arXiv:2303.00151v1 [math.CA] 1 Mar 2023

非自治微分方程的指数三分性与全局线性化

ChaofanPan[a] Manuel Pinto[b] Yonghui Xia[a*a] 浙江师范大学数学与计算机科学学院, 321004，金华，中国[b] 智利大学数学系，圣地亚哥，智利 Email: pancf0530@zjnu.edu.cn; pintoj.uchile@gmail.com; xiadoc@163.com; yhxia@zjnu.cn.

摘要

Hartman-Grobman 定理最初由 Palmer 推广到非自治情形。通常，二分性是 Palmer 线性化定理的一个必要条件。对于具有三分性的系统，Palmer 线性化定理是否仍然成立？本文在线性系统在 $\mathbb{R}$ 上具有指数三分性的条件下，获得了线性化定理的新形式。此外，我们的线性化定理中的等价函数 $\mathscr{H}(t,x)$ 及其逆函数 $\mathscr{L}(t,y)$ 均为 H¨lder 连续。进一步地，当系统具有周期性时，我们发现线性化定理中的等价函数 $\mathscr{H}(t,x)$ 及其逆函数 $\mathscr{L}(t,y)$ 并不具有周期性或渐近周期性。据我们所知，这是首篇研究具有指数三分性的线性化问题的论文。

关键词：指数三分性；线性化；周期；

MSC 2022：34D09;34D10

1 引言

1.1 三分性的简要历史

1930年，Perron [1] 提出了（统一或经典）指数二分性的概念。此后，人们陆续提出了许多二分性，例如非一致指数二分性（见 Barreira 和 Valls[2, 3]）、（h，k）-二分性（见 Naulin 和 Pinto [4], Fenner 和 Pinto [5]）、代数二分性（见 Lin [6]）、（h，k，μ，ν）-二分性（见 Zhang 等人 [7]）等。1975年，Sacker 和 Sell [8] 为线性微分系统提出了三分性的概念，将 $\mathbb{R}^n$ 分解为稳定、不稳定和中性子空间。后来，Elaydi 和 Hajek [9]提出了更强的三分性概念。Hong、Obaya 和 Gilet [10] 利用指数三分性，研究了某些微分方程中一类遍历解的存在性。Barreira 和 Valls [11, 12] 证明了在足够小的 C^1 扰动下，非一致指数三分性的存在性。Popa、Ceausu

*通讯作者。Yonghui Xia，xiadoc@163.com;yhxia@zjnu.cn。

和 Bagdaser [13] 利用广义指数三分性研究了线性离散时间系统。Adina和 Bogdan [14] 研究了变分差分方程的一致指数三分性。在巴拿赫空间中，Kovacs [15] 在演化算子的一般框架下，研究了半直线上一致指数三分性的三种概念。

1.2 C^0 微分方程的线性化

另一方面，我们对常微分方程的线性化感兴趣。Hartman 和 Grobman [16,17] 对自治微分方程的线性化问题作出了基础性贡献（称为 Hartman-Grobman 定理）。后来，Hartman-Grobman 定理被推广到标量反应扩散方程、Cahn-Hilliard方程、相场方程和随机动力系统中（参见 Lu [18], Bates 和 Lu [19], Barreira 和 Valls [20]）。Pugh [21] 运用了一些强有力的泛函分析技巧，给出了 Hartman-Grobman 定理的另一种证明方法。在巴拿赫空间中，Hein 和 Pr¨uss [22] 将 Hartman-Grobman 定理推广到了抽象半线性双曲演化方程。Reinfelds [23] 证明了某些特定的微分方程是严格动力等价的。Reinfelds 和 Sermone [24] 给出了具有脉冲效应的非线性微分方程的一个线性化结果。关于拟线性脉冲方程的动力等价，可参阅 Reinfelds [25,26], Sermone [27,28], Reinfelds 和 Šteinberga [29,30]。

1973年，Palmer [31] 成功将 Hartman-Grobman 定理推广到了非自治微分方程

$$y' = A(t)y + f(t, y). \tag{1}$$

为了放宽 Palmer 线性化定理的条件，已有一些改进：不要求指数二分性（见 Backes、Dragiˇcevi´c 和 Palmer [32]）；针对非一致二分性（见 Barreira 和 Valls [33–36]）；针对广义二分性和普通二分性（Jiang [37, 38]）；针对非一致收缩（见 Casta˜neda 和 Huerta [39, 40]）；针对分段常数变元微分方程（见 Zou、Xia 和 Pinto [41]）；针对时间尺度上的动力系统（Xia 等 [42], P¨otzche [43]）；针对瞬时脉冲系统（见 Fenner和Pinto [44], Xia 和 Chen [45]、Papaschinopoulos [46], Casta˜neda、Gonz´alze 和 Robledo [47],Pinto 和 Robledo [48],）；针对常微分方程中的非一致 (h, k, μ, ν)-二分性（见 Zhang、Fan 和 Zhu [7]）；针对非自治脉冲微分方程中的非一致 (h, k, μ, ν)-二分性（见 Zhang、Chang 和 Wang [50]）；针对非瞬时脉冲非自治系统（见 Li、Wang 和 O'Regan [51–54]）；针对非一致指数二分性的可容许性和粗糙性（见 Zhou 和 Zhang [55, 56]）；以及 Dragiˇcevi´c、Zhang 和 Zhou [58]（可容许性和非一致指数二分性），还有针对带不变流形的广义指数二分性（见 Zhang [57]）。上述研究针对的是 C^0 线性化。近期，双曲微分同胚的 C^1 线性化也取得了一些有趣进展（例如见 Backes 和 Dragiˇcevi´c [59]；Dragiˇcevi´c、Zhang 和 Zhang [61, 62]；Zhang、Zhang 和 Jarczyk [63]；Zhang 和 Zhang [64, 65]；Zhang、Lu 和 Zhang [66]）。

1.3 研究动机与创新

Palmer 线性化定理 [31] 有两个必要条件：(i) 非线性项 f 有界且利普希茨连续；(ii) 线性系统

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2}$$

具有指数二分性。本文特别关注指数三分性对非自治常微分方程线性化的影响。受 Palmer、Backes、Dragiˇcevi´c 和 Palmer、Elaydi 以及 Hajek 的指数三分性研究（见 Elaydi 和 Hajek [9]）启发，我们基于指数三分性提出了新的线性化定理。本文的主要贡献是从四个方面改进 Palmer 线性化定理:

（I）：线性系　　统具有指数三分性，这比指数二分性更弱。

（II）：我们证明，　等价函数 $\mathscr{H}(t,x)$ 及其逆函数 $\mathscr{L}(t,y)$ 是 H¨older 连续的。

(III)：研究等价函数的周期性。我们证明，在指数三分性下，周期性不是不变性质。更具体地，对于周期系统，如果线性系统具有指数三分性，则等价函数 $\mathscr{H}(t,x)$ 及其逆函数 $\mathscr{L}(t,y)$ 都不是周期、渐近周期或几乎周期的。相反，如果线性系统具有指数二分性，其等价函数则是周期的（见 [42]）。

(IV)：在我们的第二个线性化定理中，非线性项 f 可以是无界的或非利普希茨连续的。

1.4 本文结构

本文结构如下。第 2 节给出一些基本定义。第 3 节陈述我们的定理。第 4 节证明我们的结果。最后，我们给出一些例子来说明我们的线性化定理。

2 主要结果的陈述

设 $(X, |\cdot|)$ 是任意一个巴拿赫空间。 $A(t)$ 是分别定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续有界矩阵。 $f:\ \mathbb{R}\times X\to X$ 是一个连续映射。

考虑以下系统

$$x' = A(t)x + f(t,x), \tag{3}$$

and

$$x' = A(t)x. \tag{4}$$

定义 2.1.　*[49]* 假设存在一个函数 $\mathscr{H}:\ \mathbb{R}\times X\to X$，使得对于每个固定的 t, $\mathscr{H}(t,\cdot)$ 都是从 X 到 X 的同胚;

(ii) $|\mathscr{H}(t,x)-x|$ 关于 t 一致有界；(iii) 假设 $\mathscr{L}(t,\cdot)=\mathscr{H}^{-1}(t,\cdot)$ 也具有性质 (ii)；(iv) 若 $x(t)$ 是系统 (3) 的一个解，则 $\mathscr{H}(t,x(t))$ 是系统 (4) 的一个解；若 $y(t)$ 是系统 (4) 的一个解，则 $\mathscr{L}(t,y(t))$ 是系统 (3) 的一个解。

如果存在这样的映射 $\mathscr{H}_t(\mathscr{H}_t:=\mathscr{H}(t,\cdot))$，那么系统（3）与系统（4）拓扑共轭，且变换 $\mathscr{H}(t,x)$ 称为等价函数。

定义 2.2. *[9]* 若存在线性系统（4）具有指数三分性，则存在投影 P、Q 以及常数 $\beta\geq 1$、$\alpha>0$，使得

$$\begin{cases} PQ=QP, \quad P+Q-PQ=I, \\ |U(t)PU^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(t-s)} \quad (0\leq s\leq t), \\ |U(t)(I-P)U^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leq s, s\geq 0), \\ |U(t)QU^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leq s\leq 0), \\ |U(t)(I-Q)U^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(t-s)} \quad (s\leq t, s\leq 0), \end{cases} \tag{5}$$

成立；其中 $U(t)$ 是线性系统（4）的基本矩阵。

注 2.3. 若在定义 $P=I-Q$ 中取 2.2，则（5）变为

$$\begin{cases} |U(t)PU^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(t-s)} \quad (s\leq t), \\ |U(t)QU^{-1}(s)|\leq \beta e^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leq s). \end{cases} \tag{6}$$

我们在 $\mathbb{R}$ 上得到一个指数二分性。

注 2.4. （5）中的第一个不等式可分解为（5）中的第一个和第四个不等式。（5）中的第二个不等式可分解为（5）中的第二个和第三个不等式。因此，$\mathbb{R}$ 上的指数二分性总是蕴含指数三分性。然而，反过来显然不成立，这可由一个简单例子说明。

下一个例子表明，该线性系统具有指数三分性，但不具有指数二分性。

例 2.5. *[9]* 考虑标量方程

$$x'=(-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}})x. \tag{7}$$

那么 $x(t)=\frac{2}{e^t+e^{-t}}x_0$ 是方程 (7) 在 $x(0)=x_0$下的解。现在取 $P=I$, $Q=I$。显然，$I-P=0$, $I-Q=0$, $PQ=QP$, $P+Q-QP=I$。

$$|x(t)Px^{-1}(s)|=\frac{e^s+e^{-s}}{e^t+e^{-t}}\leq\frac{e^{t+s}+e^{t-s}}{e^{2t}}\leq e^{s-t}+e^{-s-t}\leq 2e^{-(t-s)}, (t\geq s\geq 0),$$

$$|x(t)Qx^{-1}(s)|=\frac{e^s+e^{-s}}{e^t+e^{-t}}\leq\frac{e^{s-t}+e^{-s-t}}{e^{-2t}}\leq e^{s+t}+e^{-(s-t)}\leq 2e^{-(s-t)}, (t\leq s\leq 0).$$

定义 2.2 中的最后两个不等式在此情形下显然成立。这意味着方程 (7) 具有指数三分性，其中

$$\beta=2, \quad \alpha=1.$$

然而，方程（7）不满足指数二分性。

定义 2.2 中的指数三分性具有如下格林函数:

$$G(t,s)=\begin{cases}U(t)PU^{-1}(s), & (0\le s\le t),\\ -U(t)(I-P)U^{-1}(s), & (t\le s, s\ge 0),\\ -U(t)QU^{-1}(s), & (t\le s\le 0),\\ U(t)(I-Q)U^{-1}(s), & (s\le t, s\le 0).\end{cases} \tag{8}$$

现在，我们通过对基本矩阵 $U(t)$ 进行分解来考察指数三分性。假设 $U(t)=(\varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\ ...,\varphi_n(t))$ 是线性系统 $x'=A(t)x$ 的基本矩阵。$\varphi_i(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，对 $i=1,...,r-k,r+l,...,n$，$\varphi_j(t)$ 在 $t\le k$ 上无界（并且在 $t\ge k$ 上有界），对 $j=r-k+1,...,r+l-1$。于是，我们选取投影 $P=P_1+P_2+P_3=diag\{I_{r-k},0\}+diag\{0_{r-k},I_r,0\}+diag\{0_r,I_{r+l-1},0\}$ 和 $Q=P_2+P_3+P_4=diag\{0_{r-k},I_r,0\}+diag\{0_r,I_{r+l-1},0\}+diag\{0_{r-l+1},I_n\}$. 。此外，

$$PQ=P_2+P_3=QP,$$
$$P+Q-PQ=I.$$

我们验证投影 P、Q 满足定义 2.2 的第一个不等式。于是，$|U(t)P_1U^{-1}(s)|$ 和$|U(t)P_4U^{-1}(s)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界。$|U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)|$ 在 $t\le s$ 上无界（而在$t\ge s$上有界）。我们记

$$|U(t)P_1U^{-1}(s)|\le\kappa_1, \tag{9}$$
$$|U(t)P_4U^{-1}(s)|\le\kappa_2. \tag{10}$$

˜于是我们得到另一个格林函数 $G(t,s)$,

$$\tilde{G}(t,s)=\begin{cases}U(t)P_1U^{-1}(s), & (s\le t),\\ U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s), & (0\le s\le t),\\ -U(t)P_4U^{-1}(s), & (t\le s),\end{cases} \tag{11}$$

其出现在定理3.6的陈述中。我们将基于这两个格林函数研究线性化。

3 主要结果

定理 3.1. 假设线性系统（4）具有指数三分性（8）（即，基本矩阵 U（t）满足（5）），且 f（t, x）满足

$$\begin{cases}|f(t,x)|\le\mu,\\ |f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le\gamma|x_1-x_2|,\\ 3\beta\gamma\alpha^{-1}<1.\end{cases} \tag{12}$$

那么，非线性系统（3）与其线性系统（4）拓扑共轭。

注 3.2。在定理3.1中，若指数三分性退化为指数二分性，则定理3.1 仍然成立。事实上，这就是 Palmer 线性化定理，（参见 Palmer *[31]*）。

接下来，我们引入一个受 Backes、Dragi˘cevi´c 和 Palmer [32] 启发的假设。条件 (I)：假设存在一个连续函数 $\Delta_1(t,s) > 0$，使得若 $z_1(t)$ 和$z_2(t)$ 是系统（4）的解，则 $|z_1(t) - z_2(t)| \le \Delta_1(t,s)|z_1(s) - z_2(s)|$；此外，还存在另一个连续函数 $\Delta_2(t,s) > 0$，使得若 $z_3(t)$ 和 $z_4(t)$ 是系统（3）的解，则$|z_3(t) - z_4(t)| \le \Delta_2(t,s)|z_3(s) - z_4(s)|$ ($\Delta_1(t,s) > 0$和 $\Delta_2(t,s) > 0$是连续函数）。

注 3.3。 条件 (I) 成立，关于函数的详细说明可参见 *[32]* 。$\Delta_1(t, s)$和 $\Delta_2(t, s)$。

定理 3.4。 假设定理 3.1 中的条件以及条件（I）均成立。设 $p > 0$和 $0 < q < 1$ 满足

$$
\begin{aligned}
m \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\Delta_1^q(t,s)ds \le \frac{p}{1+p},\\
m \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\Delta_2^q(t,s)ds \le \frac{p}{1+p},
\end{aligned}
$$

其中 $m = \max\{\gamma, 2\mu^{1-q}\gamma^q\}$。于是

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{H}(t,x) - \mathscr{H}(t,x')| \le (1+p)|x-x'|^q, \quad \text{if } |x-x'| < 1,\\
|\mathscr{L}(t,y) - \mathscr{L}(t,y')| \le (1+p)|y-y'|^q, \quad \text{if } |y-y'| < 1,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

其中 $\mathscr{L}(t,\cdot) = \mathscr{H}^{-1}(t,\cdot)$，且 p为正常数。

定理 3.5。 假设线性系统（ 4）具有指数三分性（11）（即基本矩阵 $U(t)$满足（ 5）），且 $f(t, x)$满足

$$
\begin{cases}
|f(t,x)| \le \phi(t),\\
|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \psi(t)|x_1 - x_2|,\\
\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt < c_1,\\
\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt < c_2,
\end{cases}
\tag{14}
$$

其中 ϕ， ψ： $\mathbb{R} \to [0,\infty)$为可积函数； c_1， c_2为正常数。于是，非线性系统（ 3）与其线性系统（4）拓扑共轭。

定理 3.6。设定理 3.5 中的条件及条件 (I) 均成立。

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t,s)|M(s)\Delta_1^q(t,s)ds \le \frac{p}{1+p},\\
\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(t,s)|M(s)\Delta_2^q(t,s)ds \le \frac{p}{1+p},
\end{aligned}
$$

其中，$M(t) = \max\{\psi(t)\ 2\phi^{1-q}(t)\psi^{q}(t)\}$ 且 q 属于 (0,1)。则

$$\begin{aligned} |\mathscr{H}(t,x)-\mathscr{H}(t,x')| &\le (1+p)|x-x'|^{q}, \quad \text{if } |x-x'|<1, \\ |\mathscr{L}(t,y)-\mathscr{L}(t,y')| &\le (1+p)|y-y'|^{q'}, \quad \text{if } |y-y'|<1, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\mathscr{L}(t,\cdot) = \mathscr{H}^{-1}(t,\cdot)$，且 p 是正常数。

定理 3.7。对于系统（3），假设 A（t） 和 f（t， x）关于 T具有周期 t。则定理 $\mathscr{H}$（t， x）中的等价函数及其逆函数 $\mathscr{L}$（t， y）以及定理 3.1 和定理 3.5 中的相对于 t 都不具有周期性、渐近周期性或几乎周期性。

4 主要结果的证明

设 x（t， t_0， x_0）是系统（3）满足初值条件 x（t_0） $= x_0$， y（t， t_0， y_0）是系统（4）满足初值条件 y（t_0） $= y_0$。
定理**3.1**的证明。
步骤 1。我们证明 $t \ge 0$ 的情形。令 Ω 表示所有连续映射 h 满足的空间

$$\Omega := \{h(t)|h:\mathbb{R}\to X, |h(t)| \le 3\beta\mu\alpha^{-1}\}.$$

那么，(Ω $\|\cdot\|$) 是一个巴拿赫空间。对于 $t \ge 0$、 ξ、 $\eta \in X$ 和 $h_1 \in \Omega$，我们定义如下映射：

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}h_1(t,\eta) = \tilde{h}_1(t,\eta) \\ =&\int_{-\infty}^{0} U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\ &+\int_{0}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\ &-\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\ =&\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta))ds, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $G(t,\ s)$ 定义见 (8)。由 (5)，可得

$$\begin{aligned} &|\tilde{h}_1(t,\eta)| \\ \le&\int_{-\infty}^{0} \beta e^{-\alpha(t-s)}\mu ds + \int_{0}^{t} \beta e^{-\alpha(t-s)}\mu ds + \int_{t}^{+\infty} \beta e^{-\alpha(s-t)}\mu ds \\ \le&\beta\mu\alpha^{-1}+\beta\mu\alpha^{-1}+\beta\mu\alpha^{-1} \\ \le&3\beta\mu\alpha^{-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

此外，对（16）求导，可得

$$\tilde{h}_1'(t,\eta) = A(t)\tilde{h}_1(t,\eta) + f(t,\eta+h_1(t,\eta)). \tag{18}$$

~ ~因此，由（17）和（18），我们知道 $h_1(t,\ \eta)$ 连续，且 $h_1(t,\ \eta)$ $\in\Omega$。对于任意 $h_2,\ h_3\in\Omega$，由（12）和（16），可得

$$\begin{aligned}
&|\tilde{h}_2(t)-\tilde{h}_3(t)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{0}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|h_2(s)-h_3(s)|ds+\int_{0}^{t}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|h_2(s)-h_3(s)|ds\\
&+\int_{t}^{+\infty}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|h_2(s)-h_3(s)|ds\\
\leq&3\beta\gamma\alpha^{-1}\|h_2-h_3\|.
\end{aligned}\tag{19}$$

注意到 $3\beta\gamma\alpha^{-1}<1$。因此，$\mathscr{T}:\Omega\to\Omega$ 是一个压缩映射。因此，存在唯一的不动点 $h_1\in\Omega$，使得

$$\begin{aligned}
&h_1(t,\eta)\\
=&\int_{-\infty}^{0}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&+\int_{0}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta)))ds\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s,y(s,t,\eta))ds,
\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $G(t,s)$ 在 (8) 中定义。利用这些恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}
x(t,s,x(s,\tau,\xi))&=x(t,\tau,\xi),\\
y(t,s,y(s,\tau,\eta))&=y(t,\tau,\eta).
\end{aligned}\tag{21}$$

那么，如果 $y(t)$ 是系统 (4) 的一个解，则有

$$h_1(t,y(t,\tau,\eta))=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta))ds.\tag{22}$$

取

$$\mathscr{H}_1(t,y(t))=y+h_1(t,y(t)),t\geq0.\tag{23}$$

通过直接求导 (23)，我们得出

$$\mathscr{H}_1'(t,y(t))=A(t)y(t)+A(t)h_1(t)+f(t,y(t)+h_1(t))=A(t)\mathscr{H}_1(t,y)+f(t,\mathscr{H}_1(t,y)).\tag{24}$$

上述证明表明，若 $y(t)$ 是方程（4）的一个解，则 $\mathscr{H}_1(t,y(t))$ 是方程（3）的一个解。接下来，我们证明 $\mathscr{L}_1$ 的存在性。令

$$l_1(t,\xi)=-\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s,t,\xi))ds.\tag{25}$$

˜与 h_1类似，我们可以很容易地证明 $l_1 \in \Omega$。由（21）可知，若 $x(t)$ 是系统（3）的一个解，则有

$$l_1(t, x(t,\tau,\xi)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s,\tau,\xi)) ds. \tag{26}$$

取

$$\mathscr{L}_1(t, x(t)) = x(t) + l_1(t, x(t)), t \geq 0. \tag{27}$$

根据直接求导（27），我们有

$$\mathscr{L}_1'(t, x(t)) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) + A(t) l_1(t, x(t)) - f(t, x(t)) = A(t)\mathscr{L}_1(t, x(t)). \tag{28}$$

上述证明意味着，若 $x(t)$ 是（3）的一个解，则 $\mathscr{L}_1(t, x(t))$ 是（4）的一个解。

接下来我们证明，对于 $t \geq 0$，$\mathscr{H}_1(t, \mathscr{L}_1(t, x)) = x$ 和 $\mathscr{L}_1(t, \mathscr{H}_1(t, y)) = y$。设 $x(t)$ 是系统（3）的任意一个解。那么我们知道，$\mathscr{L}_1(t, x(t))$ $w_1(t)$ 是系统（4）的解，而 $\mathscr{H}_1(t, \mathscr{L}_1(t, x(t)))$ $g_1(t)$ 是系统（3）的解。由（23）和（27）可得，

$$\begin{aligned} w_1(t) &= x(t) + l_1(t, x(t)) = x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s)) ds, \\ g_1(t) &= w_1(t) + h_1(t, w_1(t)) = w_1(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, g_1(s)) ds. \end{aligned} \tag{29}$$

于是，

$$\begin{aligned} & |g_1(t) - x(t)| \\ \leq & \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||f(s, g_1(s)) - f(s, x(s))| ds \\ \leq & \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\gamma |g_1(s) - x(s)| ds \\ \leq & 3\beta\gamma\alpha^{-1} \|g_1(t) - x(t)\|. \end{aligned} \tag{30}$$

因此，$\mathscr{H}_1(t, \mathscr{L}_1(t, x)) = x$。设 $y(t)$ 是系统（4）的任意一个解。那么我们知道，$\mathscr{H}_1(t, y(t)) \triangleq \hat{}g_1$ (t) 是系统（3）的解，而 $\mathscr{L}_1(t, \mathscr{H}_1(t, y(t))) \triangleq \hat{}w_1(t)$ 是系统（4）的解。由（23）和（27）可得，

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(t) &= y(t) + h_1(t, y(t)) = y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, \hat{g}_1(t)) ds, \\ \hat{w}_1(t) &= \hat{g}_1(t) + l_1(t, \hat{g}_1(t)) = \hat{g}_1(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, \hat{g}_1(t)) ds. \end{aligned} \tag{31}$$

则，$\hat{}w_1(t) = y(t)$。因此，$\mathscr{L}_1(t, \mathscr{H}_1(t, y)) = y$。

步骤 2。 我们证明：如果 $t < 0$，定理3.1 仍然成立。对于 $t < 0$，ξ，$\eta \in X$ 以及 $v \in \Omega$，我们定义如下

映射:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}v(t,\eta)=\tilde{v}(t,\eta)\\
=&\int_{-\infty}^{t}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&-\int_{t}^{0}U(t)QU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&-\int_{0}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds,
\end{aligned}\tag{32}$$

其中 G（t， s）定义于（8）中。由（5）可得

$$\begin{aligned}
&|\tilde{v}(t,\eta)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{t}\beta e^{-\alpha(t-s)}\mu ds+\int_{t}^{0}\beta e^{-\alpha(t-s)}\mu ds+\int_{0}^{+\infty}\beta e^{-\alpha(s-t)}\mu ds\\
\leq&\beta\mu\alpha^{-1}+\beta\mu\alpha^{-1}+\beta\mu\alpha^{-1}\\
\leq&3\beta\mu\alpha^{-1}.
\end{aligned}\tag{33}$$

此外，对（32）求导可得

$$\tilde{v}^{'}(t,\eta)=A(t)\tilde{v}(t,\eta)+f(t,\eta+v(t,\eta)).\tag{34}$$

因此，由（32）和（33），可知 $\tilde{v}$（t， η）是连续的，并且 $\tilde{v}$（t， η） $\in\Omega$。对于任意 v_1， $v_2\in\Omega$，由（12）可得

$$\begin{aligned}
&|\tilde{v}_1(t)-\tilde{v}_2(t)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{t}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|(v_1(s)-v_2(s)|ds+\int_{t}^{0}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|(v_1(s)-v_2(s)|ds\\
&+\int_{0}^{+\infty}\beta e^{-\alpha(t-s)}\gamma|(v_1(s)-v_2(s)|ds\\
\leq&3\beta\gamma\alpha^{-1}\|v_1-v_2\|.
\end{aligned}\tag{35}$$

注意， $3\beta\gamma\alpha^{-1}<1$。因此， $\mathscr{F}:\Omega\to\Omega$ 是一个压缩映射。因此，存在唯一的不动点 $v\in\Omega$，使得

$$\begin{aligned}
&v(t,\eta)\\
=&\int_{-\infty}^{t}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&-\int_{t}^{0}U(t)QU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&-\int_{0}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta)))ds\\
\triangleq&\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+v(s,y(s,t,\eta))ds.
\end{aligned}\tag{36}$$

那么，如果 $y(t)$ 是系统 (4) 的一个解，我们有

$$v(t,y(t,\tau,\eta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta))ds. \tag{37}$$

取

$$\mathscr{H}_2(t,y(t)) = y + v(t,y(t)), \quad t<0. \tag{38}$$

通过直接求导（38），我们得出

$$\mathscr{H}_2'(t,y(t)) = A(t)y(t)+A(t)v(t)+f(t,y(t)+v(t)) = A(t)\mathscr{H}_2(t,y)+f(t,\mathscr{H}_2(t,y)). \tag{39}$$

上述证明表明，若 $y(t)$ 是（4）的一个解，则 $\mathscr{H}_2(t,y(t))$ 是（3）的一个解。接下来，我们构造函数 $\mathscr{L}_2$。令

$$l_2(t,\xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s,t,\xi))ds. \tag{40}$$

与 $\tilde{v}$ 类似，　我们可以证明 $l_2 \in \Omega$。由（21），若 $x(t)$ 是系统（3）的一个解，则有

$$l_2(t,x(t,\tau,\xi)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s,\tau,\xi))ds. \tag{41}$$

取

$$\mathscr{L}_2(t,x(t)) = x(t)+l_2(t,x(t)), \quad t<0. \tag{42}$$

通过直接求导，我们得到

$$\mathscr{L}_2'(t,x(t)) = A(t)x(t)+f(t,x(t))+A(t)l_2(t,x(t))-f(t,x(t)) = A(t)\mathscr{L}_2(t,x(t)). \tag{43}$$

上述证明意味着，如果 $x(t)$ 是（3）的一个解，那么 $\mathscr{L}_2(t,x(t))$ 是（4）的一个解。

接下来，对于 $t<0$，我们证明 $\mathscr{H}_2(t,\mathscr{L}_2(t,x)) = x$ 和 $\mathscr{L}_2(t,\mathscr{H}_2(t,y)) = y$。设 $x(t)$ 是系统（3）的任意一个解。那么我们知道，$\mathscr{L}_2(t,x(t))$ $w_2(t)$ 是系统（4）的解，而 $\mathscr{H}_2(t,\mathscr{L}_2(t,x(t)))$ $g_2(t)$ 是系统（3）的解。由（38）和（42），

$$\begin{aligned} w_2(t) &= x(t)+l_2(t,x(t)) = x(t)-\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s))ds,\\ g_2(t) &= w_2(t)+h(t,w_2(t)) = w_2(t)+\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,g_2(s))ds. \end{aligned} \tag{44}$$

于是，

$$\begin{aligned} &|g_2(t)-x(t)|\\ \le &\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||f(s,g_2(s))-f(s,x(s))|ds\\ \le &\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\gamma|g_2(s)-x(s)|ds\\ \le &3\beta\gamma\alpha^{-1}\|g_2(t)-x(t)\|. \end{aligned} \tag{45}$$

因此，$\mathscr{H}_2(t,\mathscr{L}_2(t,x)) = x$。设 $y(t)$ 是系统（4）的任意一个解。那么我们知道，$\mathscr{H}_2(t,y(t)) \triangleq \hat{} g_2(t)$ 是系统（3）的解，而 $\mathscr{L}_2(t,\mathscr{H}_2(t,y(t))) \triangleq \hat{} w_2(t)$ 是系统（4）的解。由（23）和（27），

$$\begin{aligned}\hat{g}_2(t) &= y(t) + v(t,y(t)) = y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,\hat{g}_2(t))ds,\\ \hat{w}_2(t) &= \hat{g}(t) + \bar{l}(t,\hat{g}_2(t)) = \hat{g}_2(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,\hat{g}_2(t))ds.\end{aligned} \tag{46}$$

于是，$\hat{} w_2(t) = y(t)$。因此，$\mathscr{L}_2(t,\ \mathscr{H}_2(t,\ y)) = y$。我们已证明定理 3.1 对$t<0$成立。

步骤 3。最后，我们证明若 $t \to 0$，则有 $H_2(t,y(t)) \to H_1(0,y(0))$。回想一下，若 $t=0$，则可得

$$\begin{aligned}&|h_1(t,y(t,\tau,\eta)) - v(t,y(t,\tau,\eta))|\\ =&|\int_{-\infty}^{0} U(0)(I-Q)U^{-1}(s)\big(f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))\\ &- f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))\big)ds\\ &- \int_{0}^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s)\big(f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))\\ &- U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))\big)ds|\\ \le&|\int_{-\infty}^{0} U(0)(I-Q)U^{-1}(s)\big(f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))\\ &- f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))\big)ds|\\ &+|\int_{0}^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s)\big(f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))\\ &- f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))\big)ds|\\ \le&\int_{-\infty}^{0} \beta e^{\alpha s}\gamma|h_1-v|ds + |\int_{0}^{+\infty} \beta e^{-\alpha s}\gamma|h_1-v|ds\\ =&2\beta\gamma\alpha^{-1}\|h_1-v\|.\end{aligned}$$

现在注意到 $2\beta\gamma\alpha^{-1}<1$，我们有 $h_1 = v$。因此，若 $t=0$，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1(0,y(0)) = &\int_{-\infty}^{0} U(0)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds\\ &- \int_{0}^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+h_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds.\end{aligned}$$

若 $t \to 0$，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_2(0,y(0)) = &\int_{-\infty}^{0} U(0)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))ds\\ &- \int_{0}^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+v(s,y(s,\tau,\eta)))ds.\end{aligned}$$

因此，若 $t \to 0$，则有 $H_2(t,\ y(t)) \to H_1(0,\ y(0))$。因此，定理 3.1 的证明完成。定理**3.4**的证明。

步骤 **1.** 对于 $t \geq 0$，我们证明等价函数 $\mathscr{H}_1$ 是 H¨older 连续的。设常数$p > 0$ 和 $0 < q < 1$。由（12），可得

$$\begin{aligned} |f(t,x_1) - f(t,x_2)| &= |f(t,x_1) - f(t,x_2)|^{1-q}|f(t,x_1) - f(t,x_2)|^q \\ &\leq 2\mu^{1-q}\gamma^q|x_1 - x_2|^q, \end{aligned} \tag{47}$$

ˆ 其中 $x_1, x_2 \in X$。令 Ω 表示满足条件的所有连续映射 ϖ 所构成的空间

$$\hat{\Omega} := \{\varpi \in \Omega \mid |\varpi(t,x_1) - \varpi(t,x_2)| \leq p|x_1 - x_2|^q\},$$

对于 $t \geq 0$，x_1，$x_2 \in X$。由（16），可得

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}\varpi(t,\eta) \\ =&\int_{-\infty}^{0} U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta) + \varpi(s,y(s,t,\eta)))ds \\ &+\int_{0}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta) + \varpi(s,y(s,t,\eta)))ds \\ &-\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta) + \varpi(s,y(s,t,\eta)))ds \\ =&\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,y(s,t,\eta) + \varpi(s,y(s,t,\eta))ds, \end{aligned} \tag{48}$$

ˆ其中 $\varpi \in \Omega$。利用（12）和（47）

$$\begin{aligned} &|f(t,y_1 + \omega(t,y_1)) - f(t,y_2 + \omega(t,y_2))| \\ \leq&\min\{\gamma[|y_1 - y_2| + |\omega(t,y_1) - \omega(t,y_2)|], 2\mu^{1-q}\gamma^q[|y_1 - y_2| + |\omega(t,y_1) - \omega(t,y_2)|]^q\} \\ \leq&m\min\{|y_1 - y_2| + p|y_1 - y_2|^q, |y_1 - y_2| + p|y_1 - y_2|^q]^q\} \\ \leq&m\begin{cases} (1+p)|y_1 - y_2|^q, & \text{if } |y_1 - y_2| \leq 1; \text{ (taking the left one)} \\ (1+p)^q|y_1 - y_2|^q, & \text{if } |y_1 - y_2| > 1. \text{ (taking the right one)} \end{cases} \\ \leq&m(1+p)|y_1 - y_2|^q, \end{aligned} \tag{49}$$

其中 $m =$最大值$\{\gamma, 2\mu^{1-q}\gamma^q\}$。此外，利用（12）和（49），可得

$$\begin{aligned} &|\mathscr{T}\varpi(t,\eta_1) - \mathscr{T}\varpi(t,\eta_2)| \\ \leq&|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)(f(s,y(s,t,\eta_1) + \varpi(s,y(s,t,\eta_1))) - f(s,y(s,t,\eta_2) + \varpi(s,y(s,t,\eta_2))))ds| \\ \leq&\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|m(1+p)\Delta_1^q(t,s)|\eta_1 - \eta_2|^q ds \\ \leq&m(1+p)|\eta_1 - \eta_2|^q \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)|\Delta_1^q(t,s)ds \\ \leq&p|\eta_1 - \eta_2|^q, \end{aligned} \tag{50}$$

对于 $t \geq 0$， η_1， $\eta_2 \in X$。因此， $\mathscr{T}\varpi \in \Omega$。因此， h_1 的 $\mathscr{T}$唯一不动点属于 Ω。由（23）和（50），可得

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{H}_1(t, y_1(t)) - \mathscr{H}_1(t, y_2(t))| \\
\leq &|y_1 - y_2| + |h_1(t, y_1) - h_1(t, y_2)| \\
\leq &|y_1 - y_2| + p|y_1 - y_2|^q \\
\leq &(|y_1 - y_2|^{1-q} + p)|y_1 - y_2|^q \\
\leq &\tilde{m}_1|y_1 - y_2|^q,
\end{aligned} \tag{51}$$

其中 $\tilde{m}_1 = 1 + p$， $0 < |y_1 - y_2| < 1$。因此， $\mathscr{H}_1$ 是 H¨older 连续的。接下来，我们证明 $\mathscr{L}_1$ 也是 H¨older 连续的。由 (25)，得到

$$l_1(t, \xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s, x(s, t, \xi)) ds.$$

于是，

$$l_1(t, \xi_1) - l_1(t, \xi_2) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)(f(s, x(s, t, \xi_1)) - f(s, x(s, t, \xi_2))) ds.$$

由 (25) 和 (47) 可知，

$$\begin{aligned}
&|l_1(t, \xi_1) - l_1(t, \xi_2)| \\
\leq &|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)(f(s, x(s, t, \xi_1)) - f(s, x(s, t, \xi_2))) ds| \\
\leq &\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, s)| m(1 + p) \Delta_2^q(t, s)|\xi_1 - \xi_2|^q ds \\
\leq &m(1 + p)|\xi_1 - \xi_2|^q \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, s)| \Delta_2^q(t, s) ds \\
\leq &p|\xi_1 - \xi_2|^q,
\end{aligned} \tag{52}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{L}_1(t, x_1) - \mathscr{L}_1(t, x_2)| \\
\leq &|x_1 - x_2| + |l_1(t, x_1) - l_1(t, x_2)| \\
\leq &|x_1 - x_2| + p|x_1 - x_2|^q \\
\leq &(|x_1 - x_2|^{1-q} + p)|x_1 - x_2|^q \\
\leq &\tilde{m}_2|x_1 - x_2|^q,
\end{aligned} \tag{53}$$

其中 $\tilde{m}_2 = 1 + p$, $0 < |x_1 - x_2| < 1$。因此，对于 $t \geq 0$，我们证明 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{L}_1$ 是 H¨older 连续的。步骤 2。与上述证明类似。对于 $t < 0$，我们可以容易地证明，等价函数 $\mathscr{H}_2$ 和$\mathscr{L}_2$ 是 H¨older 连续的。

定理**3.5**的证明。
令 Λ 表示所有连续映射 ϱ 满足的空间

$$\Lambda := \{\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid ||\varrho|| \leq (\beta + 2\kappa_1 + \kappa_2)c_1\}.$$

那么，$(\Lambda, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间。对于 $t \in \mathbb{R}$、 ξ、 $\eta \in X$ 和 $\varrho_1 \in \Lambda$，我们定义如下映射:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{R}\varrho_1 = \tilde{\varrho}_1 \\
=&\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds \\
&+ \int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds \\
&- \int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t,s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds,
\end{aligned} \tag{54}$$

˜其中 $G(t,s)$ 在（11）中定义。由（9）和（10），可得

$$\begin{aligned}
|\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))| &\le \int_{-\infty}^{t} \kappa_1\phi(s)ds < \kappa_1 c_1, \\
|\int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))| &\le \int_{t}^{+\infty} \kappa_2\phi(s)ds < \kappa_2 c_1.
\end{aligned} \tag{55}$$

由（5）和（9），可得

$$\begin{aligned}
&|\int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))| \\
=&|\int_{0}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds \\
&- \int_{0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds| \\
\le&\int_{0}^{t} \beta e^{-\alpha(t-s)}\phi(s)ds + \int_{0}^{t} \kappa_1\phi(s)ds \\
\le&(\beta+\kappa_1)c_1.
\end{aligned} \tag{56}$$

由（55）和（56），可得

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{R}\varrho_1| \\
\le&|\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds| \\
&+ |\int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds| \\
&+ |\int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)f(s, y(s,t,\eta) + \varrho_1(s, y(s,t,\eta)))ds| \\
\le&\int_{-\infty}^{0} \kappa_1\phi(s)ds + \int_{t}^{+\infty} \kappa_2\phi(s)ds + \int_{0}^{t} \beta e^{-\alpha(t-s)}\phi(s)ds + \int_{0}^{t} \kappa_1\phi(s)ds \\
\le&(\beta+2\kappa_1+\kappa_2)c_1.
\end{aligned} \tag{57}$$

此外，对（54）求导，得到

$$\tilde{\varrho}_1'(t,\eta) = A(t)\tilde{\varrho}_1(t,\eta) + f(t, \eta + \varrho_1(t,\eta)). \tag{58}$$

因此，由（57）和（58），我们知道 $\tilde{\varrho}_1(t,\ \eta)$ 连续，且 $\tilde{\varrho}_1(t,\ \eta)\ \in \Lambda$。对于任意 $\varrho_2,\ \varrho_3 \in \Lambda$，由（14）和（54），可得

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{R}\varrho_2 - \mathscr{R}\varrho_3| \\
\leq&|\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)(f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_2(s,y(s,t,\eta))) - f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_3(s,y(s,t,\eta))))ds| \\
&+|\int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)(f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_2(s,y(s,t,\eta))) - f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_3(s,y(s,t,\eta))))ds| \\
&+|\int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)(f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_2(s,y(s,t,\eta))) - f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_3(s,y(s,t,\eta))))ds| \\
\leq&\int_{-\infty}^{t} \kappa_1\psi(s)|\varrho_2-\varrho_3|ds + \int_{0}^{t}(\beta e^{-\alpha(t-s)}+\kappa_1)\psi(s)|\varrho_2-\varrho_3|ds + \int_{t}^{+\infty}\kappa_2\psi(s)|\varrho_2-\varrho_3|ds \\
\leq&(\beta+2\kappa_1+\kappa_2)c_2\|\varrho_2-\varrho_3\|.
\end{aligned}
$$

注意到 $(\beta+2\kappa_1+\kappa_2)c_2 < 1$。因此，$\mathscr{R}:\ \Lambda\to\Lambda$ 是一个压缩映射。因此，存在唯一的不动点 $\varrho_1 \in \Lambda$，使得

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1(t,\eta) \\
=&\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\
&+\int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\
&-\int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s,y(s,t,\eta)))ds \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s,y(s,t,\eta)))ds,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

其中 $G(t,s)$ 在 (11) 中定义。利用恒等式 (21)，若 $y(t)$ 是系统 (4) 的一个解，则有

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1(t,y(t,\tau,\eta)) \\
=&\int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+\varrho_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds \\
&+\int_{0}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+\varrho_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds \\
&-\int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,y(s,\tau,\eta)+\varrho_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)f(s,y(s,\tau,\eta)+\varrho_1(s,y(s,\tau,\eta)))ds,
\end{aligned}
\tag{60}
$$

其中 $G(t,s)$ 在 (11) 中定义。令

$$
\mathscr{H}_3(t,y(t)) = y(t)+\varrho_1(t,y(t)),
\tag{61}
$$

通过直接求导（61），我们得出

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_3'(t,y(t)) \\
=&A(t)y(t)+A(t)\varrho_1(t)+f(t,y(t)+\varrho_1(t)) \\
=&A(t)\mathscr{H}_3(t,y(t))+f(t,\mathscr{H}_3(t,y(t))).
\end{aligned}
\tag{62}
$$

上述证明表明，若 $y(t)$ 是（4）的一个解，则 $\mathscr{H}_3(t,\ y(t))$ 是（3）的一个解。接下来，我们证明 $\mathscr{L}_3$ 的存在性。令

$$\begin{aligned}&\rho_1(t,\xi)\\=&-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds\\&-\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds\\&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds.\end{aligned}\tag{63}$$

同样地，$\tilde{\varrho}_1$我们可以容易地证明 $\rho_1\in\Lambda$。由（21），若 $x(t)$ 是系统（3）的一个解，则有

$$\begin{aligned}&\rho_1(t,x(t,\tau,\xi))\\=&-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,x(s,\tau,\xi))ds\\&-\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,x(s,\tau,\xi))ds\\&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,x(s,\tau,\xi))ds.\end{aligned}\tag{64}$$

取

$$\mathscr{L}_3(t,x(t))=x(t)+\rho_1(t,x(t)).\tag{65}$$

通过直接求导（27），可得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_3'(t,x(t))\\=&A(t)x(t)+f(t,x(t))+A(t)\rho_1(t,x(t))-f(t,x(t))\\=&A(t)\mathscr{L}_3(t,x(t)).\end{aligned}\tag{66}$$

上述证明表明，若 $x(t)$ 是（3）的一个解，则 $\mathscr{L}_3(t,\ x(t))$ 是（4）的一个解。

接下来，对于 $t\in\mathbb{R}$，我们证明 $\mathscr{H}_3(t,\mathscr{L}_3(t,x))=x$ 和 $\mathscr{L}_3(t,\mathscr{H}_3(t,y))=y$。设 $x(t)$ 是系统（3）的任意解。于是我们知道，$\mathscr{L}_3(t,x(t))$ $\omega_1(t)$ 是系统（4）的解，而 $\mathscr{H}_3(t,\mathscr{L}_3(t,x(t)))$ $\omega_2(t)$ 是系统（3）的解。

$$\begin{aligned}&\omega_1(t)=x(t)+\rho_1(t,x(t))\\=&x(t)-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,x(s))ds-\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,x(s))ds\\&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,x(s))ds,\\&\omega_2(t)=\omega_1(t)+\varrho_1(t,\omega_1(t))\\=&\omega_1(t)+\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,\omega_2(s))ds+\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,\omega_2(s))ds\\&-\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,\omega_2(s))ds.\end{aligned}\tag{67}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&|\omega_2(t)-x(t)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{t}\kappa_1\psi(s)|\omega_2(s)-x(s)|ds+\int_{0}^{t}(\beta e^{-\alpha(t-s)}+\kappa_1)\psi(s)|\omega_2(s)-x(s)|ds\\
&+\int_{t}^{+\infty}\kappa_2\psi(s)|\omega_2(s)-x(s)|ds\\
\leq&(\beta+2\kappa_1+\kappa_2)c_2\|\omega_2(t)-x(t)\|.
\end{aligned}\tag{68}$$

因此，$\omega_2(t)=x(t)$。设 $y(t)$ 是系统（4）的任意解。于是我们知道，$\mathscr{H}_3(t,y(t))\triangleq\hat{}\omega_1(t)$ 是系统（3）的解，而 $\mathscr{L}_3(t,\mathscr{H}_3(t,y(t)))\triangleq\hat{}\omega_2(t)$ 是系统（4）的解。

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}_1(t)=y(t)+\varrho_1(t,y(t))\\
=&y(t)+\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds+\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds,\\
&\hat{\omega}_2(t)=\hat{\omega}_1(t)+\rho_1(t,\hat{\omega}_1(t))\\
=&\hat{\omega}_1(t)-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds-\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds\\
&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,\hat{\omega}_1(s))ds.
\end{aligned}\tag{69}$$

那么，$\hat{}\omega_2(t)=y(t)$。因此，$\mathscr{L}_3(t,\ \mathscr{H}_3(t,\ y))=y$。至此，定理 3.5 的证明完成。定理**3.6**的证明。

步骤 1。我们证明等价函数 $\mathscr{H}_1$ 是 H¨older 连续的。设常数 $c\geq 1$、$p>0$ 和 $0<q<1$。由（14），可得

$$\begin{aligned}
|f(t,x_1)-f(t,x_2)|&=|f(t,x_1)-f(t,x_2)|^{1-q}|f(t,x_1)-f(t,x_2)|^{q}\\
&\leq 2\phi^{1-q}(t)\psi^{q}(t)|x_1-x_2|^{q},
\end{aligned}\tag{70}$$

$\hat{}$ 其中 $x_1,x_2\in X$。设 Λ 表示满足以下条件的所有连续映射构成的空间

$$\hat{\Lambda}:=\{\chi\in\Lambda\mid|\chi(t,x_1)-\chi(t,x_2)|\leq p|x_1-x_2|^{q}\},$$

当 $t\in\mathbb{R}$, $x_1,x_2\in X$ 时。由 (54) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathscr{R}\chi(t,\eta)\\
=&\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\chi(s,y(s,t,\eta)))ds\\
&+\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\chi(s,y(s,t,\eta))ds\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\chi(s,y(s,t,\eta)))ds\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)f(s,y(s,t,\eta)+\chi(s,y(s,t,\eta))ds,
\end{aligned}\tag{71}$$

˜其中 $G(t,s)$ 定义见 (11)。利用 (14) 和 (70)

$$\begin{aligned}
&|f(t,y_1+\chi(t,y_1))-f(t,y_2+\chi(t,y_2))|\\
\leq&\min\{\psi(t)[|y_1-y_2|+|\chi(t,y_1)-\chi(t,y_2)|],\phi^{1-q}(t)\psi^q(t)[|y_1-y_2|+|\chi(t,y_1)-\chi(t,y_2)|]^q\}\\
\leq&M(t)\min\{|y_1-y_2|+p|y_1-y_2|^q,|y_1-y_2|+p|y_1-y_2|^q]^q\}\\
\leq&M(t)\begin{cases}(1+p)|y_1-y_2|^q, & \text{if } |y_1-y_2|\leq 1;\ \text{(taking the left one)}\\ (1+p)^q|y_1-y_2|^q, & \text{if } |y_1-y_2|>1.\ \text{(taking the right one)}\end{cases}\\
\leq&M(t)(1+p)|y_1-y_2|^q.
\end{aligned}\tag{72}$$

此外，利用（14）和（72），我们得到

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{R}\chi(t,\eta_1)-\mathscr{R}\chi(t,\eta_2)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)(f(s,y(s,t,\eta_1)+\chi(s,y(s,t,\eta_1)))-f(s,y(s,t,\eta_2)+\chi(s,y(s,t,\eta_2))))ds\\
\leq&\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(t,s)|M(s)(1+p)\Delta_1^q(t,s)|\eta_1-\eta_2|^q ds\\
\leq&(1+p)|\eta_1-\eta_2|^q\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(t,s)|M(s)\Delta_1^q(t,s)ds\\
\leq&p|\eta_1-\eta_2|^q,
\end{aligned}\tag{73}$$

˜ ˆ对于 $t\in\mathbb{R}$，η_1，$\eta_2\in X$其中 G（t，s）在（11）中定义。因此，$\mathscr{R}\chi\in\Lambda$。于是，唯一的不动ˆ点 ϱ_1 属于 $\mathscr{R}$。由（23）和（50），我们得到

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{H}_3(t,y_1(t))-\mathscr{H}_3(t,y_2(t))|\\
\leq&|y_1-y_2|+|\varrho_1(t,y_1)-\varrho_1(t,y_2)|\\
\leq&|y_1-y_2|+p|y_1-y_2|^q\\
\leq&(|y_1-y_2|^{1-q}+p)|y_1-y_2|^q\\
\leq&\tilde{c}|y_1-y_2|^q,
\end{aligned}\tag{74}$$

其中 $\tilde{c}=1+p$，$0<|y_1-y_2|<1$。因此，$\mathscr{H}_3$ 是 H¨older 连续的。接下来，我们证明 $\mathscr{L}_3$ 也是 H¨older 连续的。由（63），我们得到

$$\begin{aligned}
&\rho_1(t,\xi)\\
=&-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds\\
&-\int_{0}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds\\
&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s,x(s,t,\xi))ds\\
=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)f(s,x(s,t,\xi))ds.
\end{aligned}$$

˜其中 $G(t,s)$ 在（11）中定义。因此，

$$\begin{aligned}
&\rho_1(t,\xi_1)-\rho_1(t,\xi_2)\\
=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)(f(s,x(s,t,\xi_1))-f(s,x(s,t,\xi_2)))ds.
\end{aligned}$$

由（63）和（70）可得，

$$\begin{aligned}
&|\rho_1(t,\xi_1)-\rho_1(t,\xi_2)|\\
\leq&\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(t,s)(f(s,x(s,t,\xi_1))-f(s,x(s,t,\xi_2)))ds\\
\leq&\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(t,s)|(1+p)M(s)\Delta_2^q(t,s)|\xi_1-\xi_2|^q ds\\
\leq&(1+p)|\xi_1-\xi_2|^q\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(t,s)|M(s)\Delta_2^q(t,s)ds\\
\leq&p|\xi_1-\xi_2|^q,
\end{aligned}\tag{75}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{L}_3(t,x_1)-\mathscr{L}_3(t,x_2)|\\
\leq&|x_1-x_2|+|\rho_1(t,x_1)-\rho_1(t,x_2)|\\
\leq&|x_1-x_2|+p|x_1-x_2|^q\\
\leq&(|x_1-x_2|^{1-q}+p)|x_1-x_2|^q\\
\leq&\tilde{c}|x_1-x_2|^q,
\end{aligned}\tag{76}$$

其中 $\tilde{c}=1+p$, $0<|x_1-x_2|<1$. 因此，我们证明了 $\mathscr{H}_3$ 和 $\mathscr{L}_3$ 均为 H¨older 连续。
定理 **3.7** 的证明。 首先，我们证明一些引理，并考虑周期系统

$$x'=\sigma(t,x),\tag{77}$$

其中 $\sigma(t+T,x)=\sigma(t,x)$。系统 (77) 满足解的存在唯一性。设¯ $X(t,(t_0,x_0))$ 是系统 (77) 的解，且满足

$$\bar{X}(t_0,(t_0,\bar{x}_0))=\bar{x}_0.$$

引理 **4.1.** 对任意 $t,s\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\bar{X}(t+T,(s+T,x))=\bar{X}(t,(s,x)).$$

证明. 由变分公式可得

$$\bar{X}(t,(s,x))=x+\int_s^t\sigma(\tau,\bar{X}(\tau,(s,x)))d\tau.\tag{78}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\bar{X}(t+T,(s+T,x))\\
&=x+\int_{s+T}^{t+T}\sigma(\tau,\bar{X}(\tau,(s+T,x)))d\tau\\
&\overset{\tau=\tau_1+T}{=}x+\int_s^t\sigma(\tau_1,\bar{X}(\tau_1+T,(s+T,x)))d\tau_1.
\end{aligned}\tag{79}$$

¯记 $F_1(t)=X(t+T,(s+T,x))$。根据 (79)，我们知道 $F_1(t)$ 是系统 (77) 的解。由于¯$F_1(s)=x$, $X(s,(s,x))=x$，根据解的存在唯一性，我们得到¯ ¯$X(t+T,(s+T,x))=X(t,(s,x))$。

引理 4.2。 假设周期系统 $x' = A(t)x$ $(A(t+T) = A(t))$ 具有指数三分性（$U(t)$ 是系统（4）的基本矩阵，满足（5）。对于任意 t， $s \in \mathbb{R}$，有

$$G(t+T, s+T) = G(t,s), \quad \tilde{G}(t+T, s+T) = \tilde{G}(t,s).$$

证明。 $U(t)$是线性系统 $x' = A(t)x$的基本矩阵。容易得到， $U(t+T)$也是线性系统 $x' = A(t)x$ 的基本矩阵。因此，存在一个可逆矩阵 D，使得 $U(t+T) = U(t)D$。取 $B = \frac{1}{T}\ln D$，并且 $M(t) = U(t)e^{-Bt}$。于是，

$$\begin{aligned} M(t+T) &= U(t+T)e^{-B(t+T)} = U(t)DD^{-1}e^{-Bt} = M(t). \\ M^{-1}(t+T) &= e^{B(t+T)}U^{-1}(t+T) = e^{Bt}DD^{-1}U^{-1}(t) = M^{-1}(t). \end{aligned} \tag{80}$$

由（80），可得

$$\begin{aligned} U(t+T)P_1U^{-1}(s+T) &= M(t+T)e^{B(t+T)}P_1e^{-B(s+T)}M^{-1}(s+T) \\ &= M(t)e^{Bt}P_1e^{-Bs}M^{-1}(s) \\ &= U(t)P_1U^{-1}(s). \end{aligned}$$

与上述证明类似，我们可以容易地得到 $U(t+T)(P_2+P_3)U^{-1}(s+T) = U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)$以及 $U(t+T)P_4U^{-1}(s+T) = U(t)P_4U^{-1}(s)$。因此， $\tilde{G}(t+T, s+T) = \tilde{G}(t,s)$。类似于 $\tilde{G}$，我们得到$G(t+T, s+T) = G(t,s)$。

现在我们开始证明 $\mathscr{H}(t, x)$ 和 $\mathscr{L}(t, y)$ 的周期性或渐近周期性。由（61）、（65）、引理 4.1 和引理 4.2，可得：

$$\begin{aligned} &\mathscr{H}_3(t+T, y) \\ =& y + \int_{-\infty}^{t+T} U(t+T)P_1U^{-1}(s)f(s, y(s, t+T, \eta) + \varrho_1(s))ds \\ &+ \int_{0}^{t+T} U(t+T)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s, y(s, t+T, \eta) + \varrho_1(s))ds \\ &- \int_{t+T}^{+\infty} U(t+T)P_4U^{-1}(s)f(s, y(s, t+T, \eta) + \varrho_1(s))ds \\ \overset{s=s_1+T}{=}& y + \int_{-\infty}^{t} U(t+T)P_1U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T, y(s_1+T, t+T, \eta) + \varrho_1(s_1+T))ds_1 \\ &+ \int_{-T}^{t} U(t+T)(P_2+P_3)U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T, y(s_1+T, t+T, \eta) + \varrho_1(s_1+T))ds_1 \\ &- \int_{t}^{+\infty} U(t+T)P_4U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T, y(s_1+T, t+T, \eta) + \varrho_1(s_1+T))ds_1 \\ =& y + \int_{-\infty}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s_1)f(s_1, y(s_1, t, \eta) + \varrho_1(s_1))ds_1 \\ &+ \int_{-T}^{t} U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s_1)f(s_1, y(s_1, t, \eta) + \varrho_1(s_1))ds_1 \\ &- \int_{t}^{+\infty} U(t)P_4U^{-1}(s_1)f(s_1, y(s_1, t, \eta) + \varrho_1(s_1))ds_1 \\ \neq& \mathscr{H}_3(t, y). \end{aligned}$$

此外，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_3(t+T,x)\\
=&x-\int_{-\infty}^{t+T}U(t+T)P_1U^{-1}(s)f(s,x(s,t+T,\xi))ds\\
&-\int_{0}^{t+T}U(t+T)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,x(s,t+T,\xi))ds\\
&+\int_{t+T}^{+\infty}U(t+T)P_4U^{-1}(s)f(s,x(s,t+T,\xi))ds\\
\overset{s=s_1+T}{=}&x-\int_{-\infty}^{t}U(t+T)P_1U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,x(s_1+T,t+T,\xi))ds_1\\
&-\int_{-T}^{t}U(t+T)(P_2+P_3)U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,x(s_1+T,t+T,\xi))ds_1\\
&+\int_{t}^{+\infty}U(t+T)P_4U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,x(s_1+T,t+T,\xi))ds_1\\
=&x-\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s_1)f(s_1,x(s_1,t,\xi))ds_1\\
&-\int_{-T}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s_1)f(s_1,x(s_1,t,\xi))ds_1\\
&+\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s_1)f(s_1,x(s_1,t,\xi))ds_1\\
\neq&\mathscr{L}_3(t,x).
\end{aligned}
$$

因此，等价函数 $\mathscr{H}_3$ 及其逆函数 $\mathscr{L}_3$ 在定理 3.5 中不具有周期性。

接下来，我们证明等价函数 $\mathscr{H}_3$ 及其逆函数 $\mathscr{L}_3$ 在定理 3.5 中不具有渐近周期性。由于

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_3(t+T,y)\\
=&y+\int_{-\infty}^{t}U(t)P_1U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds\\
&+\int_{-T}^{t}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)P_4U^{-1}(s)f(s_1,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds\\
=&\mathscr{H}_3(t,y)+\int_{-T}^{0}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds
\end{aligned}
$$

and

$$
\lim_{t\to\infty}\int_{-T}^{0}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds\neq 0.
$$

因此， $\mathscr{H}_3$ 不具有渐近周期性。 $\mathscr{L}_3$ 的证明与 $\mathscr{H}_3$类似，此处略去。

接下来，我们证明等价函数 $\mathscr{H}_1$、 $\mathscr{H}_2$、 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 在定理 3.1 中不具有周期性或渐近周期性。

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_1(t+T,y)\\
=&y+\int_{-\infty}^{0}U(t+T)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t+T,\eta)+h_1(s))ds\\
&+\int_{0}^{t+T}U(t+T)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t+T,\eta)+h_1(s))ds\\
&-\int_{t+T}^{+\infty}U(t+T)(I-P)U^{-1}(s)f(s,y(s,t+T,\eta)+h_1(s))ds\\
\overset{s=s_1+T}{=}&y+\int_{-\infty}^{-T}U(t+T)(I-Q)U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,y(s_1+T,t+T,\eta)+h_1(s_1+T))ds_1\\
&+\int_{-T}^{t}U(t+T)PU^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,y(s_1+T,t+T,\eta)+h_1(s_1+T))ds_1\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t+T)(I-P)U^{-1}(s_1+T)f(s_1+T,y(s_1+T,t+T,\eta)+h_1(s_1+T))ds_1\\
=&y+\int_{-\infty}^{-T}U(t)(I-Q)U^{-1}(s_1)f(s_1,y(s_1,t,\eta)+h_1(s_1))ds_1\\
&+\int_{-T}^{t}U(t)PU^{-1}(s_1)f(s_1,y(s_1,t,\eta)+h_1(s_1))ds_1\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s_1)f(s_1+T,y(s_1,t,\eta)+h_1(s_1))ds_1\\
\neq&\mathscr{H}_1(t,y)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_1(t+T,y)\\
=&y+\int_{-\infty}^{-T}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds\\
&+\int_{-T}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds\\
&-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s+T,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds\\
=&\mathscr{H}_1(t,y)+\int_{-T}^{0}U(t)PU^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds\\
&+\int_{0}^{-T}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\Big(\int_{-T}^{0}U(t)(P_2+P_3)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+\varrho_1(s))ds\\
&+\int_{0}^{-T}U(t)(I-Q)U^{-1}(s)f(s,y(s,t,\eta)+h_1(s))ds\Big)\neq 0.
\end{aligned}
$$

因此， $\mathscr{H}_1$ 不具有周期性或渐近周期性。几乎周期性的证明与上述证明类似，此处略去。 $\mathscr{H}_2$、 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 的证明与 $\mathscr{H}_1$类似，此处略去。

5 一些例子

例5.1. 考虑标量方程

$$x' = (-\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}})x \tag{81}$$

and

$$x' = (-\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}})x + \delta \sin t \sin x(t), \tag{82}$$

其中 δ 是一个正常数。

从例2.5可知，方程（83）具有指数三分性，其中 $\beta = 2$， α =1。令， $f(t,\ x) = \delta$正弦 t正弦 $x(t)$，则

$$|f(t,x)| \leq \delta,$$
$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq \delta|x_1 - x_2|.$$

因此，方程（82）满足定理 3.1 的条件，若 $\delta < \frac{1}{6}$ 。因此，方程（81）与方程（82）拓扑共轭。

例5.2. 考虑标量方程

$$x' = (-\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}})x \tag{83}$$

and

$$x' = (-\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}})x + \frac{\epsilon}{(1+t^2)} \sin x, \tag{84}$$

其中 ϵ 是一个充分小的正常数。

由例 2.5可知，方程 (83) 存在指数三分性，且 $\beta = 2$， α =1。因此 $U(t)$=$\frac{2}{e^t+e^{-t}}$是方程 (83) 的一个解。取 $P = 1$，得到 $|U(t)PU^{-1}(s)| < 1\,(t \geq s)$。除此之外，我们有 $|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{1+t^2}$正弦 $xdt| < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{1+t^2}dt < \epsilon\pi$。此外，

$$|\frac{\epsilon}{1+t^2} \sin x_1 dt - \frac{\epsilon}{1+t^2} \sin x_2 dt| < \frac{\epsilon}{1+t^2}|x_1 - x_2|.$$

因此，方程（84）满足定理 3.5 的条件，当且仅当 $\epsilon < \frac{1}{4\pi}$。因此，方程（83）与方程（84）拓扑共轭。

数据可用性声明

本文研究未使用任何数据。这是纯数学研究。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

贡献

我们声明，所有作者对本文的贡献均等。

伦理批准

不适用。

资助

本文得到浙江省自然科学基金（编号：LZ23A010001）、国家自然科学基金（编号：11671176、11931016）、Fondecyt基金（编号：1170466）以及Fondecyt 038-2021-Per´u的联合资助。

参考文献

[1] O. Perron，《微分方程的稳定性问题》，《数学杂志》，1930，32(1)：703-728。[2] L. Barreira，C. Valls，非自治方程不变流形的光滑性，《数学物理通讯》，2005，259(3)：639-677。[3] L. Barreira，C. Valls，无指数二分性的非自治方程的稳定流形，《微分方程杂志》，2006，221(1)：58-90。[4] R. Naulin，M. Pinto，(h,k)-二分性的粗糙性，《微分方程杂志》，1995，118(1)：20-35。[5] J. Fenner，M. Pinto，具有渐近相位的(h,k)流形，《数学分析与应用杂志》，1997，216(2)：549-568。

[6] X. Lin，代数二分性及其在守恒律黎曼解稳定性中的应用，《微分方程杂志》，2009，247(11)：2924-2965。[7] J. Zhang，M. Fan，H.P. Zhu，具有应用于非自治动力系统的非一致(h, k, μ, ν)-二分性，《数学分析与应用杂志》，2017，452(1)：505-551。[8] R. Sacker，G. Sell，线性微分系统的二分性与不变分解的存在性 III，《微分方程杂志》，1976，22(2)：497-522。[9] S. Elaydi，O. Hajek，微分系统的指数三分性，《数学分析与应用杂志》，1988，129(2)：362-374。[10] J. Hong，R. Obaya，A.S. Gil，具有遍历扰动的微分方程的指数三分性及一类遍历解，《应用数学快报》，1999年，12(1)：7-13。[11] L. Barreira，C. Valls，非一致指数三分性的鲁棒性，《数学科学通报》，2016，140(1)：82-91。[12] L. Barreira，C. Valls，具有增长率的三分性的李雅普诺夫函数，《微分方程杂志》2010，248(1)：151-183。[13] I. Popa，T. Ceausu，O. Bagdaser，线性离散时间系统广义指数三分性的刻画，《离散数学电子札记》，2016，56：65-70。[14] S. Adina，S. Bogdan，变分差分方程的指数三分性，《差分方程应用杂志》，2009，15(7)：693-718。[15] M. Kovacs，巴拿赫空间中的一致指数三分性，蒂米什瓦拉西部大学数学与信息学系列年刊，2014，52(1)：81-93。[16] P. Hartman，微分方程的局部线性化，美国数学会会刊，1963，14：568-573。[17] D. Grobman，微分方程组的同胚，苏联科学院通报，1959，128：880-881。[18] K. Lu，标量反应扩散方程的 Hartman-Grobman 定理，《微分方程杂志》，1991，93(2)：364-394。[19] W. Bates，K. Lu，Cahn-Hilliard 方程和相场方程的 Hartman-Grobman 定理，动力微分方程杂志，1994，6(1)：101-145。[20] L. Barreira，C. Valls，随机动力系统的 H¨older 共轭，物理学D辑，2006，223(2)：256-269。[21] C. Pugh，论 P. Hartman 的一个定理，美国数学杂志，1969，91：363-367。[22] M. Hein，J. Pr¨uss，半线性双曲型演化方程的 Hartman-Grobman 定理，《微分方程杂志》，2016，261(8)：4709-4727。[23] A. Reinfelds，Grobman 与 Hartman 的一个推广定理，拉脱维亚数学年刊，1985，29：84-88。

[24] A. Reinfelds, L. Sermone, 《巴拿赫空间中带脉冲效应的非线性微分方程等价性》, Acta Univ. Latviensis, 1992, 577(3): 68-73。[25] A. Reinfelds, 《脉冲微分方程的动力学等价性》, 《非线性分析》, 1997, 30(5): 2743-2752。[26] A. Reinfelds, 《脉冲微分方程的解耦》, Math. Model. Anal., 1997, 2(1): 130-137。[27] L. Sermone, 《带脉冲效应的线性微分方程等价性》, Proc. Latv. Acad. Sci. Sect. B., 1994, (2): 78-80。[28] L. Sermone, 《带脉冲效应的可微方程约化》, 《应用数学与随机分析杂志》, 1997, 10(1): 79-87。[29] A. Reinfelds, D. ˇ Steinberga, 《拟线性方程的动力等价》, Int. J. Pure Appl. Math., 2015, 63(1): 355-364。[30] A. Reinfelds, D.Šteinberga, 《时间尺度上拟线性动力方程的有界解与Hyers-Ulam稳定性》, 《非线性分析: 建模与控制》, 即将发表。[31] K. Palmer, 《Hartman线性化定理的一种推广》, 《数学分析与应用杂志》, 1973年, 41: 753-758。[32] L. Backes, D. Dragiˇcevi´c, K. Palmer, 《非自治系统的线性化与H¨older连续性》, 《微分方程杂志》, 2021年, 297: 536-574。[33] L. Barreira, C. Valls, 《非一致双曲动力学的Grobman-Hartman定理》, 《微分方程杂志》, 2006, 228(1): 285-310。[34] L. Barreira, C. Valls, 《适用于一般非一致指数二分性的Grobman-Hartman定理》, 《泛函分析杂志》, 2009, 257(6): 1976-1993。[35] L. Barreira, C. Valls, 《非一致双曲流的Grobman-Hartman定理的一个简明证明》, 《非线性分析》, 2011, 74(18): 7210-7225。[36] L. Barreira, C. Valls, 《拓扑共轭对参数的依赖性》, J. Dynam. Differential Equations, 2010, 22(4): 787-803。[37] L. Jiang, 《广义指数二分性与全局线性化》, 《数学分析与应用杂志》, 2006, 315(2): 474-490。[38] L. Jiang, 《普通二分性与全局线性化》, 《非线性分析》, 2009, 70(7): 2722-2730。[39] I. Huerta, 《非一致收缩下非自治无界系统的线性化: 一种谱方法》, Discrete Contin. Dyn. Syst., 2020, 40(9): 5571-5590。[40] ´A. Castaˇ neda, I. Huerta, 《非自治线性微分方程的非一致几乎可约化》, 《数学分析与应用杂志》, 2020, 485(2): 123822。[41] C. Zou, Y. Xia, M. Pinto, 《含无界非线性项的DEPCAG系统拓扑等价函数的H¨older正则性》, 《中国科学: 数学》, 2020, 50(6): 847-872（中文）。

[42] Y. Xia, J. Cao, M. Han, 《测度链上动态方程线性化的一种新解析方法》, 《微分方程杂志》, 235（2007）, 527-543。[43] C. P¨otzche, 《非齐次时间尺度上的拓扑解耦、线性化与扰动》, 《微分方程杂志》, 2008, 245(5): 1210-1242。[44] J. Fenner, M. Pinto, 《具有脉冲效应的一类常微分方程的Hartman线性化定理》, 《非线性分析》, 1999, 38(3): 307-325。[45] Y. Xia, X. Chen, V. Romanovski, 《Fenner和Pinto线性化定理的研究》, 《数学分析与应用杂志》, 2013, 400(2): 439-451。[46] G. Papaschinopoulos, 《分段常数变元微分方程的一个线性化结果》, 《分析》, 1996, 16(2): 161-170。[47] A. Casta˜neda, Pablo Gonz´alze, Gonzalo Robledo, 《半直线上具有二分性族的非自治差分方程的拓扑等价》, 《纯粹与应用分析通讯》, 2021, 20(2): 511-532。[48] M. Pinto, G. Robledo, 《混合型分段常数自变量微分方程的Grobman-Hartman定理》, 《分析与应用杂志》, 2018, 37(1): 101-126。[49] Y. Xia, R. Wang, K.I. Kou, D. O'Regan, 《非自治微分方程线性化定理研究》, 《数学科学通报》, 2015, 139(7): 829-846。[50] J. Zhang, X. Chang, J. Wang, 《非自治脉冲微分方程非一致"(h, k, μ, ν)"-二分性的存在性与鲁棒性》, 2013, 400(2): 710-723。[51] M. Li, J. Wang, D. O'Regan, 《非瞬时脉冲非自治微分方程的稳定流形》, 《微分方程定性理论电子杂志》, 2019, 82: 1-28。[52] M. Li, J. Wang, D. O'Regan, M. Fe˘ckan, 《非一致双曲性条件下非瞬时脉冲方程的中心流形》, 《数学报告》, 2020, 358(3): 341-364。[53] J. Wang, M. Li, D. O'Regan, M. Fe˘ckan, 《具有非瞬时脉冲效应的线性演化方程的鲁棒性》, 《数学科学通报》, 2020, 159: 102827。[54] J. Wang, M. Li, D. O'Regan, 《线性非瞬时脉冲微分系统的Lyapunov正则性与稳定性》, 《IMA应用数学杂志》, 2019, 84(4): 712-747。[55] L. Zhou, W. Zhang, 《差分方程非一致指数二分性的可容许性与粗糙性》, 《泛函分析杂志》, 2016, 271(5): 1087-1129。[56] L. Zhou, K. Lu, W. Zhang, 《非一致指数二分性与可容许性之间的等价关系》, 《微分方程杂志》, 2017, 262(1): 682-747。[57] W. Zhang, 《微分方程的广义指数二分性与不变流形》, 《数学进展》, 1993, 22(1): 1-45。[58] D. Dragi˘cevi´c, W. Zhang, L. Zhou, 《可容许性与非一致指数二分性》, 《微分方程杂志》, 2022, 326: 201-226。

[59] L. Backes, D. Dragi˘cevi´c, 《非自治耦合系统的光滑线性化》, 预印本, arXiv: 2202.12367。[60] L. Backes, D. Dragi˘cevi´c, 《非自治系统的多尺度线性化》, 预印本, arXiv: 2203.03694。[61] D. Dragi˘cevi´c, W. Zhang, W. Zhang, 《具有非一致二分性的非自治差分方程的光滑线性化》, 《数学杂志》, 2019年, 292(3-4): 1175-1193。[62] D. Dragi˘cevi´c, W. Zhang, W. Zhang, 《具有非一致二分性的非自治微分方程的光滑线性化》, 《伦敦数学会会刊》, 2020年, 121(1): 32-50。[63] W. Zhang, W. Zhang, W. Jarczyk, 《$C^{1,1}$ 双曲微分同胚线性化的尖锐正则性》, 《数学年刊》, 2014年, 358(1-2): 69-113。[64] W. Zhang, W. Zhang, 具有共振的双曲微分同胚的 α-H¨older线性化, 《遍历论与动力系统》, 2016年, 36(1): 310-334。[65] W. Zhang, W. Zhang, 《平面双曲微分同胚线性化的尖锐性》, 《微分方程杂志》, 2014年, 257(12): 4470-4502。[66] W. Zhang, K. Lu, W. Zhang, 《Hartman-Grobman定理中共轭的可微性》, 《美国数学会汇刊》, 2017年, 369(7): 4995-5030。