arXiv:2303.00147v1 [cs.CG] 1 Mar 2023

输出多项式时间内的无交叉哈密顿路径与回路

David Eppstein*

摘要

我们证明，对于平面点集，无交叉哈密顿路径的数量以不相交路径的数量为变量时有多项式上界，而无交叉哈密顿回路（多边形化）的数量以包围环的数量为变量时也有多项式上界。因此，我们可以分别通过筛选简单回溯算法生成的不相交路径或包围环，在关于输出规模的多项式时间内列出无交叉哈密顿路径或多边形化。为证明这些结果，我们将不相交结构的数量与点集的两个易于计算的参数联系起来：移除后可使点集共线所需的最少点数，以及凸包内部的点数。这些关系还导出了针对所有四类结构数量的多项式时间近似算法，其误差不超过这些数量的对数的一个常数因子。

1 引言

我们可以用多少种方式“连接这些点”，将平面上的点变成一个简单多边形的顶点？尽管这一问题已被广泛研究，答案仍不明确。Steinhaus 在 20 世纪 60 年代证明，一般位置点总至少存在一种多边形化 [32], 但这一条件过强：非共线性就足够了。处于凸位置的点只有一种多边形化；其他输入可能有指数多种多边形化，但目前的上界和下界相距甚远 [16, 31]。计算多边形化数量的复杂性尚不清楚 [13, 22, 24]。尽管可以在单指数时间内列出所有多边形化 [35, 37], 但在我们的工作之前，人们并不知道当多边形化数量较少时如何更快地列出它们，例如以每个输出使用多项式时间，或以关于输出规模的多项式时间完成列举。

我们的主要结果是：多边形化以及一种与之密切相关的结构——不相交哈密顿路径——都可以通过简单的回溯算法，在输出规模的多项式时间内列举出来。这些算法分别搜索更易列举的结构空间，即包围多边形 [37]和不相交路径。为证明这些新结果，在我们关于点集单调参数的研究基础上 [12], ，我们将四类结构（多边形化、包围多边形、不相交哈密顿路径和不相交路径）的数量，与两个易于计算且仅取决于点的序型的参数联系起来：移除最少数量的点后可得到共线子集，以及凸包内部的点数。这些关系表明，多边形化的数量至多是包围多边形数量的多项式，并且不相交哈密顿路径的数量至多是不相交路径数量的多项式。因此，对这些更易列举的结构执行算法时，

*计算机科学系，加利福尼亚大学欧文分校。研究部分得到美国国家科学基金会 CCF-2212129 号资助。

当其输出经过筛选、仅生成较难列举的结构时，仍将在输出多项式时间内完成。我们的方法还为这些结构的计数提供了一个多项式时间近似算法，并且相对于计数结果的对数，获得了一个常数近似比。

我们没有明确计算这些结构数量之间多项式关系的指数，因为我们的上界相当粗略。相反，在最后一节中，我们描述了若干点集，其不相交结构的指数数量可以精确计算。这些例子表明，以哈密顿路径数量为基准，路径的指数至少可以达到 $\log_2 3 \approx 1.585$；以多边形化数量为基准，包围多边形的指数至少可以达到 $\log_2\bigl((3+\sqrt{5})/2\bigr) \approx 1.388$。

我们证明的输出多项式时间界，不如将输出规模乘以输入规模的某个多项式的时间界；而且更不如对每个输出结构都具有多项式延迟的算法。不过，我们的结果显著改进了先前已知的时间界：即使对于输出规模为次指数级的输入，先前的时间界仍是单指数级的。

1.1 相关工作

给定点作为顶点的平面直线图由以这些点为端点的线段组成，其中没有线段经过给定点，也没有两条线段相交，除非它们共享一个端点。当对所得图的形式施加限制时，就会得到各种类型的不相交结构，包括三角剖分（无交叉极大平面图）、无交叉生成树和多边形化（无交叉哈密顿回路）。离散几何和计算几何领域开展了大量研究，旨在求出不相交结构数量的上界和下界，并研究针对给定点集对这些结构进行计数或枚举的算法问题，或寻找在某个目标函数下最优的不相交结构的问题 [2–4, 8, 11, 15, 16, 19, 22, 29–31]。这类问题中有许多都存在用于枚举所有图的算法，每个输出所需的时间为多项式时间；这些算法基于一系列局部变换，将状态空间连接成一个连通结构 [1, 5, 7, 20, 33, 35–37]。

然而，对于多边形化和无交叉哈密顿路径，目前尚无已知的此类结构；众所周知，每次改变两条或三条边的自然局部变换系统无法连接所有多边形化 [18]。某些多边形化的推广，其状态空间可通过局部变换连通 [9, 37], ，但这并不能直接为多边形化带来快速算法，因为这些状态空间中包含许多非多边形化对象。正如 Welzl 在 2011年的一篇综述中所总结的：“基本上，对于相关的算法问题（确定给定点集的简单多边形化数量、枚举所有简单多边形化），我们一无所知” [34]。最短的多边形化就是 NP难的欧几里得旅行商回路 [28], ，其他几种最优多边形化也同样是 NP难的 [10, 14]；最长多边形化的复杂度则是另一个未知问题 [11]。

关于无交叉哈密顿路径的既有研究包括最长路径的近似算法 [3, 11]，以及着色点集存在适当着色路径的结果 [6]。无交叉哈密顿路径的数量可能从共线点情形下的一个，到指数级数量不等；例如，$n \geq 2$ 个处于凸位置的点恰有 $n2^{n-3}$ 条路径 [27]。

我们在多边形化算法中使用的包围多边形是另一类平面直线图：它们是以输入点的一个子集为顶点、并包含所有输入点的简单多边形。Yamanaka 等人 [37] 引入了这些多边形，并展示了如何以每个多边形多项式时间的开销列出它们，由此推导出列出多边形化所需的单指数时间界和多项式空间界。尽管取得了这些进展，他们仍未能为多边形化获得输出敏感的时间界。我们在这里沿用他们的算法，并对其进行新的输出敏感分析。

Yamanaka 等人还证明，在多边形化数量和包围多边形数量的最坏情况指数界中，指数底数相差不到 1；然而，这一分析并不能推出我们更强的结果：对于任意实例，这两类多边形的数量彼此都以多项式为界。我们最后一节中的示例从理论上证实了 Yamanaka 等人的实证结果，即多边形化和包围多边形的增长速度可能不同。

2 两种简单的回溯算法

本节概述两种简单的算法（一种是标准的回溯搜索，另一种是 Yamanaka 等人提出的反向搜索算法 [37]），用于枚举不相交路径和环绕环。我们将使用这两种已知算法，证明枚举不相交哈密顿路径和多边形化的新时间界。本节将这些界表述为定理，并将证明留待后续各节给出。

定义 1. 对于点集 S，将经过其中部分点、端点位于 S 且仅在 S 中的点处转弯的无自交折线 P 定义为一条*不相交路径*。将不相交路径的*顶点*定义为集合 $P \cap S$；即使路径 P 直线穿过 S 中的某个点，也将该点计为顶点。对于平面上的给定点集，将不相交路径中的顶点序列定义为*不相交路径序列*，其中也包括仅含一个顶点的序列和空序列。令 $|S|$ 表示 S中点的数量，#path(S) 表示顶点属于 S的不相交路径数量，#ham(S) 表示 S的不相交哈密顿路径数量。

每条不相交路径对应两个序列（分别对应其顶点可以排列的两种端到端顺序）。我们可以将不相交路径序列作为节点构造一棵有根树，其中空序列为根节点；对于任意其他序列，将其父节点定义为删除最后一个顶点后得到的子序列。通过对这棵树执行深度优先搜索，可以在每个序列耗时多项式时间内列出所有不相交路径序列。只要稍加注意，快速列出每个节点的子节点，就可以将其缩短为每个序列耗时线性时间：

子程序 2（列出不相交路径序列的子节点）。 要查找以点 p 结束的不相交路径序列 σ 的子节点：

- 应用 Lee 的简单基于栈的线性时间算法，确定路径最后一个顶点的可见多边形V，即平面中该顶点可以通过一条不与现有路径 [21]相交的线段连接到另一个点的区域。
- 令 U 为不在 σ中的点集，并求 U 绕 p的径向排序。遇到距离相同的情况时，只保留其中距离 p 最近的点。
- 归并 U 和 V 的径向排序，以确定对于 U中的每个点 u，从 p 穿过 u的射线所穿过的 V 的边。
- 每当归并过程发现点 u 比 V中对应的边更靠近 p 时，就将 u 拼接到 σ的末尾，生成一个子序列。

每个给定点周围所有点的径向排序列表可以在$O(|S|^2)$时间内预先计算并存储；从本质上说，这与构造并存储这些点的对偶直线排列是同一个问题。完成预处理后，该算法的所有步骤都可在 $O(|S|)$时间内完成。

子程序 3（列举所有不相交路径）。 要列举给定点集中的所有不相交路径，可对不相交路径序列构成的树进行深度优先搜索，并使用子程序 2 列举树中每个节点的子节点。对于搜索到的每个节点，只要序列的起始顶点的索引小于终止顶点的索引，就将其作为一条路径输出，这样每条不相交路径只会输出一次。对于点集 S，预处理时间为 $O(|S|^2)$，每条路径的处理时间为$O(|S|)$。路径数量始终为 $\Omega(|S|^2)$，即使对于共线点集也是如此，因为哈密顿路径总是存在，且其中包含那么多条路径，因此预处理时间被每条路径的处理时间所主导，总时间为 $O(|S| \cdot \#\text{路径}(S))$。

有了这些子程序，我们便可以通过以下非常简单的算法列出所有不相交哈密顿路径。

算法 4（列出不相交哈密顿路径）。 给定点集 S，列出其中所有不相交哈密顿路径：

- 通过子程序 3 列出所有不相交路径。
- 每当一条路径经过 S 中的所有点时，就将其作为一条不相交哈密顿路径输出。

定理 5. 对于点集 S （不假设其处于一般位置），算法 *4* 用时$(|S| \cdot \#\mathrm{HAM}(S))^{O(1)}$ 即可列出所有不相交哈密顿路径。

证明。 这由本文后文的定理 20 得出，该定理指出

$$\#\mathrm{PATH}(S) = \big(|S| \cdot \#\mathrm{HAM}(S)\big)^{O(1)}. \qquad \square$$

一种非常相似的树搜索也可用于多边形化，而非哈密顿路径。

定义 6. Yamanaka 等人 [37] 将点集 S 的**包围多边形** 定义为一种简单多边形：其顶点是该点集的一个子集，并包围所有这些顶点。这类多边形既包括多边形化（其中该子集为全部点），也包括其他多边形；特别地，凸包始终是一个包围多边形。定义 #surround(S) 为 S中包围多边形的数量，定义 #poly(S) 为 S中多边形化的数量。

Yamanaka 等人为包围多边形定义了一种树结构，其中根节点是凸包，而任意包围多边形的父节点都通过从其顶点的循环序列中移除一个顶点（以一种规范选定的方式）得到。根据多边形双耳定理的一个版本（通常归功于 G. H. Meisters，但 Max Dehn [17, 23]更早就已使用），所有不是凸包的多边形都有一个父节点。

子程序 7（列出包围多边形）。 正如 Yamanaka 等人 [37] 所述，通过对多边形树进行深度优先搜索，可以列出点集 S 的所有包围多边形，所需时间为每个多边形 $|S|^{O(1)}$，空间为 $O(|S|)$。该算法采用反向搜索 [5] 方法执行深度优先搜索，同时只维护数量有界的树节点的标识。

同样，我们可以 利用这一点列出所有多边形化，正如 Yamanaka 等人 [37已经做过的那样].

算法 **算法 8**（列出多边形化）。 要列出点集 S的所有多边形化：

- 使用子程序 7 列出所有包围多边形。
- 每当多边形使用了所有点时， S 就将其作为多边形化输出

Yamanaka 等人分析认为该算法的运行时间为单指数时间，但我们证明它实际上是输出敏感的：

定理 9。 对于点集 S （不假设其处于一般位置），算法 *8* 需要$\big(|S| \cdot \#\textsc{poly}(S)\big)^{O(1)}$ 的时间来列出所有多边形化。

证明。 这由本文稍后给出的定理 30 推出，该定理指出

$$\#\textsc{surround}(S) = \#\textsc{poly}(S)^{O(1)}.$$ □

3 路径计数

本节的主要结果是证明：对于任意点集，不相交路径的数量与不相交哈密顿路径的数量之间存在多项式关系。该结果结合了点集 S中不相交哈密顿路径数量的一个下界，以及不相交路径数量的一个上界；二者都表示为以下量的函数。

定义 10。 按照 [12], 定义 offline(S) 为满足以下条件的最小 k： 从 S 中移除 k 个点后，剩下一个共线子集。

下面关于二项式系数对数的标准界将会很有用。我们使用 log 表示自然对数，但底数的选择不会影响下面的引理，因为改变底数只会使对数相差一个常数因子。

引理 11。 对于满足 $k \le n/2$ 的整数 k 和 n，

$$\log \binom{n}{k} = \Theta\left(k \log \frac{n}{k}\right).$$

证明。 应用斯特林公式，取对数，并省略形如 $O(\log n)$ 的项，可得

$$\log \binom{n}{k} \approx \log \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} = k \log \frac{n}{k} + (n-k) \log \frac{n}{n-k}.$$

该表达式关于 k 和 $n-k$ 对称；当 $k \le n/2$ 时，这个近似算法的第一项较大。

□

3.1 上界

我们从最容易证明的上界开始研究不相交路径的界。已知路径的数量至多关于顶点数量 n 呈单指数增长；我们将证明一个更紧的界：它关于较小的数量 offline(S) 呈指数增长，而仅关于 n 呈多项式增长。

引理 12。 设 S 是一个包含 n 个点的集合，其中 $\textsc{offline}(S) = k$。则

$$\log \#\textsc{path}(S) = O\left(\log n + k \left(\log \frac{n}{k+1}\right)\right).$$

证明。 我们描述一种用这么多信息位对不相交路径进行编码的方法，使每条路径都能由该编码唯一确定。对于包含 b 信息位的编码，路径数量至多为 2^b，该数量的对数为 $O(b)$。设 K 为的一个子集，

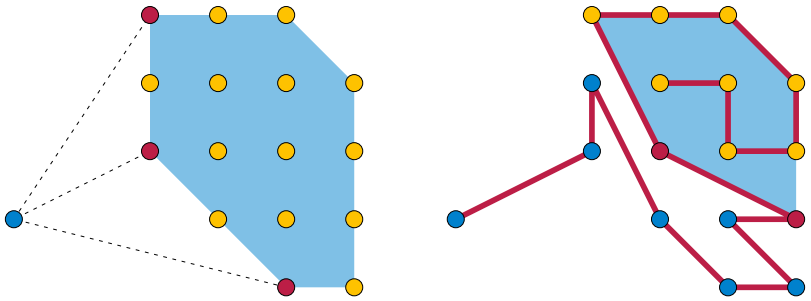


图1：左：一个点 p （蓝色）、一个点集 S （红色和黄色），以及从 p可见的 S 的顶点（这三个红色顶点）。请注意，位于凸包边上的 S 中的点不计作顶点。右：从 p出发、针对 $S \cup \{p\}$ 的一条极大可见顶点路径（红色边），展示其中一步对应的剩余点的凸包（浅蓝色）及其可见顶点（红色）。

满足 $|K| = k$，使得 $S \setminus K$ 位于直线 L上，并设 P 为 S中的任意一条给定的不相交路径。设 $\ell = |L \cap S|$；由于 k 是形成共线点集所需移除的最少点数，因此 K 中没有点位于 L上，并且 $\ell = n - k$。为描述 P，我们结合以下信息：

- $L \cap S$ 中属于 P、但在路径中至多有一个邻居属于 L的点集 Q。其中每个点要么是 K中某个点的两个邻居之一，要么是 P的两个端点之一，因此 $|Q| \le 2k + 2$。 Q 可以通过指定其大小以及从 $\binom{\ell}{|Q|}$ 种可能性中选出的、大小为该数值的 $L \cap S$ 子集来编码，因此根据引理 11，指定它所需的比特数为 $O\big(\log\ n + k + k \log(n/k)\big)$。（引理陈述中的 $\log\ n$ 项和 $+1$ 都包含在内，以处理 $k = 0$ 但 $|Q| > 0$的情况。引理 11仅适用于$k \le n/2$ 的情况；但对于更大的 k，待证明的界是超线性的，因此结论显然成立。）
- 对于 Q中的每个点，说明它是否在 L中有邻点；如果有，则说明邻点所在的方向。这需要 $O(k)$信息位。

  $P[K \cup Q]$诱导子图，即仅使用 $K \cup Q$中的点、并省略完全位于 L内的 P 边所构成的线性森林。与任何类型的平面直线图一样，在 $O(k)$个点上，线性森林的数量相对于 k [30]呈单指数增长，因此 $P[K]$ 可用 $O(k)$信息位进行编码。

然后，通过将诱导子图 $P[K \cup Q]$ 与 L 的线段相结合，即可恢复 P：这些线段以 Q 中的点为端点，并从这些点沿指定方向延伸。编码的所有部分合起来，所用的信息位数恰好达到编码整条路径所需位数的上述界限。

□

3.2 可见顶点路径

我们的下界将通过贪心方式构造路径，使得在每一步中，剩余未使用点的凸包都不与当前路径相交，并且从当前路径的端点可见。

定义 13. 从点 p （该点不在有限点集 S 的凸包内）出发，若凸包 S 的顶点 q 满足开线段 pq 与凸包 S 不相交，则称其为有限点集 S 的可见顶点 （图1，左）。我们不将凸包边上的内部点视为顶点，因此，即使线段 不与凸包相交，它们也不是可见顶点。

即使线段 pq 与凸包不相交，也不将它们视为顶点，尤其不视为可见顶点。

观察14。 每个非空有限点集 S 以及不在 S 的凸包中的点 p，从 p看去， S 至少有一个可见顶点。如果 $S \cup \{p\}$ 不共线，则至少有两个可见顶点。

将可见顶点路径 定义为由贪心算法构造的折线链：算法生成一个顶点序列，起始顶点可取凸包上的任意顶点；然后反复从序列的最后一个点观察，将尚未加入序列的剩余点中的一个可见顶点追加到序列中（图1右）。极大可见顶点路径 是包含给定点集 S中所有点的可见顶点路径；以下引理说明了这一名称的由来。

引理15。 每条可见顶点路径都是一条不相交路径。每条极大可见顶点路径都是一条无交叉哈密顿路径。每条非极大可见顶点路径都可以扩展为更长的可见顶点路径。

证明。 根据定义，极大可见顶点路径是哈密顿路径：它们被定义为使用所有点的路径。由于可见顶点路径中的每一步都是局部定义的，不考虑路径的更早部分，因此，根据观察14，每条非极大路径都可以扩展，这一点是显然的。

剩下要证明的是，由此得到的路径不相交。对于路径的每条线段 pq，下一条线段都与 q 相接，因此不可能与 pq相交。下一条线段之后的所有线段都位于 q之后剩余点的凸包内。由于 p 和 q 分别是其所在凸包的顶点，路径中它们之后的点的凸包不包含它们。此外，线段 pq 不与该凸包相交，因为如果相交，则 q 将无法从 p处看见。因此，这些后续线段与闭线段 pq 不相交（作为闭线段），所以既不能与 pq 相交，甚至也不能穿过 q。因此， pq 不可能与任何后续线段相交。对于路径中的每一对线段，只需将这一论证应用于其中较早出现在路径中的线段，即可排除相交的可能性，因此不存在相交。

□

引理16. 对于每个有限点集 S，凸包上的任意两个顶点 p 和 q 都可以作为一条无交叉哈密顿路径的端点。

证明. 从 p 开始构造一条极大可见顶点路径，每一步都尽可能选择一个可见且不是 q 的顶点。根据观察14，只要剩余点尚未共线，路径就会有两个点可供选择（其中一个不是 q）。一旦剩余点共线，所有不属于 q 的剩余点都将位于 q 与路径当前末端之间，因此在 q 成为最后一个剩余点之前，无法将其纳入路径。

□

3.3 远离共线的点集的下界

为了根据 offline(S) 给点集 S 中无交叉哈密顿路径的数量给出下界，我们分两种情况讨论：offline(S) 较大的情况（至少与 $|S|$的某个常数因子成正比）和较小的情况。以下引理适用于所有非共线 S，但只有在较大的情况下才是紧的（与对数相差一个常数因子）。

引理 17. 对于不在同一条直线上的每个点集 S，无交叉哈密顿路径的数量至少为 $\frac{3}{2} \cdot 2^{\text{OFFLINE}(S)}$.

证明。 我们构造一棵由可见顶点路径组成的树 T，其中根节点为空顶点序列，而任意非空路径的父节点由删除其最后一个顶点得到（图2）。根据引理15，

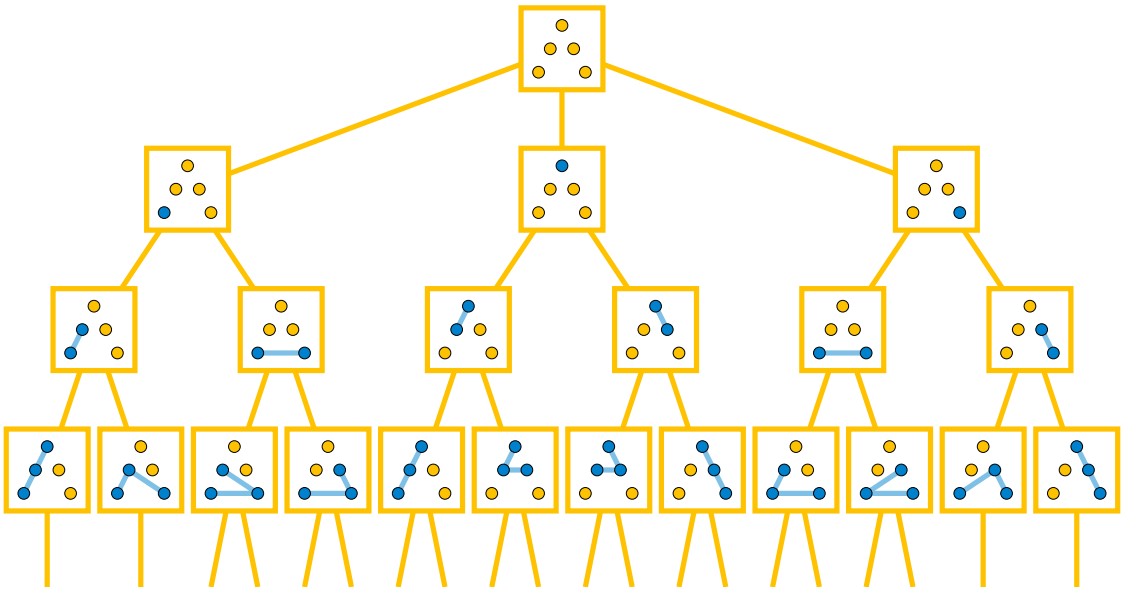


图 2：点集中可见顶点路径构成的树，其中每条路径的父节点是移除其最后一个点后得到的路径。该点集具有 offline(S) $= 2$。根节点和接下来的两层节点各有多个子节点，但图中所示的最后一层有些节点只有一个子节点，因为路径上的最后一个点与所有剩余点共线。

T 的叶节点都是无交叉哈密顿路径。T 的根节点至少有三个子节点（凸包的每个顶点对应一个）。在 T 中，距离根节点至多为 offline(S) 的节点，其所代表路径的最后一个点与其余点不共线，这是由 offline 的定义得出的。由观察14可知，这些节点至少有两种可见顶点可供选择，因此它们至少有两个子节点。

在一棵根节点至少有三个子节点、且接下来的 offline(S) 层中每个节点至少有两个子节点的树中，T 至少有 $3 \cdot 2^{\text{OFFLINE}(S)}$ 个叶节点。每个叶节点对应一条无交叉哈密顿路径，而每条无交叉哈密顿路径至多对应两个叶节点（每个端点各对应一个，前提是两个端点都是凸包顶点）。因此，至少有 $\frac{3}{2} \cdot 2^{\text{OFFLINE}(S)}$ 条无交叉哈密顿路径。 □

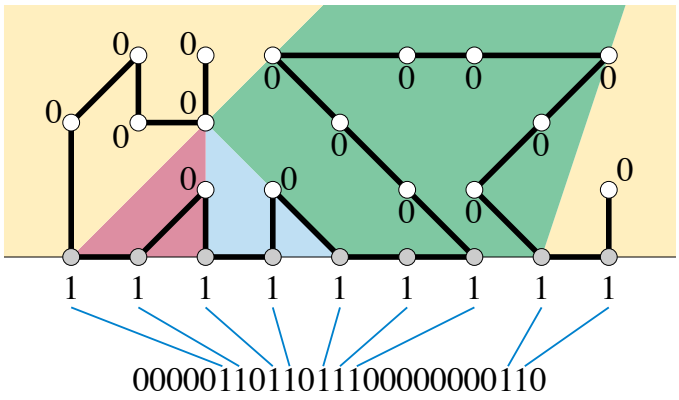
3.4 近共线点集的下界

尽管下一个引理仅适用于一类特殊的点集，但它是我们在 offline(S) 较小时证明下界的关键。

引理 18. 设 S 是一个点集，满足 $|S| = n$；其中 S 中的 ℓ 个点位于直线 L 上，其余点都位于该直线的同一侧。那么

$$\#\text{HAM}(S) \geq \binom{n - \lceil \ell/2 \rceil}{\lfloor \ell/2 \rfloor}.$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $\ell \geq 2$；否则，引理只说明存在一条无交叉哈密顿路径，而这已知为真。为方便起见，考虑一种平面定向，使 L 为水平的，且 S 位于 L 上方的闭半平面内。我们将通过构造许多无交叉哈密顿路径来证明引理，其中点的


0 0 0

3.5 将这些界限结合起来

将两个不同的下界合并为一个公式，我们得到：

引理 19. 设 S 是一个包含 n 个点的集合，且满足$\textsc{offline}(S) = k$. 那么

$$\log \#\textsc{ham}(S) = \Omega\left(k\left(\log \frac{n}{k+1}\right)\right).$$

证明。 对于任意 k，由引理 17 可知，无交叉哈密顿路径的数量的对数为 Ω(k)。当 $k \geq n/3$时，log(n/k) = O(1)，因此对于这一范围内的 k，这个 Ω(k) 界限等价于定理中所述的界限。

对于较小的 k，设 K 是 S 中任意一个点集，移除它后剩下一个大小为 Ω(n) 的共线点集，其中包含 k 个点；这些点位于直线 L上。将 K 划分为两个子集 K_1 和 K_2，分别位于 L的两侧，且 $|K_1| \geq |K_2|$；令 $|K_1| = k' \geq k/2$。设 p 是沿这条直线按点的顺序排列时， $S \cap L$中的第一个点；设 $\ell' = \ell - 1$ 是 $S \cap L$中剩余点的数量，并令 $n' = \ell' + k'$。由引理 18 可知，从 p 出发的 $S \setminus K_2$ 的无交叉哈密顿路径数量至少为

$$\binom{n' - \lceil \ell'/2 \rceil}{\lfloor \ell'/2 \rfloor} = \binom{\lfloor \ell'/2 \rfloor + k'}{k'}.$$

每条这样的路径都可以通过拼接一条经过 p 和 K_2 中各点的不相交路径，将其扩展为经过 S 中所有点的无交叉哈密顿路径。根据 $k < n/3$ 这一假设，右侧二项式系数的下项至多为上项的一半，因此可以应用引理 11。由该引理，以及 $k' = \Theta(k)$ 和 $\ell' = \Theta(n)$ 这两个事实可知，这个二项式系数的对数为 $\Omega\big(k\log(n/k)\big)$ ，如所述。 □

虽然引理 12 的上界与引理 19 的下界并不完全相同，但我们可以将二者结合起来，从而以常数因子近似不相交路径数（或哈密顿路径数）的对数。

定理 20. 给定一个点集 S,

$$\#\textsc{path}(S) = \big(|S| \cdot \#\textsc{ham}(S)\big)^{O(1)}.$$

证明。 对两边取对数后，等价地可写为

$$\log \#\textsc{path}(S) = O(\log |S| + \log \#\textsc{ham}(S)).$$

根据引理 19 和引理 12，可立即得出这一结论：log #ham(S) 的下界和 log#path(S) 的上界（分别）都与某些公式相差一个常数因子，而这两个公式之间仅相差一个加法项 log $|S|$ 。 □

4 计数环

为了对一般位置点集的包围环和多边形化进行计数，我们使用以下参数来代替 offline(S)（一般位置假设使其变得平凡）：

定义 21. 令 inhull(S) 表示 S 中位于 S的凸包内部的点数。

对于不假定处于一般位置的点集，我们将结合 offline 和凸包内点数进行分析，以计算其环和多边形化。

4.1 上界

我们对包围环和多边形化的界，采用了与路径界类似的论证。引理 12。一个关键观察（对环绕环成立，但对路径不成立）是：不与内部点相连的凸包顶点具有可预测的行为：

观察 22. 对于点集 S 的环绕环，S 的凸包中的每个顶点都是该环的顶点，而环上任何一条以两个凸包顶点为端点的边都必须是凸包边。

证明。 根据定义，凸包顶点不可能位于凸包内部或一条边的内部，因此它们要被环绕，唯一的方式就是成为环的顶点。凸包顶点之间的任何其他线段都会阻断线段两侧的所有可见性。若不相交环使用了这样的线段，其顶点就只能位于线段的一侧，因此不可能包含位于另一侧的 S 凸包顶点。

□

引理 23. 设 S 是一个由 n 个点组成的点集，其凸包内点数$(S) = h$。那么

$$\log \#\textsc{surround}(S) = O\left(h\left(\log\frac{n}{h}+1\right)\right).$$

证明。 与引理 12 中一样，我们描述一种用这么多个信息位对环绕环进行编码的方法，使得每个环都能由该编码唯一确定。令 H 为 S 的凸包顶点集，$I = S \setminus H$ 为内部点集，C 为我们要描述的环绕环。为了描述 C，我们结合以下几部分信息：

- 属于 C 的 H 中的点集 Q，但其凸包中的邻点至多有一个属于 C。这样的点至多有 $2h$ 个（I 中每个点有两个邻点）。Q 可通过指定其大小以及从 H 中选出的同等数量的子集来编码，共有 $\binom{n-h}{|Q|}$ 种可能，因此根据引理 11，指定它所需的信息位数为 $O\big(h + h\log(n/h)\big)$。（若$|Q|$ 过大，以致引理 11 不适用，则情况显然成立，因为这会使我们正在证明的界变成超线性。）

  对于 Q 中的每个点，说明它是否有一个邻点；如果有，则说明邻点所在的方向。这需要 $O(h)$ 个信息位。（当 Q 中的点在 H 上与 $H \setminus Q$ 中的一个点相邻时，这些信息是冗余的，因为所有这样的点对都必须是邻点；但当 Q 中包含 H 中多个连续的点时，则需要这些信息。）

- 诱导子图 $C[I \cup Q]$ 是一个循环或线性森林，仅使用 $I \cup Q$ 中的点。与任何类型的平面直线图一样，$O(h)$ 个点上的线性森林数量关于 h [30] 为单指数，因此 $C[I \cup Q]$ 可用 $O(h)$ 个信息位编码。

接着，可以将诱导子图 $P[I \cup Q]$ 与凸包子序列结合起来恢复 C；这些子序列以 Q 中的点为起点和终点，并从这些点分别沿指定方向延伸。这种编码的所有部分加起来，恰好达到编码整条路径所需的信息位数上界。

□

花冠 **ry 24.** 设 S 是一个包含 n 个点的集合，且 $\min(\textsc{offline}(S)$,凸包内点数$(S)) = m$。该 n

$$\log \#\textsc{surround}(S) = O\left(m\left(\log\frac{n}{m}+1\right)\right).$$

证明。 当 $m =$ inhull(S) 时，这就是引理 23。当 $m =$offline(S) 时，根据引理 12 可立即得出，因为每个环绕环都可以通过删除一条边转化为一条路径，而且这些路径中任意两条都不可能来自同一个环。

□

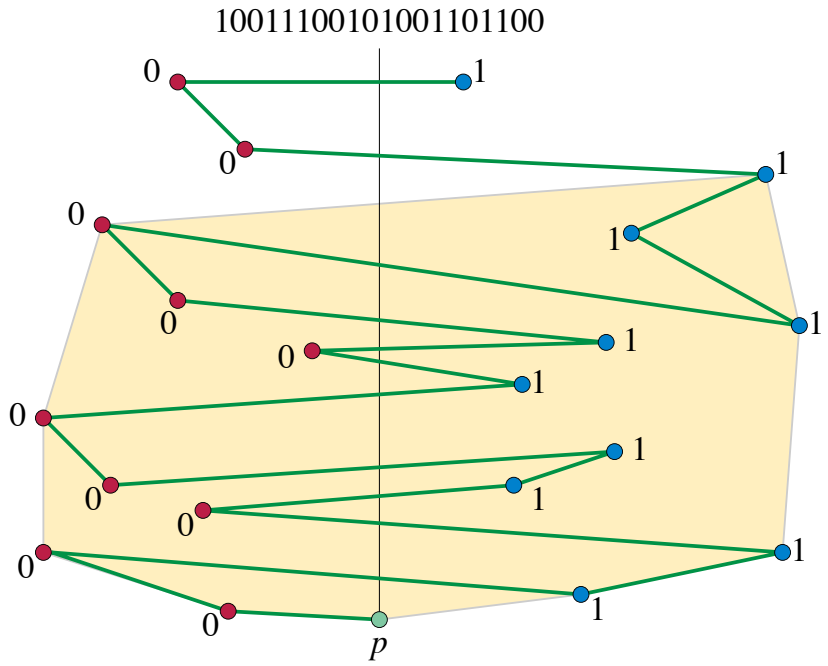


图 4：引理 25 的证明示意图：绿色的顶点可见路径以序列 $\sigma = 10011100101001101100$ 标记，表示图中所示的点；经过 p （底部的绿色点）的竖直直线将这些点分为 A （直线左侧的红色点）和 B （直线右侧的蓝色点）。图中还展示了序列进行到一半时剩余点的一个凸包；该路径抵达这个凸包的一条边的一个端点，而这条边的两个端点分别属于 A 和 B。

4.2 再探可见顶点路径

引理16证明了存在一条连接凸包上两个顶点的无交叉哈密顿路径，其构造基于可见顶点路径。为了证明多边形化的下界，我们需要许多这样的路径。作为预备，我们先给出所需界的一个适用于一般位置点集的版本。

引理 25。 设 S 是一组处于一般位置的 n 个点，且 p 是 S 的凸包的任意一个顶点。那么，至少存在 $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ 条不同的顶点可见路径，它们从 S 的凸包的其他顶点出发，并以 p 为终点。

证明。 我们假设 $n \geq 3$，否则引理显然成立。画一条经过 p 的直线 L，使其不经过 S 中的任何其他点，并将 $S \setminus \{p\}$ 分成两个子集 A 和 B，分别位于该直线的两个半平面内，其中$|A| = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 且 $|B| = \lceil (n-1)/2 \rceil$。对于每个可能的、含有 $|A|$ 0 个 0 和 $|B|$ 1 个 1 的 $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ 二进制序列 σ，我们将找到一条顶点可见路径 P_σ，其中每个 σ 中的 0 对应 A 中的一个点，每个 σ 中的 1 对应 B 中的一个点，并以 p 结束。

为此，我们将逐点构造这个序列。只要剩余的未选点中至少有一个点属于 A，且至少有一个点属于 B，直线 L 就会继续将 A 中的点与 B中的点分隔开。剩余点的凸包必定有一条“桥”边 e，其两个端点各属于一个集合； e 被 L穿过。在整个过程中，我们将维持以下不变量：目前构造出的序列，加上这条桥边 e 的两个端点中的任意一个，都能有效地加入一条顶点可见路径（不过只有其中一个会符合序列σ）。路径构造过程开始时，这个不变量自然成立；此时

目前构造出的路径为空，因为任意凸包顶点都可以有效地加入一条空的顶点可见路径。

在之后的每一步中，令 e 为桥边。根据不变量， e 的两个端点都可以作为路径中的有效新增顶点。我们选择属于由 σ的相应位确定的集合的那个端点：对应 0 位时为 A ，对应 1 位时为 B 。根据一般位置假设，所选端点可以看见 e的另一个端点，而后者属于另一个集合。如果它不是所在集合（A 或B）中的最后一个点，那么它还至少可以看见凸包上剩余点中的一个顶点，且该顶点属于同一个集合。由于它所能看见的凸包顶点必定构成凸包的一个连续子序列，因此它可以看见由 L 穿过的新桥边的两个端点，将 A 与B分开，并且不变量得以保持。

一旦 A 或 B 中的所有顶点都已纳入顶点可见路径，我们就可以按照引理16中的相同方式完成路径。由于可以根据这些路径使用 A 和 B中的顶点的顺序将它们彼此区分，因此它们互不相同。

□

图 4 展示了这一构造。我们需要的完整界限也采用类似思路，但必须处理不处于一般位置的点集。特别是，在按照引理 25 的证明部分构造一条路径后，我们可能会遇到这样的情况：被 L 穿过的剩余凸包边上包含许多点，因此其两个端点彼此不可见，而且无法通过移除少量点使它们变得可见。为处理这种情况，我们将对这条凸包边上的共线点应用引理 18（该引理能在包含许多共线点的点集中找到许多路径）。

引理 26。 设 S 是一个点集，任意一条直线上至多有 $|S|/6$ 个点。设 p 是 S 的凸包的任意一个顶点。那么，经过 S、从另一个凸包顶点出发并以 p 为终点的无交叉哈密顿路径数量，至少随 $|S|$ 呈单指数增长。

证明。 引理 25 中的过程可以重新解释为：在每一步中，非确定性地从 A 中选择一个点，或从 B 中选择一个点，直到其中一个集合中的点耗尽，然后以确定性方式完成路径。这样便产生了一棵包含各种可能选择的二叉树，而引理 25 的证明可以理解为对这棵树的分支进行计数。一种更简单、虽然不够紧致但仍呈指数增长的分析方法是注意到，在这棵树中，每次选择都会消耗 A 或 B中的一个点，而两组中的点数在开始时都约为 $n/2$。因此，决策树的高度（即从根节点到任一分支中选择耗尽为止所需的最少步数）约为 $|S|/2$，而分支数至少为 $2^{|S|/2}$。我们将把这一过程推广到允许非二元选择的情形，并使用决策树高度的加权定义，其中每一步的权重是该步骤可用选择数量的二进制对数。如果我们能够证明，每一步消耗若干个 x 点时，可供选择的数量都关于 x呈指数增长，那么该步骤的权重将与 x 成正比，而决策树的总高度也将再次关于 $|S|$呈线性增长，这意味着它同样具有指数数量的分支。完成这些概括后，剩下的问题是说明如何推广引理 25 中的非确定性决策过程，使得每当我们消耗许多点时，都能从数量相对于已消耗点数呈指数增长的选项中进行选择。

我们以与引理 25 的证明中完全相同的方式定义直线 L 以及点的子集 A 和 B，它们的初始大小约为 $|S|/2$。我们将通过一系列步骤构建一条通往 p的不相交路径，覆盖 S中的所有点。它不一定是一条可见顶点路径，但我们将在每一步之后保持与引理 25 中相同的不变量。具体而言，迄今构建的路径将始终与剩余点的凸包不相交（因此，剩余点内的任何不相交路径在全局上也将是不相交的）；并且只要 A 和 B 都

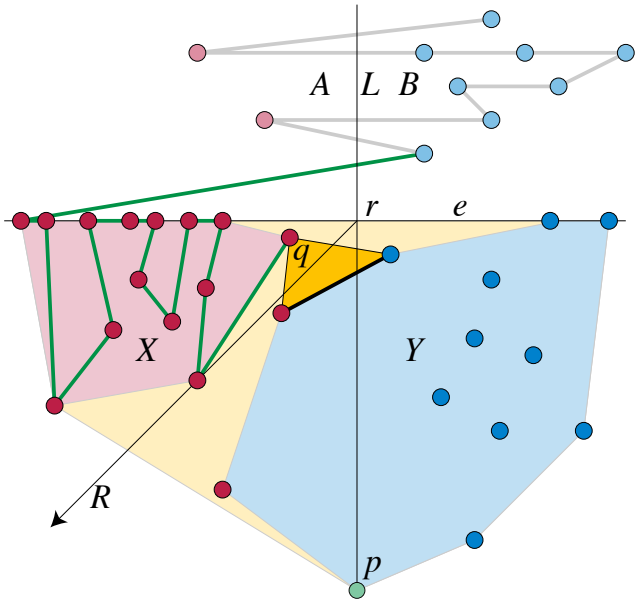


图5：引理 26 中边 e 上有许多点的情况。

非空，剩余点的凸包中唯一的 A–B 边 e 将从已添加到路径中的最后一个点完全可见，因此，e 上的任何点都可以作为路径上的下一个点加入。我们区分以下情形：

- 如果 A 或 B 中剩余的点少于 $|S|/3$ 个，就停止做出选择，并以确定性的方式完成路径的其余部分。
- 如果 $A \cap e$ 和 $B \cap e$ 都很小（至多有三个点），我们就用一条线段将当前路径延伸至 e 的两个端点之一；然后（如果沿着 e 的可见性被同一集合中的另一个点阻挡），再用更多线段延伸至一个或两个阻挡点。这种情况会产生两种选择（延伸至 e 的哪个端点），并且最多用掉 A 或 B 中的三个点。根据与引理 25 相同的推理，这样可以保持不变量。
- 否则，$A \cap e$ 或 $B \cap e$ 中至少有一个较大（至少有四个点）。我们描述 $A \cap e$ 较大的情况；$B \cap e$ 较大的情况是对称的。令 $x = |A \cap e|$ 为凸包的边 e 上属于 A 的点数。令 r 为 L 与 e 的交点。从 r 作一条射线 R，将尚未位于路径上的剩余点分成两个子集 X 和 Y，使得 $(A \cap e) \subset X$ 和 $|X| = 2x$，并以打破平局的方式确保 X 和 Y 的凸包保持不相交。由于 $x \leq |S|/6$ 个点位于一条直线上，且 A 中至少还有 $|S|/3$ 个点，因此 $X \subset A$，射线 R 完全位于直线 L 的 A 一侧。在图5中，e、r 和 R 已标出；$x = 7$，而 X 是由 14 个点组成的子集，其凸包以红色阴影区域表示。蓝色阴影区域是 Y 的凸包。

  在 X 的凸包顶点中，至少有一个顶点（即 $A \cap e$ 中距离 r 最近的点）可以沿着凸包外部的一条线段，看见 $B \cap Y$ 中的一个点，即边 e 上最近的点。此外，X 在 R 上的凸包顶点中，至少有一个可以沿着凸包外部的一条线段，看见 $A \cap Y$ 中所有其余的点。因此，X 的凸包上位于这两个凸包顶点之间或与其重合的某个顶点 q，可以看见 Y 凸包唯一的 A–B 边。例如，可以通过对 X 的凸包之间的区域进行三角剖分，并选择这条边上的三角形顶点来选取 q

和 Y，并选择这条边上三角形的顶点。图5展示了一种情况： q 既不能位于 e 上，也不能位于 R 上。

我们将从当前端点延伸当前路径，使其经过 X 中的所有点，并终止于 q；路径从当前端点延伸至 $X \cap e$ 的两个端点之一（在图中，是距离 r 最远的那个端点）。由于 e 将 Y 与新增线段中的第一条分隔开来，其余新增线段都位于 X 的凸包内，而 R 又将 X 和 Y 的凸包分隔开来，因此这次延伸保持了如下不变量：目前为止的路径与剩余点集 Y 的凸包不相交。由于 q 是一个可以看到 Y 凸包的 A–B 边的点，因此这次延伸也保持了如下不变量：沿着这条边的任意点都可以在下一步加入路径。

根据引理 18，经过 X 且以 $X \cap e$ 的两个极点为起点和终点的路径数量关于 x 呈指数增长。然而，我们需要的路径是从 $X \cap e$ 的一个极点出发并终止于 q 的路径。为了给出这类路径数量的指数级下界，我们采用引理 18 证明中的相同方法：考虑长度为 $2x$ 的避免 010 的序列，其中每个 0 表示路径上属于 $X \cap e$ 的一个点，每个 1 表示路径上属于 $X \setminus e$ 的一个点。然后，可以用引理 18 中的方法将每个这样的序列实现为一条路径；该方法会为序列中每个连续的 1 位区块构造一个与之对应的 $X \setminus e$ 凸子集。为了得到一条从 $X \cap e$ 的极点出发并终止于 q 的路径，对应的避免 010 的序列必须且只须在一端有一个 0（表示起始极点），并且在另一端有一个足够长的连续 1 位区块，使 q 包含在该区块中。这里，“足够长”取决于 X 的排列；但只有当 $X \setminus e$ 中的某个点在围绕 $X \cap e$ 的一个极点的径向排序中比 q 更靠外时，该点才会增加所需区块的长度；而一旦它增加了所需长度，就不能同时增加另一个极点对应的所需区块长度。因此，对于 $X \cap e$ 的某一个极点，至少有 $x/2$ 个 1 位可以在避免 010 的序列中任意出现，而不必被限制在序列末尾的连续 1 位区块中。这足以产生指数多个避免 010 的序列，以及指数多个终止于 q 的路径延伸。

每一步都会产生若干种选择，其数量关于该步所用掉的点数呈指数增长，直到我们至少用掉 $|S|/6$ 个点，并切换到确定性补全。因此，决策树的分支总数以及它能够生成的路径总数关于 $|S|$呈指数增长。

□

4.3 远离凸集的下界

正如我们现在要证明的，对于凸包内部有许多点且共线点较少的点集，其多边形化的数量必定很大。

引理27. 设 S 是一个由 n 个点组成的集合，任意一条直线上至多有 $|S|/7$ 个点，且凸包上至多有 $|S|/7$ 个点。那么， S 的多边形化数量至少关于 S呈单指数增长。

证明。 至少有 $6|S|/7$ 个点属于 S 的凸包内部，其中共线点的数量满足引理 25 的条件。根据引理 25，经过内部点子集、并以内部点凸包的一个顶点为起点和终点的不同无交叉哈密顿路径有指数级多个。还需论证，每条这样的路径 P 都有一个 C_P，按路径顺序使用 P 中的点。由于每两个多边形化

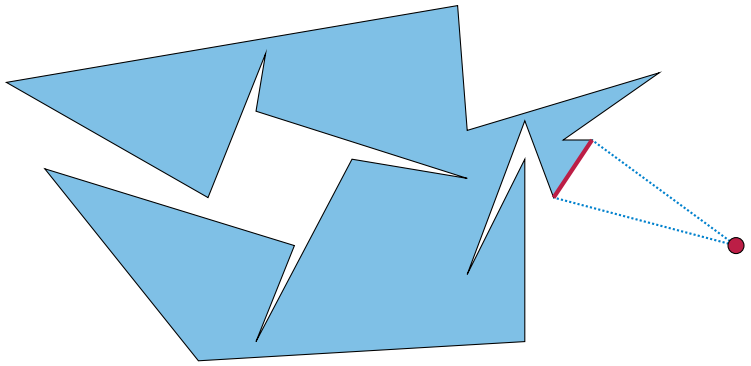


图 6：多边形化的 Steinhaus 补全：对于任何不包含给定凸包顶点 q （红色）的多边形（蓝色），总有一条多边形边对 q完全可见；将该边替换为经过 q [32]的两条边，即可修改多边形，使其包含 q 。

以这种方式构造的多边形化，其 S的内部点排列不同，因此它们是不同的多边形化。

因此，取一条穿过内部点子集的任意无交叉哈密顿路径 P，其起点和终点均为内部点凸包的一个顶点。对内部点的凸包与 S的凸包之间的区域进行三角剖分，并从三角剖分中各取一条边延伸 P 的两端；这些边必定连接到 S的凸包顶点，且彼此不会相交。如果它们没有相交，则沿着 S 的凸包边从延伸路径的一个端点绕行至另一个端点，将延伸后的路径补成一个多边形。令 Q 为所得的简单多边形。在大多数情况下， Q 不会是 S的包围多边形，但 Q 中缺少的点仅为 S的一些凸包顶点。

现在，我们应用 Steinhaus [32] 的一个论证来证明，可以将 Q 补全为一个多边形化C_P，同时保留 Q中已有点的循环次序。按照任意顺序，逐一考虑凸包 S 上尚未包含在 Q中的每个点 q 。由于 q 位于凸包上，它不可能被一个边环包围，而环中的每条边都部分遮挡下一条边：从 q观察，Q中各边的可见性次序是无环的。因此， Q 中至少有一条边对q完全可见。将这条边替换为经过 q 的两条边（把由这条边和 q 构成的三角形粘到多边形上；见图 6）。以这种方式粘入所有剩余的凸包顶点后，所得结果便是 S的一个多边形化。

□

4.4 近凸点集的下界

对于凸包内部点较少的点集，我们可以得到一个多边形化数量的下界，其形式类似于引理 18 中针对近共线点集的哈密顿路径所给出的下界。证明的主要思路相同：将内部点划分为一系列凸区域，这些区域与凸包上互不相邻的边相关联（而非与直线上的边相关联），并证明每种此类划分都能表示为一种多边形化。不过，与引理 18 相比，我们需要格外谨慎，以确保与某条凸包边相关联的凸区域不会阻挡通往其他凸包边及其对应区域的可见性。为此，我们用一条直线将输入划分开来，使凸区域位于直线一侧，而与之相关联的凸包边位于另一侧。这样，凸包边与凸区域之间的可见性就不会受到阻挡。这部分下界的证明不需要一般位置假设。

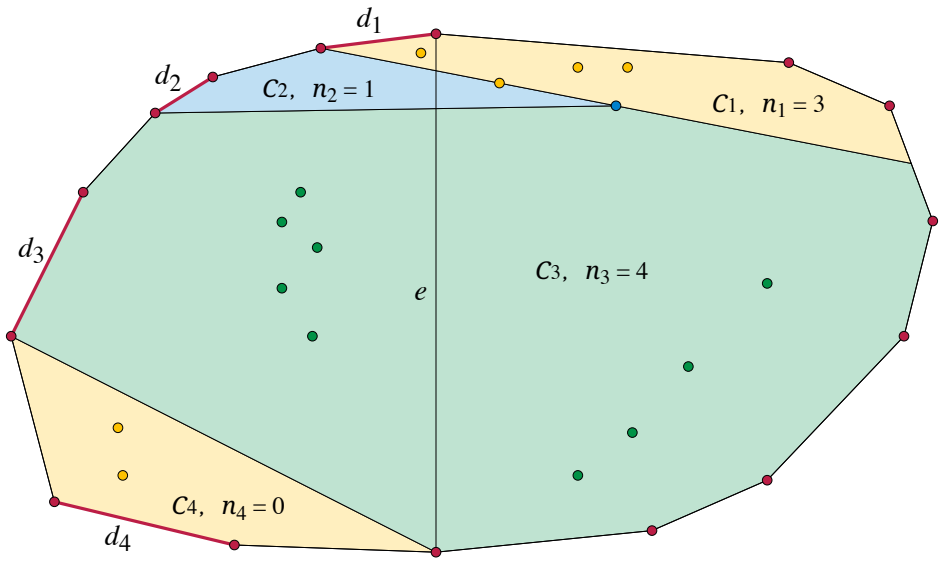


图7：将 S 的凸包划分为与线段 d_i相关联的凸区域 C_i，用于引理28的证明

引理 28。令 S 为一个点集，满足 $|S| = n$，且 S 中的 h 个点位于其凸包上（可以是顶点，也可以位于其边上）。那么

$$\#\mathrm{HAM}(S) \geq \binom{\lfloor h/4 \rfloor + \lceil (n-h)/2 \rceil - 1}{\lceil (n-h)/2 \rceil}$$

证明。 S 的凸包上的点将其划分为 h 条线段。考虑任意一条对角边 e，它将这些线段划分为两个长度相等或近乎相等的子序列；任意选择 e 的一个端点作为第一个端点，另一个作为第二个端点。 e 的两侧中至少有一侧包含至少 $\lceil (n-h)/2 \rceil$ 个不在凸包上的点（如图7右侧所示）；令 I 表示这个点集。在 e的另一侧，我们可以找到 $\lfloor h/4 \rfloor$ 条互不相交的凸包线段；令 $D = d_1,\ d_2,\ \ldots$ 表示这些线段组成的序列，按从 e 的第一端点到 e 的第二端点的顺序排列（如图7左侧红色所示）。

我们将 S 凸包的内部划分为凸区域 C_i，每个凸区域都与线段 d_i 相关联并包含该线段（图7中的四个彩色区域，内部点按其所属区域着色）。给定这样的划分，我们可以根据引理16，通过用一条穿过 C_i 中非凸包点的哈密顿路径替换每条线段 d_i，构造出一种多边形化，从而对凸包进行修改（形成一个包围多边形）。设 $n_i = |I \cap C_i|$；那么，以此方式构造的多边形在 d_i 的端点之间有 n_i 个 I 点，因此可以将其与来自具有不同 n_i 值的划分的任何多边形区分开来。数值 n_i 均为非负数，且其和为 $|I|$；和为 $|I|$ 的非负数 n_i 的选取方式数，至少等于引理中的二项式系数（如果 D 或 I 大于其最小值，则可能更多）。接下来需要证明，每一种这样的选取都可以由一个凸划分表示，因此也可以由一种多边形化表示。

与引理 18 中一样，我们按照序列顺序，通过贪心过程构造这些凸集 C_i。在每一步中，我们都保持这样一个不变量：尚未分配给某个凸集的剩余点位于一个凸集 K_{i-1} 内，该凸集由输入点的凸包与一个半平面相交而成，并且 K_{i-1} 至少包含 e中的一个点。图中未显示这些凸集 K_i，但可以重建为 C_j 的并集，其中 $j > i$。作为基例，令 K_0 为

所有给定点的凸包。为构造 C_i，我们考虑以下几种情况。

- 如果 d_i 是序列 D中的最后一条线段，则令 $C_i = K_{i-1}$。图中， C_4 就是通过这种情况构造的。

- 如果 d_i 不是最后一条线段，但对于 $j > i$ ，所有线段 d_j 都具有 $n_j = 0$，则令 p_i 为 d_i的第二端点。作直线 L_i ，使其经过 p_i 和 e的第二端点，并沿 L_i将 K_{i-1} 切分为两个凸子集。令 C_i 为包含 d_i 的子集，令 K_i 为另一个子集。将直线 L_i上的任意点分配给 C_i 。

- 如果 $n_i = 0$，则从同一点 p_i向 $e \cap K_{i-1}$上距离 e的第一端点最近的点作 L_i。与前一种情况一样，沿 L_i 将 K_{i-1} 切分为 C_i 和 K_i，并将 L_i 上的点分配给 C_i。图中， C_3 就是通过这种情况构造的。

- 在剩余情况下，按照围绕 q的径向顺序为 $I \cap K_{i-1}$ 中的点编号；若出现并列，则优先选择距离 q较近的点；然后作直线 L_i ，使其经过 q 以及该编号序列中位置为 n_i 的点。沿 L_i 将 C_{i-1} 切分为两个凸子集 C_i 和 K_i，其中 C_i 包含 d_i 和 K_i。对于位于 L_i上的点，将编号为 n_i 的点及任何更近的点分配给 C_i，将任何更远的点分配给 K_i。例如，在图中，直线 L_1 上有两个内部点；较近的黄色点标记为 $n_1 = 3$，并被分配给 C_1，而较远的蓝色点被分配给 K_1 ，之后又被分配给 C_2。

这样，构造恰好将 n_i 个 I 的点分配给凸区域 C_i。这些区域对 S的凸包进行划分，使得凸包的所有内部点（无论它们是否属于 I）都恰好属于其中一个区域。每一种分配都可用于构造一个不同的多边形化，且分配数量至少为引理中给出的值。

□

4.5 综合各项界

将我们的下界合并为一个公式，可得：

Lem定理29。设 S 是一个含有 n 个点的集合，且$\min(\text{OFFLINE}(S)$，凸包内点数$(S)) = m$。该 n

$$\log \#\text{POLY}(S) = \Omega\left(m\left(\log\frac{n}{m} + 1\right)\right).$$

证明。 我们考虑以下几种情况：

- 如果 inhull(S) $\leq 6n/7$，则结论由引理28得出。特别地，当 S 中最大共线点集的大小为 $\geq n/7$ 且该点集属于凸包时，这一结论适用。

- 如果 S 中最大的共线点子集大小为 $\geq n/7$ ，但它不是凸包的一部分，那么令 L 为经过该子集的直线。由于 L 不位于凸包上， $S \setminus L$在 L的两侧都有点，其中一个半平面内至少有 $m/2$ 个点。根据引理 18，经过 L 中的点和该半平面内的点、且以 L的两个极点为起点和终点的哈密顿路径数量，达到或超过本引理陈述中的下界。根据引理16，这些哈密顿路径中的每一条都可以补全为一个经过由 L界定的另一个半平面内各点的多边形化。

- 在剩下的情形中， S 中最大的共线点子集大小为 $< n/7$ ，且凸包内点数(S) $\geq 6n/7$。在此情形下， $m = \Omega(n)$，引理的界可简化为$\Omega(n)$。由引理27可得结论。

由于 所有情形下的多边形化数量都至少达到所述数量，因此该界成立 .

对于 Ω(*i*) 的界，应用引理27；当 $i \leq n/2$ 时，对于 Ω(*i*log n/i)，应用引理28；在这两种情况下，都使用引理 11 来估计二项式系数的对数。 □

由于推论 24 的上界与引理 29 的下界具有完全相同的形式，我们可以得到环绕环数量和多边形化数量的对数的常数因子近似。对于多边形化枚举算法复杂度的界，我们需要将其表示为以下形式：

定理 30。 对于给定的点集 S,

$$\#\textsc{surround}(S) = \#\textsc{poly}(S)^{O(1)}.$$

5 非线性

本节研究不相交路径的多项式界的指数如何随不相交哈密顿路径的数量变化，以及包围环的多项式界的指数如何随多边形化的数量变化。在这两种情况下，我们都证明：对于不相交构型数量呈指数增长的输入，该指数与 1 相距有界。这尤其意味着，我们所研究的用于哈密顿路径和多边形化的回溯算法，在某些情况下可能被迫花费关于每个输出而言随输入规模呈指数增长的时间，尽管其关于输出规模仍为多项式时间。

路径和哈密顿路径的构造非常简单：

定理31. 存在一些点集 S，使得

$$\#\textsc{path}(S) \geq \#\textsc{ham}(S)^{\log_2 3 - o(1)} \approx \#\textsc{ham}(S)^{1.585}$$

而且其中不相交路径的数量以及不相交哈密顿路径的数量都关于 $|S|$ 呈指数增长。

证明. 我们可以令 S 处于凸位置。若一个处于凸位置的点集 S 有 n 个点，则它有 $n2^{n-3}$ 条不相交哈密顿路径 [27], ，但

$$\frac{n}{4}(3^{n-1}+3)$$

不相交 路径总数为，其中将单个顶点视为一条长度为零的路径 .

这两个界都可以通过简单的着色论证证明（图8）。对于无交叉哈密顿路径，考虑将这些点着成红色和蓝色的 2^n 种方式，以及选择起点的 n 种选择。对于每种选择，沿着一条路径前进：在每个红色点处顺时针走向下一个可用顶点，在每个蓝色点处则逆时针前进。每条无交叉哈密顿路径恰好对应八种选择：路径可以从任一端开始，而且最后两个顶点的颜色无关紧要。因此，路径的数量为 $n2^n/8$。

对于不相交路径的界，我们改为考虑将点染成红色、蓝色和黄色的 3^n 种方式，并在选择起点以及考虑路径后续步骤中哪些顶点可用时，都跳过黄色点。在一种染色中循环置换颜色，会将 3^n 种染色分成 3^{n-1} 个轨道；每个轨道的红色或蓝色起点总数为 $2n$，因此共有 $2n \cdot 3^{n-1}$ 种选择。同样，除单顶点路径外，每条路径恰好对应八种选择；而单顶点路径仅对应两种选择。路径总数可通过将 $2n \cdot 3^{n-1}$ 除以八，并根据单顶点路径的数量进行调整来得到。

□

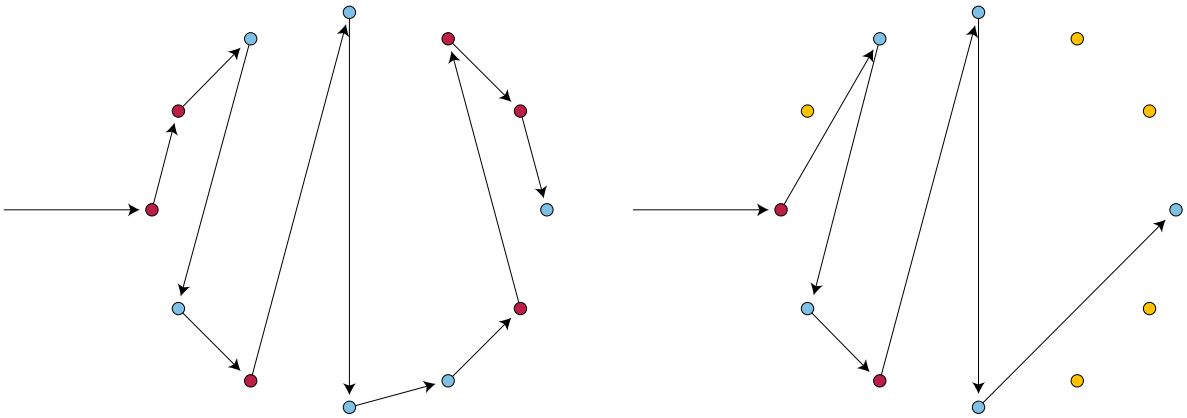


图 8：基于着色的论证，用于计算凸位置点集的不相交路径和哈密顿路径的数量。对这些点进行任意二着色并选择一个起点，就能确定一条无交叉哈密顿路径，其中颜色决定下一步的方向；对这些点进行任意三着色并选择一个起点，就能确定一条路径，跳过其中一种颜色的顶点。

对于包围多边形与多边形化之间类似的区分，我们在三角形内部，用一条由 $n-2$ 条边组成的凸链替换三角形的一条边（图 9）。该点集的多边形化可由穿过凸链上各点的不相交哈密顿路径得到，并将路径的两个端点都连接到不属于凸链的那个点（我们称其为 顶点）。连接顶点的边不能与任何其他边相交，因此所有哈密顿路径都能以这种方式生成多边形化。因此，根据上文已经使用过的同一公式，多边形化的数量恰好为 $(n-1)2^{n-4}$。

这些点的包围多边形必须以顶点为一个顶点（因为它位于凸包上）。它还必须将凸链上位于顶点的两个相邻点之外的所有点都包含为顶点。凸链上位于顶点的两个相邻点之间的点可以作为包围多边形的顶点，也可以省略；若省略，它们会自动被包围。我们可以用三个非负数来参数化一个包围多边形： a，凸链上位于顶点的两个相邻点之外的外部点数量； b，位于这两个相邻点之间且作为多边形顶点的内部点数量；以及 c，不是包围多边形顶点的省略点数量。必然有 $a+b+c=n-3$，因为这三个数所计数的点包括除顶点及其两个相邻点以外的所有点。

一旦选定了 a、 b和 c ，包围多边形本身还可通过另外三项选择来确定：如何将外部的 a 个点划分为左、右子集，共有 $a+1$ 种可能；如何沿多边形在外部点和内部点之间交替，共有 $\binom{a+b}{a}$ 种可能；以及如何将顶点的两个相邻点之间的点划分为内部点和省略点，共有 $\binom{b+c}{b}$ 种可能。因此，该点集的包围多边形总数为

$$\sum_{a+b+c=n-3} (a+1)\binom{a+b}{a}\binom{b+c}{b}.$$

当 $n=3$、4、5、.....时，这些数为

$$1, 4, 13, 40, 120, 354, 1031, 2972, 8495, 24110, \ldots,$$

一个序列，其生成函数为 $(1-2x)/(1-3x+x^2)^2$ ，且增长速度与$n(\varphi+1)^n$成正比，其中 $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例 [26]。此例证明：

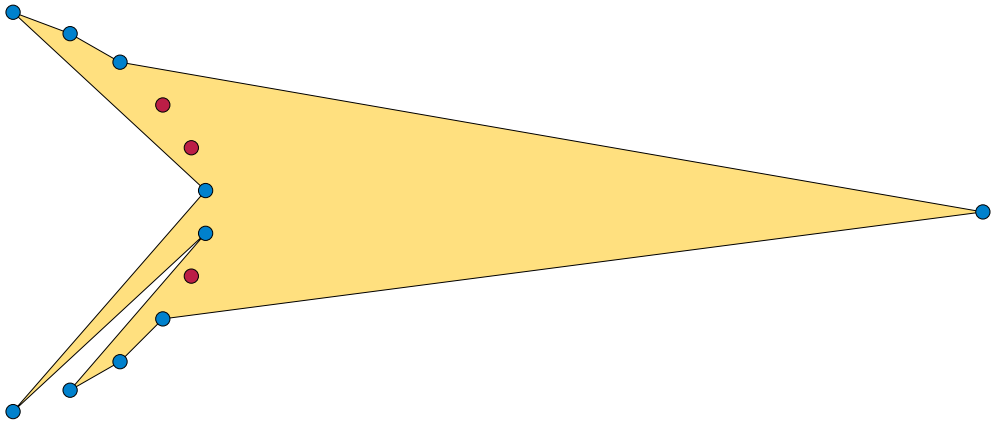


图9：通过将三角形的一条边替换为三角形内部的一条凸链所形成的点，以及这些点的一个包围多边形（黄色）。只有当点位于顶点（图中最右侧的点）的两个邻点之间时，才能将其省略为多边形顶点（红色）。

定理32。 存在一些 S 点集，使得

$$\#\textsc{surround}(S) \geq \#\textsc{poly}(S)^{\log_2(\varphi+1)-o(1)} \approx \#\textsc{poly}(S)^{1.388}$$

此外，对于这类点集，包围多边形的数量和多边形化的数量都关于 $|S|$ 呈指数增长。

6 结论

我们为一个点集中的所有不相交哈密顿路径和所有多边形化的枚举，设计了简单的输出敏感算法。然而，这些算法对输出规模的依赖是多项式的，而不是线性的。若能找到对输出规模具有更优依赖关系的替代算法，以及对不相交结构数量更精确的近似算法，将会非常有意义。

参考文献

[1] Oswin Aichholzer、Franz Aurenhammer、Clemens Huemer 和 Birgit Vogtenhuber。平面直线图的格雷码枚举。*Graphs Combin.*，23(5)：467–479，2007。doi：10.1007/s00373-007-0750-z。

[2] Miklós Ajtai、Vašek Chvátal、Monroe M. Newborn 和 Endre Szemerédi。《无交叉子图》。载于 Alexander Rosa、Gert Sabidussi 和 Jean Turgeon 编，《组合学理论与实践：纪念 Anton Kotzig 六十寿辰的论文集》，第 12 卷，《离散数学年刊》，第 9–12 页。North-Holland，1982 年。doi:10.1016/S0304-0208(08)73484-4。

[3] Noga Alon、Sridhar Rajagopalan 和 Subhash Suri。平面中的长无交叉构型。*Fund. Inform.*，22(4):385–394，1995。doi:10.3233/FI-1995-2245。

[4] Victor Alvarez、Karl Bringmann、Radu Curticapean 和 Saurabh Ray。通过洋葱层计数三角剖分及其他无交叉结构。《离散与计算几何》，53(4):675–690，2015。doi:10.1007/s00454-015-9672-3。[5] David Avis 和 Komei Fukuda。用于枚举的反向搜索。离散应用数学，65(1- 3):21–46，1996。doi:10.1016/0166-218X(95)00026-N。[6] Sayan Bandyapadhyay、Aritra Banik、Sujoy Bhore 和 Martin Nöllenburg。双色共线点上的几何平面网络。理论计算机科学，895:124–136，2021。doi: 10.1016/j.tcs.2021.09.035。[7] Sergei Bespamyatnikh。一种用于枚举三角剖分的高效算法。*Comput. Geom.Theory & Appl.*，23(3):271–279，2002。doi:10.1016/S0925-7721(02)00111-6。[8] Gi-Sang Cheon、Hong Joo n Choi、Guillermo Esteban 和 Minho Song。二部非交叉几何图的枚举。离散应用数学，317:86–100，2022。doi:10.1016/j.dam. 2022.04.008。[9] Mirela Damian、Robin Flatland、Joseph O'Rourke 和 Suneeta Ramaswami。通过拉伸和扭变连接多边形化。*Theory Comput. Syst.*，47(3):674–695，2010。doi: 10.1007/s00224-009-9192-8。[10] Erik D. Demaine、Sándor P. Fekete、Phillip Keldenich、Dominik Krupke 和 Joseph S. B. Mitchell。面积最优简单多边形化：CG 挑战赛 2019。*ACM J. Exp.Algorithmics*，27:Article 2.4，2022。doi:10.1145/3504000。[11] Adrian Dumitrescu 和 Csaba D. Tóth。平面中的长无交叉构型。《离散与计算几何》，44(4):727–752，2010。doi:10.1007/s00454-010-9277-9。[12] David Eppstein。离散几何中的禁形。剑桥大学出版社，2018。doi:10.1017/9781108539180。[13] David Eppstein。计数多边形三角剖分是困难的。《离散与计算几何》，64(4):1210– 1234，2020。doi:10.1007/s00454-020-00251-7。[14] Sándor P. Fekete。关于面积最优的简单多边形化。《离散与计算几何》，23(1):73–110，2000。doi:10.1007/PL00009492。[15] Philippe Flajolet 和 Marc Noy。非交叉构型的解析组合学。*DiscreteMath.*，204(1-3):203–229，1999。doi:10.1016/S0012-365X(98)00372-0。[16] Alfredo García、Marc Noy 和 Javier Tejel。关于 K_N的无交叉子图数量的下界。*Comput. Geom. Theory & Appl.*，16(4):211–221，2000。doi:10.1016/ S0925-7721(00)00010-9。[17] H. Guggenheimer。约当曲线定理与Max Dehn一篇未发表的手稿。*Archive for History of Exact Sciences*，17(2):193–200，1977。doi:10.1007/BF02464980。[18]Carmen Hernando、Michael E. Houle 和 Ferran Hurtado。具有可见性性质的多边形局部变换。理论计算机科学，289(2):919–937，2002。doi: 10.1016/S0304-3975(01)00409-1。

[19] Michael Hoffmann, André Schulz, Micha Sharir, Adam Sheffer, Csaba D. Tóth 和 E mo Welzl。平面图计数：可翻转性及其应用。载于 János Pach（编），《几何图论三十篇论文》，第303–325页。施普林格，2013年。doi:10.1007/978-1-4614-0110-0_16.[20] Naoki Katoh 和 Shin-Ichi Tanigawa。非交叉几何图的快速枚举算法。《离散与计算几何》，42(3):443–468，2009年。doi:10.1007/s00454-009-9164-4.[21] D. T. Lee。简单多边形的可见性。*CVGIP*，22(2):207–221，1983年。doi:10.1016/ 0734-189x(83)90065-8.[22] Dániel Marx 和 Tillmann Miltzow。剥离与啃食仙人掌：用于计数三角剖分及相关问题的亚指数时间算法。载于 Sándor P. Fekete 和 Anna Lubiw（编），第*32*届国际计算几何研讨会，*SoCG 2016*，*2016*年*6*月*14*日至*18*日，波士顿，马萨诸塞州，美国，第51卷《LIPIcs》，第52:1–52:16页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2016年。doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2016.52.[23] G. H. Meisters。多边形有耳。《美国数学月刊》，82(6):648–651，1975年。doi:10.2307/ 2319703.[24] Joseph S. B. Mitchell 和 Joseph O'Rourke。计算几何专栏第42期。《国际计算几何与应用杂志》，11(5):573–582，2001年。doi:10.1142/S0218195901000651.[25] OEIS贡献者。数列A180562。《在线整数数列百科全书》，2014年3月26日。URL: https://oeis.org/A180562.[26] OEIS贡献者。数列A238846。《在线整数数列百科全书》，2021年11月24日。URL: https://oeis.org/A238846.[27] OEIS贡献者。数列A001792。《在线整数数列百科全书》，2022年4月13日。URL: https://oeis.org/A001792.[28] Louis V. Quintas 和 Fred Supnick。关于最短哈密顿回路的一些性质。《美国数学月刊》，72(9):977–980，1965年。doi:10.2307/2313333.[29] Andreas Razen 和 Emo Welzl。指数级加速计数平面图。载于 Cris- tian S. Calude、Grzegorz Rozenberg 和 Arto Salomaa（编），《计算机科学彩虹：献给 *Hermann Maurer* 七十岁寿辰》，《计算机科学讲义》第6570卷，第36–46页。施普林格，2011年。doi:10.1007/978-3-642-19391-0_3.[30] Micha Sharir 和 Adam Sheffer。平面图计数：跨图收费方案。《组合学、概率与计算》，22(6):935–954，2013年。doi:10.1017/S096354831300031X.[31] Micha Sharir、Adam Sheffer 和 Emo Welzl。平面图计数：完美匹配、生成圈与Kasteleyn技术。《组合理论杂志*A*辑》，120(4):777–794，2013年。doi:10.1016/j.jcta.2013.01.002.[32] Hugo Steinhaus。《初等数学一百题》。Basic Books，1964年。参见第17、85–86页。[33] Shin-Ichi Tanigawa。非交叉几何图的枚举。载于《算法百科全书》，第638–640页。施普林格，2016年。doi:10.1007/978-1-4939-2864-4_729。

[34] Emo Welzl。平面点集的简单多边形化计数。载于第*23*届加拿大计算几何年度会议论文集，多伦多，安大略省，加拿大，*2011*年*8*月*10*日至*12*日，2011年。URL: https://www.cccg.ca/proceedings/2011/papers/invited3.pdf.[35] Manuel Wettstein。无交几何图的计数与枚举。计算几何杂志，8(1):47–77，2017年。doi:10.20382/jocg.v8i1a4.[36] Ro-Yu Wu、Jou-Ming Chang、Kung-Jui Pai 和 Yue-Li Wang。凸位置下生成平面路径的摊销效率。理论计算机科学，412(35):4504–4512，2011年。doi:10. 1016/j.tcs.2011.04.017.[37] Katsuhisa Yamanaka、David Avis、Takashi Horiyama、Yoshio Okamoto、Ryuhei Uehara 和 Tanami Yamauchi。包围多边形的算法枚举。离散应用数学，303:305–313，2021年。doi:10.1016/j.dam.2020.03.034。