arXiv:2303.00148v1 [math.AC] 1 Mar 2023

# 邻接类条件与诱导理想图

SABA AL-KASEASBEH 和 JIM COYKENDA LL

Abstract. 本文考察了一些自然的理想条件，并说明如何定义图来直观呈现这些条件。我们考察乘法理想理论与相关图的图论结构之间的相互作用。我们研究这些图在标准环扩张下的性质，并结合相关理论，得出了一些经典结果和联系。

## 1. Introduction and Background

近年来，人们对交换代数中适合采用图论方法研究的各个方面给予了广泛关注。这一近期研究兴趣中图与交换代数之间相互作用的某些渊源，或许可以按时间顺序追溯至论文 [6] 和 [2]。Anderson-Livingston 的论文定义了如今更为常用的零因子图概念，并推动了大量关于交换代数与图论之间相互作用的研究。我们回顾一下，交换环 $R$的零因子图的顶点集定义为非零零因子的集合，并规定当且仅当 $ab = 0$ 时， $a$与 $b \in R$ 之间存在一条边。在 [2] 中证明了以下重要定理:

定理 1.1. 设 $R$ 为含幺交换环， $Z(R)$为其零因子 r
图。则 $Z(R)$ 是连通的，且直径小于或等于 3。

作者认为，这一定理乍看之下并不显然，并且认为任何含幺交换环的零因子图都必然具有如此良好的结构，实在令人惊叹。

这些研究启发了众多作者提出许多问题并开辟了多条研究方向。例如，第二作者和 J. Maney 在 [9] 中引入了不可约因子图的概念。研究表明，许多分解性质，如唯一分解或半阶乘性质，都可以从不可约因子图的性质中看出。此外，众多作者还研究了零因子图的各种变体，例如[9] 、 [8], 和 [1]。这三篇文献中， [8] 与本文主题尤为相关，因为本文揭示了整环中原子性的细微变体如何体现于相关图的连通性。其他研究则聚焦于零因子图及其变体的各种性质（感兴趣的读者可参阅 [4], [5], [17] 等文献）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13C05，13A15，13C13。*Key words and phrases.* 诺特，SFT。

除零因子图之外，自 1990年代以来，交换代数与图论交叉领域也涌现了大量研究。在具有影响力的论文 [20], 中，研究了 Cohen-Macaulay 图，并且（除其他结果外）揭示了与某个复形相关的多项式环的理想的无混合性，与该环模去此理想所得商环的 Cohen-Macaulay性质之间存在紧密联系。在 [18] 中，研究者借助（并结合）与相关环自然关联的图的组合性质研究 Rees 代数；而在 [21] 中，边理想得到发展和探讨。近期关于边理想的研究（众多成果中的两项）包括 [13] 和 [14]。简言之，交换代数中的组合方法，尤其是图论与交换代数之间的相互作用，在其相对短暂的发展历程中已硕果累累，并且仍是一个极具潜力的研究领域。

在本文中，我们采用一种略有不同的方法；我们的动机是通过为理想集合赋予一个图（有时会施加自然限制或采用略微变体），来深入了解交换环的理想结构。我们构造了三类图：第一类用于衡量 $R$ 中理想之间的邻接性或“接近程度”；第二类模拟理想类群以及 Anderson/Livingston 的零因子图的结构；第三类用于衡量理想的有限包含关系。

在第三节中，我们给出了邻接图，并就图的连通性建立了紧密联系。特别地，我们对所有图的连通性给出了完整分类，并对直径给出了有力的界。

在第四节中，我们定义了模拟 $R$ 的类群行为的图，其中 $R$ 是一个整环。在连通且完全的情形下，问题得到了解决；当 $R$ 是 Dedekind整环时，我们研究了该图的连通分支。

在第五节中，我们引入一种对经典零因子图进行推广的图，并（除其他结果外）将定理 1.1 表述为一个推论。

在第六节（也是最后一节）中，我们探讨“有限包含”图的概念。事实证明，这些图几乎总是连通的（例外情况是： $R$ 是准局部的，且其极大理想 $\mathfrak{m}$ 不是有限生成的）。在此，研究直径是一种富有成效的研究途径；我们还探讨了直径在标准扩张（多项式和幂级数）以及同态像下的变化。各节中均给出了若干旨在阐明问题的例子。

最后，我们介绍一些后文将用到的记号。若 $I$ 和 $J$ 是图的顶点，我们用记号 $I - J$ 表示 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。记号 $I \leftrightarrow J$ 表示 $I = J$，或者 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。后文中这一记号将很方便。

## 2. Ideal Theoretic Graphs

本节定义并论证几类由理想论性质决定的图。我们希望这些图是简单图（没有自环或重边），因此下文提到顶点 $u$ 和 $v$之间存在一条边时，默认条件是 $u$ 和 $v$ 不同。

一般来说，我们将交换环 $R$ 的理想集合 $X$ 视为顶点集合（在许多情况下， $X$ 将由所有理想或所有非零理想组成

$R$）。为了确定边集，我们令 $P(–, –)$ 为一个命题，并称不同的 $I$ 与 $J$ 之间存在一条边，当且仅当 $P(I, J)$ 为真。

现在我们给出三个定义，用以探讨本文所研究的各类理想图的不同变体。第一组定义以某种方式衡量 $R$ 中各理想之间的“接近程度”；这些定义旨在衡量／凸显 $R$ 的理想结构的稠密程度。

定义 2.1（邻接图）。设 $R$ 是一个含幺交换环。我们定义与 $R$ 相关的以下图。在所有情形中，顶点集均为 $R$ 的真理想；若理想 $I$ 与 $J$ 之间有一条边，则 $I \neq J$。

(0) 在 $GA_0(R)$ 中，当且仅当 $I$ 和 $J$ 是相邻理想时，我们称 $I$ 和 $J$ 之间有一条边。(1) 在 $GA_1(R)$ 中，当且仅当存在一个极大理想 $\mathfrak{M}$ 使得 $I = J\mathfrak{M}$ 时，我们称 $I$ 和 $J$ 之间有一条边。(2) 在 $GA_2(R)$ 中，当且仅当 $(I :_R J) = \mathfrak{M}$ 是一个极大理想时，我们称 $I$ 和 $J$ 之间有一条边。

接下来的定义旨在反映理想乘法和类结构的概念。图 $GCl_{int}(R)$ 和 $GCl(R)$ 旨在以图形方式表示理想类群的变体。 $GZ(R)$ 是 Anderson-Livingston 的零因子图在理想理论中的类比。去掉 $0$–理想后的 $GZ(R)$ 已在 [7] 中讨论，其中使用了“湮灭理想图”这一术语。我们将沿用这一术语，但为便于表述并保持统一，将使用所给的记号。

定义 2.2（理想乘法／类结构图）。设 $R$ 是一个含单位元的交换环。我们定义以下与 $R$相关的图。对于这些定义，顶点集是 $R$ 的非零理想集；对于$GZ(R)$，还要求这些理想是适当理想。如上所述，若理想 $I$ 和 $J$ 之间有一条边，则 $I \neq J$。

(1) 设 $R$ 是一个整环。对于 $GCl_{int}(R)$，当且仅当存在一个非零的 $a \in R$ 使得 $I = Ja$ 时，我们称 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。(2) 设 $R$ 是一个商域为 $K$ 的整环。在 $GCl(R)$ 中，当且仅当存在一个非零的 $k \in K$ 使得 $I = Jk$ 时，我们称 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。(3) 在 $GZ(R)$ 中，当且仅当 $IJ = 0$ 时，我们称 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。

最后一组定义涉及相对于某个初始理想有限生成（分别为主理想生成）的理想。这里的动机是研究交换环中理想之间可能存在的路径，其中每一步都可以“每次处理一个生成元（或有限个生成元）”。这些图中两个顶点（理想）$I$ 与 $J$ 之间的路径，很大程度上取决于包含 $I$ 的极大理想与包含 $J$ 的极大理想之间的相互作用。因此，我们将看到，这些图有助于深入了解 MaxSpec$(R) = \{\mathfrak{M} \subset R | \mathfrak{M}$ 为极大 $\}$ 的结构。

定义 2.3（有限包含图）。设 $R$ 是一个含幺交换环。我们定义与 $R$ 相关的以下图；在所有情况下，顶点集均为 $R$ 的真理想集合。

(1) 在 $GF(R)$ 中，当且仅当 $I \subset J$ 且 $J/I$ 是 $R/I$ 的有限生成理想时，我们称 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。(2) 在 $GP(R)$ 中，当且仅当 $I \subset J$ 且 $J/I$ 是 $R/I$ 的主理想时，我们称 $I$ 与 $J$ 之间有一条边。

注记 2.4. 对于上述定义的所有图（$GA_2(R)$、$GCl(R)$ 和 $GZ(R)$ 除外），其定义中使用或隐含了包含关系。因此，可以尝试通过给图定向来获取更多信息，但本文不考虑这种可能性。

注记 2.5. 我们注意到，如果在 $GCl_{int}(R)$ 的定义中假设 $a$ 不可约，那么 J. Boynton 和第二作者[8] 已对此进行过研究。

## 3. Adjacency: The Graphs $GA_0(R), GA_1R,$ and $GA_2(R)$

本节考察反映邻接关系的图；正如我们将看到的，邻接、极大导子和极大倍数这些概念密切相关。这里的度量在某种意义上试图衡量 $R$ 的理想“紧密排列”的程度。此外，在考察邻接条件时，也会衡量某种离散性。

我们先建立一些后续将用到的预备引理。首先注意 $GA_1(R)$ 和 $GA_2(R)$ 的定义概念之间的关系。

命题 3.1. 设 $I$ 和 $J$ 是 $R$ 的理想，且满足 $J \not\subseteq I$，并且 $\mathfrak{M}$ 是一个极大理想。以下条件等价。

(1) $(I :_R J) = \mathfrak{M}$。

(2) $J\mathfrak{M} \subseteq I$。

证明. 假设条件 (1) 成立，若 $x \in \mathfrak{M}$，则 $xJ \subseteq I$，因此 $\mathfrak{M}J \subseteq I$。

另一方面，若 $J\mathfrak{M} \subseteq I$，则对所有 $x \in \mathfrak{M}$，$Jx \subseteq I$，因此 $x \in (I :_R J)$。由于现在我们有 $\mathfrak{M} \subseteq (I :_R J)$，且 $\mathfrak{M}$ 是极大理想并且 $J \not\subseteq I$，于是$\mathfrak{M} =(I :_R J)$。□

引理 3.2. 设 $I, J \subseteq R$ 是满足 $J \not\subseteq I$的理想。若 $I = J\mathfrak{M}$，其中 $\mathfrak{M}$ 是一个极大理想，则 $(I :_R J) = \mathfrak{M}$，但逆命题不一定成立。因此，$GA_1(R)$ 是 $GA_2(R)$ 的子图。

证明。注意到 $\mathfrak{M}J \subseteq I$，因此 $\mathfrak{M} \subseteq (I :_R J)$。由于 $J \not\subseteq I$，我们必有等号成立。

为说明逆命题一般不成立，考虑整环 $K[x, y]$，其中 $K$是任意一个域，而理想为 $I = (x, xy, y^2)$ 和 $J = (x, y)$。注意，$(I :_R J) = J$，但 $J^2 \subsetneq I$。□

引理 3.3。若 $I \subsetneq J$ 相邻，则 $(I :_R J) = \mathfrak{M}$是极大理想，但逆命题不一定成立。因此，$GA_0(R)$ 是 $GA_2(R)$ 的子图。

证明。设 $I \subsetneq J$ 相邻，且 $\mathcal{C} = (I :_R J)$；我们将证明 $\mathcal{C}$ 是极大理想。由于 $I$ 严格包含于 $J$，我们可以找到一个 $x \in J \setminus I$；此外，注意到 $J = (I, x)$，这是因为 $I$ 与 $J$相邻。

现在我们任取一个 $z \notin \mathcal{C}$，并注意到 $zx \notin I$（事实上，如果 $zx \in I$，那么 $J = (I, x)$ 这一事实将表明 $z \in \mathcal{C}$，这就会导致矛盾）。因此，必有 $J = (I, zx)$；又由于 $x \in J$，我们得到

$$x = rzx + \alpha$$

对于某个 $r \in R$ 和 $\alpha \in I$。重新整理上式，可得

$$x(1 - rz) = \alpha \in I.$$

由于 $(1-rz)$ 将 $x$ 传递给 $I$ 并且 $J = (I, x)$，$(1-rz) \in \mathcal{C}$。因此，对于所有 $z \notin \mathcal{C}$，$(\mathcal{C}, z) = R$，所以 $\mathcal{C}$ 是极大的。

为了说明逆命题不成立，我们重新考察前一个结果中的例子。令 $R = K[x, y]$, $A = (x^2, xy, y^2)$ $I = (x, xy, y^2)$ $J = (x, y)$。注意，$(A :_R J) = J$，但 $A$ 和 $J$ 并不相邻，因为 $A \subsetneq I \subsetneq J$。□

引理 3.4. 假设 $I \subsetneq J$ 相邻，且 $\mathcal{C} := (I :_R J)$。若 $\mathcal{C} \bigcap J = I$，则 $J \setminus I$ 是一个乘法封闭集。

证明。设 $x, y \in J \setminus I$。显然 $xy \in J$。反设，我们假设$xy \in I$。由于 $I$ 和 $J$ 相邻，且 $x \notin I$，因此 $(x, I) = J$。

现在任取 $j \in J$。根据前面的注记，我们可以找到 $r \in R$ 和$i \in I$，使得 $j = rx + i$。将其乘以 $y$，得到 $yj = rxy + iy \in I$。因此 $y \in \mathcal{C} \bigcap J = I$，这就得到了所需的矛盾。□

引理 3.5。设 $I \subsetneq J$ 相邻，且 $A \subseteq R$ 是一个理想。那么理想 $I \bigcap A$和 $J \bigcap A$ 要么相等，要么相邻。

证明。我们假设 $I \bigcap A$ 和 $J \bigcap A$ 不同，并设 $x \in (J \bigcap A) \setminus (I \bigcap A)$。由于 $x \notin I$，必有 $J = (I, x)$。

令 $j \in J \bigcap A$ 为任意对象。由于 $J = (I, x)$，我们有

$$j = rx + \alpha$$

对于某些 $r \in R$ 和 $\alpha \in I$。我们进一步注意到 $rx \in J \bigcap A$，因此，$\alpha \in I \bigcap A$。由此可得

$$J \bigcap A = (I \bigcap A, x)$$

对于任意 $x \in (J \bigcap A) \setminus (I \bigcap A)$，因此 $I \bigcap A$ 和 $J \bigcap A$ 必须相邻。□

引理 3.6. 若 $I \subsetneq J$ 是相邻理想且 $x \in R$，则理想 $(I, x)$ 和 $(J, x)$ 要么相等，要么相邻。

证明. 假设 $A$ 是一个理想，且 $(I, x) \subsetneq A \subseteq (J, x)$，并令 $a \in A \setminus (I, x)$。我们将 $a = j + rx$ 写作 $j \in J \setminus I$。由于 $I$ 和 $J$ 相邻，且 $j \notin I$，$(I, j) = J$。由于 $A$ 包含 $x$，而 $A$ 包含 $J$ 的全部内容；由此可得 $A = (J, x)$，证明完毕。□

命题3.7. 设 $I \subsetneq J$ 为相邻理想，$S \subset R$ 为一个（不含0的）乘法封闭集。那么，理想 $I_S \subseteq J_S$ 要么相邻，要么相等。

证明。由于 $I \subsetneq J$相邻，存在一个 $x \in J \setminus I$，使得 $J = (I, x)$（事实上，任意 $x \in J \setminus I$均可）。设 $I_S \subsetneq J_S$并令$\frac{b}{s} \in J_S \setminus I_S$。不妨设 $b \in J \setminus I$；由于 $I \subsetneq J$ 相邻，我们可以找到一个 $r \in R$ 和 $\alpha \in I$，使得 $b = rx + \alpha$。在 $R_S$中，我们有方程

$$\frac{b}{s} = (\frac{r}{s})(\frac{x}{1}) + \frac{\alpha}{s}$$

这表明， $J_S$ 上的任意形如 $\frac{x}{1}$ 且满足 $x \in J\backslash I$的元素，都能生成 $I_S$ 上的 $I_S$ 。因此， $J_S$ 要么相等，要么相邻。□

下一个结果是格同构定理的推论，而再下一个结果是直接的；我们略去证明。

命题 3.8。设 $A$、$B \subseteq R$ 是包含理想 $I$ 的理想。则当且仅当 $A/I$ 和 $B/I$ 在 $R/I$ 中相邻时， $A$ 和 $B$ 在 $R$ 中相邻。

引理 3.9。设 $R$ 为一个环， $I \subseteq J$ 为理想。若 $I$ 是有限生成的且$J/I \subseteq R/I$ 是有限生成的，则 $J$ 是有限生成的。

命题 3.10。设 $R$ 是一个 $1-$ 维整环。 $R$ 是诺特的，当且仅当对于每个理想 $0 \neq I \subseteq R$， $R/I$ 是阿廷的。

证明。先假设 $R$ 是诺特的。若 $I \subseteq R$ 是一个非零理想，则 $R/I$ 是一个维数为 0 的诺特环，因而是阿廷的。

现在假设对每个非零理想 $I \subset R$， $R/I$ 都是阿廷的。只需证明 $R$ 的每个理想都是有限生成的。取任意一个非零理想 $J \subset R$ 。令 $0 \neq x \in J$ ，并注意到根据假设， $R/(x)$ 是阿廷的，因此 $J/(x)$ 是有限生成的。由引理 3.9 可知， $J$ 是有限生成的，从而 $R$ 是诺特的。□

现在我们将这些初步结果应用于所讨论的理想图。首先给出以下结果，它说明了对于 $0 \leqslant i \leqslant 2$， $G_i(R)$ 在局部化和同态像下的稳定性。

定理 3.11。设 $I \subset R$ 是一个理想， $S \subset R$ 是一个乘法封闭集。若对于 $0 \leqslant i \leqslant 2$, $GA_i(R)$ 是连通的或完全的，则 $GA_i(R_S)$ 和 $GA_i(R/I)$ 也具有相同性质。

证明。对于 $GA_0(-)$ 的情形，可直接由命题3.7和命题3.8得出。

对于 $GA_1(-)$，我们假设 $A$、$B \subset R$ 互不相同，且它们之间有一条边。于是 $A = B\mathfrak{M}$, 其中 $\mathfrak{M}$ 极大。注意，若 $\mathfrak{M} \bigcap S \neq \emptyset$，则 $\mathfrak{M}_S = R_S$；若非如此，则 $\mathfrak{M}_S \subset R_S$ 是极大的。由于 $A_S = B_S\mathfrak{M}_S$，我们有 $A_S$ 和 $B_S$ 要么相等，要么它们之间有一条边。由于 $R_S$ 的所有理想都具有这种形式，若 $GA_1(R)$ 是连通的或完全的，则 $GA_1(R_S)$ 也是如此。此外，若 $I \subseteq A$、$B$ , 则 $A/I = (B/I)(\mathfrak{M}/I)$，由此即可得出 $GA_1(R/I)$ 的结论。

类似地，考虑 $GA_2(-)$，并沿用上一段中的理想/记号，我们假设 $(A:_R B) = \mathfrak{M}$。在这种情况下，很容易验证 $(A/I :_R B/I) = \mathfrak{M}/I$ ，且 $\mathfrak{M}_S \subseteq (A_S :_R B_S)$。因此，同样可得出 $GA_2(-)$ 的结论。□

我们指出，前面的结果将直接由关于 $GA_i(R)$的后续结构定理推出（见定理 3.13和定理 3.16 ）。

下面的结果具有一定的独立价值，并且对后续工作至关重要；在后续工作中，我们将展示 $GA_0(R)$ 与阿廷条件之间的联系。该结果表明，如果 $I \subseteq J$ 是理想，并且存在一条连接 $I$ 和 $J$ 的有限相邻理想链，那么这条链可以细化为有限递增链。

命题 3.12。设 $I \subseteq J$ 是理想，$\{I_n\}_{n=0}^{N}$ 是理想，且 $I = I_0$、$J = I_N$ 和 $I_k$ 与 $I_{k+1}$ 对每个 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 都相邻。那么存在一条递增理想链

$$I = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_M = J$$

其中每一对相继的理想都相邻，且 $M \leqslant N$。

证明。沿用上述记号，若理想 $I_k$ 要么真包含 $I_{k-1}$ 和 $I_{k+1}$ 二者，要么真包含于它们二者之中，则称其为铰链理想。我们对 $m$（$I$ 与 $J$之间铰链理想的数量）使用归纳法。

首先，我们通过将该集合与 $J$ 取交并应用引理 3.5，假设所有理想 $\{I_s\}$ 都包含于 $J$，以简化问题；我们还注意到，若此链递增，则结论成立。现在我们描述一个约化过程，它将大大简化归纳论证。

我们先假设第一个铰链理想包含于 $I$；也就是说，我们有如下递减的理想链

$$I := I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_t.$$

由于链中相邻元素彼此邻接，我们可以找到 $x_s \in I_s \setminus I_{s+1}$, $0 \leqslant s \leqslant t-1$ 使得

$$I_s = (I_{s+1}, x_s).$$

现在，我们对集合 $\{I_s\}_{s=0}^{N}$ 作初步细化：令 $I'_s = (I_s, x_0, x_1, \cdots, x_{t-1})$，其中 $0 \leqslant s \leqslant N$。对整个理想集合应用引理 3.6 $t$ 次后，新集合 $\{I'_s\}$ 的开头为

$$I = I'_0 = I'_1 = \cdots = I'_t \subseteq I'_{t+1}$$

并且理想 $\{I'_s\}_{s=t}^{N}$ 依次相邻（或相等）。此外，如果 $I_j$ 是集合中一个起初不是铰理想的理想，那么 $I'_j$ 既不能真包含于理想 $I'_{j-1}$ 和 $I'_{j+1}$二者之中，也不能真包含这两个理想。因此，将相等的理想视为同一个理想后，细化后的集合中的理想数不超过初始理想数，且铰理想至少减少一个。

有了这一点，我们就按 $I$ 与 $J$ 之间出现的铰链理想的数量 $m$ 进行归纳论证。若 $m = 0$，则该链递增，结论显然成立；结合上述论证，即可得到 $m = 1$ 的情形。现在假设结论对 $m \geqslant 0$ 成立，并考虑有 $m+1$ 个铰链理想的情形。

第一种情形中，我们假设第一个铰链理想 $I_t$ 包含于 $I$。前面的论证表明，我们可以进一步细化，使得 $I = I'_t$；与上文一样，新集合中的理想数量（将相等的理想视为同一个后）不会增加，而新集合中的铰链理想数量小于或等于 $m$。由归纳法可知，这种情形下结论成立。

在第二种情况下，我们假设第一个铰理想 $I_t$ 包含于 $I$。在这种情况下，我们考虑集合 $\{I_s\}_{s=t}^{N}$。由于该集合有 $m$ 个铰理想，且第一个包含于 $I_t$中，我们应用第一种情况，提取递增链 $\{I'_s\}_{s=0}^{k}$，其中 $I'_0 = I_t$ 包含于 $k \leqslant N-t$。将该递增链与$\{I_r\}_{r=0}^{t}$ 结合（并因重复的 $I_t$减去 1），我们得到长度为 $t+k+1 \leqslant N-t+1+t = N+1$的递增链。□

现在，我们通过它们的诱导邻接图刻画某些类型的环；我们从 $GA_0(-)$开始。

定理 3.13. 设 $R$ 是含幺交换环， $GA_0(R)$ 是其邻接图。以下命题等价。

(1) $R$ 是阿廷环。(2)
$GA_0(R)$ 是连通的。

证明。若 $R$ 是阿廷环，则每个有限生成的 $R-$模（特别是 $R$ 的一个理想）都有合成列。由于 $R$ 的每个理想都与 (0) 连通，因此 $GA_0(R)$ 是连通的。

另一方面，若 $GA_0(R)$ 是连通的，则 (0) 与 $R$ 的任意理想之间都存在一条（有限）路径。命题 3.12 可将其细化为合成列，因此 $R$ 是阿廷环。□

现在我们稍作变式，给出以下推论。我们将图 $GA_0^*(R)$ 定义为 $GA_0(R)$ 的子图，其中删去了 $0-$ 理想顶点。

推论 3.14. 设 $R$ 是一个非域的整环。当且仅当 $R$ 是诺特环且 $\dim(R) = 1$ 时， $GA_0^*(R)$ 是连通的。

证明. 假设 $R$ 是 $1-$ 维诺特环，并令 $I$、$J \subseteq R$ 为非零理想。为了证明 $GA_0^*(R)$ 是连通的，只需证明 $I$ 和 $I \bigcap J$ 可以通过有限步组成的序列连接起来。为此，我们注意到，由于 $I \bigcap J$ 非零，环 $R/(I \bigcap J)$ 是 $0-$ 维诺特环，因而是阿廷环。由定理 3.13，存在一个相邻理想的有限序列（具有所示形式）

$$(I \bigcap J)/(I \bigcap J) \subset I_1/(I \bigcap J) \subset I_2/(I \bigcap J) \subset \cdots \subset I/(I \bigcap J)$$

将 $I/(I \bigcap J)$ 连接到 $R/(I \bigcap J)$ 中的零理想。根据命题 3.8，这对应于一个相邻理想链

$$(I \bigcap J) \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I$$

因此， $R$ ，从而 $GA_0^*(R)$ 是连通的。

现在假设 $GA_0^*(R)$ 是连通的。令 $I \subset R$ 为任意非零理想。命题 3.8 保证模 $I$ 后邻接关系保持不变，因此我们得到 $GA_0(R/I)$ 是连通的。因此，由定理 3.13 可知 $R/I$ 是阿廷环（对任意非零理想 $I$ 均成立）。由命题 3.10 可知 $R$ 是诺特环。

为了证明 $R$ 是 $1-$ 维的，我们假设存在一个素理想链 $(0) \subsetneq \mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{M}$。若取理想 $I = \mathfrak{P}$，则有 $\dim(R/\mathfrak{P}) \geqslant 1$，从而 $R/\mathfrak{P}$ 不是阿廷环。由此可知 $GA_0(R/\mathfrak{P})$ 不连通；再由命题 3.8 可知 $GA_0^*(R)$ 不可能连通，因此 $\dim(R) \leqslant 1$。由于 $R$ 是一个非域整环，因此 $R$ 的维数恰为 1。□

命题 3.15。如果 $GA_0(R)$ 或 $GA_1(R)$ 是连通的，那么 $GA_2(R)$ 也是连通的。

证明。由于顶点集相同，这由引理 3.2 和引理 3.3 立即可得。□

现在我们给出图$GA_i(R)$、 $i=1$、2 的连通性的一个强刻画。当然，这一条件弱于阿廷条件。

定理 3.16. 设 $R$ 是一个含幺交换环。以下条件等价。

(1) $GA_1(R)$ 是连通的。(2) $GA_2(R)$ 是连通的。(3) 存在一个不一定由互不相同的极大理想组成的集合$\{\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\cdots,\mathfrak{M}_n\}$，使得 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n=0$。

证明。由命题 3.15，我们有蕴含关系 (1) $\Longrightarrow$ (2)。对于蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (3)，假设 $GA_2(R)$ 是连通的，并且 $\mathfrak{M}$ 是 $R$ 的一个极大理想。由假设，存在一条从 $\mathfrak{M}$ 到理想 (0) 的有限路径:

$$\mathfrak{M}=I_0\supsetneq I_1\bowtie I_2\bowtie\cdots\bowtie I_m\supsetneq I_{m+1}=0$$

其中每个 $\bowtie$ 表示 $\supsetneq$ 或 $\subsetneq$。在此蕴含关系的证明中，我们将使用命题 3.12 的证明中引入的铰理想概念。注意，上述路径中的铰理想数必为偶数，我们将它们记作 $H_1$、$H_2$、$\cdots$、$H_{2t}$。因此，上述路径的简写形式可以表示为

$$\mathfrak{M}\supsetneq H_1\subsetneq H_2\supsetneq\cdots\subsetneq H_{2t}\supsetneq 0$$

其中我们约定，对于所有 $1\leqslant j\leqslant 2t$，都有 $H_j=I_{s_j}$。我们还规定 $s_0=0$ 和 $s_{2t+1}=m+1$。

由于这是图 $GA_2(R)$ 中的一条路径，因此相邻的理想必定具有极大导子。我们称 $M_k=(I_{k+1}:I_k)$，如果对于 $0\leqslant a\leqslant t$，有 $s_{2a}\leqslant k\leqslant s_{2a+1}$。

我们首先注意到

$$H_1=I_{s_1}\supseteq\mathfrak{M}M_0M_1\cdots M_{s_1-1}$$

并且由于 $H_1\subseteq H_2$，我们有

$$H_2\supseteq\mathfrak{M}M_0M_1\cdots M_{s_1-1}.$$

类似地，我们注意到

$$H_3=I_{s_3}\supseteq H_2M_{s_2}M_{s_2+1}\cdots M_{s_3-1}\supseteq\mathfrak{M}M_0M_1\cdots M_{s_1-1}M_{s_2}M_{s_2+1}\cdots M_{s_3-1}.$$

归纳地，我们得到

$$H_{2i+1}\supseteq\mathfrak{M}M_0M_1\cdots M_{s_1-1}M_{s_2}M_{s_2+1}\cdots M_{s_3-1}\cdots M_{s_{2i}}M_{s_{2i}+1}\cdots M_{s_{2i+1}-1}.$$

特别地，我们得到

$$0=\mathfrak{M}M_0M_1\cdots M_{s_1-1}M_{s_2}M_{s_2+1}\cdots M_{s_3-1}\cdots M_{s_{2t}}M_{s_{2t}+1}\cdots M_m$$

因此，存在一组极大理想，其乘积等于 (0)。

对于蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (1)，我们假设存在一个极大理想集合 $\mathfrak{M}_i$, $1\leqslant i\leqslant n$，使得 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n=0$。为了证明 $GA_1(R)$ 是连通的，只需证明：若 $I\subset R$ 是任意一个理想，则存在一条通往零理想的有限路径。但请注意，

$$I \supseteq I\mathfrak{M}_1 \supseteq I\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \supseteq \cdots \supseteq I\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n = 0$$

这就是一条长度不超过 $n$ 的路径。 □

推论 3.17. 若 $GA_i(R)$ $1 \leqslant i \leqslant 2$ 连通，则 diam($GA_i(R)$) $\leqslant 2n$，其中 $n$ 是满足以下条件的最小正整数：存在一组极大理想 $\mathfrak{M}_i, 1 \leqslant i \leqslant n$，使得 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n = 0$。

证明。diam($GA_1(R)$) $\leqslant 2n$ 这一事实可直接由定理 3.16 中蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (1) 的证明得出。diam($GA_2(R)$) $\leqslant 2n$ 这一事实则由 $GA_1(R)$ 是 $GA_2(R)$ 的子图这一事实得出（见命题 3.15 ）。□

推论 3.18. 若对于某个 $0 \leqslant i \leqslant 2$， $GA_i(R)$ 连通，则 $R$ 是半拟局部的，且为 $0$–维。

证明。根据定理 3.13， $GA_0(R)$ 连通，当且仅当 $R$ 是阿廷环，因此 $R$ 是 $0$–维的；在此情况下，它还是半局部的。若 $GA_1(R)$ 或 $GA_2(R)$ 连通，则定理 3.16 表明，对于（不一定互异的）理想 $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_n\}$，有 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n = 0$。若 $\mathfrak{M}$ 是任意极大理想，则 $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n$，从而对于某个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k$，这表明理想列表 $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_n\}$ 包含 MaxSpec($R$)。因此， $R$ 是半拟局部的。

为了说明 $R$ 是 $0$–维的，我们再次利用以下事实：

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n = 0.$$

回顾这一极大理想集合包含 MaxSpec($R$)，我们假设可以找到一个素理想 $\mathfrak{P}$，使得 $\mathfrak{M}_k \supsetneq \mathfrak{P}$。由于 $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n = 0$，我们必有对于某个 $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{M}_i$。因此， $\mathfrak{M}_i \subsetneq \mathfrak{M}_k$，这就是我们所要得到的矛盾。□

作为命题 3.15 的补充，我们给出以下推论。

推论 3.19。如果 $GA_0(R)$ 是连通的，那么 $GA_1(R)$ 和 $GA_2(R)$ 都是连通的。

证明。结合命题 3.15 和定理 3.16 的结果即可。 □

最后，我们考虑以下观察结果。

推论 3.20。设 $R$ 是一个含幺交换环。我们考虑以下条件：

(1) $GA_0(R)$ 是连通的。(2) $GA_1(R)$ 是连通的。(3) $GA_2(R)$ 是连通的。

如果 $R$ 是诺特的，那么上述三个条件等价。

证明。我们知道，在任何条件下，(2) 和 (3) 等价，并且条件 (1) 蕴含 (2) 和 (3)。假设 $R$ 是诺特的，且其中任一条件成立。根据推论 3.18， $R$ 是 $0$–维的。因此，如果将“诺特”作为假设加入，那么 $R$ 是阿廷的，且三个条件都成立。□

我们以一个环的例子结束本节：对于该环， $R$， $GA_0(R)$ 不连通，但当 $i = 1$ 时，$GA_i(R)$ 连通。

例 3.21。考虑环

$$R := \mathbb{F}[x_1, x_2, x_3, \cdots]/(\{x_i x_j\}_{i,j\geqslant 1}).$$

这个环不是诺特环（因此也不是阿廷环），所以 $GA_0(R)$ 不连通。另一方面，$GA_1(R)$ 和 $GA_2(R)$ 是连通的。为此，注意到 $\mathfrak{M} \subseteq R$ 的唯一极大理想（由元素 $x_i$ 的像生成）具有性质 $\mathfrak{M}^2 = 0$。因此，在 $GA_1(R)$ 和 $GA_2(R)$ 中，$R$ 的每个非零理想都与 (0) 之间有一条边。

## 4. Class Structure: $GCl_{int}(R)$ and $GCl(R)$

对于图 $GCl(R)$ 和 $GCl_{int}(R)$，除非另有说明，我们假设 $R$ 是一个商域为 $K$ 的整环。

需要指出的是，当 $R$ 是一个整环时，$GCl_{int}(R)$ 是所谓整环因子图的一种变体，该图在 [8], 中进行了研究，其中理想 $I$ 和 $J$ 被假设为主理想，并且当 $I = Ja$ 时它们之间存在一条边，其中 $a \in R$ 不可约。

本节中，记住 $GCl_{int}(R)$ 是 $GCl(R)$ 的子图也会很有用。

定理 4.1. 以下条件等价。

(1) $GCl(R)$ 是连通的。(
2) $GCl(R)$ 是完全的。(3)
$R$ 是主理想整环

证明。证明时，我们排除 $R$ 是域的情形，因为此时所有条件都显然成立。由于任何完全图都是连通的，(2) $\implies$ (1) 显然成立。对于蕴含关系 (1) $\implies$ (3)，令 $I \subset R$ 为任意理想，令 $R$ 为单位理想。由于 $GCl(R)$ 连通，存在一列理想连接 $R$ 和 $I$:

$$R := J_0 - J_1 - J_2 - \cdots - J_{n-1} - I := J_n.$$

由于上面的边属于图 $GCl(R)$，因此对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，都必须有非零的 $k_i \in K$ 使得 $J_{i-1} = k_i J_i$。注意，$R = k_1 k_2 \cdots k_n I$，因此 $I$ 是主理想。

最后，对于蕴含关系 (3) $\implies$ (2)，我们取 $R$ 的两个任意理想 $I = aR$ 和 $J = bR$ （其中 $a$、$b \neq 0$）。注意到 $I = \frac{a}{b}J$，因此 $GCl(R)$ 是完全的。□

定理 4.2. $GCl_{int}(R)$ 是完全的，当且仅当 $R$ 是诺特赋值整环。

证明。在此证明中，我们忽略 $R$ 为域这一简单情形。对于正向推论，我们假设 $GCl_{int}(R)$ 是完全的。由于 $GCl_{int}(R)$ 是 $GCl(R)$ 的子图，$GCl(R)$ 也必定是完全的。由定理 4.1，$R$ 必定是主理想整环。现在只需证明 $R$ 是局部的。为此，假设 $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$ 是极大理想。不失一般性，存在一个非零的 $a \in R$，使得 $\mathfrak{M}_1 = a\mathfrak{M}_2$。若 $a$ 是单位元，则 $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$；若 $a$ 是非单位，则 $\mathfrak{M}_1 = a\mathfrak{M}_2 \subsetneq \mathfrak{M}_2$；两种情况都会导出矛盾。因此，$R$ 是局部主理想整环，进而是诺特赋值整环。

另一方面，若 $R$ 是诺特赋值整环，则任意两个非零真理想都可写成 $(\pi^n)$ 和 $(\pi^m)$ 的形式，其中 $\pi$ 是极大理想的生成元，且 $n$、$m \geqslant 1$。若我们（不失一般性地）设 $n \leqslant m$，那么 $\pi^{m-n}(\pi^n) = (\pi^m)$，因此 $GCl_{int}(R)$ 是完全的。□

定理 4.3. $GCl_{int}(R)$ 连通当且仅当 $R$ 是主理想整环。在此情形下，diam$(GCl_{int}(R))$ 6 2，并且 diam$(GCl_{int}(R)) = 1$ 当且仅当 $R$ 是局部的。

证明。由于 $GCl_{int}(R)$ 是 $GCl(R)$ 的子图，$GCl_{int}(R)$ 连通这一事实意味着 $GCl(R)$ 连通。因此，根据定理 4.1，$R$ 必须是主理想整环。

另一方面，若 $R$ 是主理想整环，且 $I = aR$ 和 $J = bR$ $(a, b \neq 0)$ 是任意理想，那么我们可以如下连接 $I$ 和 $J$：

$$I = aR \leftrightarrow abR \leftrightarrow bR = J.$$

上述内容证明了如下断言的正确性：diam$(GCl_{int}(R))$ 6 2。根据定理 4.2，diam$(GCl_{int}(R)) = 1$ 恰当且仅当 $R$ 是局部的。□

定理 4.4. 若 $R$ 是商域为 $K$ 的 Dedekind整环，则图 $GCl(R)$ 和 $GCl_{int}(R)$ 的连通分支与类群 Cl$(R)$ 的元素一一对应。$GCl(R)$ 的每个连通分支都是完全的，$GCl_{int}(R)$ 的每个连通分支的直径不超过 2，并且 $GCl_{int}(R)$ 的连通分支是完全的，当且仅当 $R$ 是局部主理想整环。

证明. 若 $R$ 是商域为 $K$ 的 Dedekind整环，则两个理想 $I$ 和 $J$ 属于 Cl$(R)$ 中同一个类，当且仅当对于某个非零 $k \in K$，有 $I = Jk$。因此，$GCl(R)$ 的每个连通分支都是完全的，并且这些连通分支与 Cl$(R)$ 的元素一一对应。

对于 $GCl_{int}(R)$ 的情形，我们首先注意到，若存在一条从 $I$ 到 $J$ 的路径，则必定存在某个非零 $k \in K$ 使得 $I = Jk$；因此，只需证明若 $I$ 和 $J$ 属于同一个理想类，则存在一条连接它们的路径。为此，我们注意到，若对于某个非零 $k \in K$ 有 $I = Jk$，我们可以写成 $I = \frac{a}{b}J$；并且像之前那样，可以通过以下方式连接 $I$ 和 $J$

$$I \leftrightarrow bI = aJ \leftrightarrow J,$$

因此，存在一条连接 $I$ 和 $J$的长度不超过2的路径。

对于最后一个结论，我们首先假设 $R$ 是局部主理想整环（因此也是诺特赋值整环），其一致化元为 $\pi$。如果 $I$ 和 $J$ 属于Cl$(R)$中的同一个类，那么对于某个非零的 $k \in K$，有 $I = kJ$。由于 $K$ 是诺特赋值整环的商域，我们可以写成 $k = \pi^n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 在 $R$中相差一个单位元。如果 $n \geqslant 0$，那么 $I = J$，或者它们之间存在一条边。如果 $n < 0$，那么 $J = \pi^{-n}I$，并且 $I$ 和 $J$之间也存在一条边。

另一方面，假设 $GCl_{int}(R)$ 的某个连通分支是完全的，且存在两个极大理想 $\mathfrak{M}_1$、$\mathfrak{M}_2 \subset R$。取 $m_1 \in \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$ 和 $m_2 \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_1$。如果 $I$ 属于 $GCl_{int}(R)$ 的一个完全连通分支，那么从 $m_1 I$ 到 $m_2 I$ 存在一条路径，因此它们之间必有一条边。因此，我们有 $m_1 | m_2$ 或 $m_2 | m_1$，无论哪种情况都会导致矛盾。由此可知，$R$ 是局部的，因而是主理想整环（诺特赋值整环）。□

沿着这些结果的思路，我们进一步限制顶点集，以得出更一般的观察。我们将 $GCl_{inv}(R)$ 定义为 $GCl(R)$ 的子图，其顶点集限制为可逆理想的集合。回顾一下，若 $R$ 是商域为 $K$ 的整环，则当对所有 $\omega \in K$、$\omega^2$，若 $\omega^3 \in R$ 成立便有 $\omega \in R$ 时，称 $R$ 是半正规的（关于这一主题的优质参考资料见 [19] ）。下一个结果表明，若 $R$ 是半正规整环，则 $GCl_{inv}(R)$ 中连通分支的数量在多项式扩张下保持稳定。

定理 4.5. 若 $R$ 是半正规整环，则对于所有 $n \geqslant 1$， $GCl_{inv}(R)$ 的连通分支数等于 $GCl_{inv}(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$ 的连通分支数。

证明. 这个结果源于以下观察：在整环的情形下，Pic($R$) 同构于 Cl($R$)，且 Pic($R$) $\cong$ Pic($R[x]$) ([11])；此外，半正规整环的多项式扩张仍是半正规的 ([19])。有了这些结果，再考虑到我们将顶点集限制为可逆理想的集合，证明的其余部分几乎与定理 4.4 的证明完全相同。□

## 5. $GZ(R)$ and the classical zero-divisor graph

本节将着重讨论图 $GZ(R)$ 及其若干变体。排除零理想的原因与 [2] 中作出这一例外的原因完全相同：也就是说，使用零理想会给这张图带来额外结构，却不会提供任何有用的新信息。容易看出，对于任意含幺交换环（甚至是整环），若允许使用零理想，则图 $GZ(R)$ 是连通的，且直径不超过 2。事实上，若 $I$ 和 $J$ 是任意理想，则 $I \leftrightarrow (0) \leftrightarrow J$ 是一条连接它们的路径。因此，若 $R$ 是一个（无限）整环，图 $GZ(R)$ 将是一张以零理想为中心的无限星图。这些额外的连接会使问题变得混乱，对我们当前的研究目的毫无帮助。

我们要考察的第一个变体是图 $GZ^*(R)$。对于这个图，顶点集合是非零理想 $I \subset R$ 的集合，满足存在一个非零理想 $J \subset R$ 使得 $IJ = 0$。和前面一样，如果 $IJ = 0$，我们就说 $I$ 和 $J$ 之间有一条边。当然，如果 $R$ 是一个整环，那么得到的就是空图，因此在这种情况下， $R$ 必须有非平凡的零因子，这个图才有意义。

我们先给出一个关于湮没子的著名引理。为求完整起见，现将其记录于此，证明从略。

引理 5.1. 设 $I \subseteq J$ 是 $R$中的理想。

(1) Ann($J$) $\subseteq$Ann($I$)。(2) $I \subseteq$ Ann(Ann($I$))。(3) Ann($I$) $=$ Ann(Ann(Ann($I$)))。

接下来的定理与定理 1.1 相似，但采用了理想论的表述方式。该定理也可见于 [7] ，并可视为 [10, 定理 11] 的推论。我们将利用它进一步获得一些见解，并为 [2, 定理 2.3]中的第一个结论提供另一种证明。

定理 5.2. 设 $R$ 是含幺交换环，则 $GZ^*(R)$ 是连通的，且直径不超过 3。

证明. 设 $I$ 和 $J$ 是 $R$ 的两个不同非零理想，使得存在理想 $0 \neq I_1, J_1 \subset R$ 满足 $II_1 = 0 = JJ_1$。如前所述，我们使用记号“$X \leftrightarrow Y$”表示 $X = Y$，或者表示 $X$ 与 $Y$之间有一条边。

首先注意，若 $J\mathrm{Ann}(I) \neq 0$，则有路径

$$I \leftrightarrow J\mathrm{Ann}(I) \leftrightarrow \mathrm{Ann}(J) \leftrightarrow J$$

类似地，若 $I\mathrm{Ann}(J) \neq 0$，则有路径

$$I \leftrightarrow \mathrm{Ann}(I) \leftrightarrow I\mathrm{Ann}(J) \leftrightarrow J$$

因此，唯一需要考虑的情形是 $J\mathrm{Ann}(I) = I\mathrm{Ann}(J) = 0$。注意，这意味着 $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \mathrm{Ann}(J)$，且 $\mathrm{Ann}(J) \subseteq \mathrm{Ann}(I)$。由于 $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(J)$，我们有路径

$$I \leftrightarrow \mathrm{Ann}(I) \leftrightarrow J.$$

□

现在我们重新得到 D. F. 安德森和 P. 利文斯顿的著名结果。

推论 5.3（D. F. 安德森和 P. 利文斯顿，[2]）。若 $Z(R)$ 是一个含幺交换环的零因子图，则 $Z(R)$ 是连通的，且直径不超过 3。

证明。在定理 5.2 的证明中，我们现在将范围限定在 $I$ 和 $J$ 为主理想的情形（并注意到，可以分别从各自的湮没子中选取主理想子理想）。这表明，由零因子生成的主理想图满足推论的结论。为了说明 Anderson 和 Livingston 所表述的略有不同的结论，只需注意：若 $a$、$b \in R$ 是不同的非零零因子，且 $(a) \neq (b)$，则在非零主理想之间存在如下形式的路径

$$(a) \leftrightarrow (x) \leftrightarrow (y) \leftrightarrow (b)$$

or

$$(a) \leftrightarrow (x) \leftrightarrow (b).$$

这给出了路径 $a \leftrightarrow x \leftrightarrow y \leftrightarrow b$ 或 $a \leftrightarrow x \leftrightarrow b$。在 $(a) = (b)$ 的情形下，我们注意到存在元素 $0 \neq c$，使得 $ac = 0 = bc$，从而得到路径 $a \leftrightarrow c \leftrightarrow b$，除非 $a = c$（不妨设）。但在这种情况下，$a^2 = 0 = ab$，于是结论得证。□

现在我们回到 $GZ(R)$。注意，如果 $R$ 包含一个正则元 $x$，那么理想 $(x)$ 是一个孤立顶点（因此，通常不能指望这个图是连通的）。我们重点说明一个必然连通的情形。

定理 5.4. 设 $R$ 是一个非域的含幺交换环。如果 $GA_1(R)$ 或 $GA_2(R)$ 是连通的，那么 $GZ(R)$ 也是连通的。此外，$\mathrm{diam}(GZ(R)) \leq 3$。

证明。根据定理 3.16，存在一个由不一定互不相同的极大理想组成的集合 $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_n\}$，使得 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \cdots \mathfrak{M}_n = 0$, $n \geqslant 2$。我们还可以假设这些列出的理想中，没有任何真子乘积为零。

若 $I, J \subset R$，则存在一个包含 $I$ 的极大理想 $\mathfrak{M}$。由于 $\mathfrak{M} \supseteq I \supset 0 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_n$，因此对于某个 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathfrak{M}$ 必须是 $\mathfrak{M}_i$。不失一般性，我们假设 $I \subseteq \mathfrak{M}_1$ 且 $J \subseteq \mathfrak{M}_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$。为证明 $GZ(R)$ 是连通的且直径不超过三，考虑 $k \neq 1$ 时的路径：

$$I \leftrightarrow \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\cdots\mathfrak{M}_n \leftrightarrow \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\cdots\mathfrak{M}_{k-1}\mathfrak{M}_{k+1}\cdots\mathfrak{M}_n \leftrightarrow J$$

在 $k = 1$ 的情况下，我们如下修改路径：

$$I \leftrightarrow \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\cdots\mathfrak{M}_n \leftrightarrow J.$$

□

我们以一个例子结束本节，以说明 $GZ(R)$ 可以是连通的，而 $GA_1(R)$、$GA_2(R)$ 不一定连通。

例 5.5. 设 $\mathbb{F}$ 为一个域，首先考虑整环 $R := \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, y]$；令 $I \subset R$ 为理想 $I := (\{x_i^2, x_i y, y^2\}_{i\geqslant 1})$，并令 $T := R/I$（此处我们滥用记号，将元素 $y$、$x_i$ 视为 $T$ 的元素）。$T$ 是准局部的，其极大理想为 $\mathfrak{M}$。容易看出，$GZ(T)$ 是连通的。事实上，若 $I$、$J \subset T$，则有路径 $I \leftrightarrow (y) \leftrightarrow J$。但是不存在乘积为 0 的极大理想族，因为对于所有 $k \geqslant 1$、$0 \neq x_1x_2\cdots x_k \in \mathfrak{M}^k$。

## 6. Finite Containment: $GF(R)$ and $GP(R)$

本节我们研究环图，其中边的定义旨在体现一个理想在其所包含的子理想上的有限生成（或主理想生成）性质。在这些图中，顶点集为真理想，而理想之间的边由有限生成来定义。具体而言，若 $I \subset J$ 和 $J$ 在 $I$上有限生成（分别地，主理想生成），即 $J = (I, x_1, x_2, \cdots, x_n)$（分别地，$J = (I, x)$），我们就称理想 $I$ 和 $J$ 之间有一条边。

这一设定的代数动机，是试图在一种（在某些图论约束下）仿照诺特条件的条件中，衡量 MaxSpec($R$) 的性质。

这个初始引理非常简单，旨在将我们对一个理想在另一个理想上有限生成的定义与定义 2.3 中的内容联系起来。为求完整起见，我们将其记录于此，但省略证明。

引理 6.1. 若 $I \subseteq J \subset R$ 是 $R$ 的理想，则 $J/I$ 是 $R/I$ 的有限生成理想，当且仅当 $J$ 在 $I$ 上有限生成。

下面给出一些值得注意的初步包含关系。

命题 6.2. $GA_0(R)$ 是 $GP(R)$ 的子图，且 $GP(R)$ 是 $GF(R)$ 的子图。

证明. 只需证明第一个陈述。假设 $I \subsetneq J \subsetneq R$ 是相邻理想（因此它们在 $GA_0(R)$ 中之间有一条边）。若 $x \in J \setminus I$，则根据邻接关系有 $J = (I, x)$，因此 $I$ 和 $J$ 在 $GP(R)$ 中之间有一条边。□

现在我们介绍准局部情形。我们将看到，对于这些图而言，这是一个特殊情形，因为它们并不总是连通。或许令人惊讶的是，在准局部情形之外，$GF(R)$ 和 $GP(R)$ 总是连通的。

定理 6.3. 设 $(R, \mathfrak{M})$ 是准局部的。当且仅当 $\mathfrak{M}$ 是有限生成的， $GF(R)$（分别地， $GP(R)$）才是连通的。此外，我们有以下结论。

(1) 若 $GF(R)$ 连通，则 $\operatorname{diam}(GF(R)) \leq 2$，且 $GF(R)$ 完全，当且仅当 $R$ 是维数不超过 1 的诺特链环。(2) 若 $GP(R)$ 连通，则 $\operatorname{diam}(GP(R)) \leqslant 2n$，其中 $n$ 是 $\mathfrak{M}$ 所需的最小生成元个数；并且 $GP(R)$ 完全，当且仅当 $R$ 是主理想环。

证明。我们首先指出，如果 $R$ 是域，则结论显然成立，因此假设 $R$ 不是域。对于第一个陈述，我们先假设 $\mathfrak{M}$ 是有限生成的。为证明 $GF(R)$ 连通，我们先注意到，由于 $\mathfrak{M}$ 是有限生成的，它当然也是有限生成的 $I$ 模。因此，若 $I$、$J \subset R$ 是 $R$ 的任意两个理想，则 $I \leftrightarrow \mathfrak{M} \leftrightarrow J$ 是一条从 $I$ 到 $J$、长度不超过 2 的路径。对于 $GP(R)$，证明类似（但路径可能更长）。

现在我们假设 $GF(R)$ 是连通的。根据假设，从 (0) 到 $\mathfrak{M}$ 存在一条有限路径。由于有限扩张的有限扩张仍是有限扩张，我们可以假设这条路径具有如下形式

$$(0) \subset I_1 \supset J_1 \subset I_2 \supset J_2 \subset \cdots \subset I_{n-1} \supset J_{n-1} \subset I_n = \mathfrak{M}.$$

注意， $I_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,t_1})$ 是有限生成的，并且对于所有 $2 \leqslant m \leqslant n$，我们都可以写成 $I_m = (J_{m-1}, a_{m,1}, a_{m,2}, \cdots, a_{m,t_m})$；由于 $J_{m-1} \subset I_{m-1}$，我们有 $I_m \subseteq (I_{m-1}, a_{m,1}, a_{m,2}, \cdots, a_{m,t_m})$

特别地，

$$I_n = \mathfrak{M} \subseteq (I_1, \{a_{i,j}\}_{j=1}^{t_i}{}_{i=2}^{n})$$

由于 $\mathfrak{M}$ 是极大的，等式成立。因此， $\mathfrak{M}$ 是有限生成的。由于每个有限扩张都是主扩张的有限序列，这也证明了 $GP(R)$ 的情形。

对于 (1)，我们已经证明 $\operatorname{diam}(GF(R)) \leq 2$。如果 $GF(R)$ 是完备的，那么任意两个理想都必须可比较，因此 $R$ 是链式的。现在注意，如果 $I$ 是 $R$ 的任意理想，那么 $I$ 与 (0) 之间存在一条边，因此 $I$ 必须是有限生成的，从而 $R$ 是诺特的。最后，我们注意到，由于 $R$ 是诺特且链式的，其维数必定不超过 1（如果 $R$ 有一个高度为 1 的非极大素理想，那么必定存在无穷多个这样的素理想，从而 $R$ 不可能是链式的）。

对于逆命题，注意到如果 $R$ 是诺特且为链式的，那么任意两个理想都可比较；又由于它们是有限生成的，因此它们之间必有一条边。

对于 (2)，注意到如果 $\mathfrak{M}$ 由 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 生成，那么由于 $R$ 是准局部的，任意理想 $I$ 到 $\mathfrak{M}$ 之间都存在一条长度不超过 $n$ 的路径。因此，给定理想 $I$、$J \subset R$，存在一条从 $I$ 到 $J$ 的路径，其长度不超过 $\mathfrak{M}$ 的生成元个数的两倍，因此 $\operatorname{diam}(GP(R)) \leqslant 2n$。

现在设 $GP(R)$ 是完全的，并令 $I \subset R$ 为一个理想。由于 $I$ 和 (0) 之间有一条边，$I$ 必须是主理想。反之，如果 $R$ 是主理想环且是局部的，那么 $R$ 是链式的。为说明这一点，注意若 $I = (x)$ 和 $J = (y)$，则 $(d) = (x, y)$。如果 $dx' = x$ 和 $dy' = y$，容易看出 $(x', y') = R$，因此（不妨设） $x'$ 是一个单位元且 $x | y$。于是 $J \subseteq I$，所以 $I$ 和 $J$ 之间存在一条边。□

现在设 $R$ 不是准局部的。在这种情况下， $GF(R)$ 和 $GP(R)$ 总是连通的；但正如我们将看到的， $GF(R)$ 的直径揭示了有关 $R$ 结构的一些微妙之处。关于直径，我们将重点讨论 $GF(R)$，因为在 $GP(R)$ 中构造一条路径有时需要很多步，这会使问题变得有些模糊。另一方面，在适当的时候，我们也会注意 $GP(R)$。

我们先给出一个定义和一个有用的引理，以简化后续讨论。

定义 6.4. 设 $I \subset R$ 是一个理想。我们将 $\mathrm{MaxSpec}_I(R)$ 定义为包含 $I$ 的 $R$ 的极大理想集合。接下来，我们将 $I$ 的雅各布森根 $\mathfrak{J}(I)$ 定义为所有包含 $I$ 的 $R$ 的极大理想之交。若 $R$ 是一个环，我们用记号 $\mathfrak{J}(R)$ 表示 $R$ 的雅各布森根。

我们指出，容易验证 $\mathfrak{J}(R/I) = \mathfrak{J}(I)/I$，并且我们将在多处用到这一事实。

在下面这个关键引理中，我们描述 $GF(R)$ 和 $GP(R)$ 中理想之间的路径。由于证明中将用到主生成理想，这些界限适用于两者。

引理 6.5. 设 $R$ 是含幺交换环，并考虑图$GF(R)$ 和 $GP(R)$。

(1) 若理想 $I$ 和 $J$ 互素，则存在一条从$I$ 到 $J$的长度为 2 的路径。(2) 若 $I$ 和 $J$ 不互素，但存在一个包含 $I$ 而不包含 $J$ 的极大理想 $M$，则存在一条从 $I$ 到 $J$的长度不超过 3 的路径。(3) 若 $\mathrm{MaxSpec}_I(R) = \mathrm{MaxSpec}_J(R)$ 且 $|\mathrm{MaxSpec}(R)| > 1$，则存在一条从 $I$ 到 $J$的长度不超过 4 的路径。

证明. 对于 (1)，假设 $I$ 和 $J$ 互素，并找到 $\alpha \in I$ 和 $\beta \in J$使得 $\alpha + \beta = 1$。因此，若 $x \in I$（分别地，若 $x \in J$），则等式

$$x\alpha + x\beta = x$$

表明理想 $I$（分别地， $J$）在理想 $IJ$上由 $\alpha$（分别地， $\beta$）单生成。因此，在 $GF(R)$ 中（以及 $GP(R)$ 中），我们有一条长度为 2 的路径 $I - IJ - J$。

对于 (2)，由于 $M$ 不包含 $J$ 且是极大理想，我们可以找到 $m \in M$、 $j \in J$使得 $m + j = 1$。由于 $I \subseteq M$，我们知道 $(I, m)$ 是一个真理想，并且显然在 $I$ 上由不超过一个元素生成。根据 (1)，$(I, m)$ 与 $J$ 之间存在一条长度为 2 的路径，因此从 $I$ 到 $J$存在一条长度不超过 3 的路径。

对于最后一个结论，我们假设 $\mathrm{MaxSpec}_I(R) = \mathrm{MaxSpec}_J(R)$，并选取 $M \in \mathrm{MaxSpec}_I(R)$。根据假设，存在另一个极大理想 $N$，于是我们找到 $m \in M$ 和 $n \in N$ 使得 $m + n = 1$。无论如何，理想$I$与 $(I, m)$ 相等或彼此之间有一条边。若 $J \subseteq N$，则 $J$与 $(J, n)$ 相等或彼此之间有一条边；又由于 $(I, m)$ 和 $(J, n)$ 互素，我们便得到所需的长度不超过 4 的路径。另一方面，若 $J$ 不包含于 $N$，则 $J$和 $N$互素（ $I$和 $N$也互素）。由 (1) 可知，存在一条从 $I$ 到 $N$ 的长度为 2 的路径，以及一条从 $N$ 到 $J$ 的长度为 2 的路径，至此证明完成。□

以下定理直接由引理 6.5 得出。

定理 6.6. 设 $R$ 是含幺交换环，且 $|\mathrm{MaxSpec}(R)| > 1$。则$GF(R)$ 和 $GP(R)$ 是连通的，并且 $\mathrm{diam}(R) \leq 4$。

现在我们考察 $GF(R)$ 在 $|\text{MaxSpec}(R)| > 1$ 的情形，并研究其直径取指定值的充要条件。

定理 6.7. 设 $R$ 是一个含幺交换环，且 $|\text{MaxSpec}(R)| > 1$。

(1) $\text{diam}(GF(R)) = 2$ 当且仅当每个 $R$ 的极大理想都是有限生成的。(2) $\text{diam}(GF(R)) \leq 3$ 当且仅当给定 $I$、$J \subset R$，若 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J)$，则存在一个真理想 $K$，它在 $I$ 和 $J$ 上均为有限生成。

证明。如果 $\text{diam}(GF(R)) = 2$，那么对任意极大理想 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}$ 与 (0) 之间存在一条长度为 1 或 2 的路径。无论该路径的形式是 $(0) - \mathfrak{M}$ 还是 $(0) - I - \mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}$ 都是有限生成的。

另一方面，若 $I$、$J \subset R$ 是理想，根据引理 6.5，如果 $I$ 和 $J$ 互素，则它们之间存在一条长度为 2 的路径。若 $I$ 和 $J$ 都包含于极大理想 $\mathfrak{M}$，则 $I \leftrightarrow \mathfrak{M} \leftrightarrow J$ 是它们之间一条长度不超过2的路径。由于 $|\text{MaxSpec}(R)| > 1$，我们有 $\text{diam}(GF(R))$ 恰为 2。这就证明了第一条结论。

对于（2），我们首先假设 $\text{diam}(GF(R)) \leq 3$。设 $I$、$J \subset R$ 为满足 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J)$ 的理想，并分情况讨论。如果 $I$ 和 $J$ 之间存在一条边，则较大的理想在两者上都是有限生成的。

如果 $I$ 和 $J$ 之间存在一条长度为 2 的路径，即 $I - A - J$ 和 $I$，$J \subset A$那么 $A$ 在 $I$ 和 $J$ 上都是有限生成的。另一方面，如果 $A \subset I$、$J$，那么 $I = (A, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 且 $J = (A, y_1, y_2, \cdots, y_m)$。现在注意到，$I + J = (I, y_1, y_2, \cdots, y_m) = (J, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $I$ 和 $J$ 上都是有限生成的；并且注意到，由于 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J)$，$I + J$ 是真理想。

最后，我们假设 $I$ 与 $J$ 之间存在一条长度为 3、形式为 $I - A - B - J$ 的路径。不失一般性，假设有以下包含关系：$I \supset A \subset B \supset J$。仿照前面的论证，我们写作 $I = (A, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $B = (A, z_1, z_2, \cdots, z_t) = (J, y_1, y_2, \cdots, y_m)$。注意，$I + B$ 是一个真理想，因为 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J) \subseteq \mathfrak{J}(B)$。因此，理想 $I + B = (I, z_1, z_2, \cdots, z_t) = (J, y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $I$ 和 $J$ 上都是有限生成的。

反之，注意到引理 6.5 表明，唯一尚未解决的情形是 $I, J \subset R$ 且 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J)$ 的情形。但是，$K$ 的存在表明，在 $I$ 和 $J$ 之间存在一条长度不超过 2 的路径。因此，$\text{diam}(GF(R)) \leq 3$。□

推论 6.8。设 $R$ 是带单位元的交换环。则 $\text{diam}(GF(R)) \leq 3$，当且仅当对于所有的 $I \subset R$，$\mathfrak{J}(R/I)$ 包含于一个有限生成真理想中。

证明。首先注意到，定理 6.3 表明该结果在准局部情形中成立，因此我们假设 $|\text{MaxSpec}(R)| > 1$。

首先假设 $\text{diam}(GF(R)) \leq 3$，并任取 $I \subset R$。定理 6.7 保证存在一个理想 $B \subset R$，其中 $B$ 在 $I$ 和 $\mathfrak{J}(I)$ 上都是有限生成的，因此 $B/I$ 是 $R/I$ 的一个有限生成理想，且包含 $\mathfrak{J}(I)/I = \mathfrak{J}(R/I)$。

逆命题，假设对于所有 $I \subset R$，$\mathfrak{J}(R/I)$ 都包含于某个有限生成理想中，并选取理想 $I$、$J \subset R$，使得 $\mathfrak{J}(I) = \mathfrak{J}(J)$。根据假设，$\mathfrak{J}(R/IJ) = \mathfrak{J}(IJ)/IJ$ 包含于有限生成理想 $K/IJ$ 中。注意，由于 $\text{MaxSpec}_I(R) = \text{MaxSpec}_J(R)$，$\mathfrak{J}(IJ) = \mathfrak{J}(J) = \mathfrak{J}(I)$，因此 $K/IJ$包含 $\mathfrak{J}(I)/IJ$，而后者又包含 $I/IJ$。所以 $K/I \cong (K/IJ)/(I/IJ)$ 是有限生成的。类似的证明表明，$K/J$ 是有限生成的，因此 $K$ 同时在 $I$ 和 $J$ 上有限生成。由定理 6.7 即得结论。□

例6.9。设 $V$ 是一个 $1-$维非离散赋值整环，其极大理想为 $\mathfrak{M}$，并考虑环 $V[x]$。注意，$V \cong V[x]/(x)$ 的雅各布森根为 $\mathfrak{M}$，因此根据推论 6.8，$GF(V[x])$ 的直径为 4。

例6.10。考虑环 $R := \prod_{i\in\Gamma} \mathbb{F}_2$，其中 $\Gamma$ 是一个至少含有两个元素的非空指标集（在退化情形下，若 $\Gamma$ 只含一个元素，则图 $GF(R)$ 是一个单顶点）。首先注意到，$R$ 中的任意元素都是幂等元，因此 $R$的任意同态像也具有这一性质。所以，若 $T$ 是 $R$ 的同态像，且 $e \in T$，则 $e(1-e) = 0$。因此，若 $e \in \mathfrak{J}(T)$，则 $1-e$ 是 $T$中的单位元，这意味着 $e = 0$。由于对于 $R$的所有同态像 $T$，都有 $\mathfrak{J}(T) = 0$，所以当 $\Gamma$ 是无限集时，diam$(GF(R)) = 3$；当 $\Gamma$ 是至少含有两个元素的有限集时，diam$(GF(R)) = 2$。

现在我们希望证明，非戴德金的几乎戴德金整环族能够大量地产生满足 diam$(GF(R)) = 3$ 的整环实例。我们首先需要几个预备结果。

引理 6.11。设 $R$ 是一个带单位元的交换环，$S \subseteq R$ 是一个乘法闭集，且$I \subset R$ 是一个理想，并且满足：对所有的 $s \in S$，存在 $x_s \in I$ 和 $s' \in S$使得 $s's + x_s = 1$，则$R/I \cong R_S/I_S$。

证明。定义 $\phi$： $R \longrightarrow R_S/I_S$，其由 $\phi(z) = \frac{z}{1} + I_S$给出。假设 $r \in R$且 $s \in S$。根据假设，可找到 $x_s \in I$、$s' \in S$ 使得 $s's + x_s = 1$。因此在 $R_S$中，有 $s' + \frac{x_s}{s} = \frac{1}{s}$，从而 $rs' + \frac{rx_s}{s} = \frac{r}{s}$。

现注意到 $\phi(rs') = \frac{rs'}{1} + I_S = \frac{r}{s} - \frac{rx_s}{s} + I_S = \frac{r}{s} + I_S$，因此 $\phi$ 是满射。

容易看出 $I \subseteq$ker$(\phi)$。对于另一方向的包含关系，注意若 $z \in$ker$(\phi)$，则 $\frac{z}{1} = \frac{\alpha}{s}$ for some $\alpha \in I$ and $s \in S$。因此存在 $t \in S$ such that$t(zs - \alpha) = 0$。利用假设的性质，存在一个 $t' \in S$ and $\beta \in I$ such that$tt' + \beta = 1$。由此可得 $(1-\beta)(zs-\alpha) = 0$，因此 $zs \in I$。再次利用这一事实：存在 $s' \in S$ and $\gamma \in I$ such that $ss' + \gamma = 1$，现在可得 $z(1-\gamma) \in I$，从而 $z \in I$。根据第一同构定理，我们有 $R/I \cong R_S/I_S$。□

命题 6.12。设 $I \subset R$ 是一个理想，$\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ 是 $R$ 中包含 $I$ 的极大理想集合。若 $S = (\bigcup_{i\in\Gamma} M_i)^c$，则 $R/I \cong R_S/I_S$。

证明。假设 $s \in S$，并注意到根据 $S$ 的定义，$(s, I) = R$。因此，我们可以找到 $x_s \in I$、$s' \in R$，使得 $s's + x_s = 1$。注意到 $s'$ 不可能属于任何包含 $I$ 的极大理想，因此必属于 $S$；现在我们应用引理 6.11。□

命题 6.13。若 $R$ 是一个具有有限个非有限生成的极大理想、但不是 Dedekind整环的几乎戴德金整环，则 diam$(GF(R)) = 3$。

我们指出，满足上述条件的几乎戴德金整环十分常见。特别地，考虑 [16] 中定义的序列整环。

证明。对于第一种情况，假设 $I$ 只包含于有限多个极大理想中，并令 $M_1$、$M_2$、$\cdots$、$M_n$ 为包含 $I$ 的极大理想。若 $S = (\bigcup_{i=1}^{n} M_i)^c$，则命题 6.12 表明 $R/I = R_S/I_S$；但由于 $R_S$ 是一个仅有有限多个极大理想的几乎戴德金整环，因此它是 Dedekind整环，从而 $\mathfrak{J}(R/I) \cong \mathfrak{J}(R_S/I_S)$ 是有限生成的。因此根据推论 6.8，diam$(GF(R))$ 6 3。

现在假设 $I$ 包含于无限多个极大理想中。注意，由于只有有限多个非有限生成的极大理想，因此必然存在无限多个有限生成的素理想（否则 $R$ 是半拟整环，因而是 Dedekind整环）。因此，若 $M$ 是一个包含 $I$ 的有限生成极大理想，则 $M/I$ 是 $R/I$ 的一个包含 $\mathfrak{J}(R/I) = \mathfrak{J}(I)/I$ 的有限生成理想，所以根据推论 6.8，同样有 diam($GF(R)$) 6 3。

根据非有限生成的极大理想的存在性及定理 6.7，可得等号。□

我们还区分诺特情形下的行为；忽略域的情形，因为此时图只有一个顶点。

定理 6.14. 设 $R$ 是一个非域的含幺交换环。以下条件等价。

(1) $R$ 是诺特环。(2) $GF(R)$ 的半径等于 1，且 (0) 是 $GF(R)$ 的中心。(3) diam($GF(R)$) 6 2，且若 $I, J \subset R$，则 $I$ 与 $J$ 之间要么有一条边，要么存在一条经过 (0) 的最短路径。

证明. 对于 (1) $\implies$ (2)，我们假设 $R$ 是诺特环。此时，(0) 与任意非零理想之间都有一条边。因此，(0) 是中心，且 $GF(R)$ 的半径恰为 1。

对于 (2) $\implies$ (3)，由于 (0) 是一个中心，并且与任意理想都有一条边，因此每个理想都是有限生成的。特别地，每个极大理想都是有限生成的，因此由定理 6.7 可知，diam($GF(R)$) 6 2。还要注意，根据上述结论，如果 $I$ and$J$ 之间没有边，那么我们就有路径 $I \leftrightarrow$(0) $\leftrightarrow J$。

最后，对于 (3) $\implies$ (1)，我们假设 $I \subset R$，并考察理想 $I$ 和 (0) 这一对。无论哪种情况，它们之间都有一条边，因此 $I$ 是有限生成的。□

现在我们依次给出关于多项式扩张、幂级数扩张和同态像中 $GF(-)$ 的性质定理。在这些定理的表述中，情形 $n = 0$ 对应于 $R$ 是一个域的情形（此时图只有一个顶点）。

定理 6.15. 设 $R$ 是一个带 1 的交换环。若 diam($GF(R)$) $=\infty$，则 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_m])$) $= 4$。若 diam($GF(R)$) $= n < \infty$，则 diam($GF(R)$) 6 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_m])$)，并且以下结论成立。

(1) 若 $n \leqslant 1$，则 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_m])$) $= 2$。(2) 若 $R$ 是诺特环，则 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_m])$) $= 2$。(3) 若 $n = 4$，则 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_m])$) $= 4$。

证明。对于第一个陈述，若 diam($GF(R)$) $= \infty$，则 $R$ 是拟局部环，其极大理想 $\mathfrak{M}$ 不是有限生成的。现在注意到 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cong R$。由于 $\mathfrak{J}(R) = \mathfrak{M}$ 不包含于任何有限生成理想中，我们构造出了一个理想，即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得 $\mathfrak{J}(R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 不包含于任何有限生成理想中，因此根据推论 6.8，diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$) $= 4$。

对于 diam($GF(R)$) $= n < \infty$ 的情形，我们首先注意到，当 diam($GF(R)$) 6 2 时，$R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 不是链式这一事实表明，应用定理 6.3 可得 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$) $\geqslant 2$。如果

diam($GF(R)$) $=3$，那么存在一个不是有限生成的极大理想 $\mathfrak{M}$。由于理想 $(\mathfrak{M}, x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 不是有限生成的，故 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$) $\geqslant 3$。最后，如果 diam($GF(R)$) $=4$，推论 6.8 表明存在一个理想 $I \subset R$，使得 $\mathfrak{J}(R/I)$ 不包含于任何有限生成理想中。由于 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(I, x_1, x_2, \cdots, x_n) \cong R/I$，再次应用推论 6.8，得到 diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$) $=4$。

对于 (1)，若 $n=1$，则由定理 6.3，$R$ 是诺特链式环（在 $n=0$ 且 $R$ 是域的情形下，这一说法也成立）。因此，$R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$是诺特环，但有无穷多个极大理想（故不是链式环）；于是由定理 6.7，diam($GF(R[x_1, x_2, \cdots, x_n])$) $=2$。

对于 (2)，若 $R$ 是诺特环，则 $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 也是诺特环，结论可由 (1) 的证明直接推得。

(3) 现在显而易见。 □

例 6.16. 设 $R = \mathbb{F}[x, \frac{y}{x}, \frac{y}{x^2}, \cdots]$，其中 $\mathbb{F}$ 是一个域，并设 $V = R_{\mathfrak{M}}$，其中$\mathfrak{M} = (x, \frac{y}{x}, \frac{y}{x^2}, \cdots)$。$V$是一个二维离散赋值整环，具有主极大理想（因此其所有极大理想都是有限生成的）；其素谱为 $\mathfrak{M}V = (x) \supset \mathfrak{P} = (y, \frac{y}{x}, \frac{y}{x^2}, \cdots) \supset (0)$。但若考虑多项式环 $V[t]$，容易看出，理想 $\mathfrak{N} := (\mathfrak{P}[t], xt+1)$是极大理想，却不是有限生成的。注意，理想$(\mathfrak{P}^2[t], xt+1)$的根是 $\mathfrak{N}$，因此 $V[t]/(\mathfrak{P}^2[t], xt+1)$的雅各布森根为 $\mathfrak{N}/(\mathfrak{P}^2[t], xt+1)$，但 $\mathfrak{N}$ 在$(\mathfrak{P}^2[t], xt+1)$上不是有限生成的。因此 diam($GF(V)$) $=2$，而 diam($GF(V[t])$) $=4$。这些细节也可由下文推出。

从更宏观的角度来看（与命题 6.13 中讨论的几乎戴德金整环类不同），推论 6.8 的条件似乎表明，$GF(R)$ 的直径恰为 3 的情形相当罕见。例如，我们考虑 J. Arnold 在 [3] 中引入的 SFT（即强有限型）环类，它是诺特环的一种推广，有助于研究幂级数环的维数。若存在有限生成理想 $B \subseteq I$ 和一个固定的自然数 $m$，使得对于所有 $x \in I$都有$x^m \in B$，则称理想 $I \subseteq R$ 为 SFT；如果环 $R$的所有理想都是 SFT，则称该环为 SFT。

命题6.17. 设 $R$ 为 SFT 环，或更一般地，设其为任意一种满足以下性质的环：每个极大理想都是某个有限生成理想的根。则 diam($GF(R)$) $\neq 3$。

证明。我们可以假设存在一个极大理想 $\mathfrak{M}$，它不是有限生成的。根据假设，$\mathfrak{M}$ 是一个有限生成理想 $B \subset \mathfrak{M}$ 的根。注意，$\mathfrak{J}(R/B) = \mathfrak{J}(B)/B = \mathfrak{M}/B$，且它是极大的。如果 $\mathfrak{M}/B$ 是有限生成的，那么 $B$ 是有限生成的这一事实意味着 $\mathfrak{M}$ 也是有限生成的。因此，$\mathfrak{J}(R/B)$ 不包含于任何有限生成理想中，所以根据推论 6.8，diam($GF(R)$) =4。□

值得注意的是，对于 SFT 环，diam($GF(R)$) $=1$、2、4、$\infty$均可能出现。此外，命题6.17为例 6.16提供了另一种证明途径。事实上，该例中的整环 $V$ 是一个 $2-$维 SFT 赋值整环，而 [15] 的结果表明，dim$(V[t][[y]])$具有有限 Krull维数，因此 $V[t]$ 必为 SFT。由于极大理想 $\mathfrak{N}$ 不是有限生成的，diam($GF(V[t])$) $=4$。

定理 6.18. 如果 $R$ 是一个带单位元的交换环，且 diam$(GF(R)) = n$ ，则以下结论成立。

(0) 若 $n = 0$, 则 diam$(GF(R[[x]])) = 1$。(1) 若 $n = 1$, 则 diam$(GF(R[[x_1, x_2, \cdots, x_m]])) = 2$。(2) 若 $n = 2$, 则 diam$(GF(R[[x_1, x_2, \cdots, x_m]])) = 2$。(3) 若 $n = 3, 4, \infty$, 则 diam$(GF(R[[x_1, x_2, \cdots, x_m]])) = n$。

证明。对于 (0)，我们注意到，如果 $R$ 是一个域，那么 $R[[x]]$ 是一个诺特赋值整环。

对于 (1)，根据定理 6.3， $R$ 是诺特且准局部的，因此 $R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 也是如此（但如果 $R$ 不是域，则它不是链式的）；于是根据定理 6.3，diam$(GF(R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]])) = 2$。

(2) 与前面的情形类似。由于每个极大理想都是有限生成的，且 $R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 的极大理想具有 $(\mathfrak{M}, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的形式，因此 $R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 的所有极大理想也都是有限生成的。

对于 (3)，我们首先考虑 $n = 3$。假设 $R$ 具有如下性质：对于所有 $I \subset R$， $\mathfrak{J}(R/I)$ 都包含于某个有限生成理想中。现在考虑理想 $A \subset R[[x]]$，并令 $A_0 = \{f(0) | f(x) \in A\}$。直接计算可得， $\mathfrak{J}(A)$ 恰好等于 $(\mathfrak{J}(A_0)\ x)$，其中 $\mathfrak{J}(A_0)$ 是 $A_0$ 在 $R$ 中的雅各布森根。注意，存在理想 $F \subset R$，使得 $F$ 在 $\mathfrak{J}(A_0)$ 上有限生成，并且 $A_0$ （即， $F/A_0$ 是一个包含 $\mathfrak{J}(A_0)/A_0 = \mathfrak{J}(R/A_0)$ 的有限生成理想）。因此，我们得到 $(F, x)$ 在 $\mathfrak{J}(A) = (\mathfrak{J}(A_0)\ x)$ 上有限生成。有了这一点，我们将证明 $(F, x)$ 在 $A$ 上有限生成。为此，令 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $F$ 在 $A_0$ 上的生成元，并对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，找出 $a_i(x) \in A$，使得 $a_i(0) = y_i$。现在假设 $\alpha p_1(x) + x p_2(x) \in (F, x)$，其中 $\alpha \in F$ 且 $p_1(x)\ p_2(x) \in R[[x]]$。由于 $x$ 是一个生成元，不妨设 $p_1 := p_1(x) \in R$。由于 $\alpha p_1 \in F$，我们可以将 $\alpha p_1 = r_1 y_1 + r_2 y_2 + \cdots + r_n y_n + a_0$ 写成 $r_i \in R, a_0 \in A_0$。注意， $\alpha p_1 + x p_2(x) = r_1 a_1(x) + r_2 a_2(x) + \cdots + r_n a_n(x) + a(x) + x g(x)$，其中 $a(x) \in A$，且 $a(0) = a_0$，以及 $g(x) \in R[[x]]$。因此，$(F, x)$ 由 $A$ 上的元素 $a_i(x)$ 和 $x$ 生成。于是，根据推论 6.8，diam$(R[[x]]) = 3$。多变量情形立即由归纳法得到。

若 $n = 4$，则存在理想 $I \subset R$，使得 $\mathfrak{J}(R/I)$ 不包含于任何有限生成理想中。注意，由于 $R[[x]]/(I, x) \cong R/I$，这一性质在幂级数扩张中仍然成立。再次应用归纳法即可完成证明。

最后，若 $n = \infty$, 则根据定理 6.3， $R$ 是准局部环，其极大理想 $\mathfrak{M}$ 不是有限生成的。由于 $R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 是准局部环，其极大理想为 $(\mathfrak{M}, x_1, x_2, \cdots, x_n)$，因此 $GF(R[[x_1, x_2, \cdots, x_n]])$ 的直径也为无穷大。□

最后，我们通过记录同态像中的性质来完善这一讨论。

定理 6.19。设 $R$ 是一个含幺交换环，且 $I \subset R$ 是一个理想。若 diam$(GF(R)) = n$，则有以下结论。

(1) 若 $n \leqslant 2$, 则 diam$(GF(R/I)) \leqslant n$。(2) 若 $n = 3$, 则 diam$(GF(R/I)) \leqslant n$。(3) 若 $n = 4$, 则 diam$(GF(R/I)) \leqslant n$ 或 diam$(GF(R/I)) = \infty$。

证明。若 $n \leqslant 2$，则 $R$ 的极大理想必然是有限生成的，因此 $R/I$ 也同样如此。

对于第二个陈述，我们假设 diam$(GF(R)) = 3$, 因此特别地，对于所有 $I \subset R$， $\mathfrak{J}(R/I)$ 都包含在某个有限生成理想中。因此，如果 $J/I$ 是一个

$R/I$ 的理想，那么 $(R/I)/(J/I) \cong R/J$，因此 $GF(R/I)$ 的直径不超过 3。

对于 (3)，若 $\operatorname{diam}(GF(R/I))$ 有限，则第一个结论显然。然而请注意，若 $R$ 是一个极大理想 $\mathfrak{M}$ 非有限生成的环，并且 $I \subset \mathfrak{M}$ 具有 $\sqrt{I} = \mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}/I$ 非有限生成的性质，则 $R/I$ 是准局部的，因此根据定理 6.3，其图不连通。举一个具体例子，设 $V$ 是一个 $1-$ 维非离散赋值整环。根据定理 6.3，$\operatorname{diam}(GF(V)) = \infty$，而根据定理 6.15，$\operatorname{diam}(GF(V[x])) = 4$；由于 $V \cong V[x]/(x)$，我们便得到所需的例子。□

注 6.20。最后，我们指出，值得探究 $\operatorname{diam}(GF(R)) = 3$ 这一性质在多项式扩张下是否保持稳定。更一般地，若能更全面地理解图 $GF(-)$ 的直径在 $n = 2$、3 的多项式扩张下的稳定性，将会很有意义。

## References

[1] David F. Anderson 和 John D. LaGrange。关于压缩零因子图的一些评述。 *J. Algebra*, 447：297–321，2016年。[2] David F. Anderson 和 Philip S. Livingston。交换环的零因子图。 *J. Algebra*，217(2)：434–447，1999年。[3] J. T. Arnold。幂级数环中的 Krull 维数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，177 304，1973年 299：–。[4] M. Axtell、N. Baeth 和 J. Stickles。交换环零因子图中的割结构。 *J. Commut. Algebra*，8(2)：143–171，2016年。[5] Michael Axtell、James Coykendall 和 Joe Stickles。交换环上多项式与幂级数的零因子图。 *Comm. Algebra*，33(6)：2043–2050，2005年。[6] Istv´an Beck。交换环的着色。 *J. Algebra*，116(1)：208–226，1988年。[7] M. Behboodi 和 Z. Rakeei。交换环的湮灭理想图 I。

*J. Algebra* , ( )： –。

*Appl.* 10 4 727 739, 2011

[8] Jason Greene Boynton 和 Jim Coykendall。关于整环的整除图。*Canad. Math. Bull.*，58(3)：449–458，2015年。[9] Jim Coykendall 和 Jack Maney。不可约因子图。 *Comm. Algebra*，35 895，2007年 3 885( )：–。[10] Frank DeMeyer 和 Lisa DeMeyer。半群的零因子图。 *J. Algebra*，283(1)：190–198，2005年。[11] Robert Gilmer 和 Raymond C. Heitmann。关于半正规

$R[X]$ $R$ *J. Pure Appl.* 的

*Algebra* 16 3 251 257, 1980

Pic。 , ( )： –。[12] Robert W Gilmer。 *Multiplicative ideal theory*。第12号。Queen's University，Kinston，安大略省，1968年。[13] J¨urgen Herzog、Somayeh Moradi 和 Masoomeh Rahimbeigi。图的边理想及其分裂图。 *J. Commut. Algebra*，14(1)：27–35，2022年。[14] Takayuki Hibi、Kyouko Kimura、Kazunori Matsuda 和 Akiyoshi Tsuchiya。Cameron-Walker 图的正则性与$a$不变量。 *J. Algebra*，584：215–242，2021年。[15] B. G. Kang 和 M. H. Park。混合扩张的 Krull 维数。 *J. Pure Appl. Algebra*，213(10)：1911–1915，2009年。[16] K. Alan Loper。并非戴德金整环的几乎戴德金整环。载于 *Multiplicative ideal theory in commutative algebra* 279 292 2006 ，第–

页。施普林格，纽约，。[17] Thomas G. Lucas。团理想性质。 *J. Commut. Algebra*，10(4)：499–546，2018年。[18] Aron Simis、Wolmer V. Vasconcelos 和 Rafael H. Villarreal。关于图的理想论。 *J. Algebra*，167(2)：389–416，1994年。[19] Richard G. Swan。关于半正规性。 *J. Algebra*，67(1)：210–229，1980年。[20] Rafael H. Villarreal。Cohen-Macaulay 图。 *Manuscripta Math.*，66(3)：277–293，1990年。[21] Rafael H. Villarreal。边理想的 Rees 代数。 *Comm. Algebra*，23(9)：3513–3524，1995年。

Department of Mathematics, Tafila Technical University, Tafilah, Jordan
*Email address*, S. Al-Kaseasbeh: kaseabeh@ttu.edu.jo

Department of Mathematical Sciences, Clemson University, Clemson, SC
*Email address*, J. Coykendall: jcoyken@clemson.edu