。

命题 3.10. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 R 上的模的中山闭包。设 $N\subseteq M$ 为一个子模。那么 $N=\cup\{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}$是 $N\}$的 cl-预约化，当且仅当 N在 M中没有循环 cl-约化。

证明。注意，$N=\cup\{xR\mid x\in N\}$作为集合。注意，如果 N没有循环 cl-约简，那么对于任意 $x\in N$，$xR\in\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N)$，且存在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N)$ 的一个极大元 $\mathfrak{a}_x$，其中包含 xR。由于

$$N=\cup\{xR\mid x\in N\}\subseteq\cup\{\mathfrak{a}_x\mid x\in N\}=\cup\{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}\text{ a cl-prereduction of }N\}\subseteq N$$

我们看到，如果 N 在 M中没有循环 cl-约简，那么 $N=\cup\{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}$ 是 N$\}$ 的一个 cl-预约化。

现在假设 N 有一个循环 cl-约化 xR。那么对于 M 的任意子模 L，若 $xR\subseteq L\subseteq N$，L 就是 N的一个 cl-约化。因此，N 的任何 cl-预约化都不包含 xR，因此

$$\cup\{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{a}\text{ a cl-prereduction of }N\}\subsetneq N.$$

□

数值半群环提供了很好的例子来源，在这些例子中，我们可以轻松地为各种闭包展示 cl-预约化。

例 3.11。设 $R=k[[x^2,x^5]]$，$\mathfrak{m}=(x^2,\ x^5)$，且 k是任意特征的域。我们可以求出 R的一些非零非单位理想的$\mathfrak{m}$bf-闭包。$(x^2\ x^5)_R^{\mathfrak{m}bf}=(x^2\ x^5)=\mathfrak{m}$.

对于 $n\neq3$,

$$(x^n)_R^{\mathfrak{m}bf}=((x^{n+2},x^{n+5}):_R(x^2,x^5))=(x^n,x^{n+3}).$$

对于 $n\geq4$,

$$(x^n,x^{n+1})_R^{\mathfrak{m}bf}=((x^{n+2},x^{n+3}):_R(x^2,x^5))=(x^n,x^{n+1}).$$

对于 $n=2$ 和 $n\geq4$,

$$(x^n,x^{n+3})_R^{\mathfrak{m}bf}=((x^{n+2},x^{n+5}):_R(x^2,x^5))=(x^n,x^{n+3}).$$

设 $I_n=(x^n,x^{n+1})$ 对于 $n\geq4$。则 $I_n^-=(x^n,x^{n+1})=I$和 $I_n^{\mathfrak{m}\mathrm{bf}}=I_n$。$(x^n,x^{n+3})$ 是 $\mathfrak{m}$bf-预约化的 I_n。(x^{n+1},x^{n+2}) 既是 I_n 的整预约化，也是 I_n的 $\mathfrak{m}$bf-预约化。♢

4. i-扩张与 i-后扩张

第二作者与 Epstein 和 R.G. 在 [ERV23b] 中定义了 cl-约化和 cl-核的对偶概念，即 i-扩张和 i-包，现陈述如下。

定义 4.1。 [ERV23b，定义 2.13]设 R 为诺特环， $\mathcal{M}$ 为一类 R-模，且 i 是定义在 $\mathcal{P}$ 个模对 (A,B) 上的内部算子，其中 $A \subseteq B$ 属于 $\mathcal{M}$。设 (A,B)、$(C,B) \in \mathcal{P}$。

(1) 若 $C_{\mathrm{i}}^{B} \subseteq A \subseteq C$，则称 C 是 B 中 A 的 i-扩张。(2) 若 $C_{\mathrm{i}}^{B} = C$，则称子模 $C \subseteq B$ 为 i-余基。(3) 若 C 是 B 中 A 的 i-扩张，且不存在满足 $D_{\mathrm{i}}^{B} = A_{\mathrm{i}}^{B}$ 的子模 $D \subseteq B$，则称 C 是 B 中 A 的极大 i-扩张。(4) 我们将 i-包定义为 $\text{i-hull}^{B}(A) = \sum\{C \mid C_{\mathrm{i}}^{B} \subseteq A \subseteq C$，且 $(C,B) \in \mathcal{P}\}$。

定义 4.2。设 $(R,\mathfrak{m})$ 为一个局部环，i 为阿廷 R-模上的一个内部运算。若对于任意阿廷 R-模 $A \subseteq C \subseteq B$，当 $(A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^{B} \subseteq A$ 时，有 $A_{\mathrm{i}}^{B} = C_{\mathrm{i}}^{B}$，则称 i 为一个中山内算子。

在以下情况下，子模 A of B 存在极大 i-扩张：若 $(R,\mathfrak{m})$ 是完备局部环， $\mathcal{M}$ 是阿廷 R-模的类，且 i 是一个中山内算子 [ERV23a，命题 6.4]；或者当 R 是一个结合环，并且存在 A 的一个 i-扩张 C，使得 B/C 是诺特 [ERV23a，命题 6.5]。当 A 在 B 中存在极大 i-扩张时，则

$$\text{i-hull}^{B}(A) = \sum\{C \mid C \text{ a maximal i-expansion of } A \text{ and } (C,B) \in \mathcal{P}\}.$$

现在我们将把重点转向内部运算 i。由于 Kemp、Ratliff 和 Shah 将理想的集合 $I'(I)$ 定义为包含于 I 中且不是 I 的（整）约化的理想，我们也可以对偶地定义集合

$$\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B) = \{A \subseteq C \subseteq B \mid C \text{ not an i-expansion of } A \text{ in } B\}.$$

定义 4.3. 我们称 C 是 B 中 A 的 i-后扩张，如果 $A \subseteq C \subseteq B$， C 不是 B 中 A 的 i-扩张，并且对于所有满足 $A \subseteq D \subseteq C \subseteq B$ 的子模 D， D 都是 B 中 A 的 i-扩张。

注意，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(N,M)$ 的极大元是 cl-预约化，而 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 的极小元是 i-后扩张。$\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 满足以下性质：

命题 4.4. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模。设 i 是 $\mathcal{P}$ 上的中山内算子。设 $A \subseteq B$ 是 R-模，并且 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B) \neq \emptyset$。则有以下结论：

(1) 假设 $D \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，且 (D,C) 是 B 的子模。则 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。(2) 设 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。则存在一个元素 $\mathfrak{A} \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，它在 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 中是极小的，且满足 $\mathfrak{A} \subseteq C$。(3) 假设 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_1$ 都是 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 中的极小子模。则 $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 \notin \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，并且 $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ 是 B 中 A 的 i-扩张。(4) 若 C， $D \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则要么 $C \cap D \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，要么 $C \cap D$ 是 B 中 A 的 i-扩张。(5) 若 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则 $(A :_C \mathfrak{m}) \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。(6) 若 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则 $C_{\mathrm{i}}^{B} + A \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。(7) 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 中的极小元，则对于任意 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，都有 $(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^{B} \cap (A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^{B})_{\mathrm{i}}^{B} + A = \mathfrak{A}$。

证明。(1) 若 $D \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则 D 不是 A 的 i-扩张。由于 $D \subseteq C$ 且 $D_B^{\mathrm{i}} \subseteq C_B^{\mathrm{i}} \subsetneq A_B^{\mathrm{i}}$，因此 D 在 B 中也不是 A 的 i- 扩张。

(2) 由于 $C \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 且 R 是阿廷的，因此存在一个元素 $\mathfrak{A} \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，它在 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 中是极小的，并且 $\mathfrak{A} \subseteq C$。

(3) 由于 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 在 $\mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$ 中都是极小的，且 $A \subseteq \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subseteq B$，因此 $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ 是 B 中 A 的 i-扩张。

(4) 由于 $A \subseteq C, D \subseteq B$，因此 $A \subseteq C \cap D \subseteq B$。若 $C \cap D \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则结论成立。若 $C \cap D \notin \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$，则根据定义，$C \cap D$ 是 B 中 A 的 i-扩张。

(5) 假设 $(A :_C \mathfrak{m}) \notin \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。因此 $(A :_C \mathfrak{m})$ 是 B 中 A 的 i-扩张。接着

$$(A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^{B} \subseteq A \subseteq (A :_C \mathfrak{m}).$$

由于 i 是中山内部算子， $A_{\mathrm{i}}^{B} = C_{\mathrm{i}}^{B}$且 C 是 B 中 A 的 i-扩张，这与我们的假设矛盾。因此，$(A :_C \mathfrak{m}) \in \mathbf{C}'_{\mathrm{i}}(A,B)$。

(6) 假设 $C_{\mathrm{i}}^B + A \notin \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A,B)$。那么， $C_{\mathrm{i}}^B + A$ 是 B 中 A 的 i-扩张，并且 $(C_{\mathrm{i}}^B + A)_{\mathrm{i}}^B = A_{\mathrm{i}}^B$。于是 $C_{\mathrm{i}}^B \subseteq (C_{\mathrm{i}}^B + A)_{\mathrm{i}}^B = A_{\mathrm{i}}^B \subseteq C_{\mathrm{i}}^B$。这是因为 i 是内拓且保序的，并且$C_{\mathrm{i}}^B \subseteq C_{\mathrm{i}}^B + A$ 且 $A \subseteq C$。因此， C 是 B 中 A 的 i-扩张，这与 $C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$矛盾。

(7) 由于 $(\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B \subseteq \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap (A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^B \subseteq \mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m})$，我们有

$$((\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B \subseteq (\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap (A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B \subseteq (\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B.$$

因此 $(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap (A :_C \mathfrak{m})_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B = (\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B$。由 (5)，$(A :_C \mathfrak{m}) \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$；由 (4)， $\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}) \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。由于 $\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{A}$且 $\mathfrak{A}$ 是极小的， $\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}) = \mathfrak{A}$ 且 $(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap ((A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B = (\mathfrak{A} \cap (A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B = \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B$。由 (6)，$(\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap ((A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B + A \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。因此，根据 $\mathfrak{A}$ 的极小性，

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap ((A :_C \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B)_{\mathrm{i}}^B + A.$$

□

命题 4.5。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特环，且 $\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模。设 i 是 $\mathcal{P}$ 上的中山内算子。则

(1) B 中任何不是 A 的 i-扩张的子模 $C \subseteq B$，都包含 B 中 A 的一个 i-后扩张。(2) 如果 B 中 A 的一个 i- 后扩张是 $\mathfrak{A}$，那么 (a) $(A :_B \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$。(b) B 中的 $\mathfrak{A}$ 是 i- 开，或者 $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A = \mathfrak{A}$。

证明。(1) 根据命题 4.4(2)，存在 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$ 的某个极小元 $\mathfrak{A}$，使得 $\mathfrak{A} \subseteq C$。这样的 $\mathfrak{A}$ 必定是一个 i-后扩张，因为它所包含的任何子模都必须是 B 中 A 的 i-扩张。

(1) 在命题 4.4(7) 的证明中，我们看到 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cap (A :_B \mathfrak{m})$。这意味着 $(A :_B \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$。(2) 我们还在命题 4.4(7) 的证明中看到 $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A = (\mathfrak{A} \cap (A :_B \mathfrak{m}))_{\mathrm{i}}^B + A = \mathfrak{A}$。

□

推论 4.6. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是诺特环， $\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模，且 i 是 R 的子模上的中山内算子。对于 B 中 A 的 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$ 的任意 i- 后扩张 $\mathfrak{A}$，$(A:_C \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B$。

证明. 注意到 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$ 的一个 i-后扩张，因为 $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$，且满足 $C \subseteq D \subseteq \mathfrak{A}$、 D 的每个子模 D 都是 C 的一个 i-后扩张，因此是 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$ 的一个 i-扩张。根据命题 4.5(2a)，$(A :_C \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$；根据命题 4.5(2b)， $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B = \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A = \mathfrak{A}$。□

命题 4.7. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是诺特局部环，且 i 是 R 的模上的中山内算子。设 $A \subseteq C \subseteq B$ 是 R 的子模，满足 C 是 B 中 A 的一个 i-扩张。那么

(1) $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B) \subseteq \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。（2）对于每个 $D \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$， $D + C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$。（3）对于 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$ 的每个极小元 $\mathfrak{A}$，存在 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$ 的一个极小元 $\mathfrak{B}$，使得$\mathfrak{A} + C = \mathfrak{B}$。

证明。（1）设 $D \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$。由于 $A \subseteq C$，因此 $A \subseteq C \subseteq D$ 且 $A_{\mathrm{i}}^B \subseteq \mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B \subsetneq D_{\mathrm{i}}^B$。由于 D 不是 C 的 i-扩张，所以它不可能是较小的模 A 的 i-扩张。因此 $C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。

（1）如果 $D \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$，那么 $A \subseteq D$，并且 D 不是 A 的 i-扩张。注意， $D \subseteq D + C$。要证明$D + C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$，只需证明 $D + C$ 不是 C 的 i-扩张。假设 $D + C$ 是 C 的 i-扩张。则 $(D + C)_{\mathrm{i}}^B = \mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$。注意，$(D + C)_{\mathrm{i}}^B \subseteq D_{\mathrm{i}}^B + \mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B$。由于 C 是 A 的 i-扩张，$A_{\mathrm{i}}^B = \mathsf{C}_{\mathrm{i}}^B \subseteq D_{\mathrm{i}}^B \subseteq A_{\mathrm{i}}^B$，这与 $D \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$ 矛盾。因此 $D + C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$。

(1) 设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$ 的一个极小元。由 (1)，$\mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B) \subseteq \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。因此 $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$，且必存在一个极小元 $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$，使得 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$。由 (2)， $\mathfrak{A} + C \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$。由于 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} + C$ 且 $\mathfrak{B}$ 是极小的，我们得到 $\mathfrak{A} + C = \mathfrak{B}$。

□

命题 4.8. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，i 是作用于 R 的模上的中山内部算子。若 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B 中的一个 i-后扩张，且 $A \subseteq C \subseteq \mathfrak{A}$，则 $\mathfrak{A}$ 是 C 在 B 中的一个 i-后扩张。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B 中的一个 i-后扩张，且 $A \subseteq C \subseteq \mathfrak{A}$，因此 C 是 A 在 B 中的一个 i-扩张。此外，$\mathfrak{A} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。由命题 4.7(2)， $\mathfrak{A} + C = \mathfrak{A} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(A, B)$。

假设 $\mathfrak{A}$ 不是 B中的 C 的 i-后扩张。那么存在一个极小的 $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}_{\mathrm{i}}'(C, B)$，满足 $\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{A}$

且 $\mathfrak{B}$ 是 B中的 C 的 i-后扩张。于是由命题 4.7(3)，并且由于 $\mathsf{C}_{\mathsf{i}}'(A,B)$ 的极小元是 B中的 A 的 i-后扩张，因此存在 B 中的 A 的一个 i-后扩张 $\mathfrak{C}$，使得 $\mathfrak{C}\subseteq\mathfrak{C}+C=\mathfrak{B}\subsetneq\mathfrak{A}$。这与 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathsf{C}_{\mathsf{i}}'(A,B)$ 中的极小性矛盾。因此，$\mathfrak{A}$ 是 B中的 C 的 i-后扩张。□

例 4.9. 设 $R=k[[x^2,x^5]]$, $\mathfrak{m}=(x^2,x^5)$ 和 k 是任意特征的域。我们可以为 R 的一些非零非含幺理想找到 $\mathfrak{mbe}$-内部算子。

$$(x^2,x^5)^R_{\mathfrak{m}be}=(x^2,x^5)=\mathfrak{m}$$
$$(x^n)^R_{\mathfrak{mbe}}=(x^{n+2},x^{n+5})$$
$$(x^n,x^{n+1})^R_{\mathfrak{m}be}=\begin{cases}(x^4,x^7) & \text{if } n=4\\ (x^6,x^7) & \text{if } n=5\\ (x^n,x^{n+1}) & \text{if } n\geq 6\end{cases}$$
$$(x^n,x^{n+3})^R_{\mathfrak{m}be}=\begin{cases}(x^4,x^7) & \text{if } n=4\\ (x^7,x^8) & \text{if } n=5\\ (x^n,x^{n+3}) & \text{if } n\geq 6\end{cases}$$

设 $I=(x^4,x^7)$。那么 (x^4,x^5) 是 I 的一个 $\mathfrak{mbe}$-扩张，因为 $(x^4,x^5)^R_{\mathfrak{mbe}}=I^R_{\mathfrak{mbe}}=I$ 且 $I\subseteq(x^4,x^5)$。由于 $(x^4)^R_{\mathfrak{mbe}}=(x^6,x^9)\subseteq I^R_{\mathfrak{mbe}}=I$ 且 $I^R_{\mathfrak{mbe}}\not\subseteq(x^4)$，$I$ 是 (x^4) 的一个 $\mathfrak{mbe}$-后扩张。♢

5. Comparing cl-prereductions and i-postexpansions for different closures and interiors

闭包运算和内部运算有很多种，因此了解闭包运算何时可比较、内部运算何时可比较会很有益处。了解它们何时可比较，有助于我们比较 cl-约化、cl-预约化、i-扩张和 i-后扩张。

定义 5.1. 设 p_1 和 p_2 是定义在 R中 $\mathcal{P}$ 模对的集合上的对运算。我们称$p_1\leq p_2$，如果对于所有 $(N,M)\in\mathcal{P}$，都有 $p_1(N,M)\subseteq p_2(N,M)$。如果 $p_1\leq p_2$或 $p_2\leq p_1$，则称 p_1和 p_2可比较。

注 5.2. 设 cl_1 和 cl_2 是定义在 R的子模上的闭包运算。如果对于所有 $(N,M)\in\mathcal{P}$，都有$N^{\mathsf{cl}_1}_M\subseteq N^{\mathsf{cl}_2}_M$，则称 $\mathsf{cl}_1\leq\mathsf{cl}_2$。因此，如果 $\mathsf{cl}_1\leq\mathsf{cl}_2$或 $\mathsf{cl}_2\leq\mathsf{cl}_1$，则称 cl_1和 cl_2可比较。

设 i_1 和 i_2 是定义在 R的子模上的内部运算。如果对于所有 $(A,B)\in\mathcal{P}$，都有 $A^B_{\mathsf{i}_1}\subseteq A^B_{\mathsf{i}_2}$，则称 $\mathsf{i}_1\leq\mathsf{i}_2$。因此，如果 $\mathsf{i}_1\leq\mathsf{i}_2$ 或 $\mathsf{i}_2\leq\mathsf{i}_1$，则称 i_1 和 i_2 可比较。♢

我们首先探讨 $i=1$ 上 cl_i-预约化之间的关系，其中 $i=1$ 为 2，且 $\mathsf{cl}_1\leq\mathsf{cl}_2$。

命题 5.3. 设 R 为诺特环。

(1) 设 $\mathcal{M}$ 为有限生成 R-模的范畴，$\mathcal{P}$ 为由对 (N,M) 组成的类，其中 $N\subseteq M$ 属于 $\mathcal{M}$。假设 $\mathsf{cl}_1\leq\mathsf{cl}_2$ 是中山闭包运算。那么我们有 (a) $(N^{\mathsf{cl}_1}_M)^{\mathsf{cl}_2}_M=N^{\mathsf{cl}_2}_M=(N^{\mathsf{cl}_2}_M)^{\mathsf{cl}_1}_M$，以及 (b) $N_{\mathsf{cl}_M{}^1}$ 是 $N^{\mathsf{cl}_2}_M$ 的 cl_2-约化。(2) 设 $\mathcal{M}$ 为阿廷 R-模的范畴，$\mathcal{P}$ 为由对 (C,B) 组成的类，其中 $C\subseteq B$ 属于 $\mathcal{M}$。假设 $\mathsf{i}_1\leq\mathsf{i}_2$ 是中山内部运算。那么我们有 (a) $(A^B_{\mathsf{i}_1})^B_{\mathsf{i}_2}=A^B_{\mathsf{i}_1}=(A^B_{\mathsf{i}_2})^B_{\mathsf{i}_1}$，以及 (b) $A^B_{\mathsf{i}_2}$ 是 $A^B_{\mathsf{i}_1}$ 的 i_1-扩张。

证明。（1a）由于 $N\subseteq N^{\mathsf{cl}_1}_M\subseteq N^{\mathsf{cl}_2}_M$，我们有

$$N^{\mathsf{cl}_2}_M\subseteq(N^{\mathsf{cl}_1}_M)^{\mathsf{cl}_2}_M\subseteq(N^{\mathsf{cl}_2}_M)^{\mathsf{cl}_2}_M=N^{\mathsf{cl}_2}_M$$

这蕴含 $(N^{\mathsf{cl}_1}_M)^{\mathsf{cl}_2}_M=N^{\mathsf{cl}_2}_M$。还请注意，

$$N^{\mathsf{cl}_2}_M\subseteq(N^{\mathsf{cl}_2}_M)^{\mathsf{cl}_1}_M\subseteq(N^{\mathsf{cl}_2}_M)^{\mathsf{cl}_2}_M=N^{\mathsf{cl}_2}_M$$

得到 $N^{\mathsf{cl}_2}_M=(N_{\mathsf{cl}_M{}^2})^{\mathsf{cl}_1}_M$。

(1b) 由 (1a) 可知 $(N_{\mathsf{cl}_M{}^1})^{\mathsf{cl}_2}_M=N_{\mathsf{cl}_M{}^2}$，根据定义可得，$N^{\mathsf{cl}_1}_M$ 是 $N_{\mathsf{cl}_M{}^2}$ 的 cl_2-约化。(2a) 由于 $A^B_{\mathsf{i}_1}\subseteq A^B_{\mathsf{i}_2}\subseteq A$，我们有

$$A^B_{\mathsf{i}_1}=(A^B_{\mathsf{i}_1})^B_{\mathsf{i}_1}\subseteq(A^B_{\mathsf{i}_2})^B_{\mathsf{i}_1}\subseteq A^B_{\mathsf{i}_1}$$

这意味着 $A^B_{\mathrm{i}_1} = (A^B_{\mathrm{i}_2})^B_{\mathrm{i}_1}$。另外，注意到

$$A^B_{\mathrm{i}_1} = (A^B_{\mathrm{i}_1})^B_{\mathrm{i}_1} \subseteq (A^B_{\mathrm{i}_1})^B_{\mathrm{i}_2} \subseteq A^B_{\mathrm{i}_1}$$

推出 $(A^B_{\mathrm{i}_1})^B_{\mathrm{i}_2} = A^B_{\mathrm{i}_1}$. (

2b) By (2a), we 有 $A^B_{\mathrm{i}_1} = (A^B_{\mathrm{i}_2})^B_{\mathrm{i}_1}$，根据定义可得，$A^B_{\mathrm{i}_2}$ 是 B 中 $A^B_{\mathrm{i}_1}$ 的 i_1-扩张。□

命题 5.4. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $\mathrm{cl}_1 \leq \mathrm{cl}_2$ 是 $\mathcal{P}$ 上的中山闭包 .

(1) 对所有 $(N, M) \in \mathcal{P}$，$\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M) \subseteq \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$。(2) 若 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M) \neq \emptyset$，则 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M) \neq \emptyset$。(3) 假设 $K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$。那么，$K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$ 当且仅当 K 不是 M 中 N 的 cl_2-约化。(4) 若 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$，则 $L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$ 当且仅当 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。(5) 若 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$，则 $L + \mathfrak{m}N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$ 当且仅当 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。

证明。(1) 假设 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。那么，$L$不是 M 中 N 的 cl_2-约化。因此，$L \subseteq N$ 和 $L^{\mathrm{cl}_2}_M \subsetneq N^{\mathrm{cl}_2}_M$。如果 L 是 M 中 N 的 cl_1-约化，那么 $N_{\mathrm{cl}_M{}^1} = L^{\mathrm{cl}_1}_M \subseteq L^{\mathrm{cl}_2}_M$，这意味着 $N_{\mathrm{cl}_M{}^2} = (N_{\mathrm{cl}_M{}^1})^{\mathrm{cl}_2}_M \subseteq L^{\mathrm{cl}_2}_M \subsetneq N^{\mathrm{cl}_2}_M$，与假设矛盾。因此，$L$不是 M 中 N 的 cl_1-约化，所以 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$。

(2) 由于 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M) \neq \emptyset$ 且 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M) \subseteq \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$，因此 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M) \neq \emptyset$。

(3) 如果 $K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$，那么 $K^{\mathrm{cl}_1}_M \subsetneq N_{\mathrm{cl}_M{}^1}$。由于 $K^{\mathrm{cl}_2}_M = (K^{\mathrm{cl}_1}_M)^{\mathrm{cl}_2}_M \subseteq (N_{\mathrm{cl}_M{}^1})^{\mathrm{cl}_2}_M = N^{\mathrm{cl}_2}_M$，那么 $K \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$ 当且仅当 $K^{\mathrm{cl}_2}_M \neq N^{\mathrm{cl}_2}_M$。

(4) 假设 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$，那么由于 $L^{\mathrm{cl}_1}_M \subseteq L^{\mathrm{cl}_2}_M$，且由命题 3.4(6) 可知 $L^{\mathrm{cl}_2}_M \cap N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$，因此根据命题 5.4(1)，$L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。
假设 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M) \backslash \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。那么 $L^{\mathrm{cl}_1}_M \subsetneq N^{\mathrm{cl}_1}_M \subseteq N^{\mathrm{cl}_2}_M$。由于 $L^{\mathrm{cl}_2}_M = (L^{\mathrm{cl}_1}_M)^{\mathrm{cl}_2}_M = N^{\mathrm{cl}_2}_M$，我们看到$L^{\mathrm{cl}_1}_M$是 M和 $L \subseteq L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N \subseteq L^{\mathrm{cl}_2}_M = N^{\mathrm{cl}_2}_M$中的 N的 cl_2-约化。将 cl_2 应用于这一链，我们看到$L^{\mathrm{cl}_2}_M \subseteq (L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N)^{\mathrm{cl}_2}_M \subseteq (L^{\mathrm{cl}_2}_M)^{\mathrm{cl}_2}_M = L^{\mathrm{cl}_2}_M$。因此，$L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N$是 M和$L^{\mathrm{cl}_1}_M \cap N \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$中的 N的 cl_2-约化。

(5) 若 $L \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$，则由命题 3.4(5)可得 $L + \mathfrak{m}N \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。假设 $L \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。那么 $L + \mathfrak{m}N$要么是 N的 cl_2-约化，要么是 $N^{\mathrm{cl}_2}_M = (L + \mathfrak{m}N)^{\mathrm{cl}_2}_M$。由于 cl_2 是中山闭包，因此$N^{\mathrm{cl}_2}_M = L^{\mathrm{cl}_2}_M$。于是 $L \notin \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$。□

命题 5.5 。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是诺特局部环，且 $\mathrm{cl}_1 \leq$ 和 cl_2 是定义在 $\mathcal{P}$上的中山闭包 .

(1) 对于 N 在 M中的每个 cl_2-预约化 $\mathfrak{A}$，都存在一个 cl_1-预约化 $\mathfrak{B}$，使得 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$。(2) 若 $N = N^{\mathrm{cl}_2}_M$ 且 $\mathfrak{A}$是 N在 M中的 cl_2-预约化，则 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_1}_M = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M$。(3) 若 $N = N_{\mathrm{cl}_M{}^1}$，且 $\mathfrak{A}$既是 N在 M中的 cl_1-预约化，也是 cl_2-预约化，则 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_1}_M = \mathfrak{A}^{cl_2}_M \cap N$。(4) 假设 $\mathfrak{A}$ 是 N 在 M 中的 cl_1-预约化，且 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M$。那么 $\mathfrak{A}$ 是 N 在 M.

证明。(1) 由于 $\mathfrak{A}$ 是 N 在 M 中的 cl_2-预约化，因此它是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$ 的极大元。根据命题 5.4(1)，$\mathfrak{A} \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$。根据命题 3.4(2)，于是存在 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$ 的极大元 $\mathfrak{B} \in$，使得 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$。

(2) 根据推论 3.6，我们知道 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M$。由于 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M \subseteq \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M$，我们可以得出 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_1}_M = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M$。
(3) 根据推论 3.6，我们知道 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_1}_M$。根据命题 3.5(2b)，$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{cl}_2}_M \cap N$。结合这些等式即可得到结论。

(4) 假设 $\mathfrak{A}$ 不是 N 在 M 中的 cl_2-预约化。那么存在一个 $\mathfrak{B} \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M)$，使得 $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$。由于 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_2}(N, M) \subseteq \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$，因此 $\mathfrak{B} \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$。由于 $\mathfrak{A}$ 是 N 在 M 中的 cl_1-预约化，并且 $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$,$\mathfrak{B}$ 必须是 N 在 M 中的 cl_1-约化，这与 $\mathfrak{B} \in \mathrm{I}'_{\mathrm{cl}_1}(N, M)$ 矛盾。因此，$\mathfrak{A}$ 必须是 N 在 M 中的 cl_2-预约化。□

现在我们转而比较 i_j-后扩张，其中 $j = 1$、2 和 $\mathrm{i}_1 \leq \mathrm{i}_2$。

命题 5.6. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特环，$\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模，且 $\mathrm{i}_1 \leq \mathrm{i}_2$ 是 $\mathcal{P}$ 上的中山内算子。

(1) 对所有 $(A, B) \in \mathcal{P}$，$\mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B) \subseteq \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_2}(A, B)$。(2) 若 $\mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B) \neq \emptyset$，则 $\mathrm{C}'_{\mathrm{i}_2}(A, B) \neq \emptyset$。(3) 假设 $C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_2}(A, B)$。那么，$C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B)$ 当且仅当 C 不是 B 中 A 的 i_1-扩张。(4) 若 $C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_2}(A, B)$，则 $C^B_{\mathrm{i}_2} + A \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B)$ 当且仅当 $C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B)$。(5) 若 $C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_2}(A, B)$，则 $(A :_C \mathfrak{m}) \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B)$ 当且仅当 $C \in \mathrm{C}'_{\mathrm{i}_1}(A, B)$。

证明。(1) 假设 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。那么， A 不是 B 中 C 的 $\mathfrak{i}_1$-扩张。因此 $A \subseteq C \subseteq B$ 和 $A^B_{\mathfrak{i}_1} \subsetneq C^B_{\mathfrak{i}_1}$。若 C 是 B 中 A 的 $\mathfrak{i}_2$-扩张，则 $A^B_{\mathfrak{i}_2} = C^B_{\mathfrak{i}_2} \supseteq C^B_{\mathfrak{i}_1}$，这意味着 $A^B_{\mathfrak{i}_1} = (A^B_{\mathfrak{i}_2})^B_{\mathfrak{i}_1} \supseteq (C^B_{\mathfrak{i}_2})^B_{\mathfrak{i}_1} \supsetneq (C^B_{\mathfrak{i}_1})^B_{\mathfrak{i}_1} = C^B_{\mathfrak{i}_1}$，这与假设矛盾。因此， C 不是 B 中 A 的 $\mathfrak{i}_2$-扩张，所以 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$。

(2) 由于 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B) \neq \emptyset$ 且 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B) \subseteq \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$，因此 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B) \neq \emptyset$。

(3) 若 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$，则 $A^B_{\mathfrak{i}_2} \subsetneq C^B_{\mathfrak{i}_2}$。由于 $A^B_{\mathfrak{i}_1} = (A^B_{\mathfrak{i}_2})^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq (C^B_{\mathfrak{i}_2})^B_{\mathfrak{i}_1} = C^B_{\mathfrak{i}_1}$，因此 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$ 当且仅当 $A^B_{\mathfrak{i}_1} \neq C^B_{\mathfrak{i}_1}$。

(4) 若 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$，则由于 $C^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq C^B_{\mathfrak{i}_2}$且根据命题 4.4(6)，$C^B_{\mathfrak{i}_1} + A \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。由命题 4.4(1)，我们可知 $C^B_{\mathfrak{i}_2} + A \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。设 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B) \backslash \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。则 $A^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq A^B_{\mathfrak{i}_2} \subsetneq C^B_{\mathfrak{i}_2}$。由于 $A^B_{\mathfrak{i}_1} = (C^B_{\mathfrak{i}_2})^B_{\mathfrak{i}_1} = C^B_{\mathfrak{i}_1}$，我们可知 $C^B_{\mathfrak{i}_2}$是 B 中 A 的 $\mathfrak{i}_1$-扩张，且 $A^B_{\mathfrak{i}_1} = C^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq C^B_{\mathfrak{i}_1} + A \subseteq C^B_{\mathfrak{i}_2} + A \subseteq C$。将 $\mathfrak{i}_1$ 应用于此链，我们可知 $A^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq C^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq (C^B_{\mathfrak{i}_2} + A)^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq C^B_{\mathfrak{i}_1}$。因此，$C^B_{\mathfrak{i}_2} + A$ 是 B 中 A 的 $\mathfrak{i}_1$-扩张，且 $C^B_{\mathfrak{i}_2} + A \notin \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。

(5) 如果 $C \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$，则根据命题 4.4(5)，$(A :_C \mathfrak{m}) \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。设 $C \notin \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。那么，$(A :_C \mathfrak{m})$ 要么是 A 在 B 中的 $\mathfrak{i}_1$-扩张，要么是 $A^B_{\mathfrak{i}_1} = (A :_C \mathfrak{m})^B_{\mathfrak{i}_1}$。由于 $\mathfrak{i}_1$ 是一个中山内算子，因此$A^B_{\mathfrak{i}_1} = C^B_{\mathfrak{i}_1}$。所以 $C \notin \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$。□

命题 5.7。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特环， $\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模，且 $\mathfrak{i}_1 \leq \mathfrak{i}_2$ 是 R 的子模上的中山内算子。则

(1) 对于 A 在 B中的每个 $\mathfrak{i}_1$-后扩张 $\mathfrak{A}$，存在一个满足 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 的 $\mathfrak{i}_2$-后扩张 $\mathfrak{B}$。(2) 如果 $A = A^B_{\mathfrak{i}_1}$ 且 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B中的 $\mathfrak{i}_1$-后扩张，则 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2}$。(3) 如果 $A = A^B_{\mathfrak{i}_2}$ 且 $\mathfrak{A}$ 既是 A 在 B中的 $\mathfrak{i}_1$-后扩张，也是 $\mathfrak{i}_2$-后扩张，则 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1} + A$。(4) 设 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B 中的 $\mathfrak{i}_2$-后扩张，且 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1}$。则 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B中的 $\mathfrak{i}_1$-后扩张。

证明。(1) 由于 $\mathfrak{A}$ 是 B 中 A 的 $\mathfrak{i}_1$-后扩张，因此它是 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$ 的极小元。由命题 5.6(1)， $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$。由命题 4.4(2)，于是存在 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$ 的一个极小元 $\mathfrak{B} \in$ ，且满足 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$。

(2) 由推论 4.6，我们知道 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1}$。由于 $\mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1} \subseteq \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2} \subseteq \mathfrak{A}$，我们可以得出结论 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_1} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2}$.

(3) 根据推论 4.6，我们知道 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2}$。根据命题 4.5(2b)， $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B_{\mathfrak{i}_2} + A$。结合这些等式即可得到结论。

(4) 假设 $\mathfrak{A}$ 不是 A 在 B中的 $\mathfrak{i}_1$-后扩张。那么存在一个 $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B)$，使得 $\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{A}$。由于 $\mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A,B) \subseteq \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$，因此 $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$。由于 $\mathfrak{A}$ 是 A 在 B 中的 $\mathfrak{i}_2$-后扩张，而 $\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 必须是 A 在 B 中的 $\mathfrak{i}_2$- 扩张，这与 $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A,B)$ 矛盾。因此， $\mathfrak{A}$ 必须是 A 在 B 中的 $\mathfrak{i}_1$- 后扩张。□

我们给出几个例子来说明上述命题。在第一个例子中，我们利用这样一个事实：理想的 $\mathfrak{m}$-基本满闭包总是包含于其整闭包中。在第二个例子中，我们利用这样一个事实：理想的紧闭包总是包含于其整闭包中。

例 5.8. 令 $R = k[[x^2, x^5]]$, $\mathfrak{m} = (x^2, x^5)$ 且 k为任意特征的域。考虑理想$I = (x^6, x^7)$。注意， $I^- = (x^6, x^7)$ 且 $I^{\mathrm{mbf}} = (\mathfrak{m}I :_R \mathfrak{m}) = (x^6, x^7)$。注意，$(x^6, x^9)$ 是 I 的整约化，但不是 I 的基本满约化，因为 $(x^6, x^9)^{\mathrm{mbf}} = (x^6, x^9)$。由于 $I/(x^6, x^9) \cong k$， 所以I是 (x^6, x^9) 的非基本满覆盖。现在由注 7.6 可知，(x^6, x^9) 是 I 的一个 $\mathfrak{m}$基本满预约化，但不是 I的整预约化。

然而，理想 (x^7, x^8) 既不是 I 的整约化，也不是基本满约化，而$I/(x^7, x^8) \cong k$意味着 I是一个非整覆盖，也是 (x^7, x^8) 的非基本满覆盖。再次利用注 7.6 可知，(x^7, x^8) 既是 I 的整预约化，也是 I的一个 $\mathfrak{m}$ 基本满预约化。

事实上，由于 R 中的整闭理想具有如下形式 $(x^n)k[[x]] \cap R$，因此 $(x^7\ x^8)$ 是唯一的 I 的整预约化。而 I 有多个基本满预约化。

这个例子也很好地说明了命题 3.10。 I 有主整约化（f），其中 $f = \sum_{n=6}^{\infty} a_n x^n$ 和 $a_6 \neq 0$，以及 $I \neq (x^7,\ x^8)$，后者是其整预约化的并集。而（f）不是 I 的基本满约化，因为（f）$^{\mathrm{mbf}} = (a_6x^6 + a_7x^7, x^9) \neq I$。因此 I 没有主基本满约化，并且显然可见 I 是其基本满预约化的并集。□

例5.9. 设 $R = k[[x, y, z]]/(x^2 - y^3 - z^6)$、 $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ 和 k是特征为 $p > 3$ 的域。 R的测试理想为 $\mathfrak{m}$。注意， $\mathfrak{m}^2$ 既是整闭的，也是紧闭的。(y^2, z^2) 是一个极小整

约化 $\mathfrak{m}$，但不是 $\mathfrak{m}^2$ 的极小 $*$-约化。这是因为 R 是一个 Gorenstein环，在这种情况下 $(y^2,z^2)^* = (y^2,z^2) : {}_R\,\mathfrak{m} = (xyz, y^2, z^2)$。$\mathfrak{m}^2$ 的一个极小 $*$-约化是 (y^2, yz, z^2)。由于

$$(y^2, yz, z^2)^* = ((y, z^2) \cap (y^2, z))^* = (y, z^2)^* \cap (y^2, z)^* = (xz, y, z^2) \cap (xy, y^2, z) = \mathfrak{m}^2$$

根据 [Vas14a，命题 2.4]。因此，尽管 (y^2,z^2) 是 $\mathfrak{m}^2$ 的整约化，$(y^2,z^2) \in \mathrm{I}'_*(\mathfrak{m}^2)$。注意，$(y^2,z^2)$ 不是 $\mathfrak{m}^2$ 的 $*$-预约化，因为根据 [Vra06，定理 2.2]，$(y^2,z^2) \subsetneq (y^2,z^2,xy,xz)^* = (y^2,z^2,xy,xz)$。事实上，我们将在下一节看到，$(y^2,z^2,xy,xz)$ 是 $\mathfrak{m}^2$ 的 $*$-预约化。$\mathfrak{m}^2$ 的一个整预约化例子是 $J = (xy, xz, y^3, yz, z^2)$；这是因为 $\mathfrak{m}^2/J \cong k$，并且对所有 $f \in \mathfrak{m}^2 \setminus J$, $J + (f) = \mathfrak{m}^2$，由此可知，根据命题 7.5，J 是一个整预约化。□

6. Duality

在本节中，我们将 [ERG12] 和 [ERV23b] 的工作扩展到 cl-预约化与 i-后扩张之间的对偶性。这也将有助于我们在第8节讨论预核和后包。

我们将使用 $^\vee$ 表示 Matlis 对偶运算 $\mathrm{Hom}_R(\quad, E)$。如果 $\mathcal{P}$ 是 Matlis 可对偶R-模的类，那么对于所有 $M \in \mathcal{P}$、$M^{\vee\vee} \cong M$。在本节中，R是一个极大理想为$\mathfrak{m}$、剩余域为 k的完备局部环，且 $E := E_R(k)$为内射包。

定义 6.1。 [ERV23b，定义 3。1] 设 R 为一个完备局部环。设 p 是 Matlis 可对偶 R-模 $\mathcal{P}$的某个对的类上的一个对运算。对于任意一对 R-模 $(A, B) \in \mathcal{P}^\vee$，令

$$\mathcal{P}^\vee := \{(A, B) \mid ((B/A)^\vee, B^\vee) \in \mathcal{P}\},$$

并定义 p 的对偶为

$$p^\smile(A, B) := \left(\frac{B^\vee}{p((B/A)^\vee, B^\vee)}\right)^\vee.$$

引理 6.2。 [ERV23b，引理 3.3] 设 R 为一个完备局部环，p 为定义在一类 R-模的对上的对运算 $\mathcal{P}$。对于任意 $(A, B) \in \mathcal{P}$,

$$\left(\frac{B}{p(A, B)}\right)^\vee = p^\smile((B/A)^\vee, B^\vee).$$

特别地，若 cl 是闭包运算，则 $((B/A)^\vee)^{B^\vee}{}_{\mathrm{cl}^\smile} = (B/A^{\mathrm{cl}}_B)^\vee$；若 i 是内运算，则 $((B/A)^\vee)^{\mathrm{i}^\smile}_{B^\vee} = (B/A^B_{\mathrm{i}})^\vee$。

定理 6.3。 [ERV23b，定理 6.2] 设 R 为一个诺特完备局部环。设 i 为定义在 $A \subseteq B$ 诺特或阿廷 R-模的对上的相对内部运算，并设 $\mathrm{cl} := \mathrm{i}^\smile$ 为其对偶闭包运算。在 A中的 B 的 i-扩张所成的偏序集与 B/A中的 $(^\vee)$ $B^\vee$的 cl-约化所成的偏序集之间，存在一个反序一一对应。在此对应下，C 在 B 中的 A 的一个 i-扩张映射为 $(B/C)^\vee$，即 $B^\vee$中的 $(B/A)^\vee$ 的一个 cl-约化

定理 6.4. 设 R 是一个诺特完备局部环。设 i 是作用于 R-模对 $A \subseteq B$ 上的相对内部运算，其中这些模是诺特模或阿廷模；设 $\mathrm{cl} := \mathrm{i}^\smile$ 是其对偶闭包运算。B 中 A 的 i-后扩张集合与 $B^\vee$中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-预约化集合之间存在一一对应。在此对应下，B 中 A 的 i-后扩张 C 映射到 $B^\vee$中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-预约化 $(B/C)^\vee$。

证明. B 中 A 的 C 是一个 i-后扩张，当且仅当 $A \subseteq C \subseteq B$ 且 $A^B_{\mathrm{i}} \subsetneq \mathrm{C}^B_{\mathrm{i}}$，并且对于满足 $A \subseteq D \subseteq C$ 的所有子模 D，都有 $A^B_{\mathrm{i}} = D^B_{\mathrm{i}}$。首先，根据 Matlis 对偶性的性质，$(B/C)^\vee \subseteq (B/A)^\vee \subseteq B^\vee$ 当且仅当 $A \subseteq C \subseteq B$。其次，$A^B_{\mathrm{i}} \subsetneq C^B_{\mathrm{i}}$ 成立当且仅当

$$\left(\frac{B^\vee}{((B/A)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee}}\right)^\vee \subsetneq \left(\frac{B^\vee}{((B/C)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee}}\right)^\vee.$$

由于所讨论的模 是 Matlis 可对偶的，且 $(B/C)^\vee \subseteq (B/A)^\vee$，当且仅当这种情况成立

$$((B/C)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee} \subsetneq ((B/A)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee}.$$

若对于所有满足 $A \subseteq D \subseteq C$ 的子模 D，我们都有 $A^B_{\mathrm{i}} = D^B_{\mathrm{i}}$，则根据定理 6.3，$D$ 是 B 中 A 的 i-扩张，因此映射到 $(B/D)^\vee$，即 $B^\vee$ 中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-约化，以及 $(B/C)^\vee \subseteq (B/D)^\vee \subseteq (B/A)^\vee$。

类似地，若对于所有满足 $(B/C)^\vee \subseteq (B/D)^\vee \subseteq (B/A)^\vee$ 的 $(B/D)^\vee$，我们都有 $((B/C)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee} = ((B/A)^\vee)^{\mathrm{cl}}_{B^\vee}$，则再次根据定理 6.3，可得 $A^B_{\mathrm{i}} = D^B_{\mathrm{i}}$。

因此，当且仅当 $(B/C)^\vee$ 是 $(B/A)^\vee$ 在 $B^\vee$中的 cl-预约化时，C 才是 A 在 B 中的 i-后扩张。 □

例 6.5。令 $R = k[[x^2, x^5]]$ 和 $E = kx \oplus kx^3 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} kx^{-i}$，其中 R在 E 上的作用由 R 的单项式上的下式给出

$$x^j x^{-i} = \begin{cases} 0 & \text{if } j-i = 0, 2 \text{ or } j-i \geq 4 \\ x^{j-i} & \text{if } j-i = 1, 3 \text{ or } j-i \leq -1 \end{cases}$$

Let

$$M = kx + kx^3 + \bigoplus_{i=1}^{n} kx^{-i},$$

$$N = kx + kx^3 + \bigoplus_{i=1}^{n} kx^{-i} + kx^{-(n+2)}, \text{ and}$$

$$K = kx + kx^3 + \bigoplus_{i=1}^{n} kx^{-i} + kx^{-(n+2)} + kx^{-(n+4)}.$$

那么，$\mathrm{Ann}_R(M) = (x^{n+4}, x^{n+5})$、$\mathrm{Ann}_R(N) = (x^{n+4}, x^{n+7})$，以及 $\mathrm{Ann}_R(K) = (x^{n+4})$。由例 3.11 可知，$\mathrm{Ann}_R(N)$ 是 $\mathrm{Ann}_R(M)$ 的约化，而 $\mathrm{Ann}_R(K)$ 是 $\mathrm{Ann}_R(N)$ 的预约化。于是，根据对偶性和例 4.9，N 是 M 在 E 中的扩张，而 K 是 N 在 E中的后扩张。♢

定理 6.6. 设 R 是一个诺特完备局部环。设 i 是定义在由$A \subseteq B$ R-模构成的对上的相对内部运算，这些模是诺特模或阿廷模；设 $\mathsf{cl} := \mathsf{i}^\smile$ 是其对偶闭包运算。在 $\mathsf{I}'_{\mathrm{cl}}((B/A)^\vee, B^\vee)$ 的元素与 $\mathsf{C}'_{\mathrm{i}}(A, B)$ 的元素之间存在反序一一对应。

证明. 设 $C \in \mathsf{C}'_{\mathrm{i}}(A, B)$。若 C 是 B 中 A 的 i-后扩张，则由定理 6.4，结论成立。若C 不是 B 中 A 的 i- 后扩张，则 $A \subseteq C \subseteq B$，且由命题 4.5(1)，$C$ 包含 B 中 A 的一个 i- 后扩张。令该 i- 后扩张为 D。那么由前一个定理，D 与 $(B/D)^\vee$ 一一对应，其中后者是 $B^\vee$ 中 $(B/A)^\vee$ 的一个 cl-预约化。由于 $(B/C)^\vee \subseteq (B/D)^\vee$，且 $(B/C)^\vee$ 不是 $B^\vee$ 中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-约化（否则它会对应到 C，且 C 会是 B 中 A 的 i-扩张），我们得到 $(B/C)^\vee \in \mathsf{I}'_{\mathrm{cl}}((B/A)^\vee, B^\vee)$。该对应是反序的，因为

$$C \subseteq D \text{ if and only if } (B/D)^\vee \subseteq (B/C)^\vee.$$

□

以下 引理在证明涉及生成集或余生成集的结果时会很有用。

引理 6.7。 [ERV23a，引理 6.15] 设 R 是一个完备诺特环。设 B 是一个 R-模，且它及其所有商模都是 Matlis 可对偶的。设 $\{C_i\}_{i \in I}$ B的一个子模集合。那么

$$\left(\frac{B}{\sum_i C_i}\right)^\vee \cong \bigcap_i (B/C_i)^\vee$$

and

$$\left(\frac{B}{\bigcap_i C_i}\right)^\vee \cong \sum_i (B/C_i)^\vee$$

其中，所有对偶化模都视为 $B^\vee$ 的子模。

7. Covers: cl-prereductions and i-postexpansions

本节讨论关于闭包运算 cl 和内部运算 i 的子模覆盖之间的关系。

定义 7.1. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个局部诺特环，且 K, N 是 R 中 M 的子模。若 $K \subsetneq N$ 且 $N/K \cong R/\mathfrak{m}$，则称 N 覆盖 K。我们也称 K 被 N 覆盖。

定义 7.2. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个局部诺特环， $\mathcal{M}$ 是 R-模的一个类，而 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 中模对的一个类。

设 cl 是 $\mathcal{P}$ 中模对 (L,M)、(N,M) 上的闭包运算。若 L 被 N 覆盖 :
(1) 若 $N_M^{\mathrm{cl}}=L_M^{\mathrm{cl}}$，则称 N 是 L 的 cl-覆盖。(2) 若 $L_M^{\mathrm{cl}}\subsetneq N_M^{\mathrm{cl}}$，则称 N 是 L 的非 cl-覆盖。设 i 是 $\mathcal{P}$ 中模对 (A,B)、(C,B) 上的内部算子。若 A 被 C 覆盖：(1) 若 $A_{\mathrm{i}}^B=C_{\mathrm{i}}^B$，则称 C 是 A 的 i-覆盖。(2) 若 $A_{\mathrm{i}}^B\subsetneq C_{\mathrm{i}}^B$，则称 C 是 A 的非 i-覆盖。

注记 7.3. N 覆盖 K 当且仅当对于某个 $x\in N$ 和 $\mathfrak{m}x\subseteq K$， $N=K+xR$。等价地，对于每个 $x\in N\backslash K$， N 覆盖K 当且仅当 $N=K+xR$ 且 $\mathfrak{m}=(K:_R xR)$。若 N 覆盖 K，且 L 是任意真子模，则要么 $N\cap L$ 覆盖 $K\cap L$ 且 $N+L=K+L$，要么 $N\cap L=K\cap L$ 且 $N+L$ 覆盖$K+L$。

注记 7.4. 设（R， $\mathfrak{m}$）为诺特局部环， $\mathcal{M}$ 为有限生成 R-模的范畴， $\mathcal{P}$为满足 $L\subseteq M$且 L、$M\in\mathcal{M}$的对（L， M）的集合。设 $L\subseteq N$为 M的子模，且（L， M）、（N， M）$\in\mathcal{P}$。以下各项等价:

（1）对于所有 $x\in N\setminus L$， $L+xR$ 都是 L 的非 cl-覆盖。（2） $\mathfrak{m}N\subseteq L$ 且 $L_M^{\mathrm{cl}}\cap N=K$。

证明。这直接由非 cl-覆盖的定义和注记 7.3 得出。 □

以下命题是 KRS20 中关于 Nakayama 闭包 cl 的定理 4.5] 的推广。

命题 7.5. 设（R， $\mathfrak{m}$）为诺特局部环， $\mathcal{M}$ 为有限生成 R-模的类， $\mathcal{P}$为满足 $L\subseteq M$且 L、$M\in\mathcal{M}$ 的对（L， M）的类，且 cl 为 $\mathcal{P}$上的一个中山闭包。设 $\mathfrak{A}$ 为 M中 L 的一个 cl-预约化。对于每个 $x\in L\setminus\mathfrak{A}$:

(1) $\mathfrak{A}+xR$ 是 $\mathfrak{A}$的非 cl-覆盖。(2) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}+xR$的 cl-预约化。(3) $\mathfrak{A}+xR$ 是 L 的 cl- 约化。

证明。(1) 由命题 3.5(2a)可得 $\mathfrak{m}L\subseteq\mathfrak{A}$，由注记 7.3可得 $\mathfrak{A}+xR$ 是$\mathfrak{A}$的覆盖。又由命题 3.5(2b)可得 $\mathfrak{A}_M^{\mathrm{cl}}\cap L=\mathfrak{A}$，因此 $x\notin\mathfrak{A}_M^{\mathrm{cl}}$。故 $\mathfrak{A}+xR$ 是 $\mathfrak{A}$的非 cl-覆盖。
(2) 由命题 3.9， $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}+xR$ 的 cl-预约化，因为 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{A}+xR\subseteq L$。(3) 根据 L的 cl-预约化的定义， $\mathfrak{A}+xR$ 是 M中的 L 的 cl-约化。 □

注 7.6。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。
(1) 如果 L 是 cl-基本（L 是自身内部唯一的 cl-约化），那么 L 是其每个 cl-预约化的非 cl-覆盖。(2) 如果 K 和 L 是 M 的子模，且 L 是 K 的非 cl-覆盖，那么 K 是 L 的 cl-预约化。

证明。(1) 由于 L 是 cl-基本，且 $\mathfrak{A}$ 是 L 的 cl-预约化，因此命题 7.5(3) 表明，对于所有 $x\in L\setminus\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}+xR$ 都是 L 的约化。但这意味着，对于所有 $x\in L\setminus\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}+xR=L$。
(2) 如果 I 是 J 的非 cl-覆盖，那么 J 不是 I 的 cl-约化。另由注记 7.3， $J+(x)=I$ 对所有 $x\in I\setminus J$ 都成立。由于 I 是 I 的约化，因此 J 是 I 的 cl-预约化。□

命题 7.7. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 N 是 M 中强cl独立的子模，其 cl-扩张度等于 $k\geq 1$ 个元素。那么，N 在 M 中的每个 cl-预约化都具有 $(y_1,y_2,...,y_{k-1})+y_k\mathfrak{m}$ 的形式，其中 $y_1,...,y_k$ 是 N 的一个极小生成集。

证明。设 $y_1,...,y_k$ 是 N 的一个极小生成集，并令 $\mathfrak{A}=(y_1,...,y_{k-1})+y_k\mathfrak{m}$。于是 $\mathfrak{A}+(y_k)=(y_1,...,y_k)=N$ 且 $y_k\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{A}$，因此根据注记 7.3， N 是 $\mathfrak{A}$ 的一个覆盖。此外， y_i 是强 cl-独立的，所以 N 是 cl-基本的，而 N 是其自身唯一的 cl-约化。因此， N 是 $\mathfrak{A}$ 的一个非 cl-覆盖。于是，注 7.6(2) 蕴含 $\mathfrak{A}$ 是 N 在 M 中的一个 cl-预约化。

假设 $\mathfrak{A}$ 是 $N=(x_1,...,x_k)$ 的任意 cl-预约化。那么存在一个 $1\leq i\leq k$，使得$x_i\notin\mathfrak{A}$。设 $i=k$，则 $x_k\notin\mathfrak{A}$。注意，由于 $\mathfrak{A}$ 是 M 中 N 的 cl-预约化，因此对于任意$x\in N\backslash\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}+(x)$ 是 M 中 N 的 cl-约化。然而，由于 N 是 cl-基本的，这意味着 $N=\mathfrak{A}+(x)$

对于任意 $x \in N \backslash \mathfrak{A}$。特别地， $N = \mathfrak{A} + (x_k)$。因此，对于 $1 \leq i \leq k-1$，存在 $a_i \in \mathfrak{A}$ 和 $b_i \in R$，使得 $x_i = a_i + b_i x_k$ 并且

$$\{a_1 + b_1 x_k, ..., a_{k-1} + b_{k-1} x_k, x_k\}$$

是 N 的极小生成集。因此

$$\{a_1, ..., a_{k-1}, x_k\}$$

is 也是 N 的极小生成集。由于根据命题 3.5(2a)， $\mathfrak{m}N \subseteq \mathfrak{A}$，我们有

$$(a_1, ..., a_{k-1}) + x_k \mathfrak{m} \subseteq (a_1, ..., a_{k-1}) + \mathfrak{m}N \subseteq \mathfrak{A}.$$

由于 $\mathfrak{A}$ 是 M 中 N 的 cl-预约化，且 $a_1, ..., a_{k-1}) + x_k \mathfrak{m}$ 是 M 中 N 的 cl-预约化，我们看到 $\mathfrak{A} = (a_1, ..., a_{k-1}) + x_k \mathfrak{m}$。□

例 7.8。设 $R = k[[x^2, x^5]]$ 和 $I = (x^6, x^7)$。根据 $\mathfrak{m}$bf-独立的定义， x^6 和 x^7 是 $\mathfrak{m}$bf-独立的，因为 $x^6 \notin (x^7)^{\mathfrak{m}\mathrm{bf}} = (x^7, x^{10})$ 且 $x^7 \notin (x^6)^{\mathfrak{m}\mathrm{bf}} = (x^6, x^9)$。注意，$(x^6) + \mathfrak{m}(x^7) = (x^6, x^9)$ 是一个 $\mathfrak{m}$bf-预约化，而 $(x^7) + \mathfrak{m}(x^6) = (x^7, x^8)$ 是一个 $\mathfrak{m}$bf-预约化。

定义 7.9. [ERV23a，定义 6.6] 设 R 为一个诺特局部环， L 为一个 R-模，且 g_1，...， $g_t \in L^\vee$。我们称由 g_1， $...g_t$ 余生成的 L 的商模为 $L/(\bigcap_i \ker(g_i))$。若 $\bigcap_i \ker(g_i) = 0$，则称 L 由 g_1， $...g_t$ 余生成。若一个 L 的余生成集是不可约的，即对所有 $1 \leq j \leq t$， $\bigcap_{i \neq j} \ker(g_i) \neq 0$，则称其为极小的。

我们可以将强 cl-独立生成集的概念对偶化为强 i-独立余生成集的概念，如下所示：

定义 7.10. 设 R 为一个诺特局部环， $L \subseteq M$ R-模， $\pi : M \to M/L$ 为典范投影，且 i 为定义在 R-模上的内部算子。若对于任意 $1 \leq i \leq k$， g_1，...， $g_k \in (M/L)^\vee$ 是 M/L 的 i-独立余生成集，即 $\pi^{-1}(\ker(g_i)) \not\supseteq (\pi^{-1}(\bigcap \ker(g_r)))_{\mathrm{i}}^M$，则称 $_{r \neq i}$ L 是强 i-独立的，当且仅当 M/L 的任意极小余生成元集都是 i-独立的 .

例 7.11。设 $R = k[[x^2, x^5]]$。注意到 $(x^{11}, x^{12}) = (x^6) \cap (x^7)$，且 $(x^{11}, x^{14}) = (x^6) \cap (x^9)$。定义$g_i : R \to E$ 为由下式定义的同态：对半群 $\langle 2$ 中的每个 i，都有 $g_i(1) = x^{-i}$， $5\rangle$。注意到g_i 具有

$$\ker(g_i) = (x^i) \text{ and } \mathrm{im}(g_i) = kx^3 + kx + \sum_{j=1}^{i-4} x^{-j} + kx^{-i+2} + kx^{-i}$$

对于 $i > 4$。由于

$$(R/(x^{11}, x^{12}))^\vee \cong kx^3 + kx + \sum_{j=1}^{7} x^{-j} \text{ and } (R/(x^{11}, x^{14}))^\vee \cong kx^3 + kx + \sum_{j=1}^{7} x^{-j} + kx^{-9},$$

容易看出， $R/(x^{11}, x^{12})$ 由函数 g_6 和 g_7 余生成，而 $R/(x^{11}, x^{14})$ 由 g_6 和 g_9余生成。

注意，$\ker(g_6) \cap \ker(g_9) = (x^{11}, x^{14})$，而 $\ker(g_9) = (x^9)$ 是 (x^{11}, x^{14}) 的一个 $\mathfrak{m}$be 扩张。因此 $\ker(g_6) \supseteq \ker(g_9)_{\mathfrak{m}\mathrm{be}}$，这意味着 g_6 和 g_9 并非强 i-独立。

然而， g_6 和 g_7 将强 $\mathfrak{m}$独立，因为 $\ker(g_6) \not\supseteq (x^9, x^{12}) = (\ker(g_7))_{\mathfrak{m}\mathrm{be}}$。 ♢

命题 7.12. 设$(R, \mathfrak{m})$是一个完备诺特局部环， $\mathcal{M}$ 为阿廷 R-模的类， $\mathcal{P}$ 为满足 $A \subseteq B$ 和 $A, B \in \mathcal{M}$, π 的对(A, B)的类： $B \to B/A$ 为典范满射，且 i 是 $\mathcal{P}$上的一个中山内算子。设 $\mathfrak{A}$ 是 B中 A 的一个 i-后扩张。对于每个满足$\pi^{-1}(\ker(g)) \not\supseteq \mathfrak{A}$的 $g \in (B/A)^\vee$：

(1) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$的一个非 i-覆盖。(2) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$的一个 i-后扩张。(3) $\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$是 A的一个 i-扩张。

证明。(1) 我们需要证明 $(\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)))_{\mathrm{i}}^B \subsetneq \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B$。根据命题 4.5(2b)，由于 $\mathfrak{A}$ 是 B 中 A 的 i-后扩张，因此 $\mathfrak{A}$ 在 B 中是 i-开的，或者 $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A = \mathfrak{A}$。在第一种情况下，我们有 $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B = \mathfrak{A} \supsetneq \mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)) \supseteq (\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)))_{\mathrm{i}}^B$。因此， $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$ 的非 i-覆盖。在另一种情况下，我们有 $\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A = \mathfrak{A}$。于是同样可得

$$(\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)))_{\mathrm{i}}^B = ((\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B + A) \cap \pi^{-1}(\ker(g)))_{\mathrm{i}}^B = ((\mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B \cap \pi^{-1}(\ker(g))) + (A \cap \pi^{-1}(\ker(g))))_{\mathrm{i}}^B \subsetneq \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}^B$$

(2) 根据命题 4.8， $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}\cap\pi^{-1}(\ker(g))$ 的 i-后扩张，因为 $A\subseteq\mathfrak{A}\cap\pi^{-1}(\ker(g))\subseteq\mathfrak{A}$。(3) 根据 A 的 i-后扩张的定义， $\mathfrak{A}\cap\pi^{-1}(\ker(g))$ 是 B 中 A 的 i-扩张。 □

命题 7.13。 [ERV23a，命题 6.14] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为诺特局部环，i 为定义在阿廷 R-模上的中山内算子。设 $A\subseteq B$ 为阿廷 R-模。假设 $C\subseteq D$ 是 B中A 的 i-扩张，且 D 为极大 i-扩张。那么， B/D 的任意极小余生成集都可扩充为 B/C的极小余生成集。

定义 7.14。 [ERV23a，定义 7.18] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为诺特局部环。令 i 为定义在一类阿廷 R-模 $\mathcal{M}$上的内运算。设 $A\subseteq B$ 为阿廷 R-模。若存在该数，则定义 A 的 i-余扩张度 $\ell_{\mathrm{i}}^{B}(A)$ 为 B/C 的余生成元的最小数量，其中 C 是A的任意极大 i-扩张。

命题 7.15. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，cl 是定义在 R-模上的中山闭包运算，i 是定义在一类阿廷 R-模上的、与 cl 对偶的内部算子。设 $N\subseteq M$ 和 L 是 M 中 N 的一个 cl-预约化。若 M 中 L 的 cl-扩张度 $\ell_M^{\mathrm{cl}}(L)$ 存在，则 N 中 ℓ_M^{cl} 的 cl-扩张度存在，并且

$$\ell_M^{\mathrm{cl}}(N)=\ell_M^{\mathrm{cl}}(L)+1.$$

设 $A\subseteq B$ 是阿廷 R-模， C 是 B中 A 的一个 i-后扩张， $M=B^\vee$, $N=(B/A)^\vee$，且 $L=(B/C)^\vee$。则 i-余扩张度 $\ell_{\mathrm{i}}^{B}(A)$ 存在，i-余扩张度 $\ell_{\mathrm{i}}^{B}(C)$ 存在，并且

$$\ell_{\mathrm{i}}^{B}(C)=\ell_{\mathrm{i}}^{B}(A)+1.$$

证明。假设 M 中 L 的 cl-扩张度 $\ell_M^{\mathrm{cl}}(L)$ 存在，且 M 中 N 是一个 cl-预约化。因此，对所有满足 $L\subseteq K\subseteq N$ 的 K， M 中 N 的 K 都是 cl- 约化。设 M 中 L 的一个极小 cl- 约化为 J，且 M 中 N 的一个极小 cl- 约化为 K。那么 $J\subseteq L\subseteq J_M^{\mathrm{cl}}\subseteq\tilde{K}\subseteq N\subseteq\tilde{K}_M^{\mathrm{cl}}$。由于 $\tilde{K}$ 是 N 的一个极小 cl-约化，而 J 是 N的一个 cl-预约化的极小 cl-约化，因此 $J_M^{\mathrm{cl}}\subsetneq\tilde{K}_M^{\mathrm{cl}}$，并且 J 的极小生成元个数恰好比 K 的极小生成元个数少 1。由于 ~L 的极小约化都具有相同数量的极小生成元，且 K 是 M 中 N 的任意一个极小 cl-约化，

$$\ell_M^{\mathrm{cl}}(N)=\ell_M^{\mathrm{cl}}(L)+1.$$

根据 [ERV23a，命题 7.19],，我们知道，由于 cl-扩张度 $\ell_M^{\mathrm{cl}}(L)$ 和 $\ell_M^{\mathrm{cl}}(N)$ 存在，因此 i-余扩散$\ell_{\mathrm{i}}^{B}(A)$ 和 $\ell_{ri}^{B}(C)$ 也存在。因为 C 是 A的 i-后扩张，所以我们有 $\ell_{\mathrm{i}}^{B}(C)=\ell_{\mathrm{i}}^{B}(A)+1$. □

命题 7.16. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个完备诺特局部环。

(1) 假设 $C\subseteq A\subseteq B$ 和 $\pi:\ B\to B/C$ 是典范满射。当且仅当对于某个 $g\in$， $C=A\cap\pi^{-1}(\ker(g))$ 成立时，$(B/C)^\vee$ 覆盖 $(B/A)^\vee$；并且 $(\pi^{-1}(\ker(g)):_B\mathfrak{m})\supseteq A$。(2) 若 C 是 i-余基，则 $\mathfrak{A}$ 的每个 i-后扩张都是 C的非 i-覆盖。(3) 若 A 和 C 是 B 的子模，且 C 是 A的非 i-覆盖，则 C 是 A的 i-后扩张。

证明. (1) 假设 $(B/C)^\vee$ 覆盖 $(B/A)^\vee$。那么由注记 7.3，$(B/C)^\vee=(B/A)^\vee+(g)$，其中 $g\in(B/C)^\vee$ 且 $\mathfrak{m}g\subseteq(B/A)^\vee$。由 [ERV23b，引理 5.4] $(g)\cong((B/C)/(\ker(g)))^\vee$。由第三同构定理，$(B/C)/(\ker(g))\cong B/(\pi^{-1}(\ker(g))$。然后由引理 6.7 可知

$$(B/A)^\vee+(B/\pi^{-1}(\ker(g)))^\vee\cong(B/(A\cap\pi^{-1}(\ker(g))))^\vee$$

或者 $(B/C)^\vee\cong(B/(A\cap\pi^{-1}(\ker(g))))^\vee$。因此，对于某个 $g\in(B/C)^\vee$， $C=A\cap\pi^{-1}(\ker(g))$。此外，由于 $\mathfrak{m}g\subseteq(B/A)^\vee$，因此

$$A=\left(\frac{(B/C)^\vee}{(B/A)^\vee}\right)^\vee\subseteq\left(\frac{(B/C)^\vee}{\mathfrak{m}g}\right)^\vee=\left(\frac{B^\vee}{\mathfrak{m}(g\circ\pi^\vee)}\right)^\vee=(\pi^{-1}(\ker(g)):_B\mathfrak{m}).$$

假设对于某个 $g\in(B/C)^\vee$， $C=A\cap\pi^{-1}(\ker(g))$，并且 $\pi^{-1}(\ker g:_{B/C}\mathfrak{m})\supseteq A$。那么由引理 6.7

$$(B/C)^\vee=\left(\frac{B}{A\cap\pi^{-1}(\ker(g)}\right)^\vee\cong(B/A)^\vee+(B/\pi^{-1}(\ker(g)))^\vee$$

并且由于 $(g)\cong((B/C)/(\ker(g)))^\vee\cong(B/(\pi^{-1}(\ker(g)))^\vee$，我们看到 $(B/C)^\vee=(B/A)^\vee+(g)$。
由于 $(\pi^{-1}(\ker(g)):_B\mathfrak{m})\supseteq A$，我们有

$$(B/A)^\vee\supseteq\left(\frac{B}{(\pi^{-1}(\ker(g)):_B\mathfrak{m})}\right)=\left(\frac{B/C}{(\ker(g)):_{B/C}\mathfrak{m})}\right)^\vee=\mathfrak{m}g$$

或 $\mathfrak{m}g \subseteq (B/A)^\vee$ 并且根据注记 7.3 $(B/C)^\vee$ 覆盖 $(B/A)^\vee$。

(2) 设 $\mathfrak{A}$ 是 C 的 i-后扩张。由于 C 是 i-余基，因此对于所有满足 $\pi^{-1}(\ker(g)) \not\supseteq \mathfrak{A}$ 的 $g \in (B/C)^\vee$，$\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$ 是 C 的 i-扩张。但这意味着，对于所有满足 $\pi^{-1}(\ker(g)) \not\supseteq \mathfrak{A}$ 的 $g \in (B/C)^\vee$，$\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)) = C$。根据命题 4.5(2a)，$(A :_B \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$，而 (1) 表明 $(B/\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g)))^\vee$ 是 $(B/\mathfrak{A})^\vee$ 的覆盖。此外，根据命题 4.5(2b)，$\mathfrak{A}_1^B + A = \mathfrak{A}$。因此，$\ker(g) \notin \mathfrak{A}_1^B$。所以，$(B/\mathfrak{A} \cap \ker(g))^\vee$ 是 $(B/\mathfrak{A})^\vee$ 的非 i-覆盖。

(3) 如果 C 是 A的非 i-覆盖，则 C 不是 A的 i-扩张。由 (1)，$B/(C \cap (g)) = B/A$ 存在一个 $g \in (B/A)^\vee$，满足 $A = C \cap \pi^{-1}(\ker(g))$ 且 $(\pi^{-1}(\ker(g)) :_B \mathfrak{m}) \supseteq C$。由于 C 是 C的 i-扩张，根据 (2)，C 是 A 的 i-后扩张。□

命题 7.17. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特完备局部环，且 A 是 B 中的强 i-独立子模，其 i-余扩张度等于 $k \geq 1$ 个元素，并且 $\pi : B \to B/A$ 是典范满射。则 A在 B 中的任意 i-后扩张都具有如下形式

$$\bigcap_{r \neq i} \pi^{-1}(\ker(g_r)) \cap (\pi^{-1}(\ker(g_i)) :_B \mathfrak{m}).$$

证明。设 $g_1, ..., g_k$ 是 B/A 的一个极小余生成集，并令

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{r \neq i} \pi^{-1}(\ker(g_r)) \cap (\pi^{-1}(\ker(g_i)) :_{(B/A)} \mathfrak{m}).$$

k于是 $\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g_k)) = \bigcap \pi^{-1}(\ker(g_i)) = A$，并且 $(\pi^{-1}(\ker(g_k)) :_{B/A} \mathfrak{m}) \supseteq A$，所以根据$i=1$命题 7.16(1)，$\mathfrak{A}$ 是 A 的一个覆盖。此外，g_i 是强 i-独立的，因此 A 是 i-余基，而 A 是自身唯一的 i-扩张。因此，$\mathfrak{A}$ 是 A的一个非 i-覆盖。于是，注释 7.16(2)表明，$\mathfrak{A}$ 是 A 在B中的一个 i-后扩张。

k假设 $\mathfrak{A}$ 是 A 的任意一个 i-后扩张，其中 $B/A = B/(\bigcap \pi^{-1}(\ker(g_i)))$。那么存在一个$i=1$$1 \leq i \leq k$，使得 $\pi^{-1}(\ker(g_i)) \not\supseteq \mathfrak{A}$。设 $i = k$，则 $\pi^{-1}(\ker(g_k)) \not\supseteq \mathfrak{A}$。注意，由于 $\mathfrak{A}$ 是 B中 A 的一个 i-后扩张，因此对于任意 $g \in (B/A)^\vee \setminus (B/\mathfrak{A})^\vee$，$\mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$ 是B中 A 的一个 i-扩张。然而，由于 A 是 i-余基，这意味着对于任意 $g \in (B/A)^\vee \setminus (B/\mathfrak{A})^\vee$，$A = \mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g))$。特别地，$A = \mathfrak{A} \cap \pi^{-1}(\ker(g_k))$。

因此，对于 $1 \leq i \leq k-1$，存在 $h_i \in (B/A)^\vee$ 以及 $b_i \in R$，使得 $g_i = h_i + b_i g_k$，并且

$$\{h_1 + b_1 g_k, ..., h_{k-1} + b_{k-1} g_k, g_k\}$$

是 $(B/A)^\vee$ 的极小生成集。因此

$$\{h_1, ..., h_{k-1}, g_k\}$$

也是 $(B/A)^\vee$ 的极小生成集，因而是 B/A 的极小余生成集。由于根据命题 4.5(2a)，$(A :_B \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}$，我们有

$$\bigcap_{i=1}^{k-1} \pi^{-1}(\ker(h_i)) \cap (\pi^{-1}(\ker(g_k)) :_B \mathfrak{m}) \supseteq \bigcap_{i=1}^{k-1} \pi^{-1}(\ker(h_i)) \cap (A :_B \mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{A}.$$

$k-1$由于 $\mathfrak{A}$ 是 B 中 A 的 i-后扩张，而 $\bigcap \ker(h_i) \cap (\pi^{-1}(\ker(g_k)) :_B \mathfrak{m})$ 是 $i=1$$k-1$$B$ 中 A 的 i-后扩张，因此我们看到 $\mathfrak{A} = \bigcap \pi^{-1}(\ker(h_i)) \cap (\pi^{-1}(\ker(g_k)) :_B \mathfrak{m})$。$i=1$

□

8. Pre-core and Post-hull

由于在诺特局部环中，极小约化并不唯一，Rees 和 Sally 将理想的核定义为 $\mathrm{core}(I) = \bigcap_{J \subset I} J$，其中 J 是 I [RS88] 的一个整约化。在本节中，我们将推广 cl-核和 i-包的概念，但不再通过 cl-约化和 i-扩张来定义它们，而是对这些新构造的预约化或后扩张取交或求和。

定义 8.1. [ERV23b，定义 2.12] 如果 $(N, M) \in \mathcal{P}$关于 M的 N的 cl-核是 M中 N 的所有 cl-约化的交，或者

$$\text{cl-core}_M(N) := \bigcap\{L \mid L \subseteq N \subseteq L_M^{\text{cl}} \subseteq M \text{ and } (L, M) \in \mathcal{P}\}$$

注 8.2. 只要 N 在 M 中不是 cl-基本的，那么 N 在 M 中的 cl-核就包含于 N 在 M 中的某个 cl-预约化内。

证明。设 N 是 M 的一个非 cl-基本子模。那么存在某个 $L \neq N$，使得 L 是 N 的 cl-约化。因此，cl-核$_M(N)$ $= \bigcap\{L \mid L \subseteq N \subseteq L_M^{\text{cl}}$ 且 $(L, M) \in \mathcal{P}\} \neq N$，并且 cl-核$_M(N) \in \mathbf{I}'_{\text{cl}}(N, M)$。所以根据命题 3.4(2)，存在一个包含 cl-核$_M(N)$ 的 N 的 cl-预约化。□

定义 8.3. [ERV23b，定义 6.1] 若 $(A, B) \in \mathcal{P}$，则关于 B 的子模 A 的 i-包，是 A 在 B 中所有 i-扩张的和，即

$$\text{i-hull}^B(A) := \sum\{C \mid \mathbf{C}_{\text{i}}^B \subseteq A \subseteq C \subseteq B \text{ and } (C, B) \in \mathcal{P}\}$$

注 8.4. 只要 A 不是 B 中的 i-余基，则 B 中 A 的 i-包将包含 B 中 A 的某个 i-后扩张。

证明。设 A 是 B 的一个不是 i-余基的子模。则存在某个 $C \neq A$，使得 C 是 B 中 A 的一个 i-扩张。因此，i-包$^B(A) = \sum\{C \mid \mathbf{C}_{\text{i}}^B \subseteq A \subseteq C \subseteq B$ 且 $(C, B) \in \mathcal{P}\} \neq A$，并且 i-包$^B(A) \in \mathbf{C}'_{\text{i}}(A, B)$。所以根据命题 4.4(2)，存在一个包含 i-包$^B(A)$ 的 A 的 i-后扩张。□

定理 8.5。 [ERV23b，定理 6.6] 设 R 是一个完备诺特局部环。设 $A \subseteq B$ 是 Artinian$R$-模，且设 i 是定义在 Artinian R-模上的相对中山内算子。则 B 中 A 的 i-包与 $B^\vee$ 中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-核对偶，其中 cl 是与 i 对偶的闭包运算。

定义 8.6. 相对于 M 的 N 的 cl-预包，是 N 在 M 中的 cl-预约化之和，或者

$$\text{cl-prehull}_M(N) := \sum\{L \mid L \text{ a cl-}\textit{prereduction} \text{ of } N \text{ in } M\}.$$

i-后 A 相对于 B 的核是 A 在 B 中的 i-后扩张之交，或 r

$$\text{i-postcore}^B(A) := \bigcap\{C \mid C \text{ a i-}\textit{postexpansion} \text{ of } A \text{ in } B\}.$$

注记 8.7.

$$\text{cl-prehull}_M(N) = \sum\{L \mid L \text{ maximal in } \mathbf{I}'_{\text{cl}}(N, M)\}$$

$$\text{i-postcore}^B(A) = \bigcap\{C \mid C \text{ minimal in } \mathbf{C}'_{\text{i}}(A, B)\}$$

证明. 这直接由 $\mathbf{I}'_{\text{cl}}(N, M)$ 的极大元是 cl-预约化，以及 $\mathbf{C}'_{\text{i}}(A, B)$ 的极小元是 i-后扩张得出。□

定义 8.8. Th N 相对于 M 的 cl-预核是 M中 N 的所有 cl-预约化的交 ,

$$\text{cl-precore}_M(N) = \bigcap\{L \mid L \text{ a cl-prereduction of } N \text{ in } M\}.$$

A 相对于 B 的 i-后包是 B中 A 的所有 i-后扩张的和,

$$\text{i-posthull}^B(A) := \sum\{C \mid C \text{ an i-postexpansion of} A \text{ in } B\}.$$

下面的命题给出了 cl-核的上界和下界，这些界用 cl-预核和 cl-预包来表示。

命题 8.9. 设$(R, \mathfrak{m})$是一个诺特局部环，cl 是一个中山闭包，且 N是 M的一个子模。(1) 如果 N 是 cl-基本的，或者每个 cl-预约化都包含于某个极小约化中，那么

$$\text{cl-precore}_M(N) \subseteq \text{cl-core}_M(N).$$

(2) 如果 $N =$cl-预包$_M(N)$ 或 N在 M 中有唯一的 cl-预约化，那么

$$\text{cl-core}_M(N) \subseteq \text{cl-prehull}_M(N).$$

证明。(1) 首先，如果 N是 cl-基本的，那么 N在 M 中唯一的 cl-约化就是 N本身。因此 cl-核$_M(N) = N$。根据定义，每个 cl-预约化都包含于 N，所以 cl-预核$_N(M) \subseteq N$。因此 cl-预核$_M(N) \subseteq$cl-核$_M(N)$。

接下来，假设每个 cl-预约化都包含于某个极小 cl-约化中。那么极小 cl-约化存在，并且我们知道

$$\text{cl-core}_M(N) = \bigcap\{L \mid L \text{ a minimal cl-reduction of } N \text{ and } (L, M) \in \mathcal{P}\}.$$

由于 cl-预约化的交包含于每个 cl-预约化，且每个 cl-预约化都包含于某个极小 cl-约化中，我们看到 cl-预核$_M(N) \subseteq$ cl-核$_M(N)$。

(2) 若 $N =$cl-预包$_M(N) = \sum\{L \mid L$是 Nin $M\}$的一个 cl-预约化。根据定义，每个 cl-约化都包含于 N，因此我们有 cl-核$_N(M) \subseteq N$。于是 cl-核$_M(N) \subseteq$cl-预包$_M(N)$。

若 L 是 N in M 的唯一 cl-预约化，根据注 8.2，我们知道

$$\text{cl-core}_M(N) \subseteq L = \text{cl-prehull}_M(N).$$

□

以下命题给出了以 i-后核和 i-后包表示的 i-包的一些上界和下界。

Pr命题 8.10. 设（R， $\mathfrak{m}$）为诺特局部环，i 为中山内算子，且 A 为 B 的子模。

（1）如果 $A =$ i-后核^B（A），或者 A 在 B 中有唯一的 i-后扩张，则

$$\text{i-postcore}^B(A) \subseteq \text{i-hull}^B(A).$$

（2）如果 A 是 i-余基的，或者每个 i-后扩张都包含某个极大扩张，则

$$\text{i-hull}^B(A) \subseteq \text{i-posthull}^B(A).$$

证明. （1）如果 $A =$ i-后核^B（A） $= \bigcap\{C \mid C$ 是 $B\}$. 中 A 的一个 i-后扩张。根据定义， A 包含于每个 i-扩张中，而包是所有扩张的和，因此有 $A \subseteq$ i-包^B（A）。于是 i-后核^B（A） $\subseteq$i-包^B（A）。

如果 C 是 B 中 A 的唯一 i-后扩张，那么根据注 8.4，我们知道

$$\text{i-postcore}^B(A) = C \subseteq \text{i-hull}^B(A).$$

（2）首先，如果 A 是 i-余基的，那么 B 中 A 的唯一 i-扩张就是 A 本身。因此 $A =$i-包^A（B）。由于 A 包含于 B 中 A 的每个 i-后扩张中，所以有 $A \subseteq$ i-后包^B（A）。于是 i-包^B（A） $\subseteq$ i-后包^B（A）。

接下来，假设每个 i-后扩张都包含某个极大 i-扩张。于是极大 i-扩张存在，并且我们知道

$$\text{i-hull}^B(A) = \sum\{C \mid C \text{ a maximal i-expansion of } A \text{ and } (C, B) \in \mathcal{P}\}.$$

由于每个 i-后扩张都包含一个极大 i-扩张，因此所有极大 i-扩张的和包含于所有 i-后扩张的和中。于是

$$\text{i-hull}^B(A) \subseteq \text{i-posthull}^B(A).$$

□

我们给出两个例子，以说明命题 8.9 中所给界限的依据。

例 8.11. 设 $R = k[[x^2, x^5]]$。参见例 3.11 或许会有所帮助。

考虑 理想 (x^4)。根据命题 7.7，(x^4) 的唯一 $\mathfrak{m}$bf-预约化是 (x^6, x^9)。因此

$$(x^6, x^9) = \mathfrak{m}\text{bf-precore}_R(x^4) \subsetneq \mathfrak{m}\text{bf-core}_R(x^4) = (x^4) \not\subseteq \mathfrak{m}\text{bf-prehull}_R(x^4) = (x^6, x^9)$$

这给出了一个例子，说明子模的 cl-预核可能真包含于 cl-核中，而 cl-核并不包含于 cl-预包中。

考虑理想 (x^4, x^7)。对于每个 $a \in k$，理想 $(x^4 + ax^7)$ 都是 (x^4, x^7) 的一个极小 $\mathfrak{m}$bf-约化。因此， $\mathfrak{m}$ bf-核$(x^4, x^7) = \bigcap_{a \in k}(x^4 + ax^7) = (x^6, x^9)$。由于包含在 (x^4, x^7) 中的理想 I of R 都是$x^n + ax^{n+3}$或（$x^n + ax^{n+3}$， x^{n+5}）的形式适用于 $n = 4$ 或 $n \geq 6$ 和 $a \in k$ 或（$x^n + ax^{n+1} + bx^{n+3}$），（$x^n + ax^{n+1}$， x^{n+3}）或（x^n， x^{n+1}）的形式适用于 $n \geq 6$ 和 a， $b \in k$。注意，唯一以（x^4， x^7）为覆盖的理想 I 是

(x^4+ax^7) 或 $(x^6,\ x^7)$。由于 (x^4+ax^7) 是 $(x^4,\ x^7)$ 的 $\mathfrak{m}$bf-约化，因此根据命题 7.5，$(x^6,\ x^7)$ 是 $(x^4,\ x^7)$ 唯一的$\mathfrak{m}$bf-预约化。因此

$$(x^6,x^7)=\mathfrak{m}\text{bf-precore}_R(x^4,x^7)\not\subseteq\mathfrak{m}\text{bf-core}_R(x^4,x^7)=(x^6,x^9)\subsetneq\mathfrak{m}\text{bf-prehull}_R(x^4,x^7)=(x^6,x^7)$$

给出了一个例子，其中子模的 cl-核真包含于其 cl-预包中，且 cl-预核与子模的 cl-核不可比较。

考虑理想 (x^4,x^5)。注意，$(x^4,x^5)^{\mathfrak{m}\text{bf}}=(x^4,x^5)$，事实上它是唯一一个满足 I with $I^{\mathfrak{m}\text{bf}}=(x^4,x^5)$ 的理想。因此，$\mathfrak{m}$ bf-核$(x^4,x^5)=(x^4,x^5)$。与例 3.11 中一样，理想 (x^4+ax^5,x^7) 和 (x^5,x^6) 是 (x^4,x^5) 的$\mathfrak{m}$bf-预约化。由于 $\bigcap_{a\in k}(x^4+ax^5,x^7)\cap(x^5,x^6)=(x^6,x^7)$ 且 $\sum_{a\in k}(x^4+ax^5,x^7)+(x^5,x^6)=(x^4,x^5)$, this gives 和 example，其中

$$\mathfrak{m}\text{bf-precore}_R(I)\subsetneq\mathfrak{m}\text{bf-core}_R(I)=\mathfrak{m}\text{bf-prehull}_R(I)=I.$$

例 8.12。设 k 是一个特征为 $p>0$ 的域，$R=k[x,y,z]/(xy,xz)$ 以及 $\mathfrak{m}=(x,y,z)$。注意，$I=(x+y,x+z)$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个极小 $*$-约化。因此，根据 [FVV11，定理 3.10]，

$$*-\text{core}_R(\mathfrak{m})=((x+y,x+z):\mathfrak{m})\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2.$$

现在考虑 $\mathfrak{m}$ 的 $*$-预约化。根据命题 9.12，$\mathfrak{m}$ 的 $*$-预约化具有形式 $(a)+\mathfrak{m}^{*\text{sp}}$，其中 (a,b) 是 $\mathfrak{m}$ 的一个极小 $*$-约化。注意，$(x,y^2,yz,z^2)=I^{*\text{sp}}$。由于 $(x+cy,x+dz)$ 分别是 $c,d\in k$ 的极小 $*$-约化，因此 $(x+cy)+(x,y^2,yz,z^2)=(x,y,z^2)$ 以及 $(x+dz)+(x,y^2,yz,z^2)=(x,y^2,z)$ 都是 $\mathfrak{m}$ 的预约化。由于 $(x,y,z^2)+(x,y^2,z)=\mathfrak{m}\subseteq *-$预包$_R(\mathfrak{m})$，我们看到

$$*-\text{core}_R(\mathfrak{m})\subsetneq *-\text{prehull}_R(\mathfrak{m}).$$

注意，帽 $x\in I^{*\text{sp}}$ 将属于 $\mathfrak{m}$的所有 $*$-预约化，因此 $x\in *-$预核$_R(\mathfrak{m})\not\subseteq *-$核$_R(\mathfrak{m})$.

$I=(x+y,x+z)$ 是一个 $*$-基本理想。因此 $*-$核$_R(I)=I$。注意，$(x+y,z^2)$ 和 $(x+z,y^2)$ 是 I 的 $*$-预约化，且 $*-$预核$_R(I)\subseteq(x+y,z^2)\cap(x+z,y^2)=\mathfrak{m}^2\subseteq *-$核$_R(I)=I$。

与 i $=$cl$^\vee$ 时 cl-核和 i-包之间的对偶性类似，cl-预核与 i-后包之间，以及 cl-预包与 i-后核之间也存在对偶性。

定理 8.13。设 R 是一个完备诺特局部环。设 $A\subseteq B$ 是阿廷 R-模，且 i 是定义在阿廷 R-模上的相对中山内算子。那么，B 中 A 的 i-后核与 $B^\vee$ 中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-预包互为对偶；而 B 中 A 的 i-后包与 $B^\vee$中 $(B/A)^\vee$ 的 cl-预核互为对偶，其中 cl 是与 i 对偶的闭包运算。

证明。设 $M=B^\vee$ 和 $N=(B/A)^\vee$。我们需要证明

$$(M/\text{cl-prehull}_M(N))^\vee=\text{i-postcore}^B(A)$$

and

$$(M/\text{cl-precore}_M(N))^\vee=\text{i-posthull}^B(A).$$

这些结论由定义可得。 □

命题 8.14。 [ERV23a，命题 7.3] 设 R 是一个局部环，且 $\text{cl}_1\leq\text{cl}_2$ 是定义在有限生成的 R-模 $\mathcal{M}$ 类上的闭包运算，其中 cl_2 为中山闭包。若 $N\subseteq M$ 是 R-模，且属于 $\mathcal{M}$，则 cl_2-核$_M(N)\subseteq\text{cl}_1$-核$_M(N)$）。

命题 8.15。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $\text{cl}_1\leq\text{cl}_2$ 是定义在 $\mathcal{P}$ 上的中山闭包。若 $(N,M)\in\mathcal{P}$，则 cl_2-预包$_M(N)\subseteq\text{cl}_1$-预包$_M(N)$）。

证明。设 L 是 M 中 N 的一个 cl_2-预约化。于是

$$L\in\text{cl}_2\text{-prehull}_M(N)=\sum\{L\mid L\text{ maximal in }\mathbf{I}'_{\text{cl}_2}(N,M)\}.$$

根据命题 5.4(1)，$\mathbf{I}'_{\text{cl}_2}(N,M)\subseteq\mathbf{I}'_{\text{cl}_1}(N,M)$，所以

$$\sum\{L\mid L\text{ maximal in }\mathbf{I}'_{\text{cl}_2}(N,M)\}\subseteq\sum\{L\mid L\text{ maximal in }\mathbf{I}'_{\text{cl}_1}(N,M)\}=\text{cl}_1\text{-prehull}_M(N).$$

□

命题 8.16。 [ERV23a，命题 7.12] 设 R 是一个结合（即不一定交换）的环，且 $\mathfrak{i}_1 \leq$ 和 $\mathfrak{i}_2$ 是一类 $\mathcal{M}$ （左） R-模上的内部运算。设 $A \subseteq B$ 是 R-模，使得 $\mathfrak{i}_1$ 和 $\mathfrak{i}_2$ 在 A 与 B 之间的所有 R-模上都有定义。则 $\mathfrak{i}_2$-包络$^B(A) \subseteq \mathfrak{i}_1$-包络$^B(A)$。

命题 8.17. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 $\mathcal{P}$ 是阿廷 R-模。设 $\mathfrak{i}_1 \leq \mathfrak{i}_2$ 是 $\mathcal{P}$ 上的中山内算子。则 $\mathfrak{i}_1$-后核$^B(A)$ $\subseteq \mathfrak{i}_2$- 后核 $^B(A)$。

证明. 设 $C \in \mathfrak{i}_1$-后核$^B(A)$ 在 $\mathbf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A, B)\}$ 中是极小的。因此 C 是一个 $\mathfrak{i}_1$-后扩张。由命题 5.5(1)，我们知道 $\mathbf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A, B) \subseteq \mathbf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A, B)$，所以

$$\bigcap\{C \mid C \text{ minimal in } \mathbf{C}'_{\mathfrak{i}_1}(A, B)\} \subseteq \bigcap\{C \mid C \text{ minimal in } \mathbf{C}'_{\mathfrak{i}_2}(A, B)\} = \mathfrak{i}_2\text{-postcore}^B(A).$$

□

9. Closures$\mathbf{cl}$ with a special part and $\mathbf{cl}$-prereductions

Vraciu 首先在 [Vra02] 中引入了紧闭包的特殊部分，之后又与 Huneke 在 [HV03] 中证明，在剩余域完美的优良正规环中，理想 I 的紧闭包可以关于 I 的极小约化及其特殊部分作特殊部分分解。（见下文注 9.2(6)。）我们将利用这一分解来确定紧闭理想的所有 $*$-预约化。

定义 9.1. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的诺特局部环，且 I 是一个理想。设 R^o 为不属于 R 的任何极小素理想的元素所组成的集合。若存在一个 $c \in R^o$，使得对所有 $q \geq q_0$ 都有 $cx^q \in \mathfrak{m}^{q/q_0} I^{[q]}$，则称 $x \in R$ 属于 I $(x \in I^{*\mathrm{sp}})$ 的紧闭包的特殊部分。

下面列出关于紧闭包的特殊部分的一些事实:

注 9.2. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的局部环，并具有一个弱测试元 c。

(1) 紧闭包特殊部分中元素 x 的另一种描述是：当且仅当存在一个 q_0，使得 $x^{q_0} \in (\mathfrak{m} I^{[q_0]})^*$ 时，$x \in I^{*\mathrm{sp}}$。(2) 对任意理想 I，$(I^*)^{*\mathrm{sp}} = I^{*\mathrm{sp}} = (I^{*\mathrm{sp}})^*$，且若 $J \subseteq I$ 和 $J^* = I^*$，则 $J^{*\mathrm{sp}} = I^{*\mathrm{sp}}$ [Eps05，引理 3.4]。(3) 若 $I \subseteq I^{*\mathrm{sp}}$，则 I 是幂零的。 [Eps05，引理 3.1]。(4) $\mathfrak{m} I \subseteq I^{*\mathrm{sp}} \cap I$，且当 I 是一个 $*$-基本理想时等号成立。 [Eps05，引理 3.2]。(5) 若 x_1、.....、x_k 是 I 中的 $*$-独立元素，则它们模 $I^{*\mathrm{sp}}$ 也 $*$-独立。特别地，若 $J = (x_1, \ldots\ldots, x_k)$ 是 I 的一个极小 $*$-约化，且 $x \in I^{*\mathrm{sp}}$，则

$$J' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

对于任意选择的 i [，都不是 I 的极小 $*$-约化 Vra06，命题 1.12]。

(6) 若 R 进一步是优良正规环且具有完美剩余域，那么对于正特征优良正规环的每个理想 I，$I^* = I + I^{*\mathrm{sp}}$ [HV03，定理 2.1]。

♢

以下是 KRS20，推论 7.2] 关于紧闭包的推广。

命题 9.3. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 且含有弱测试元的诺特局部环。假设 I 是一个非幂零的真主理想，则 I 的唯一 $*$-预约化为 $\mathfrak{m} I$。

证明. 设 $I = (x)$，其中 x 非幂零。假设 x 不是 $*$-独立的。注意，由于 $(x)/(\mathfrak{m}(x)) \cong R/\mathfrak{m}$，$(x)$ 是 $\mathfrak{m}(x)$ 的一个覆盖。假设 (x) 是 $\mathfrak{m}(x)$ 的一个 $*$-覆盖。那么根据注 9.2(2,4)，$I \subseteq I^* = (\mathfrak{m} I)^* \subseteq (I^{*\mathrm{sp}})^* = I^{*\mathrm{sp}}$。然而现在我们看到，根据注 9.2(3)，$I$ 是幂零的。因此 x 是 $*$-独立的，并且根据命题 3.2，I 的 $*$-预约化集合为 $\{\mathfrak{m} I\}$。□

与 $*$-独立性一样，Vraicu 在 [Vra06 的观察 1.5] 中指出，如果理想 $K = (J, x_1, \ldots, x_k)$ 的一组生成元 $*$模 J独立，那么 K 模 J 的任意一组生成元也都是
$*$-独立的。Vraciu 还在 [Vra06] 中定义了以下集合。

定义 9.4. 设 $J \subseteq I$ 为紧闭理想。令 $\mathcal{F}(J, I)$ 为所有满足 $J \subseteq K \subseteq I$ 和 $\lambda(I/K) = 1$ 的紧闭理想 K 的集合。

定理 9.5. [Vra06，定理 2.2] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是特征为 $p>0$ 的局部优异正规环，且 $J\subseteq I$ 为紧闭理想。那么 $\mathcal{F}(J,I)$ 等于集合

$$\{(J,x_1,\ldots,x_{k-1})+I^{*\mathrm{sp}} \mid (J,x_1,\ldots,x_{k-1},x_k) \text{ 是 } I \text{模 } J \text{ 的一个极小 } *\text{-约化，其中某个 } x_k\}.$$

紧闭包并不是唯一具有特殊部分的闭包；事实上，Frobenius 闭包和整闭包也都有特殊部分。参见 [Eps10]。

定义 9.6. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，cl 是 R 上理想的一种闭包运算。若以下四条公理对理想 $I\subseteq R$ 成立，则 clsp 是 cl 的一个特殊部分。

(1) I^{clsp} 是 R 的一个理想。(2) $\mathfrak{m}I\subseteq I^{\mathrm{clsp}}\subseteq I^{\mathrm{cl}}$。(3) $(I^{\mathrm{cl}})^{\mathrm{clsp}}=I^{\mathrm{clsp}}=(I^{\mathrm{clsp}})^{\mathrm{cl}}$。(4) 若 $J\subseteq I\subseteq (J+I^{\mathrm{clsp}})^{\mathrm{cl}}$，则 $I\subseteq J^{\mathrm{cl}}$。

Epstein 在 [Eps10，引理 2.2] 中证明了：如果 $J\subseteq I$，那么具有特殊部分的闭包 cl 必然是中山闭包；并且如果 I 是 cl- 独立的，那么 $\mathfrak{m}I=I\cap I^{\mathrm{clsp}}$。

注意，对于所有已知的具有特殊部分的闭包 cl，若存在某个递增函数 $f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 以及某个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $z^{f(n)}\in(\mathfrak{m}I^{f(n)})^{\mathrm{cl}}$ 或 $z^{f(n)}\in(\mathfrak{m}I^{[f(n)]})^{\mathrm{cl}}$，则元素 $z\in I^{\mathrm{clsp}}$。对于整闭包的特殊部分，$f(n)=n$ 为 $z\in I^{-\mathrm{sp}}$，只要 $z^n\in(\mathfrak{m}I^n)^-$。对于紧闭包的特殊部分和 Frobenius 闭包的特殊部分，$f(n)=p^n$，其中 p 是环的特征；当 $z^{p^n}\in(\mathfrak{m}I^{[p^n]})^*$ 时为 $z\in I^{*\mathrm{sp}}$，而当 $z^{p^n}\in(\mathfrak{m}I^{[p^n]})^F$ 时为 $z\in I^{F\mathrm{sp}}$。注意，在这三种情形中，函数 f 为 $m\geq n$ 定义了理想降链 $I^{\{f(n)\}}\supseteq I^{\{f(m)\}}$，其中 $I^{\{f(n)\}}$ 是与闭包 cl 相关的适当 $f(n)$ 次“幂”。我们将称，关于闭包 cl 的 I 的特殊部分由函数 f、取值 $n\geq n_0\geq 0$ 以及理想 $\{I^{\{f(n)\}}\}_{n\geq n_0}$ 定义，只要当 $z^{f(n)}\in(\mathfrak{m}I^{\{f(n)\}})^{\mathrm{cl}}$ 时 $z\in I^{\mathrm{clsp}}$。尽管下面的证明不需要这一描述，但这一点很有趣，未来或许会派上用场。

若 R 满足 $I^{\mathrm{cl}}=I+I^{\mathrm{clsp}}$，则称一个理想在 R 上具有 cl-特殊部分分解。注意，推广定理 9.5 的关键在于强 cl-独立理想具有 cl-特殊部分分解。

注 9.7. 如同 [HV03，定理 2.1], 之后的注释，当 I 由 cl-独立元素生成且 $I^{\mathrm{cl}}=I+I^{\mathrm{clsp}}$时，我们有

$$\frac{I^{\mathrm{cl}}}{\mathfrak{m}I}=\frac{I}{\mathfrak{m}I}\oplus\frac{I^{\mathrm{clsp}}}{\mathfrak{m}I}.$$

♢

首先，我们需要推广 [Vra06] 的如下结果。

命题 9.8.（见 [Vra06，命题 1.12]）设 $(R,\mathfrak{m})$ 为一个诺特局部环，且 cl 是定义在 R的理想上的一个闭包。假设所有强 cl-独立理想 $I\subseteq R$ 都具有 cl-特殊部分分解。若 $x_1,\ldots,x_k$ 是 cl-独立的，则它们模 I^{clsp}也 cl-独立。特别地，若 $J=(x_1,\ldots,x_k)$ 是 I的一个极小 cl-约化，且 $x\in I^{\mathrm{clsp}}$，则

$$J'=(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_k)$$

对于任意的 i，都不是 I 的极小 cl-约化。

证明。对于每个 $i\in 1,...,k$，我们需要证明 $f_i\notin(I^{\mathrm{clsp}},f_1,\ldots,f_{i-1},f_{i+1},\ldots,fl)^{\mathrm{cl}}$。否则，可以从某些 f_j，$j\neq i$ 以及 I^{clsp} 中的某些元素生成一个极小 cl-约化 J'。由于仅凭 $f_1,\ldots,f_{i-1},f_{i+1},\ldots,f_k$ 无法生成 cl-约化，因此 I^{clsp} 中必有元素属于 J' 的极小生成元。但 $I^{\mathrm{clsp}}\bigcap J'\subseteq\mathfrak{m}I$，这就产生了矛盾。□

以下命题的证明与 [Vra06，推论 1.14] 的证明相似，因此我们省略证明。

命题 9.9. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，$J\subseteq I$ 是 R 的理想，满足 $I=I^{\mathrm{cl}}$，并假设 I/J 的 cl-扩张度为 k。设 $g_1,\ldots g_i$ 是 I/J 的一个极小生成系的部分生成元，且 $K=(g_1,\ldots,g_i)+J$。当且仅当 $I^{\mathrm{clsp}}\cap K\subseteq\mathfrak{m}I+J$ 时，K 可以扩充为 I/J 的一个极小 cl-约化。

下面的集合仿照 Vraciu 在 [Vra06] for tight closur 中定义的集合 e.

定义 9.10。设 $J \subseteq I$ 是一个 cl-闭理想。设 $\mathcal{F}_{\mathrm{cl}}(J, I)$ 为所有满足$J \subseteq K \subseteq I$ 且 $\lambda(I/K) = 1$ 的 cl-闭理想 K 的集合。

下面定理的证明仿照了 Vraciu 对定理 9.5 的证明。

定理 9.11. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，且 cl 是 R 上的中山闭包运算。假设所有强 cl-独立理想 $I \subseteq R$ 都有 cl-特殊部分分解，并且 $J \subseteq I$ 是 cl-闭理想。$\mathcal{F}_{\mathrm{cl}}(J, I)$ 等于集合

$$\{(J, x_1, \ldots, x_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}} \mid (J, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \text{ 是 } I \text{ 模 } J \text{ 的极小 cl-约化，其中某个 } x_k\}.$$

证明. 首先，我们证明任意形如 $(J, x_1, \ldots, x_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}}$ 的理想 K 都属于 $\mathcal{F}_{\mathrm{cl}}(J, I)$。由于 $I = (J, x_1, \ldots, x_k) + I^{\mathrm{clsp}}$ 且 $\mathfrak{m}I \subseteq I^{\mathrm{clsp}}$，可知 $\lambda(I/K) = 1$，实际上，I/K 由 x_k 的像张成。为说明 K 是 cl-闭的，注意根据命题 9.8，我们有 $x_k \notin K^{\mathrm{cl}}$。另一方面$K^{\mathrm{cl}} \subseteq I^{\mathrm{cl}} = I$，且 $I \setminus K$ 中的每个元素模 K 都同余于 x_k 的一个单位倍数。这表明K 是 cl-闭的。

反之，我们需要证明每个理想 $K \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{cl}}(J, I)$ 都具有所给形式。我们只需证明，存在 $x_1, \ldots, x_{k-1}$，使得对于某个 x_k 的选择，$(J, x_1, \ldots, x_k)$ 是 I 的一个极小 cl-约化，并且 $(Jx_1, \ldots, x_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}} \subseteq K$。有了这个包含关系，该等式将如下成立

$$\dim\left(\frac{K}{\mathfrak{m}I + J}\right) = \dim\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I + J}\right) - 1 = k - 1 + \left(\frac{I^{\mathrm{clsp}} + J}{\mathfrak{m}I + J}\right)$$

并且命题 9.9 表明这等于下列对象的维数

$$\frac{(J, x_1, \ldots, x_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}}}{\mathfrak{m}I + J}.$$

任选 $L = (J, x_1, \ldots, x_k)$ 作为 I 模 J 的一个极小 cl-约化。由于 K 是 cl-闭的，$L \nsubseteq K$。由于 $\lambda(I/K) = 1$，可知 $K + L = I$，因此 $\lambda(L/(K \cap L) = \lambda((K + L)/K) = 1$。于是，我们可以为 L/J 选择生成元，使得

$$(J, x_1, \ldots x_{k-1}, \mathfrak{m}x_k) \subseteq K, \quad x_k \notin K.$$

因此，x_k 的像生成 I/K。

我们仍需证明 $I^{\mathrm{clsp}} \subseteq K$。令 $z \in I^{\mathrm{clsp}}$。不妨设 $z \notin K$，并寻求矛盾。由于 $z \notin K$，因此 $z \equiv ux_k$模K，其中 u 是 R中的单位。注意到

$$\begin{aligned} I &= (J, x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{cl}} \\ &= (K + (J, x_1, \ldots, x_k))^{\mathrm{cl}} \text{ (Since } (J, x_1, \ldots x_{k-1}, \mathfrak{m}x_k) \subseteq K \subseteq I), \\ &= (K + (z))^{\mathrm{cl}} \text{ (Since } z \equiv ux_k \mathrm{mod} K), \\ &\subseteq (K + I^{\mathrm{clsp}})^{\mathrm{cl}} \text{ (Since } z \in I^{\mathrm{clsp}}). \end{aligned}$$

现在根据定义 9.6(4)，我们看到 $I \subseteq K^{\mathrm{cl}} = K$，这就产生了矛盾。 □

定理 9.12。设（R，$\mathfrak{m}$）是一个诺特局部环，cl 是满足以下性质的中山闭包：所有强 cl-独立理想在 R中都有 cl-特殊部分分解。设 I 是一个 cl-闭理想。假设 I 的 cl-扩张度为 k。则 I 的所有 cl-预约化组成的集合为

$$\mathbf{P}_{\mathrm{cl}}(I) = \{(y_1, \ldots, y_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}} \mid (y_1, \ldots, y_k) \textit{ a minimal } \mathrm{cl}\textit{-reduction of } \mathrm{I}\}.$$

证明。首先我们将证明：如果 $J = (x_1, \ldots, x_k)$ 是 I的一个极小 cl-约化，并且 $y_1, \ldots, y_k$ 是 J的任意极小生成集，那么（$y_1, \ldots, y_{k-1}$）$+ I^{\mathrm{clsp}}$ 是一个 cl-预约化。注意到

$$(y_1, \ldots, y_{k-1}) + y_k\mathfrak{m}$$

是一个 cl-预约化　根据命题 3.2，J。由定义 9.6 (2)，我们有 $y_k\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}I \subseteq I^{\mathrm{clsp}}$，这意味着

$$(y_1, \ldots, y_{k-1}) + y_k\mathfrak{m} \subseteq (y_1, \ldots, y_{k-1}) + I^{*\mathrm{sp}}.$$

根据定理 9.11，$(y_1, \ldots, y_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}}$ 是 cl-闭的，且

$$\lambda(I/((y_1, \ldots, y_{k-1}) + I^{\mathrm{clsp}}) = 1.$$

换言之， I是 $(y_1,\dots,y_{k-1})+I^{\mathrm{clsp}}$的非 cl-覆盖。由于

$$(y_1,\dots,y_{k-1})+I^{\mathrm{clsp}}+(y_k)=I$$

且 I是 cl-闭的，则由命题 7.5 (2) 可知，$(y_1,\dots,y_{k-1})+I^{\mathrm{clsp}}$是 I的 cl-预约化。

现在假设 $\mathfrak{a}$是 I的 cl-预约化。我们需要证明 $\mathfrak{a}=(x_1,\dots,x_{k-1})+I^{\mathrm{clsp}}$，其中 $(x_1,\dots,x_k)$是 I的极小 cl-约化。首先证明 $\mathfrak{a}$的极小 cl-约化有 $k-1$个生成元。由于 $\mathfrak{a}$是 I的 cl-预约化，$\mathfrak{a}^{\mathrm{cl}}\subsetneq I^{\mathrm{cl}}=I$, 但对于任意 $x\in I\setminus\mathfrak{a}$，$(\mathfrak{a},x)^{\mathrm{cl}}=I$。假设 $J=(x_1,\dots,x_\ell)$是 $\mathfrak{a}$的极小 cl-约化。由于对于任意 $x\in I\setminus\mathfrak{a}$,

$$I=(\mathfrak{a},x)^{\mathrm{cl}}=(J^{\mathrm{cl}}+(x))^{\mathrm{cl}}=(J+(x))^{\mathrm{cl}}=(x_1,\dots,x_\ell,x)^{\mathrm{cl}}$$

那么 $(x_1,\dots,x_\ell,x)$是 I 的 cl-约化，对任意 $x\in I\setminus\mathfrak{a}$均成立。由于 I 的 cl-扩张度为 k，因此 $\ell\geq k-1$。

注意，对任意 i，$(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_\ell)$都不是 $\mathfrak{a}$ 的 cl-约化。假设 $\ell>k-1$ 且

$$(x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_\ell,x)\text{ is a cl-reduction of }I$$

对每个 $x\in I\setminus\mathfrak{a}$以及某个 i，那么 $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_\ell)^{\mathrm{cl}}$是 I的 cl-预约化。然而，由于 $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_\ell)^{\mathrm{cl}}\subseteq\mathfrak{a}$，因此必有 $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_\ell)^{\mathrm{cl}}=\mathfrak{a}$，因为 $(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_\ell)^{\mathrm{cl}}$和 $\mathfrak{a}$ 都是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(I)$ 的元素，且它们都必须是 $\mathrm{I}'_{\mathrm{cl}}(I)$ 中的极大元素。这与 J 是 $\mathfrak{a}$ 的极小 cl-约化相矛盾。因此 $\ell\leq k-1$。

现在我们需要证明 $I^{\mathrm{clsp}}\subseteq\mathfrak{a}$。假设 $x\in I^{\mathrm{clsp}}\setminus\mathfrak{a}$。根据 cl-预约化的定义，由于 $\mathfrak{a}+(x)$是 I 的一个 cl-约化，因此对于 $\mathfrak{a}$ 的任意一个极小 cl-约化 $(x_1,\dots,x_{k-1})$，我们有 $(x_1,\dots,x_{k-1},x)^{\mathrm{cl}}=(\mathfrak{a}+(x))^{\mathrm{cl}}=I$。然而，这意味着 $(x_1,\dots,x_{k-1},x)$是 I 的一个极小 cl-约化，这与命题 9.8 矛盾。□

下面两个推论可直接由定理 9.12 得出。

推论 9.13。设 $(R,\mathfrak{m})$是一个特征为 $p>0$ 的局部优异正规环，且 I 是一个紧闭理想。假设 I 的 $*$-重数为 k。那么， I 的所有 $*$-预约化的集合为

$$\mathbf{P}_*(I)=\{(y_1,\dots,y_{k-1})+I^{*\mathrm{sp}}\mid(y_1,\dots,y_k)\ a\ minimal\ *\text{-}reduction\ of\ I\}.$$

推论 9.14。设 $(R,\mathfrak{m})$是一个特征为 $p>0$ 的局部优异正规环，且 I 是一个 Frobenius 闭理想。假设 I 的 F-扩张度为 k。那么 I 的所有 F-预约化的集合为

$$\mathbf{P}_F(I)=\{(y_1,\dots,y_{k-1})+I^{F\mathrm{sp}}\mid(y_1,\dots,y_k)\ a\ minimal\ F\text{-}reduction\ of\ I\}.$$

References

[CFH22] Alessandra Costantini、Louiza Fouli 和 Jooyoun Hong, *Residual Intersections and Core of Modules*, arXiv:2205.13721, 预印本, 2022。[CPU01] Alberto Corso、Claudia Polini 和 Bernd Ulrich, *The structure of the core of ideals* **321** 2001 1, , 数学年刊 () , 第 – 期 89 105, [02] CPU Alberto Corso、Claudia Polini 和 Bernd Ulrich, *Core and residual intersections of ideals*, 《美国数学会汇刊》 354 (2002), 第 7 期, 2579–2594。[CPU03] Alberto Corso、Claudia Polini 和 Bernd Ulrich, *Core of projective dimension one modules*, 《数学手稿》111 (2003), 第4期, 427–433。[Eps05] Neil Epstein, *A tight closure analogue of analytic spread*, 《剑桥哲学学会数学会刊》 139 (2005), 第 2 期, 371–383。[Eps10] Neil Epstein, *Reductions and special parts of closures*, 《代数杂志》323 (2010), 第 8 期, 2209–2225。[ERG12] Neil Epstein 和 Rebecca R. G., *Closure-interior duality over complete local rings*, 《落基山数学杂志》51 (2021), 第 3 期, 823–853。[ERV23a] Neil Epstein、Rebecca R. G. 和 Janet Vassilev, *Nakayama closures interior operations and core-hull duality* - , , , 《代数杂志》 () , –。 *with applications to tight closure theory* **613** 2023 46 86 [ERV23b] Neil Epstein、Rebecca R. G. 和 Janet Vassilev, *Integral closure basically full closure and duals of nonresidual* , , , 《纯粹与应用代数杂 *closure operations* **227** 2023 4, 107256 志》 () , 第 Paper No. 期。[ERV23c] Neil Epstein、Rebecca R. G. 和 Janet Vassilev *How to extend closure and interior operations to more modules*, arXiv:2302.00238, 预印本, 2023。[FPU08] Louiza Fouli、Bernd Ulrich 和 Claudia Polini, *The core of ideals in arbitrary characteristic*, 《密歇根数学杂志》57 (2008), 305–319, 纪念 Melvin Hochster 的特刊。[FV10] Louiza Fouli 和 Janet Vassilev, *The cl-core of an ideal* **149** 2010 2, , 《剑桥哲学学会数学会刊》 247 262 () , 第 – 期。[FVV11] Louiza Vouli、Janet Vassilev 和 Adela Vraciu, *A formula for the $*$-core of an ideal*, 《美国数学会会刊》139 (2011), 第 12 期, 4235–4245。

[HH90] Melvin Hochster 和 Craig Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, 《美国数学会杂志》3 (1990), 第 1 期, 31–116。[HRR02] William Heinzer、Louis Ratliff 和 David Rush, *Basically full ideals in local rings* **250** 2002 1, , 《代数杂志》 371 396 (), 第 – 期。[HS95] Craig Huneke 和 Irena Swanson, *Cores of ideals in 2-dimensional regular local rings*, 《密歇根数学杂志》42 (1995), 第 1 期, 193–208。[HT05] Craig Huneke 和 Ngˆo Viˆet Trung, *On the core of ideals*, 《组合数学》141 (2005), 第 1 期, 1–18。[HV03] Craig Huneke 和 Adela Vraciu, *Special tight closure*, 《名古屋数学杂志》170 (2003), 175–183。[KRS20] Patricia Kemp、Louis Ratliff 和 Kishor Shah, *Prereductions of ideals in local rings*, 《代数通讯》48 (2020), 第 7 期, 2798–2817。[Moh97] Radha Mohan, *The core of a module over a two-dimensional regular local ring*, 《代数杂志》189 (1997), 第 1 期, 1–22。[NR54] Douglas Northcott 和 David Rees, *Reductions of ideals in local rings*, 《剑桥哲学学会数学会刊》50 (1954), 145 — 158。[PU05] Bernd Ulrich 和 Claudia Polini, *A formula for the core of an ideal*, 数学年刊331 (2005), 第 3 期, 487–503。[Ree87] David Rees, *Reduction of modules*, 《剑桥哲学学会数学会刊》101 (1987), 第 3 期, 431–449。[RS88] David Rees 和 Judy Sally, *General elements and joint reductions*, 《密歇根数学杂志》35 (1988), 第 2 期, 241–254。[Vas14a] Janet Vassilev, $\mathfrak{m}$*-full and basically full ideals in rings of characteristic p*, 《落基山数学会杂志》44 (2014), 第 2 期, 691 — 704。[Vas14b] Janet Vassilev, *When is a Nakayama closure semiprime?*, 《交换代数杂志》6 (2014), 第 3 期, 439–454。[Vra02] Adela Vraciu, $*$*-independence and special tight closure*, 《代数杂志》249 (2002), 第 2 期, 544 — 565。[Vra06] Adela Vraciu, *Chains and families of tightly closed ideals*, 《伦敦数学会通报》38 (2006), 第 2 期, 201–208。

Email address: spoiani@unm.edu, jvassil@unm.eduDepartment of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, NM