arXiv:2303.00159v1 [math.QA] 1 Mar 2023

通过 Novikov 双代数的仿射化与 Koszul 对偶构造无限维李双代数

YANYONG HONG、CHENGMING BAI 和 LI GUO

摘要。Balinsky 和 Novikov 证明，Novikov 代数的仿射化自然定义了一个李代数，而这一性质实际上刻画了 Novikov 代数。这也是幺半代数 Koszul 对偶的一个实例。本文发展了 Novikov 代数的双代数理论，即 Novikov 双代数；其特征是，通过一个二次右 Novikov 代数进行仿射化后，可得到一个无限维李双代数，这暗示了 properad 的 Koszul 对偶。Novikov 双代数也可刻画为 Novikov 代数的 Manin 三元组。本文引入诺维科夫杨-巴克斯特方程，其斜对称解可用于构造 Novikov 双代数，进而构造李双代数。此外，这些解还能给出由 Novikov 代数得到的无限维李代数中的经典杨–巴克斯特方程的斜对称解。

目录

1. 引言 11.1. 通过仿射化构造无限维李代数 21.2. 无限维李双代数 31.3. Novikov 双代数及其仿射化李双代数构造 31.4. 论文概要 52. 通过 Koszul 对偶从 Novikov 双代数构造无限维李双代数 62.1. Novikov 双代数 62.2. 完备右 Novikov 余代数与完备李余代数 72.3. 从 Novikov 双代数和二次右 Novikov 代数构造李双代数 123. Novikov 双代数及 Novikov 杨-巴克斯特方程的刻画 163.1. Novikov 双代数的刻画 163.2. Novikov 代数的 Manin 三元组与李代数的 Manin 三元组 203.3. Novikov 杨-巴克斯特方程， $\mathcal{O}$Novikov 代数的算子与前 Novikov 代数 224. 通过 Novikov 杨-巴克斯特方程构造无限维李双代数 26参考文献 33

1. 引言

本文将 Balinsky-Novikov 通过 Novikov 代数仿射化构造无限维李代数的方法 [10] 提升为无限维李双代数的构造，并以Novikov 双代数的概念以及双代数语境中的仿射化为基础。并以双代数语境中的仿射化为基础。

2010年数学主题分类。17A30，17B62，17B67，17B65，18M70，17B38，16S30，17A60，17D25。关键词和短语。无限维李代数、李双代数、经典杨–巴克斯特方程、Novikov 代数、Novikov 双代数、诺维科夫杨-巴克斯特方程、 $\mathcal{O}$-算子、前李代数、前 Novikov 代数、运算子 Koszul 对偶。

1.1. 通过仿射化构造无限维李代数。

1.1.1. 通过仿射化构造李代数。无限维李代数的一种重要构造是仿射化过程（不带中心），它在零特征域 k 上的张量积上赋予李代数结构，

$$\hat{A} := A[t, t^{-1}] := A \otimes \mathbf{k}[t, t^{-1}] \tag{1}$$

将有限维的某个代数 A 与洛朗多项式空间上的另一种代数结构结合起来。若 A 是代数歌剧 $\mathcal{P}$ 下的 $\mathcal{P}$，我们将这一过程概括地称为通过 $\mathcal{P}$代数仿射化构造无限维李代数。

仿射化的经典实例是李代数仿射化 $\hat{\mathrm{L}} = \mathrm{L} \otimes \mathrm{k}[\mathrm{t}, \mathrm{t}^{-1}]$，其中 L 是有限维李代数，而 $\mathrm{k}[\mathrm{t}, \mathrm{t}^{-1}]$ 是通常的交换结合代数。

1.1.2. Novikov 代数及其仿射化。 仿射化的另一个实例是 Novikov 代数仿射化。Novikov 代数最初是在形式变分演算中的哈密顿算子背景下引入的 [18, 19] 以及流体动力学型泊松括号背景下引入的 [10]。作为前李代数的一个重要子类，它们因其广泛的联系而受到极大关注，尤其是与李共形代数 [40] 和顶点代数 [6]的联系。

Novikov 代数在仿射化中也发挥着重要作用。

定理1.1.（Balinsky-Novikov [10]）设 A 是一个带有二元运算 $\circ$的向量空间。在 $\mathrm{A}[\mathrm{t}, \mathrm{t}^{-1}] := \mathrm{A} \otimes \mathrm{k}[\mathrm{t}, \mathrm{t}^{-1}]$ 上定义二元运算

$$[at^i, bt^j] = i(a \circ b)t^{i+j-1} - j(b \circ a)t^{i+j-1} \quad \textit{for all } a, b \in A, i, j \in \mathbb{Z},$$

其中 $\mathrm{at}^i := \mathrm{a} \otimes \mathrm{t}^i$。那么，$(\mathrm{A}[\mathrm{t}, \mathrm{t}^{-1}], [\cdot, \cdot])$ 是李代数，当且仅当 $(\mathrm{A}, \circ)$ 是 Novikov 代数 .

请注意，得益于定理中的“仅当”部分，Novikov 代数可由这种仿射化刻画，这进一步凸显了 Novikov 代数的重要性。

Novikov 代数仿射化产生了许多在数学物理中具有重要意义的无限维李代数，例如 Witt 代数、无中心海森堡-维拉索罗代数 [2] 以及 Schr¨odinger-Virasoro 代数 [23]。这些无限维李代数与相应的 Novikov 代数之间也存在密切联系 [10, 36]。

1.1.3. 幺半代数 Koszul 对偶。 请注意，与李代数仿射化中 $\mathbf{k}[t,t^{-1}]$ 上的交换结合代数结构不同，在 Novikov 代数仿射化中，空间 ffinization, in the Novikov algebra affinization, the space $\mathbf{k}[t,t^{-1}]$配备了右 Novikov 代数乘法 $t^i \diamond t^j := it^{i+j}$（见例 2.3(b)）。事实证明，这两种无限维李代数的仿射化构造都符合 Ginzburg-Kapranov 幺半代数 Koszul 对偶 [20]。

设 $\mathcal{P}$ 是一个二次二元运算子，$\mathcal{P}^!$ 是它的拟运算子 Koszul 对偶。根据 [20, 推论 2.29]（另见 [31, 命题 7.6.5]），一个 $\mathcal{P}$代数与一个 $\mathcal{P}^!$代数的张量积自然具有李代数结构，从而提供了一种可能非常通用的李代数构造方法。因此，李代数仿射化和 Novikov 代数仿射化具有拟运算子解释：李代数（分别是 Novikov 代数）歌剧代数的 Koszul 对偶是交换结合代数（分别是右 Novikov 代数 [16]）的歌剧代数。

1.2. 无限维李双代数。

李双代数由一个李代数和一个李余代数通过余循环条件结合而成。V. Drinfel'd 在研究哈密顿力学和泊松–李群时引入了李双代数 [14], , 它是量子化普适包络代数的经典极限 [13, 15]。李双代数的重要性还体现在它与若干其他基本概念的密切联系上。在有限维情形下，李双代数可由李代数的 Manin 三元组刻画。此外，经典杨–巴克斯特方程（CYBE）的解（也称为经典 r-矩阵）自然导出余边界李双代数。此外，李代数的 $\mathcal{O}$-算子可提供此类解，而前李代数又可提供这类算子 [3, 13, 27, 37]。这些联系如图所示

(2) $$\begin{array}{ccccccc} \text{pre-Lie} & \longrightarrow & \mathcal{O}\text{-operators of} & \longrightarrow & \text{solutions of} & \longrightarrow & \text{Lie} \\ \text{algebras} & & \text{Lie algebras} & & \text{CYBE} & & \text{bialgebras} \end{array} \quad \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Manin triples of} \\ \text{Lie algebras} \end{array}$$

自李双代数研究伊始，无限维李双代数便备受关注。带谱参数的 CYBE 解可提供无限维李双代数。特别地，两类无限维量子群——Yangian 和量子仿射代数——的经典结构，分别是环代数和仿射李代数上的李双代数，对应于有理解和三角函数解 [13]。

人们已对无限维李代数上的李双代数结构进行了大量研究，包括 Witt 代数、Virasoro 代数、Schr¨odinger-Virasoro 代数和流代数 [1, 22, 25, 32, 33, 34]。值得注意的是，对于这些李双代数，其李余代数的对偶并非与李代数属于同一类型。例如，Witt 代数上的双代数结构中，李余代数的对偶并非 Witt 代数 [34]。因此，研究这样一类李双代数是很自然的：其中李代数与由李余代数对偶化得到的李代数属于同一类型。

1.3. Novikov双代数及其仿射化构造李双代数

我们的目标是将式（1）中的仿射化过程同时应用于李代数和李余代数，重点研究 Novikov 代数的仿射化，从而构造李双代数。更确切地说，我们将定理 1.1 推广到双代数的情形，使得所得李双代数中，除了李代数之外，由李余代数得到的对偶化李代数也是 Novikov 代数的仿射化。为实现这一目标，我们需要克服若干挑战。

1.3.1. Novikov 余代数的仿射化。首先，我们考虑 Novikov 代数仿射化在 Novikov 余代数上的对偶版本。正如上文所述，这种"Novikov 余代数的仿射化"无法通过通常的李余代数概念实现。其原因在于，Novikov 代数仿射化中 Laurent 多项式空间上的乘积无法通过对通常的余乘法取对偶得到（见引理 2.10）。

为进一步推进研究，我们引入完备张量积，作为更一般的余乘法的目标空间，由此引出完备李余代数及其他相关概念。特别地，Laurent 多项式空间具有完备右 Novikov 余代数结构，使我们能够进行仿射化过程。随后我们得到一个对偶

定理的版本 1.1，也就是说，Novikov 余代数与 Laurent 多项式的完备右 Novikov 余代数的张量积上存在自然的完备李余代数结构（定理 2.14），而这一性质实际上刻画了 Novikov 余代数。

1.3.2. Novikov 双代数及其仿射化。 接下来，我们将定理 1.1 中 Novikov 代数的仿射化刻画及其上述余代数变体提升到双代数层面。为此，一方面，我们引入 Novikov 双代数的概念，它由满足适当相容条件的 Novikov 代数和 Novikov 余代数组成；另一方面，我们引入二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数的概念，即配备不变双线性型的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。注意，后一个代数并不是通过对 Novikov 双代数取对偶运算而得到的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 双代数。随后我们证明，有限维 Novikov 双代数与二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数的张量积可以自然地赋予完备李双代数结构（定理 2.23）。当二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数取自 Laurent 多项式空间时，该结果的逆命题也成立，从而得到 Novikov 双代数的所需刻画，即其仿射化是一个李双代数。

1.3.3. 拟运算子解释。 鉴于通过将 Ginzburg-Kapranov 对偶应用于 Novikov 代数与右 Novikov 代数的拟运算子（见第 1.1 节）对定理 1.1.3所作的拟运算子解释，定理 2.23 也应能通过 properad（或 dioperad）的 Koszul 对偶得到拟运算子解释，并可将其应用于 Novikov 双代数和二次右 Novikov 代数的 properad。Gan 和 Vallette 已为某些二次 dioperad 和 properad 建立了这种对偶 [17, 39]。定理 2.23 为将这种对偶推广到二次情形之外提供了强有力的动机。

与拟运算子的 Koszul 对偶情形类似，我们或许可以预期，从 properad 的 Koszul 对偶出发，能够在某个 $\mathcal{P}$ properad 所对应的 $\mathcal{P}$ 代数与 $\mathcal{P}^!$ 代数的张量积上构造李双代数结构。这将提供一种非常通用的李双代数构造方法，而 Novikov 双代数的仿射化则是其中一个特例。

1.3.4. Manin 三元组刻画。 有限维Novikov双代数还可以通过Novikov 代数的 Manin 三元组来刻画，这与李双代数的Manin 三元组刻画类似。这种刻画严格依赖于这样一个条件：每个Novikov 代数的线性对偶都能赋予一种表示，且该表示可以表示为该Novikov 代数的左乘算子和右乘算子的非零线性组合。我们确立了这一条件，从而推翻了 [28]（见注 3.5）中提出的一项主张。

Novikov 双代数的 Manin 三元组刻画还提供了一种自然的方式，来理解为什么在上述通过 Novikov 双代数仿射化构造李双代数时，需要引入二次右 Novikov 代数。事实上，Novikov 双代数的 Manin 三元组刻画应当与由 Novikov 双代数得到的李双代数的 Manin 三元组刻画相容，具体而言，Novikov 代数的 Manin 三元组与具有适当额外结构的右 Novikov 代数的张量积，应自然地给出李代数的 Manin 三元组。我们发现，这种额外结构恰好就是右 Novikov 代数上的二次性质（见注3.19）。

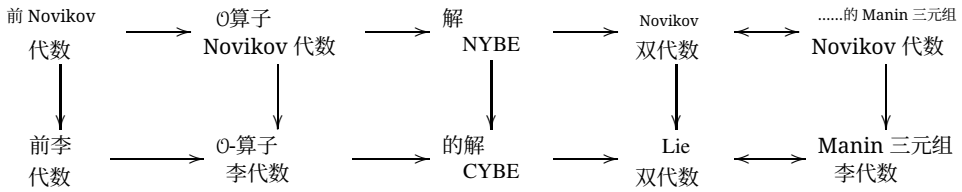
1.3.5. Novikov 杨-巴克斯特方程及其仿射化。为了拓展 CYBE 与李双代数之间的密切联系，我们为 Novikov 代数定义了一个类似于 CYBE 的方程，称为诺维科夫杨-巴克斯特方程（NYBE），使得 Novikov 代数中 NYBE 的斜对称解能够给出 Novikov 双代数。

另一方面，由 Novikov代数中的 NYBE 解，可以通过 Novikov 代数的仿射化构造李代数中的 CYBE 解（命题 ffinization (Proposi-tion 4.2）。因此，后者的解可以视为前者解的仿射化。ffinization of the former solutions.

我们将 Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子定义为 NYBE 的算子形式。它给出半直积 Novikov 代数中 NYBE 的一个斜对称解。此外，前 Novikov 代数给出了 Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子的一个自然例子，其歌剧代数是 Novikov 代数歌剧代数的分裂 [5]。前 Novikov 代数的一个例子是带有导子的 Zinbiel 代数。

总体而言，李双代数的图（2）扩展为 Novikov 双代数的图。此外，这两个图的关系如下方交换图所示。

(3)



两个右侧方块的交换性分别由命题3.20 和推论4.5给出，其他方块的交换性也可类似地得到。特别是，这提供了大量的李双代数。

此外，我们引入拟 Frobenius Novikov 代数的概念，以刻画一类 NYBE 斜对称解。此外，我们还利用拟 Frobenius Novikov 代数构造拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数，从而为无限维拟 Frobenius 李代数提供了许多例子。

1.4. 论文概要。论文内容简述如下。

在第 2 节中，我们首先介绍 Novikov 双代数和二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数的概念，以及完备李双代数。我们证明，有限维 Novikov 双代数与二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数的张量积上存在自然的完备李双代数结构。当二次的$\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数取为 Laurent 多项式空间时，我们通过仿射化得到 Novikov 双代数的一个刻画。ffinization。

在第3节中，我们引入 Novikov 代数的 Manin 三元组，通过匹配对给出有限维 Novikov 双代数的等价描述。我们还展示了如何从 Novikov 代数的 Manin 三元组和给定的二次右 Novikov 代数自然构造李代数的 Manin 三元组。由二阶张量定义的一类特殊 Novikov 双代数引出了 NYBE 的概念，使得 NYBE 的斜对称解能够给出 Novikov 双代数。此外，我们还引入 Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子、前 Novikov 代数和拟 Frobenius Novikov 代数的概念，以阐释和构造 NYBE 的解。

在第4节中，对于 Novikov 代数 A 和二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数 B，我们展示了如何从 $A \otimes B$ 中的 NYBE 斜对称解，自然构造李代数A $\otimes B$ 中 CYBE 的斜对称解A。此外，我们还给出了从拟 Frobenius Novikov 代数构造拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数的方法，这些李代数对应于一类 NYBE 的斜对称解。特别地，利用第3 节可从前 Novikov 代数构造完备李双代数和拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。最后通过一个例子进一步说明了该构造。

2. 由 Novikov 双代数经 Koszul 对偶得到的无限维李双代数

本节将 Balinsky-Novikov 定理从通过 Novikov 代数仿射化构造李代数结构推广至李双代数，该推广以 Novikov 双代数和二次的 $\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数的概念为基础。第 2.1 节引入 Novikov 双代数的概念。第 2.2 节介绍完备右 Novikov 余代数的概念，并给出 Balinsky-Novikov 定理的余代数版本。第 2.3 节利用 Novikov 双代数和二次的 $\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数构造李双代数。

2.1. Novikov 双代数。

我们从左、右 Novikov 代数的经典概念开始 .

定义 2.1. Novikov 代数是一个带有二元运算 $\circ$ 的向量空间 A，满足

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) &= (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c),\\ (a \circ b) \circ c &= (a \circ c) \circ b \quad \text{for all } a, b, c \in A.\end{aligned}$$

右 Novikov 代数是一个向量空间 A，配备满足以下条件的二元运算 $\diamond$

$$\begin{aligned}&(a \diamond b) \diamond c - a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond c) \diamond b - a \diamond (c \diamond b),\\ &a \diamond (b \diamond c) = b \diamond (a \diamond c) \quad \text{for all } a, b, c \in A.\end{aligned}$$

注 2.2。（a）显然，(A, $\circ$) 是 Novikov 代数，当且仅当其对代数 (A, $\diamond$) 是右 Novikov 代数，其中对所有 a, b $\in$ A，定义 a $\diamond$ b := b $\circ$ a。因此，更准确地说，Novikov 代数应称为左 Novikov 代数。我们仍沿用通常的称谓，除非有必要强调，否则仍称其为 Novikov 代数。（b）(左) Novikov 代数的歌剧代数的 Koszul 对偶，是右 Novikov 代数的歌剧代数 [16]。

例 2.3。（a）S. Gelfand 给出了 Novikov 代数的经典例子 [18]。设 (A, $\cdot$) 是交换结合代数，D 是一个导子。那么二元运算

$$a \circ b := a \cdot D(b) \quad \text{for all } a, b \in A, \tag{4}$$

定义了一个 Novikov 代数 (A, $\circ$)。二元运算

$$a \diamond b := D(a) \cdot b \quad \text{for all } a, b \in A$$

定义了一个右 Novikov 代数 (A, $\diamond$)。

(b) 作为一个特例，在 Laurent 多项式代数 k[t, t^{-1}] 上赋予自然导子 D := $\frac{d}{dt}$。那么 (B = k[t, t^{-1}], $\diamond$) 是一个右 Novikov 代数，其中 $\diamond$ 定义为

$$t^i \diamond t^j := D(t^i)t^j = it^{i+j-1} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

设 A 是一个向量空间。设

$$\tau : A \otimes A \to A \otimes A, \quad a \otimes b \mapsto b \otimes a \ \text{ for all } a, b \in A,$$

称为翻转算子。对偶化 Novikov 代数的概念，我们给出如下定义。

定义 2.4. （左）Novikov 余代数是一个向量空间 A，配备一个线性映射 $\Delta : A \to A \otimes A$，称为余乘法，满足

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a) - (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a) - (\tau \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a), \tag{6}$$

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\tau\Delta(a) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a) \ \text{ for all } a \in A. \tag{7}$$

设 A 是一个有限维向量空间，且 $\Delta : A \to A \otimes A$ 是一个余乘法。设 $\cdot : A^* \otimes A^* \to A^*$ 是对偶空间上的相应二元运算。与结合代数和余代数的情形一样，当且仅当 $(A^*, \cdot)$ 是 Novikov 代数时，(A, Δ) 才是 Novikov 余代数。

设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数。在 A 上定义另一个二元运算 $\star$，如下：

$$a \star b = a \circ b + b \circ a \quad \text{for all } a, b \in A.$$

设 $L_A, R_A : A \to \mathrm{End_k}(A)$ 是分别由下式定义的线性映射

$$L_A(a)(b) := a \circ b, \quad R_A(a)(b) := b \circ a \quad \text{for all } a, b \in A.$$

定义 $L_{A,\star} : A \to \mathrm{End_k}(A)$，使得 $L_{A,\star} = L_A + R_A$。

现在我们引入本文研究的主要概念。

定义 2.5. Novikov 双代数是一个三元组 $(A, \circ, \Delta)$，其中 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，(A, Δ) 是一个 Novikov 余代数，并且对所有 $a, b \in A$，以下条件均成立。

$$\Delta(a \circ b) = (R_A(b) \otimes \mathrm{id})\Delta(a) + (\mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(a))(\Delta(b) + \tau\Delta(b)), \tag{8}$$

$$(L_{A,\star}(a) \otimes \mathrm{id})\Delta(b) - (\mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(a))\tau\Delta(b) = (L_{A,\star}(b) \otimes \mathrm{id})\Delta(a) - (\mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(b))\tau\Delta(a), \tag{9}$$

$$(\mathrm{id} \otimes R_A(a) - R_A(a) \otimes \mathrm{id})(\Delta(b) + \tau\Delta(b)) = (\mathrm{id} \otimes R_A(b) - R_A(b) \otimes \mathrm{id})(\Delta(a) + \tau\Delta(a)). \tag{10}$$

例 2.6. 设 $(A, \circ)$ 是 [8] 中的二维 Novikov 代数，其基为 $\{e_1, e_2\}$，其乘法定义如下：

$$e_1 \circ e_1 = e_1, \ e_2 \circ e_1 = e_2, \ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0.$$

定义 $\Delta_A : A \to A \otimes A$ 如下：

$$\Delta_A(e_1) = \lambda e_2 \otimes e_2, \quad \Delta_A(e_2) = 0,$$

对于一个固定的 $\lambda \in \mathrm{k}$。于是直接验证可知 $(A, \circ, \Delta_A)$ 是一个 Novikov 双代数。

2.2. 完备右 Novikov 余代数与完备李余代数。本节余下部分中，我们假设 A 是一个有限维向量空间。

定义 2.7. 一个 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数（分别地，一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数）是指一个右 Novikov 代数 $(B, \diamond)$（分别地，一个李代数 $(B, [\cdot,\cdot])$），它具有线性分解 $B = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$，使得每个 B_i 均为有限维，并且对所有 $i, j \in \mathbb{Z}$，$B_i \diamond B_j \subset B_{i+j}$（分别地，$[B_i, B_j] \subset B_{i+j}$）。

更一般地，即使不要求 B_i 满足有限维条件，该定义仍然有意义。我们在本文中施加这一条件是为了应用。

例 2.8。 对于例 2.3 (b) 中的 Laurent 多项式代数，令 $B_i = \mathbf{k}t^{i+1}$ 对 $i \in \mathbb{Z}$。那么 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \diamond)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。

推广定理 1.1，一个（左）Novikov 代数与一个 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数的配对给出如下所述的 $\mathbb{Z}$-分次李代数。

定理 2.9. 设 $(A, \circ)$ 是一个（左）Novikov 代数，$(B, \diamond)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。在 $A \otimes B$ 上定义一个二元运算如下：

$$[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] = a_1 \circ a_2 \otimes b_1 \diamond b_2 - a_2 \circ a_1 \otimes b_2 \diamond b_1 \quad \textit{for all } a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

则 $(A \otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数，称为（由 $(A, \circ)$ 和 $(B, \diamond)$ 诱导的）诱导李代数。进一步地，如果 $(B, \diamond) = (k[t, t^{-1}], \diamond)$ 是例 2.8 中的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数，那么 $(A \otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数，当且仅当 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数。

证明。根据[20, 推论2.29]（另见 [31, 命题7.65]），$(A\otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。此外，由于 $(B, \diamond)$ 是 $\mathbb{Z}$ 分次的，$(A\otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是一个 $\mathbb{Z}$分次李代数。当 $(B, \diamond) = (k[t, t^{-1}], \diamond)$ 时，该结果由定理1.1（即 [10, 引理 1]）得到。□

我们的主要目标是将 Novikov 代数的仿射化扩展到 Novikov 余代数，并进一步扩展到 Novikov 双代数。对于 Novikov 余代数的仿射化，我们首先需要在 Laurent 多项式空间上找到一种余代数结构，使其分次线性对偶成为例扩中的 Laurent 多项式右 Novikov 代数 2.8。正如下面的简单结果所示，这无法通过通常的余乘法实现。

引理 2.10。 设 $C = \mathbf{k}[x,x^{-1}]$ 是 $\mathbb{Z}$-分次（按次数）的 Laurent 多项式空间，令 $A = \mathbf{k}[t,t^{-1}]$ 为分次线性对偶。那么，例 中 A 上的右 Novikov 代数乘积 2.8 不可能是任何余乘法的分次线性对偶所诱导的乘积δ： $C \to C \otimes C$.

证明。假设存在这样的余乘法 δ。记 $\delta(x^i) = \sum c_{p,q} x^p \otimes x^q$。那么，分次$_{p,q\in\mathbb{Z}}$线性对偶 $\langle x^i, t_j\rangle = \delta_{i,j}$给出对偶关系 $\langle\delta(x^i), t_j \otimes t^k\rangle = \langle x^i, t_j \diamond t^k\rangle$，从而得到 $c_{j,k} = \delta_{i-j-k+1,0}$j。因此

$$\delta(x^i) = \sum_{i-p-q+1=0} \delta_{i-p-q+1,0} p x^p \otimes x^q = \sum_{p\in\mathbb{Z}} p x^p \otimes x^{i-p+1}.$$

这是一个无穷和，因此无法由 δ 定义：$C \to C \otimes C$。 □

因此，为了实现 Novikov 余代数仿射化，我们需要扩展余乘法 $\delta : C \to C \otimes C$ 的陪域，以允许无穷和，这与拓扑余代数 [38] 的思路一致。

设 $C = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ 和 $D = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} D_j$ 是 $\mathbb{Z}$-分次向量空间。我们将 C 和 D 的完备张量积定义为向量空间

$$C \widehat{\otimes} D := \prod_{i,j\in\mathbb{Z}} C_i \otimes D_j.$$

如果 C 和 D 是有限维的，那么 $C \hat{\otimes} D$ 就是通常的张量积 $C \otimes D$。

注 2.11. 我们注意到，$C \hat{\otimes} D$ 是 $C \otimes D$ 关于由滤过 $\mathrm{Fil}^n(C \otimes D) := \oplus_{|i|\geq n} C_i \otimes D_j$ [1, 12, 38] 定义的拓扑的完备化。因此，我们称上述结构为完备的。我们不需要对张量积或拓扑

向量空间中的余乘法施加进一步限制。特别是，我们不要求下文定义的余乘法 δ（分别为 Δ）是连续的。

一般而言，$C \widehat{\otimes} D$ 中的一个元素是无穷形式和 $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} p_{ij}$，其中 $p_{ij} \in C_i \otimes D_j$。因此，$p_{ij} = \sum_\alpha c_{i\alpha} \otimes d_{j\alpha}$，其中 $c_{i\alpha} \otimes d_{j\alpha} \in C_i \otimes D_j$ 是纯张量，且 α 属于一个有限指标集。因此，$C \widehat{\otimes} D$ 的一般项是一个可能为无穷和的

$$\sum_{i,j,\alpha} c_{i\alpha} \otimes d_{j\alpha}, \tag{11}$$

其中 $i、j \in \mathbb{Z}$ 和 α 属于一个有限指标集（该集合可能依赖于 $i、j$）。

采用这些记号，对于线性映射 $f : C \to C'$ 和 $g : D \to D'$，定义

$$f \widehat{\otimes} g : C \widehat{\otimes} D \to C' \widehat{\otimes} D', \quad \sum_{i,j,\alpha} c_{i\alpha} \otimes d_{j\alpha} \mapsto \sum_{i,j,\alpha} f(c_{i\alpha}) \otimes g(d_{j\alpha}).$$

此外，扭转映射 τ 有其完备化

$$\widehat{\tau} : C \widehat{\otimes} C \to C \widehat{\otimes} C, \quad \sum_{i,j,\alpha} c_{i\alpha} \otimes d_{j\alpha} \mapsto \sum_{i,j,\alpha} d_{j\alpha} \otimes c_{i\alpha}.$$

最后，我们将（完备）余乘法定义为一个线性映射

$$\Delta : C \to C \widehat{\otimes} C, \quad \Delta(a) := \sum_{i,j,\alpha} a_{1i\alpha} \otimes a_{2j\alpha}.$$

于是我们得到良定义的映射

$$(\Delta \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Delta(a) = (\Delta \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Big(\sum_{i,j,\alpha} a_{1i\alpha} \otimes a_{2j\alpha} \Big) := \sum_{i,j,\alpha} \Delta(a_{1i\alpha}) \otimes a_{2j\alpha} \in C \widehat{\otimes} C \widehat{\otimes} C.$$

定义 2.12. (a) 完备右 Novikov 余代数是一个二元组 (C, Δ)，其中 $C = \widehat{\oplus}_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次向量空间，且 $\Delta : C \to C \widehat{\otimes} C$ 是满足以下条件的线性映射

$$(\Delta \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Delta(a) - (\mathrm{id} \widehat{\otimes} \widehat{\tau})(\Delta \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Delta(a) = (\mathrm{id} \widehat{\otimes} \Delta)\Delta(a) - (\mathrm{id} \widehat{\otimes} \widehat{\tau})(\mathrm{id} \widehat{\otimes} \Delta)\Delta(a), \tag{12}$$

$$(\mathrm{id} \widehat{\otimes} \Delta)\Delta(a) = (\widehat{\tau} \widehat{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \widehat{\otimes} \Delta)\Delta(a) \quad \text{for all } a \in C. \tag{13}$$

(b) 完备李余代数是一个二元组 (L, δ)，其中 $L = \widehat{\oplus}_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次向量空间，且 $\delta : L \to L \widehat{\otimes} L$ 是满足以下条件的线性映射

$$\delta(a) = -\widehat{\tau}\delta(a),$$
$$(\mathrm{id} \widehat{\otimes} \delta)\delta(a) - (\widehat{\tau} \widehat{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \widehat{\otimes} \delta)\delta(a) = (\delta \widehat{\otimes} \mathrm{id})\delta(a) \quad \text{for all } a \in L.$$

在上述两个定义中，当 C（分别地，L）是有限维时，(C, Δ)（分别地，(L, δ)）就是一个右 Novikov 余代数，即 Novikov 余代数（分别地，李余代数）的对代数。

例 2.13. 在向量空间 $B := k[t, t^{-1}]$ 上，定义线性映射 $\Delta_B : B \to B \widehat{\otimes} B$，如下所示

$$\Delta_B(t^j) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (i+1) t^{-i-2} \otimes t^{j+i} \quad \text{for all } j \in \mathbb{Z}.$$

可以直接验证，$(B = k[t, t^{-1}], \Delta_B)$ 是一个完备右 Novikov 余代数。

现在我们给出定理 2.9 的对偶版本。

定理 2.14. 设 (A, Δ_A) 是一个 Novikov 余代数，(B, Δ_B) 是一个完备的右 Novikov 余代数，且 $L := A \otimes B$。定义线性映射 $\delta : L \to L \otimes L$ 为

$$\delta(a \otimes b) = (\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L} - \widehat{\tau})(\Delta_A(a) \bullet \Delta_B(b)) \quad \text{for all } a \in A, b \in B. \tag{14}$$

这里 $\Delta_A(a) = \sum^{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ 在 Sweedler 记号中，且 $\Delta_B(b) = \sum^{i,\ j,\ \alpha} b_{1i\alpha} \otimes b_{2j\alpha}$ 如式(11)所示，令

$$\Delta_A(a) \bullet \Delta_B(b) := \sum_{(a)} \sum_{i,j,\alpha} (a_{(1)} \otimes b_{1i\alpha}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{2j\alpha}).$$

于是 $(L,\ \delta)$ 是一个完备李余代数。此外，若 $(B = \mathbf{k}[t,\ t^{-1}],\ \Delta_B)$ 是例 2.13中给出的完备右 Novikov 余代数，则 $(L = A \otimes B,\ \delta)$ 是完备李余代数，当且仅当 $(A,\ \Delta_A)$ 是 Novikov 余代数。

证明。显然，$\delta = -\tau\delta$。对于 $a'_1 \otimes a''_1 \otimes a'''_1 \in A \otimes A \otimes A$ 以及 $b'_{i\alpha} \otimes b''_{j\alpha} \otimes b'''_{k\alpha} \in B \otimes B \otimes B$，我们记

$$\Big(\sum_{\ell} a'_\ell \otimes a''_\ell \otimes a'''_\ell\Big) \bullet \Big(\sum_{i,j,k,\alpha} b'_{i\alpha} \otimes b''_{j\alpha} \otimes b'''_{k\alpha}\Big) := \sum_{\ell} \sum_{i,j,k,\alpha} (a'_\ell \otimes b'_{i\alpha}) \otimes (a''_\ell \otimes b''_{j\alpha}) \otimes (a'''_\ell \otimes b'''_{k\alpha}).$$

设 $a \otimes b \in A \otimes B$。根据 δ 的定义并使用上述记号，我们得到

$$\begin{aligned}
&\big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\delta)\delta - (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\delta)\delta - (\delta\widehat{\otimes}\mathrm{id})\delta\big)(a \otimes b)\\
=\ &\big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big) - \big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)\\
&-\big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big) + \big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big)\\
&-\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)\\
&+\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)\\
&+\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big)\\
&-\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big)\\
&-\big((\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\Delta_B(b)\big) + \big((\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\tau\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\Delta_B(b)\big)\\
&+\big((\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\tau\Delta_B(b)\big) - \big((\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\tau\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\tau\Delta_B(b)\big).
\end{aligned}$$

由等式（12）和（13），我们得到

$$\begin{aligned}
&(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b) = (\mathrm{id}\otimes\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b), \quad (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\Delta_B(b) = (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b),\\
&(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b) = (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b) - (\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b) + (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b).
\end{aligned}$$

然后将这些等式与式（12）和（13）结合起来，可得

$$\begin{aligned}
&\big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\delta)\delta - (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\delta)\delta - (\delta\widehat{\otimes}\mathrm{id})\delta\big)(a \otimes b)\\
=\ &\big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big) - \big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)\\
&-\big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big) + \big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\\
&-(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b) + (\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\Delta_B\widehat{\otimes}\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b)\big) - \big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)\\
&+\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\big) \bullet \big((\widehat{\tau}\widehat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
&-\Big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
&-\Big((\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\Delta_B\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\Delta_B(a)+(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\Delta_B(b)-(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\Delta_B\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\Delta_B(a)+(\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\Delta_B(b)\\
&\qquad\qquad-(\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\Delta_B\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)-\Big((\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\Delta_B\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
=\;&\Big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)-(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)-(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)+(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\\
&\bullet\Big((\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)-(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)-(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)+(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\Big)\\
&\bullet\Big((\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(b)\Big)\\
&-\Big((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)-(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)-(\mathrm{id}\otimes\tau)(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\widehat{\tau})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)-(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\Delta_B)\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
&+\Big((\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)+(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a)\\
&\quad-(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)-(\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\tau\Delta_A(a)\Big)\bullet\Big((\widehat{\tau\otimes}\,\mathrm{id})(\Delta_B\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\widehat{\tau}\Delta_B(b)\Big)\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

因此，(L,δ) 是一个完备李余代数。

若（$B=\mathbf{k}[t,\ t^{-1}],\ \Delta_B$）是例 2.13 中给出的完备右 Novikov 余代数，则相应的 δ 由下式给出

$$
\delta(at^k)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{(a)}(i+1)(a_{(1)}t^{-i-2}\otimes a_{(2)}t^{k+i}-a_{(2)}t^{k+i}\otimes a_{(1)}t^{-i-2})\quad\text{for all } a\in A,k\in\mathbb{Z}. \tag{15}
$$

设 (g,δ) 是一个完备李余代数。则有

$$
\begin{aligned}
0\;=\;&(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\delta)\delta(at^k)-(\widehat{\tau\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\delta)\delta(at^k)-(\delta\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\delta(at^k)\\
=\;&\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{(a)}\Big((i+1)(j+1)a_{(1)}t^{-i-2}\otimes(a_{(21)}t^{-j-2}\otimes a_{(22)}t^{k+i+j}-a_{(22)}t^{k+i+j}\otimes a_{(21)}t^{-j-2})\\
&-(i+1)(j+1)(a_{(2)}t^{k+i}\otimes(a_{(11)}t^{-j-2}\otimes a_{(12)}t^{-i-2+j}-a_{(12)}t^{-i-2+j}\otimes a_{(11)}t^{-j-2}))\\
&-(i+1)(j+1)(a_{(21)}t^{-j-2}\otimes a_{(1)}t^{-i-2}\otimes a_{(22)}t^{k+i+j}-a_{(22)}t^{k+i+j}\otimes a_{(1)}t^{-i-2}\otimes a_{(21)}t^{-j-2})\\
&+(i+1)(j+1)(a_{(11)}t^{-j-2}\otimes a_{(2)}t^{k+i}\otimes a_{(12)}t^{-i-2+j}-a_{(12)}t^{-i-2+j}\otimes a_{(2)}t^{k+i}\otimes a_{(11)}t^{-j-2})\\
&-(i+1)(j+1)(a_{(11)}t^{-j-2}\otimes a_{(12)}t^{-i+j-2}-a_{(12)}t^{-i-2+j}\otimes a_{(11)}t^{-j-2})\otimes a_{(2)}t^{k+i}\\
&+(i+1)(j+1)(a_{(21)}t^{-j-2}\otimes a_{(22)}t^{k+i+j}-a_{(22)}t^{k+i+j}\otimes a_{(21)}t^{-j-2})\otimes a_{(1)}t^{-i-2}\Big).
\end{aligned}
$$

令 $\mathrm{k}=2$。比较 $\mathrm{t}^{-1}\otimes\mathrm{t}^{-1}\otimes 1$ 的系数，得到

$$
0=\sum_{(a)}(a_{(2)}\otimes a_{(12)}\otimes a_{(11)}-a_{(12)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(11)})=\tau_{13}((\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)-(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)),
$$

其中 $\tau_{13}(a_1\otimes a_2\otimes a_3) = a_3\otimes a_2\otimes a_1$，对所有 $a_1, a_2, a_3 \in A$ 均成立。类似地，令 $k = 0$。比较 $t^{-1}\otimes t^{-3}\otimes 1$ 的系数，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{(a)}(-a_{(22)}\otimes a_{(1)}\otimes a_{(21)} - a_{(12)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(11)} + a_{(12)}\otimes a_{(11)}\otimes a_{(2)} + a_{(22)}\otimes a_{(21)}\otimes a_{(1)}) \\ &= \tau_{13}((\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a) - (\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\Delta_A(a) - (\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a) + (\tau\otimes\mathrm{id})(\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a)) \\ &\quad +(\tau\otimes\mathrm{id}+\tau_{13})((\Delta_A\otimes\mathrm{id})\Delta_A(a) - (\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\Delta_A)\tau\Delta_A(a)). \end{aligned}$$

因此，式（6）和（7）成立，即（A, Δ_A）是 Novikov 余代数。

证明完毕。 □

如果 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数（$B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i$, $\diamond$）是有限维的，那么式（14）是有限和。

下面给出一个由定理2.14得到的完备李余代数的例子 .

例2.1 5. 设 $(A = \mathbf{k}e, \Delta_A)$ 是一个由 Δ_A 定义的 一维Novikov余代数 b y

$$\Delta_A(e) = e\otimes e.$$

设 $(B = \mathbf{k}[t,t^{-1}], \Delta_B)$ 是例 2.13 中的完备右 Novikov 余代数。由定理 2.14，存在一个完备李余代数 $(L = A\otimes B, \delta)$，其线性映射 δ 定义如下

$$\begin{aligned} \delta(et^j) &= \Delta_A(e)\bullet\Delta_B(t^j) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(i+1)et^{-i-2}\otimes et^{j+i} - \sum_{i\in\mathbb{Z}}(i+1)et^{j+i}\otimes et^{-i-2} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(j+2i+2)et^{-i-2}\otimes et^{j+i} \qquad \text{for all } j\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.3. 由 Novikov 双代数和二次右 Novikov 代数构造李双代数。现在我们介绍从 Novikov 双代数构造李双代数所需的最后几个要素。

定义 2.16. 分次向量空间 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i$ 上的双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 称为分次的，若存在某个 $m \in \mathbb{Z}$ 使得

$$(B_i, B_j) = 0 \quad \text{for all } i, j\in\mathbb{Z} \text{ satisfying } i+j+m\neq 0.$$

$\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \diamond)$ 上的分次双线性型称为不变的，若其满足

$$(a\diamond b, c) = -(a, b\diamond c + c\diamond b) \quad \text{for all } a,b,c\in B. \tag{16}$$

称为 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 的二次 $\mathbb{Z}$ 分次右 Novikov 代数，是一个 $\mathbb{Z}$ 分次右 Novikov 代数 $(B, \diamond)$，并带有一个对称不变非退化分次双线性形式 $(\cdot,\cdot)$。特别地，当 $B = B_0$, 时，它简称为二次右 Novikov 代数。

对于二次 $\mathbb{Z}$ 分次右 Novikov 代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \diamond, (\cdot,\cdot))$，非退化对称双线性形式 $(\cdot,\cdot)$ 诱导出双线性形式 $(\cdot,\cdot)_k$（$k \geq 2$），定义如下：

$$(\cdot,\cdot)_k : (\underbrace{B\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}B}_{k\text{-fold}})\otimes(\underbrace{B\otimes\cdots\otimes B}_{k\text{-fold}}) \to \mathbf{k}, \Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k,\alpha} a_{1i_1\alpha}\otimes\cdots\otimes a_{ki_k\alpha}, b_1\otimes\cdots\otimes b_k\Big)_k := \sum_{i_1,\cdots,i_k,\alpha}\prod_{\ell=1}^{k}(a_{\ell i_\ell\alpha}, b_\ell) \tag{17}$$

采用式（11）中的记号及齐次元素 $b_i \in B$。此外，这些形式是左非退化的，其含义是，若

$$\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k,\alpha} a_{1i_1\alpha}\otimes\cdots\otimes a_{ki_k\alpha}, b_1\otimes\cdots\otimes b_k\Big)_k = \Big(\sum_{j_1,\cdots,j_k,\beta} b_{1j_1\beta}\otimes\cdots\otimes b_{kj_k\beta}, b_1\otimes\cdots\otimes b_k\Big)_k$$

对于所有齐次元素 $b_1, \ldots, b_k \in B$，均有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_k,\alpha} a_{1i_1\alpha} \otimes \cdots \otimes a_{ki_k\alpha} = \sum_{j_1,\cdots,j_k,\beta} b_{1j_1\beta} \otimes \cdots \otimes b_{kj_k\beta}.$$

为简洁起见，我们将省略指标 k，因为其含义可由上下文明确得知。

注 2.17. (a) 假设 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。设 $\{e_p\}_{p\in\Pi}$ 是 B 的一组由齐次元素组成的基。由于 $(\cdot,\cdot)$ 诱导了分次向量空间的一个同构 $\varphi: B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i \to \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i^*$，我们总能找到与 $(\cdot,\cdot)$ 对应的（分次）对偶基 $\{f_q\}_{q\in\Pi}$，其中的元素也都是齐次元素；也就是说，对所有 $p, q \in \Pi$，有 $(e_p, f_q) = \delta_{p,q}$。

(b) 设一个 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \diamond)$ 有单位元 e。在式 (16) 中令 $b = e$，得到 $3(a, c) = 0$。因此，只要 k 的特征不为 3，双线性型就是平凡的，这表明不存在非平凡的双线性型 $(\cdot,\cdot)$，使得 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 成为一个有单位元的二次 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。

例 2.18. 设 $(B = B_0, \diamond)$ 是 [8] 中的二维右 Novikov 代数，其基为$\{e_1,e_2\}$，乘法定义如下：

$$e_1 \diamond e_1 = 0,\ e_1 \diamond e_2 = -2e_1,\ e_2 \diamond e_1 = e_1,\ e_2 \diamond e_2 = e_2.$$

在 B 上定义一个双线性型 $(\cdot,\cdot)$，使得 $(e_1,e_1) = (e_2,e_2) = 0$，$(e_1,e_2) = (e_2,e_1) = 1$。显然，这个双线性型非退化、对称且不变，这表明 $(B, \diamond,(\cdot,\cdot))$ 是一个二次右 Novikov 代数。

例 2.19. 设 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{k}t^i, \diamond)$ 为 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数，如例2.8中所示。在其上定义双线性型 $(\cdot,\cdot)$，定义在 B 上如下：

$$(t^i, t^j) = \delta_{i+j+1,0} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

直接可验证，$(B = k[t, t^{-1}], \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。

引理 2.20. 设 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \diamond,(\cdot,\cdot))$ 是一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。设$\Delta_B : B \to B\widehat{\otimes}B$ 是 $\diamond$ 在式（(17)）中的左非退化双线性型下的对偶，因此

$$(\Delta_B(a), b \otimes c) = (a, b \diamond c) \quad \textit{for all } a, b, c \in B. \tag{19}$$

那么 (B, Δ_B) 是一个完备右 Novikov 余代数。

证明。注意，对于任意 $c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \in B_i \otimes B_j \otimes B_k$，根据 Δ_B 的定义，可得

$$\begin{aligned}\Big((\Delta_B \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Delta_B(a) - (\mathrm{id}\widehat{\otimes}\tau)(\Delta_B \widehat{\otimes} \mathrm{id})\Delta_B(a) - (\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(a) + (\mathrm{id}\widehat{\otimes}\tau)(\mathrm{id}\widehat{\otimes}\Delta_B)\Delta_B(a), c_1 \otimes c_2 \otimes c_3\Big)\\ = (a, (c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 - (c_1 \diamond c_3) \diamond c_2 - c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3) + c_1 \diamond (c_3 \diamond c_2))) = 0.\end{aligned}$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 的非退化性给出式（12）。式（13）可类似验证，证明完毕。□

注 2.21. 根据例 2.19，数对 $(B = k[t, t^{-1}], \diamond, (\cdot,\cdot))$（其中 $(\cdot,\cdot)$ 由式（18）给出）是一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。直接计算可知，由引理 2.20 从 $(B = k[t, t^{-1}], \diamond, (\cdot,\cdot))$ 得到的数对 (B, Δ_B) 与例 2.13 中给出的完备右 Novikov 余代数一致。

现在给出完备李双代数的概念及相关结果。

定义 2.22. 完备李双代数是一个三元组 $(L,[\cdot,\cdot],\delta)$，满足 $(L,[\cdot,\cdot])$ 是李代数，(L,δ) 是完备李余代数，并且满足以下相容条件。

$$\delta([a,b]) = (\mathrm{ad}_a \widehat{\otimes} \mathrm{id} + \mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{ad}_a)\delta(b) - (\mathrm{ad}_b \widehat{\otimes} \mathrm{id} + \mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{ad}_b)\delta(a) \quad \text{for all } a,b \in L,$$

其中，对所有 a、b ∈ L，有 $\mathrm{ad}_a(b) = [a,b]$。

定理 2.23。设 $(A,\circ,\Delta_A)$ 是一个 Novikov 双代数，且 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i,\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是一个二次的$\mathbb{Z}$分次右 Novikov 代数。设 $L = A \otimes B$ 是由定理 2.9 中的 $(A,\circ)$ 和 b $(B,\diamond)$ 诱导的李代数，$\Delta_B : B \to B \otimes B$ 是由公式 (19) 定义的线性映射，且 $\delta : L \to L\otimes L$ 是由公式 (14) 定义的线性映射：

$$\delta(a\otimes b) = (\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L} - \widehat{\tau})(\Delta_A(a)\bullet\Delta_B(b)) \quad \textit{for all } a\in A, b\in B.$$

那么 $(L,[\cdot,\cdot],\delta)$ 是一个完备李双代数。此外，如果 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot)) = (\mathbf{k}[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是例 2.19 中给出的二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数，那么反过来也成立。

证明。 根据引理 2.20, (B,Δ_B) 是一个完备右 Novikov 余代数。由定理2.14, (L,δ) 是一个完备李余代数。

令 a ⊗b、c ⊗d、 ∈A 和 ⊗B，其中 b ∈B_i，d ∈B_j。我们得到

$$\delta([a\otimes b,\ c\otimes d]) = (\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L} - \widehat{\tau})(\Delta_A(a\circ c)\bullet\Delta_B(b\diamond d)) - (\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L} - \widehat{\tau})(\Delta_A(c\circ a)\bullet\Delta_B(d\diamond b))$$

and

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_{(a\otimes b)} \widehat{\otimes} \mathrm{id} + \mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{ad}_{(a\otimes b)})\delta(c\otimes d)\\
=\ &(\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L} - \widehat{\tau})\Big(\sum_{(c)}\sum_{i,j,\alpha}(a\circ c_{(1)}\otimes c_{(2)})\bullet(b\diamond d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}) - \sum_{(c)}\sum_{i,j,\alpha}(c_{(1)}\circ a\otimes c_{(2)})\bullet(d_{1i\alpha}\diamond b\otimes d_{2j\alpha})\\
&+\sum_{(c)}\sum_{i,j,\alpha}(c_{(1)}\otimes a\circ c_{(2)})\bullet(d_{1i\alpha}\otimes b\diamond d_{2j\alpha}) - \sum_{(c)}\sum_{i,j,\alpha}(c_{(1)}\otimes c_{(2)}\circ a)\bullet(d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}\diamond b)\Big).
\end{aligned}$$

令 e ∈B_k，f ∈B_l。注意，

$$\begin{aligned}
&(\widehat{\tau}\Delta_B(b\diamond d), e\otimes f) = \Big(\sum_{i,j,\alpha}(b\diamond d)_{2j\alpha}\widehat{\otimes}(b\diamond d)_{1i\alpha}, e\otimes f\Big) = (b\diamond d, f\diamond e) = (d, b\diamond(f\diamond e)),\\
&\Big(\sum_{i,j,\alpha}(b\diamond d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}), e\otimes f\Big) = \sum_{i,j,\alpha}(d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}, (b\diamond e)\otimes f) = (d,(b\diamond e)\diamond f)\\
&= \Big(d, (b\diamond f)\diamond e + b\diamond(e\diamond f) - b\diamond(f\diamond e)\Big).
\end{aligned}$$

由 $(\cdot,\cdot)$ 的非退化性，我们有

$$\sum_{i,j,\alpha}(b\diamond d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}) = -\widehat{\tau}\Delta_B(b\diamond d) + \sum_{i,j,\alpha} g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha}, \tag{20}$$

其中，$P_{i,j,\alpha} g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha} \in B\ b\otimes B$ 的选取满足 $(P_{i,j,\alpha} g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha}, e\otimes f) = (d,(b\diamond f)\diamond e + b\diamond(e\diamond f))$. 同理，我们得到

$$\sum_{i,j,\alpha}(d_{1i\alpha}\otimes b\diamond d_{2j\alpha}) = \Delta_B(b\diamond d),\quad \sum_{i,j,\alpha}(d_{1i\alpha}\otimes d_{2j\alpha}\diamond b) = -\Delta_B(b\diamond d) - \sum_{i,j,\alpha} k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}, \tag{21}$$

$$\sum_{i,j,\alpha}(d_{1i\alpha}\diamond b\otimes d_{2j\alpha}) = \widehat{\tau}\Delta_B(b\diamond d) - \sum_{i,j,\alpha} g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha} + \Delta_B(b\diamond d) + \sum_{i,j,\alpha} k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}, \tag{22}$$

$$\sum_{i,j,\alpha}(b_{1i\alpha}\otimes d\diamond b_{2j\alpha})=\Delta_B(d\diamond b),\quad \sum_{i,j,\alpha}(d\diamond b_{1i\alpha}\otimes b_{2j\alpha})=-\widehat{\tau}\Delta_B(d\diamond b)+\sum_{i,j,\alpha}g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha}, \tag{23}$$

$$\sum_{i,j,\alpha}(b_{1i\alpha}\diamond d\otimes b_{2j\alpha})=\widehat{\tau}\Delta_B(d\diamond b)-\sum_{i,j,\alpha}g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha}+\Delta_B(d\diamond b)+\sum_{i,j,\alpha}k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}, \tag{24}$$

$$\sum_{i,j,\alpha}(b_{1i\alpha}\otimes b_{2j\alpha}\diamond d)=-\Delta_B(d\diamond b)-\sum_{i,j,\alpha}k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}, \tag{25}$$

其中，$P(i,j,\alpha)k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}\in B\otimes B$ 的选取满足 $P(i,j,\alpha)k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}\otimes f)=(d,e\diamond(f\diamond b))$. 应用方程 (20)-(25) 和方程 (8)-(10)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\delta([a\otimes b,c\otimes d])-(\mathrm{ad}_{(a\otimes b)}\widehat{\otimes}\mathrm{id}+\mathrm{id}\widehat{\otimes}\mathrm{ad}_{(a\otimes b)})\delta(c\otimes d)+(\mathrm{ad}_{(c\otimes d)}\widehat{\otimes}\mathrm{id}+\mathrm{id}\widehat{\otimes}\mathrm{ad}_{(c\otimes d)})\delta(a\otimes b)\\
=\;&(\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L}-\widehat{\tau})((\Delta_A(a\circ c)-\sum_{(c)}c_{(1)}\otimes(a\star c_{(2)})-\sum_{(c)}c_{(2)}\otimes(a\star c_{(1)})-\sum_{(a)}a_{(1)}\circ c\otimes a_{(2)})\bullet\Delta_B(b\diamond d))\\
&-(\mathrm{id}_{L\widehat{\otimes}L}-\widehat{\tau})((\Delta_A(c\circ a)-\sum_{(c)}c_{(1)}\circ a\otimes c_{(2)}-\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes(c\star a_{(2)})-\sum_{(a)}a_{(2)}\otimes c\star a_{(2)})\bullet\Delta_B(d\diamond b))\\
&-\sum_{(c)}(a\star c_{(1)}\otimes c_{(2)}-c_{(2)}\otimes a\star c_{(1)}-c\star a_{(1)}\otimes a_{(2)}+a_{(2)}\otimes c\star a_{(1)})\bullet\sum_{i,j,\alpha}g_{i\alpha}\otimes h_{j\alpha}\\
&+\sum_{(c)}(c_{(1)}\circ a\otimes c_{(2)}-c_{(1)}\otimes c_{(2)}\circ a+c_{(2)}\circ a\otimes c_{(1)}-c_{(2)}\otimes c_{(1)}\circ a\\
&-a_{(1)}\circ c\otimes a_{(2)}+a_{(1)}\otimes a_{(2)}\circ c-a_{(2)}\circ c\otimes a_{(1)}+a_{(2)}\otimes a_{(1)}\circ c)\bullet\sum_{i,j,\alpha}k_{i\alpha}\otimes l_{j\alpha}=0.
\end{aligned}$$

因此，$(L,[\cdot,\cdot],\delta)$ 是一个完备李双代数。

如果 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot))=(k[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$ 且 $(L,[\cdot,\cdot],\delta)$ 是一个完备李双代数，那么根据定理 1.1 和 2.14，$(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，而 (A,Δ_A) 是一个 Novikov 余代数。注意，在这种情况下，δ 由式 (15) 给出。接下来，我们只需验证式 (8)–(10)。

我们计算

$$\begin{aligned}
0\;=\;&\delta([at^j,bt^k])-(\mathrm{ad}_{at^j}\widehat{\otimes}\mathrm{id}+\mathrm{id}\widehat{\otimes}\mathrm{ad}_{at^j})\delta(bt^k)+(\mathrm{ad}_{bt^k}\widehat{\otimes}\mathrm{id}+\mathrm{id}\widehat{\otimes}\mathrm{ad}_{bt^k})\delta(at^j)\\
=\;&\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{(a\circ b)}\Big(j(i+1)((a\circ b)_{(1)}t^{-i-2}\otimes(a\circ b)_{(2)}t^{j+k+i-1}-(a\circ b)_{(2)}t^{j+k+i-1}\otimes(a\circ b)_{(1)}t^{-i-2})\\
&-k(i+1)((b\circ a)_{(1)}t^{-i-2}\otimes(b\circ a)_{(2)}t^{j+k+i-1}-(b\circ a)_{(2)}t^{j+k+i-1}\otimes(b\circ a)_{(1)}t^{-i-2})\Big)\\
&-\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{(b)}\Big((i+1)(j(a\circ b_{(1)})t^{j-i-3}+(i+2)(b_{(1)}\circ a)t^{j-i-3})\otimes b_{(2)}t^{k+i}\\
&+(i+1)b_{(1)}t^{-i-2}\otimes(j(a\circ b_{(2)})t^{j+k+i-1}-(k+i)(b_{(2)}\circ a)t^{j+k+i-1})\\
&-(i+1)(j(a\circ b_{(2)})t^{j+k+i-1}-(k+i)(b_{(2)}\circ a)t^{j+k+i-1})\otimes b_{(1)}t^{-i-2}\\
&-(i+1)b_{(2)}t^{k+i}\otimes(j(a\circ b_{(1)})t^{j-i-3}+(i+2)(b_{(1)}\circ a)t^{j-i-3})\Big)\\
&+\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{(a)}\Big((i+1)(k(b\circ a_{(1)})t^{k-i-3}+(i+2)(a_{(1)}\circ b)t^{k-i-3})\otimes a_{(2)}t^{j+i}\\
&+(i+1)a_{(1)}t^{-i-2}\otimes(k(b\circ a_{(2)})t^{j+k+i-1}-(j+i)(a_{(2)}\circ b)t^{j+k+i-1})\\
&-(i+1)(k(b\circ a_{(2)})t^{j+k+i-1}-(j+i)(a_{(2)}\circ b)t^{j+k+i-1})\otimes a_{(1)}t^{-i-2}\\
&-(i+1)a_{(2)}t^{j+i}\otimes(k(b\circ a_{(1)})t^{k-i-3}+(i+2)(a_{(1)}\circ b)t^{k-i-3})\Big).
\end{aligned}$$

设 $\mathrm{k}=0$ 和 $\mathrm{j}=2$。比较 $\mathrm{t}^{-1}\otimes 1$ 的系数，我们得到

$$\tau\Delta_A(a\circ b)=(L_{A,\star}(a)\otimes \mathrm{id})(\Delta_A(b)+\tau\Delta_A(b))+(\mathrm{id}\otimes R_A(b))\tau\Delta_A(a)\quad \text{for all } a,b\in A.$$

于是我们得到式（8）。类似地，令$j=k=0$ 并比较系数中 $t^{-3}\otimes 1$ 的系数，可得式（10）；令 $j=k=1$ 并利用式（8）比较$t^{-1}\otimes 1$ 的系数，可得式（9）。证明完毕。

□

注 2.24. (a) 定理 2.23 表明，Novikov 双代数的概念可以通过如下条件刻画：其与二次 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数（$\mathbf{k}[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot)$) 的“仿射化”是一个李双代数。与 Novikov 代数的情形（定理 1.1）一样，这种刻画一方面给出了构造无限维李双代数的一般方法；另一方面，也彰显了 Novikov 双代数的重要性。

（b）鉴于定理 1.1 中关于左 Novikov 代数和右 Novikov 代数互为 Koszul 对偶的拟运算子解释，[20, 31], 定理 2.23 表明，Novikov 双代数与二次右 Novikov 代数（而非右 Novikov 双代数）作为 dioperad 或 properad 互为拟运算子 Koszul 对偶，尽管 [17, 39] 中的一般结果并不适用于这种情形。将定理 2.23 调整为适用于这类结果，应能提供一种构造李双代数的一般方法。

在第 3 节中，我们将给出一种应用定理 2.23 构造李双代数的一般方法。现在，我们先介绍一个简单的例子。

例 2.25. 设 $(\mathrm{A},\circ,\Delta_A)$ 是例 2.6 中给出的 Novikov 双代数，$(\mathrm{B},\diamond,(\cdot,\cdot))=(\mathrm{k}[\mathrm{t},\mathrm{t}^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是例 2.19 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。由定理 2.23，存在一个完备李双代数 $(\mathrm{L}=\mathrm{A}\otimes\mathrm{B},[\cdot,\cdot],\delta)$，其定义为

$$[e_1t^i,e_1t^j]=(i-j)e_1t^{i+j-1},\quad [e_1t^i,e_2t^j]=-je_2t^{i+j-1},\quad [e_2t^i,e_2t^j]=0\quad \text{for all } i,j\in\mathbb{Z},$$
$$\delta(e_1t^j)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda(j+2i+2)e_2t^{-i-2}\otimes e_2t^{j+i},\quad \delta(e_2t^j)=0\quad \text{for all } j\in\mathbb{Z}.$$

3. Novikov 双代数与诺维科夫杨-巴克斯特方程的刻画

在第 3.1 节中，我们利用 Novikov 代数的匹配对和 Manin 三元组给出 Novikov 双代数的两个等价条件。随后，我们在第 3.2 节中，基于 Novikov 代数的 Manin 三元组与二次右 Novikov 代数的耦合，自然构造出一个李代数的 Manin 三元组。第 3.3 节聚焦于一类特殊的 Novikov 双代数，它们类似于余边界李双代数，由此引入诺维科夫杨-巴克斯特方程（NYBE）。Novikov 代数中的 NYBE 斜对称解可以给出一个 Novikov 双代数。为阐释和构造 NYBE 的解，我们还引入 Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子、前 Novikov 代数和拟 Frobenius Novikov 代数等概念。

在本节中，我们假设所有代数、表示和向量空间均为有限维，尽管有些结果在无限维情形下仍然成立。

3.1. Novikov 双代数的刻画。

我们首先介绍 Novikov 代数表示的一些背景知识，这些知识是研究 Novikov 代数匹配对所必需的。

定义 3.1. [35] 一个 表示 是 Novikov 代数 $(A,\circ)$ 的一个三元组 (V,l_A,r_A)，其中V 是一个向量空间，且 $l_A, r_A : A \to \mathrm{End_k}(V)$ 是满足下列条件的线性映射

$$\begin{aligned} l_A(a\circ b-b\circ a)v &= l_A(a)l_A(b)v-l_A(b)l_A(a)v,\\ l_A(a)r_A(b)v-r_A(b)l_A(a)v &= r_A(a\circ b)v-r_A(b)r_A(a)v,\\ l_A(a\circ b)v &= r_A(b)l_A(a)v,\\ r_A(a)r_A(b)v &= r_A(b)r_A(a)v \quad \text{for all } a,b\in A, v\in V. \end{aligned}$$

注意，$(\mathrm{A}, \mathrm{L}_A, \mathrm{R}_A)$ 是 $(\mathrm{A}, \circ)$ 的一个表示，称为 $(\mathrm{A},\circ)$ 的伴随表示。

命题 3.2. 设 $(\mathrm{A},\circ)$ 是一个 Novikov 代数。设 V 是一个向量空间，且 $\mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A : \mathrm{A} \to \mathrm{End_k}(\mathrm{V})$ 是线性映射。在 $\mathrm{A}\oplus\mathrm{V}$ 上定义一个二元运算 $\bullet$：

$$(a+u)\bullet(b+v) := a\circ b + l_A(a)v + r_A(b)u \quad \textit{for all } a,b\in A, u,v\in V.$$

当且仅当 $(\mathrm{A}\oplus\mathrm{V},\bullet)$ 是一个 Novikov 代数时，$(\mathrm{V}, \mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A)$ 才是 $(\mathrm{A},\circ)$ 的一个表示。这个 Novikov 代数称为 A 与 V 的半直积，记作 $\mathrm{A}\ltimes_{l_A,\ r_A}\mathrm{V}$，或简记为 $\mathrm{A}\ltimes\mathrm{V}$。

对于 Novikov 代数的匹配对，当 V 被视为一个采用零乘法的 Novikov 代数时，这一结果将作为命题3.6 的特例得出。

设 $(\mathrm{A},\circ)$ 为一个 Novikov 代数，V 为一个向量空间。对于线性映射 $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{End_k}(\mathrm{V})$，定义线性映射 $\varphi^* : \mathrm{A} \to \mathrm{End_k}(\mathrm{V}^*)$ 如下：

$$\langle \varphi^*(a)f, v\rangle = -\langle f, \varphi(a)v\rangle \ \text{ for all } a\in A, f\in V^*, v\in V,$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 V 与 V^* 之间的通常配对。

命题 3.3. 设 $(\mathrm{A},\circ)$ 为一个 Novikov 代数，且 $(\mathrm{V}, \mathrm{l}_A, \mathrm{r}_A)$ 是 $(\mathrm{A},\circ)$ 的一个表示。那么 $(\mathrm{V}^*, \mathrm{l}_A^* + \mathrm{r}_A^*, -\mathrm{r}_A^*)$ 是 $(\mathrm{A},\circ)$ 的一个表示。

证明。直接验证即可。 □

例 3.4. Novikov 代数 $(\mathrm{A},\circ)$ 的伴随表示给出表示 $(\mathrm{A}^*, \mathrm{L}_A^* + \mathrm{R}_A^*, -\mathrm{R}_A^*)$。

注 3.5。 设（A， $\cdot$）是一个带有线性映射 L_A 和 R_A 的代数结构，它们给出了 A 在自身上的自然表示。正如 Kupershmidt [28] 关于代数结构的综合性著作中所引入的核心概念，一个代数结构称为 适当的，如果对于每一个这样的代数（A， $\cdot$），在线性对偶 A^* 上存在一个表示，并且该表示可以由 L_A^* 和 R_A^*的非零线性组合给出。这一性质对于代数结构拥有一种可与李双代数和无穷小结合双代数相媲美的双代数理论至关重要。例如，人们曾错误地认为 [28][1] Novikov 代数并不适当，这将成为 Novikov 代数建立双代数理论的障碍。命题3.3 纠正了这一认识。换言之，Novikov 代数事实上是适当的。因此，可以建立一种合理的双代数理论，正如本文所阐述的那样。

我们回顾 Novikov 代数的匹配对。

[1]参见第 19 节，他在那里写道：“重要的是，Novikov 代数并不是真正的代数。”

命题 3.6。 [24] 设 $(A,\circ)$ 和 $(B,\cdot)$ 是 Novikov 代数。假设 (B,l_A,r_A) 是 $(A,\circ)$ 的一个表示，(A,l_B,r_B) 是 $(B,\cdot)$ 的一个表示，且满足以下条件。

$l_B(x)(a\circ b) = r_B(x)(a\circ b) + l_B(x)(a\circ b) + r_B(x)(a\circ b) + l_B(x)(a\circ b) + r_B(x)(a\circ b) + l_B(x)(a\circ b) + r_B(x)(a\circ b)$, (26) $r_A(x)(a\circ b - b\circ a) = r_A(l_A(b)x)a + r_A(l_A(a)x)b + a\circ(r_A(x)b) - b\circ(r_B(x)a)$, (27) $l_A(r_B(x)a)x)\cdot y + r_A(r_B(y)a)x + x\cdot(l_A(a)y)$, (28) $r_A(a)(x\cdot y - y\cdot x) = r_A(l_B(y)a)x - r_A(l_B(x)a)y + x\cdot(r_A(a)y)$ $(x)b)\circ a + l_B(r_A(b)x)a$, (30) $(r_B(x)a)\circ b + l_B(l_A(a)x)b = r_B(x)(a\circ b)$, (31) $l_A(r_B(x)a)y + (l_A(a)x)\cdot y = l_A$ $y = r_A(a)(x\cdot y)$，对所有 $a,b\in A$、$x,y\in B$ 成立。(33)

于是，在 A 和 B 的底层向量空间的直和 $A\oplus B$ 上定义如下 Novikov 代数结构：

$$(a+x)\bullet(b+y) := (a\circ b + l_B(x)b + r_B(y)a) + (x\cdot y + l_A(a)y + r_A(b)x) \tag{34}$$

对所有 $a, b\in A$, $x, y\in B$。我们称由此得到的六元组 $(A, B, l_A, r_A, l_B, r_B)$ 为 Novikov 代数的匹配对。反过来，任何可分解为两个 Novikov子代数的线性直和的 Novikov 代数，都可由一对 Novikov 代数的匹配对得到。

类似于定义 2.16，我们给出以下概念。

定义 3.7. 设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数。A 上的双线性型 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 称为不变的，如果它满足

$$\mathcal{B}(a\circ b, c) = -\mathcal{B}(b, a\star c) \quad \text{for all } a,b,c\in A. \tag{35}$$

二次 Novikov 代数记为 $(A,\circ,\mathcal{B}(\cdot,\cdot))$，它是一个 Novikov 代数 $(A,\circ)$，并配有一个非退化对称不变双线性型 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$。

注 3.8. (a) 容易看出，如果 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是一个有限维二次右 Novikov 代数，那么定义乘法 $a\circ b := b\diamond a$（对所有 $a, b\in B$），则三元组 $(B,\circ,(\cdot,\cdot))$ 是一个二次 Novikov 代数。(b) 由式 (35) 定义的 Novikov 代数上的双线性型的不变条件不同于 [9, 21, 29, 41, 42] 中研究的条件。

受李代数的 Manin 三元组 [13]，启发，我们给出如下定义。

定义 3.9. Novikov 代数的一个（标准）Manin 三元组是一个 Novikov 代数三元组 $(A = A_1\oplus A_1^*, (A_1,\circ), (A_1^*,\cdot))$，满足

(a) 作为向量空间，A 是 A_1 和 A_1^* 的直和；(b) $(A_1,\circ)$ 和 $(A_1^*,\cdot)$ 是 A 的 Novikov子代数；(c) $A = A_1\oplus A_1^*$ 上定义的双线性型为

$$\mathcal{B}(a+f, b+g) := \langle f, b\rangle + \langle g, a\rangle \quad \text{for all } a,\ b\in A_1,\ f,\ g\in A_1^*, \tag{36}$$

是不变的。

显然，由式（ $\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$ 定义的双线性型是对称且非退化的。因此（A，$\circ$，$\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$）确实是一个二次 Novikov 代数。Novikov 代数的 Manin 三元组等价于某些 Novikov 代数的匹配对。

定理 3.10. 设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数。假设其线性对偶空间 A^* 上也具有 Novikov 代数结构 $\cdot$。那么，Novikov 代数的 Manin 三元组 $(A\oplus A^*,(A,\circ),(A^*,\cdot))$ 存在，当且仅当 $(A,A^*,L^*_{A,\star},-R^*_A,L^*_{A^*,\star},-R^*_{A^*})$ 是 Novikov 代数的匹配对，其中 $L^*_{A,\star}:=L^*_A+R^*_A$ 和 $L^*_{A^*,\star}:=L^*_{A^*}+R^*_{A^*}$。

证明. 证明直接沿用结合代数的 [4, 定理 2.2。1] 。 □

定理 3.11. 设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，并设 $\Delta: A\to A\otimes A$ 是一个线性映射。假设 Δ 的对偶也在 A^* 上给出了一个 Novikov 代数结构 $\cdot$。那么，$(A,A^*,L^*_{A,\star},-R^*_A,L^*_{A^*,\star},-R^*_{A^*})$ 是 Novikov 代数的一个匹配对，当且仅当 $(A,\circ,\Delta)$ 是一个 Novikov 双代数。

证明. 由于 Δ 的对偶在 A^* 上给出了一个 Novikov 代数结构 $\cdot$，因此 (A,Δ) 是一个 Novikov 余代数。设 $\{e_1,、\ \cdots、\ e_n\}$ 是 A 的一组基，$\{e^*_1、\ \cdots、\ e^*_n\}$ 是其对偶基。记

$$e_\alpha\circ e_\beta=\sum_{\gamma=1}^{n}c^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma,\quad \Delta(e_\gamma)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}d^\gamma_{\alpha\beta}e_\alpha\otimes e_\beta.$$

于是 $e^*_\alpha\cdot e^*_\beta=P^n_{\overline{\gamma}1}d^\gamma_\alpha e^{}_{\beta\ \gamma}$ 个 d

$$R^*_A(e_\alpha)e^*_\beta=-\sum_{\gamma=1}^{n}c^\beta_{\gamma\alpha}e^*_\gamma,\ L^*_A(e_\alpha)e^*_\beta=-\sum_{\gamma=1}^{n}c^\beta_{\alpha\gamma}e^*_\gamma,R^*_{A^*}(e^*_\alpha)e_\beta=-\sum_{\gamma=1}^{n}d^\beta_{\gamma\alpha}e_\gamma,\ L^*_{A^*}(e^*_\alpha)e_\beta=-\sum_{\gamma=1}^{n}d^\beta_{\alpha\gamma}e_\gamma.$$

因此，$L^*_{A,}\ \star(e_\alpha)e^*_\beta=-P^n_{\gamma=1}(c^\beta_{\gamma\alpha}+c^{\alpha\beta}_{\gamma})e^*_\gamma$ 且 $L^*_{A^*,}\ \star(e^*_\alpha)e_\beta=-P^n_{\gamma=1}(d_{\gamma\alpha}\ \sharp\ d_{\alpha\gamma})e_\gamma$。

在式 (26)–(33) 中取 $l_A=L^*_{A,\star},\ r_A=-R^*_A,\ l_B=L^*_{A^*,\star},\ r_B=-R^*_{A^*}$。在式 (26)、(27)、(30) 和 (31) 中令 $a=e_\alpha$，$b=e_\beta,\ x=e^*_\gamma$，并比较这些等式中 e_ℓ 的系数，可得

$$\sum_{\nu=1}^{n}c^\nu_{\alpha\beta}(d^\nu_{\ell\gamma}+d^\nu_{\gamma\ell})=\sum_{\nu=1}^{n}((2c^\gamma_{\nu\alpha}+c^\gamma_{\alpha\nu})(d^\beta_{\ell\nu}+d^\beta_{\nu\ell})+(2d^\alpha_{\nu\gamma}+d^\alpha_{\gamma\nu})c^\ell_{\nu\beta}-c^\gamma_{\nu\beta}d^\alpha_{\ell\nu}+(d^\beta_{\nu\gamma}+d^\beta_{\gamma\nu})c^\ell_{\alpha\nu}),\tag{37}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(c^\nu_{\alpha\beta}-c^\nu_{\beta\alpha})d^\nu_{\ell\gamma}=\sum_{\nu=1}^{n}((c^\gamma_{\nu\alpha}+c^\gamma_{\alpha\nu})d^\beta_{\ell\nu}-(c^\gamma_{\nu\beta}+c^\gamma_{\beta\nu})d^\alpha_{\ell\nu}+d^\beta_{\nu\gamma}c^\ell_{\alpha\nu}-d^\alpha_{\nu\gamma}c^\ell_{\beta\nu}),\tag{38}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}((d^\alpha_{\nu\gamma}+d^\alpha_{\gamma\nu})c^\ell_{\nu\beta}+(d^\beta_{\ell\nu}+d^\beta_{\nu\ell})c^\gamma_{\nu\alpha})=\sum_{\nu=1}^{n}((d^\beta_{\nu\gamma}+d^\beta_{\gamma\nu})c^\ell_{\nu\alpha}+(d^\alpha_{\ell\nu}+d^\alpha_{\nu\ell})c^\gamma_{\nu\beta}),\tag{39}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(d^\alpha_{\nu\gamma}c^\ell_{\nu\beta}+(c^\gamma_{\nu\alpha}+c^\gamma_{\alpha\nu})(d^\beta_{\nu\ell}+d^\beta_{\ell\nu}))=\sum_{\nu=1}^{n}c^\nu_{\alpha\beta}d^\nu_{\ell\gamma}.\tag{40}$$

令 $x=e^*_\alpha,y=e^*_\beta$ 和 $a=e_\gamma$ 在方程 (28)、(29)、(32) 和 (33) 中，并比较系数ffi e^*_ℓ，得到

$$\sum_{\nu=1}^{n}d^\nu_{\alpha\beta}(c^\nu_{\ell\gamma}+c^\nu_{\gamma\ell})=\sum_{\nu=1}^{n}((2d^\gamma_{\nu\alpha}+d^\gamma_{\alpha\nu})(c^\beta_{\ell\nu}+c^\beta_{\nu\ell})+(2c^\alpha_{\nu\beta}+c^\alpha_{\gamma\nu})d^\ell_{\nu\beta}-d^\gamma_{\nu\beta}c^\alpha_{\ell\nu}+(c^\beta_{\nu\gamma}+c^\beta_{\gamma\nu})d^\ell_{\alpha\nu}),\tag{41}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(d^\nu_{\alpha\beta}-d^\nu_{\beta\alpha})c^\nu_{\ell\gamma}=\sum_{\nu=1}^{n}((d^\gamma_{\nu\alpha}+d^\gamma_{\alpha\nu})c^\beta_{\ell\nu}-(d^\gamma_{\nu\beta}+d^\gamma_{\beta\nu})c^\alpha_{\ell\nu}+c^\beta_{\nu\gamma}d^\ell_{\alpha\nu}-c^\alpha_{\nu\gamma}d^\ell_{\beta\nu}),\tag{42}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}((c^\alpha_{\nu\gamma}+c^\alpha_{\gamma\nu})d^\ell_{\nu\beta}+(c^\beta_{\ell\nu}+c^\beta_{\nu\ell})d^\gamma_{\nu\alpha})=\sum_{\nu=1}^{n}((c^\beta_{\nu\gamma}+c^\beta_{\gamma\nu})d^\ell_{\nu\alpha}+(c^\alpha_{\ell\nu}+c^\alpha_{\nu\ell})d^\gamma_{\nu\beta}),\tag{43}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(c^\alpha_{\nu\gamma}d^\ell_{\nu\beta}+(d^\gamma_{\nu\alpha}+d^\gamma_{\alpha\nu})(c^\beta_{\nu\ell}+c^\beta_{\ell\nu}))=\sum_{\nu=1}^{n}d^\nu_{\alpha\beta}c^\nu_{\ell\gamma}.\tag{44}$$

进一步，令 $a = e_\alpha$ 和 $b = e_\beta$ 在方程 (8)-(10) 中，并比较系数ffi $e_\ell \otimes e_\gamma$，得到

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\beta\alpha}^{\nu} d_{\ell\gamma}^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} (d_{\nu\gamma}^{\beta} c_{\nu\alpha}^{\ell} + (d_{\ell\nu}^{\alpha} + d_{\nu\ell}^{\alpha})(c_{\beta\nu}^{\gamma} + c_{\nu\beta}^{\gamma})), \tag{45}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (d_{\nu\ell}^{\beta}(c_{\alpha\nu}^{\gamma} + c_{\nu\alpha}^{\gamma}) - d_{\nu\gamma}^{\beta}(c_{\alpha\nu}^{\ell} + c_{\nu\alpha}^{\ell})) = \sum_{\nu=1}^{n} (d_{\nu\ell}^{\alpha}(c_{\beta\nu}^{\gamma} + c_{\nu\beta}^{\gamma}) - d_{\nu\gamma}^{\alpha}(c_{\beta\nu}^{\ell} + c_{\nu\beta}^{\ell})), \tag{46}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} ((d_{\nu\ell}^{\beta} + d_{\ell\nu}^{\beta}) c_{\nu\alpha}^{\gamma} - (d_{\gamma\nu}^{\beta} + d_{\nu\gamma}^{\beta}) c_{\nu\alpha}^{\ell}) = \sum_{\nu=1}^{n} ((d_{\nu\ell}^{\alpha} + d_{\ell\nu}^{\alpha}) c_{\nu\beta}^{\gamma} - (d_{\gamma\nu}^{\alpha} + d_{\nu\gamma}^{\alpha}) c_{\nu\beta}^{\ell})). \tag{47}$$

现在令 $\alpha = \beta$，$\beta = \alpha$代入式（45），可知式（45）等价于式（40）。此外，在式（45）中令 $\beta = 1$，$\alpha = \gamma$，$1 = \alpha$ 和 $\gamma = \beta$，可得式（45）等价于式（44）。类似地，式（46）（分别为式（47））等价于式（43）（分别为式（39）。

由式（45），可得

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\alpha\beta}^{\nu}(d_{\ell\gamma}^{\nu} + d_{\gamma\ell}^{\nu}) = \sum_{\nu=1}^{n} (d_{\nu\gamma}^{\alpha} c_{\nu\beta}^{\ell} + (d_{\ell\nu}^{\beta} + d_{\nu\ell}^{\beta})(c_{\alpha\nu}^{\gamma} + c_{\nu\alpha}^{\gamma})) + \sum_{\nu=1}^{n} (d_{\nu\ell}^{\alpha} c_{\nu\beta}^{\gamma} + (d_{\gamma\nu}^{\beta} + d_{\nu\gamma}^{\beta})(c_{\alpha\nu}^{\ell} + c_{\nu\alpha}^{\ell})). \tag{48}$$

将式（48）和（47）两边相加并整理各项，可得式（37）。因此，式（45）和（47）推出（37）。类似地，式（45）和（46）推出式（38）；式（45）和（46）推出式（41）；而式（45）和（47）推出式（42）。证明完毕。□

注 3.12. 根据定理 3.11 的证明，我们可以看出，对于 Novikov 代数的匹配对 $(A, A^*, L_{A,\star}^*, -R_A^*, L_{A^*,\star}^*, -R_{A^*}^*)$，以下蕴含关系成立。

$$\text{Eq. (31)} \Longleftrightarrow \text{Eq. (33)},$$
$$\text{Eq. (30) and Eq. (31)} \Longrightarrow \text{Eq. (26)}, \quad \text{Eq. (30) and Eq. (31)} \Longrightarrow \text{Eq. (29)},$$
$$\text{Eq. (31) and Eq. (32)} \Longrightarrow \text{Eq. (27)}, \quad \text{Eq. (31) and Eq. (32)} \Longrightarrow \text{Eq. (28)}.$$

定理 3.10 和 3.11 给出了 Novikov 双代数的以下刻画。

推论 3.13. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，(A, Δ) 是一个 Novikov 余代数。令 $\cdot_{de}$ 表示由 Δ 在对偶空间 A^* 上诱导的乘法。则以下条件等价。

(a) 存在一个 Novikov 代数的 Manin 三元组 $(A \oplus A^*, (A, \circ), (A^*, \cdot))$；(b) $(A, A^*, L_{A,\star}^*, -R_A^*, L_{A^*,\star}^*, -R_{A^*}^*)$ 是 Novikov 代数的匹配对；(c) $(A, \circ, \Delta)$ 是一个 Novikov 双代数。

3.2. Novikov 代数的 Manin 三元组与李代数的 Manin 三元组。回顾一下，李代数 L 上的双线性型 $(\cdot,\cdot)_L$ 称为不变的，如果

$$([a, b], c)_L = (a, [b, c])_L \quad \text{for all } a, b, c \in L. \tag{49}$$

那么，经过常规验证可得以下结论。

命题 3.14. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，$(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次右 Novikov 代数。设 $L = A \otimes B$ 为诱导李代数。假设 $(A, \circ, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是二次的。在 L 上定义双线性型 $(\cdot,\cdot)_L$ 如下：

$$(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2)_L = \mathcal{B}(a_1, a_2)(b_1, b_2) \quad \textit{for all } a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

那么 $(\cdot,\cdot)_L$ 是李代数 L 上的非退化不变对称双线性型。

定义 3.15。 [13] 设 L、 L_1 和 L_2 为李代数。若存在一个非退化不变对称双线性型 $(\cdot,\ \cdot)_L$ 定义在 L 上，使得

- L_1 和 L_2 是 L 的李子代数，且 $L = L_1 \oplus L_2$ 是向量空间的直和，
- L_1 和 L_2 关于 $(\cdot,\cdot)_L$是各向同性的，即 $(L_i, L_i)_L = 0$，其中 $i = 1, 2$,

则称三元组 (L, L_1, L_2) 为李代数的 Manin 三元组。若存在李代数同构 $\varphi : L \to L'$，使得 $\varphi(L_i) = L'_i$，其中 $i = 1, 2$，且对于所有 $a, b \in L$，均有 $(\varphi(a), \varphi(b))_{L'} = (a, b)_L$，则称两个 Manin 三元组 (L, L_1, L_2) 和 (L', L'_1, L'_2) 同构。

因此，命题 3.14 的一个直接推论是

命题 3.16. 设 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次右 Novikov 代数。设 $(A, \circ)$ 和 $(A^*, \bullet)$ 是 Novikov 代数，并设 $A \ltimes B$ 和 $A^* \ltimes B$ 是诱导李代数。若 $(A \oplus A^*, A, A^*)$ 是 Novikov 代数的 Manin 三元组，则 $(L = (A \oplus A^*) \ltimes B, A \ltimes B, A^* \ltimes B)$ 是与双线性型相关联的李代数的 Manin 三元组

$$(a_1 \otimes b_1 + f \otimes b_2, a_2 \otimes b_3 + g \otimes b_4)_L = \langle f, a_2\rangle(b_2, b_3) + \langle g, a_1\rangle(b_1, b_4), \tag{50}$$

对所有 $a_1, a_2 \in A$、$f, g \in A^*$ 以及 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in B$ 均成立。

回顾李双代数的经典 Manin 三元组刻画。

命题 3.17. [13] 设有限维李代数 $(L, [\cdot,\cdot]_L)$ 和李余代数 (L, δ) 满足：线性对偶 $\delta^* : L^* \otimes L^* \to L^*$ 定义了李代数 $(L^*, [\cdot,\cdot]_{L^*})$。三元组 $(L, [\cdot,\cdot], \delta)$ 是李双代数，当且仅当 $(L \oplus L^*, L, L^*)$ 是与公式（36）定义的双线性型相对应的李代数的 Manin 三元组。

设 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次右 Novikov 代数。通过由 $\langle\varphi(a), b\rangle = (a, b)$ 对所有 $a, b \in B$ 给出的线性同构 $\varphi : B \to B^*$，经由结构传递可得到一个右 Novikov 代数 $(B^*, \diamond')$:

$$f \diamond' g = \varphi(\varphi^{-1}(f) \diamond \varphi^{-1}(g)) \quad \text{for all } f, g \in B^*. \tag{51}$$

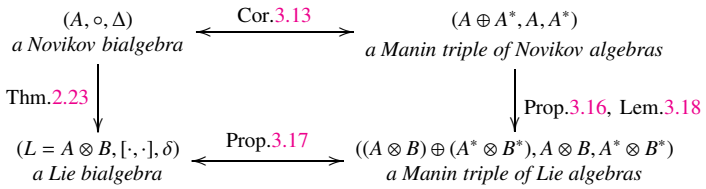
设 $(A^*, \bullet)$ 是一个 Novikov 代数。显然可以证明，由 $(A^*, \bullet)$ 和 $(B, \diamond)$ 诱导的李代数 $A^* \ltimes B$ 同构于由 $(A^*, \bullet)$ 和 $(B^*, \diamond')$ 诱导的李代数 $A^* \ltimes B^*$。因此，以下结论立即成立。

引理 3.18. 假设命题 3.16 中的条件成立，并设李代数 $L^* = A^* \ltimes B^*$由 $(A^*, \bullet)$ 和 $(B^*, \diamond')$ 诱导得到。那么，$(L \oplus L^* = (A \ltimes B) \oplus (A^* \ltimes B^*), L = A \ltimes B, L^* = A^* \ltimes B^*)$ 是一个与由公式（36）定义的双线性型相关联的李代数的 Manin 三元组。此外，这个 Manin 三元组同构于与由式 (50) 定义的双线性型相关联的 Manin 三元组 $((A \oplus A^*) \ltimes B, A \ltimes B, A^* \ltimes B)$。

注 3.19. 上述结论说明了为什么在定理 2.23 中要求 B 是二次右 Novikov 代数，也就是说，这一条件保证 $((A \oplus A^*) \ltimes B, A \ltimes B, A^* \ltimes B)$ 与 $(L \oplus L^* = (A \ltimes B) \oplus (A^* \ltimes B^*), L = A \ltimes B, L^* = A^* \ltimes B^*)$ 作为李代数的 Manin 三元组是同构的。

然后可以直接验证图（3）右侧方框的交换性:

命题 3.20. 假设满足定理 2.23 中的条件，且 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次右 Novikov 代数。那么，由此得到的李双代数 $(L, [\cdot,\cdot], \delta)$ 与引理 3.18 中给出的李代数 Manin 三元组 $((A \otimes B) \oplus (A^* \otimes B^*), A \otimes B, A^* \otimes B^*)$ 所得到的李双代数相同，从而得到交换图：



3.3. 诺维科夫杨-巴克斯特方程、Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子与前 Novikov 代数。设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$。下文中，我们考虑一类特殊的 Novikov 双代数 $(A, \circ, \Delta_r)$，其中 $\Delta_r : A \to A \otimes A$ 定义为

$$\Delta_r(a) := (L_A(a) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(a))r \quad \text{for all } a \in A. \tag{52}$$

这与余边界李双代数 [13] 类似。

设 $r = \sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha \in A \otimes A$，且 $r' = \sum_\beta x'_\beta \otimes y'_\beta \in A \otimes A$。令

$$r_{12} \circ r'_{13} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \circ x'_\beta \otimes y_\alpha \otimes y'_\beta, \quad r_{12} \circ r'_{23} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha \circ x'_\beta \otimes y'_\beta, \quad r_{13} \circ r'_{23} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes x'_\beta \otimes y_\alpha \circ y'_\beta,$$

$$r_{13} \circ r'_{12} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \circ x'_\beta \otimes y'_\beta \otimes y_\alpha, \quad r_{23} \circ r'_{13} := \sum_{\alpha,\beta} x'_\beta \otimes x_\alpha \otimes y_\alpha \circ y'_\beta,$$

$$r_{12} \star r'_{23} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha \star x'_\beta \otimes y'_\beta, \quad r_{13} \star r'_{23} := \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes x'_\beta \otimes y_\alpha \star y'_\beta.$$

引理 3.21. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$。定义 $\Delta_r : A \to A \otimes A$，由式 (52)。(a) Δ_r 满足式 (8)，当且仅当

$$(\mathrm{id} \otimes (L_A(b \circ a) + L_A(a)L_A(b)) + L_{A,\star}(a) \otimes L_{A,\star}(b))(r + \tau r) = 0 \quad \textit{for all } a, b \in A. \tag{53}$$

(b) Δ_r 满足方程 (9) 当且仅当

$$(L_{A,\star}(a) \otimes L_{A,\star}(b) - L_{A,\star}(b) \otimes L_{A,\star}(a))(r + \tau r) = 0 \quad \textit{for all } a, b \in A. \tag{54}$$

(c) Δ_r 满足方程 (10) 当且仅当

$$\begin{aligned} &\big(- L_{A,\star}(b) \otimes R_A(a) + L_{A,\star}(a) \otimes R_A(b) + R_A(a) \otimes L_A(b) - R_A(b) \otimes L_A(a) + \mathrm{id} \otimes (L_A(a)L_A(b) \\ &- L_A(b)L_A(a)) - (L_A(a)L_A(b) - L_A(b)L_A(a)) \otimes \mathrm{id}\big)(r + \tau r) = 0 \ \textit{for all } a, b \in A. \end{aligned} \tag{55}$$

(d) Δ_r 满足方程 (6) 当且仅当

$$\begin{aligned} &\big(L_A(a) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes L_A(a) \otimes \mathrm{id}\big)\big((\tau r)_{12} \circ r_{13} + r_{12} \circ r_{23} + r_{13} \star r_{23}\big) \\ &+\big((\mathrm{id} \otimes L_A(a) \otimes \mathrm{id})(r + \tau r)_{12}\big) \circ r_{23} - \big((L_A(a) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})r_{13}\big) \circ (r + \tau r)_{12} + \big(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(a)\big) \\ &\big(r_{23} \circ r_{13} - r_{13} \circ r_{23} - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} - \tau \otimes \mathrm{id})(r_{13} \circ r_{12} + r_{12} \star r_{23})\big) = 0 \quad \textit{for all } a \in A. \end{aligned} \tag{56}$$

(e) Δ_r 满足方程 (7) 当且仅当

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \tau)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(a))(r_{13} \circ (\tau r)_{23} - r_{12} \star r_{23} - r_{13} \circ r_{12}) = 0 \text{ 对所有 } a \in A。 \tag{57}$$

证明。令 $r = P_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha$，并设 $a、b \in A$。则

$$\Delta_r(a) = \sum_\alpha \Big((a \circ x_\alpha) \otimes y_\alpha + x_\alpha \otimes (a \star y_\alpha)\Big).$$

（a）。我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta_r(b \circ a) - (R_A(a) \otimes \mathrm{id})\Delta_r(b) - (\mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(b))(\Delta_r(a) + \tau\Delta_r(a)) \\
&= \sum_\alpha \Big((b \circ a) \circ x_\alpha \otimes y_\alpha + x_\alpha \otimes (b \circ a) \star y_\alpha - (b \circ x_\alpha) \circ a \otimes y_\alpha - x_\alpha \circ a \otimes b \star y_\alpha \\
&\qquad -a \circ x_\alpha \otimes b \star y_\alpha - x_\alpha \otimes (a \star y_\alpha) \star b - y_\alpha \otimes b \star (a \circ x_\alpha) - a \star y_\alpha \otimes b \star x_\alpha\Big) \\
&= \sum_\alpha \Big((b \circ a) \circ x_\alpha - (b \circ x_\alpha) \circ a) \otimes y_\alpha + x_\alpha \otimes ((b \circ a) \star y_\alpha - (a \star y_\alpha) \star b) \\
&\qquad -a \star x_\alpha \otimes b \star y_\alpha - y_\alpha \otimes b \star (a \circ x_\alpha) - a \star y_\alpha \otimes b \star x_\alpha\Big) \\
&= \sum_\alpha \Big(- x_\alpha \otimes ((b \circ a) \circ y_\alpha + a \circ (b \circ y_\alpha)) - x_\alpha \star a \otimes b \star y_\alpha \\
&\qquad -y_\alpha \otimes (a \circ (b \circ x_\alpha) + (b \circ a) \circ x_\alpha) - a \star y_\alpha \otimes b \star x_\alpha\Big) \\
&= -\Big(\mathrm{id} \otimes (L_A(b \circ a) + L_A(a)L_A(b))\Big)(r + \tau r) - \Big(L_{A,\star}(a) \otimes L_{A,\star}(b)\Big)(r + \tau r).
\end{aligned}$$

因此，式（8）成立当且仅当式（53）成立。

类似地可以验证条目（b）和（c）。

（d）。进一步有

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \Delta_r)\Delta_r(a) - (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta_r)\Delta_r(a) - (\Delta_r \otimes \mathrm{id})\Delta_r(a) + (\tau \otimes \mathrm{id})(\Delta_r \otimes \mathrm{id})\Delta_r(a) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \Big(a \circ x_\alpha \otimes y_\alpha \circ x_\beta \otimes y_\beta - y_\alpha \circ x_\beta \otimes a \circ x_\alpha \otimes y_\beta + a \circ x_\alpha \otimes x_\beta \otimes y_\alpha \star y_\beta \\
&\qquad + x_\alpha \otimes (a \star y_\alpha) \circ x_\beta \otimes y_\beta - x_\beta \otimes y_\beta \star (a \circ x_\alpha) \otimes y_\alpha + y_\beta \otimes (a \circ x_\alpha) \circ x_\beta \otimes y_\alpha \\
&\qquad + x_\alpha \otimes x_\beta \otimes (a \star y_\alpha) \star y_\beta - x_\beta \otimes x_\alpha \otimes (a \star y_\alpha) \star y_\beta - x_\beta \otimes a \circ x_\alpha \otimes y_\alpha \star y_\beta \\
&\qquad - ((a \star y_\alpha) \circ x_\beta \otimes x_\alpha \otimes y_\beta + (a \circ x_\alpha) \circ x_\beta \otimes y_\beta \otimes y_\alpha - (a \circ x_\alpha) \star y_\beta \otimes x_\beta \otimes y_\alpha) \\
&\qquad + (x_\alpha \star y_\beta \otimes x_\beta \otimes a \star y_\alpha - x_\alpha \circ x_\beta \otimes y_\beta \otimes a \star y_\alpha) \\
&\qquad - (x_\beta \otimes x_\alpha \star y_\beta \otimes a \star y_\alpha + y_\beta \otimes x_\alpha \circ x_\beta \otimes a \star y_\alpha)\Big) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \Big(a \circ x_\alpha \otimes y_\alpha \circ x_\beta \otimes y_\beta + a \circ x_\alpha \otimes x_\beta \otimes y_\alpha \star y_\beta + x_\alpha \otimes ((a \star y_\alpha) \circ x_\beta \\
&\qquad - (a \circ x_\beta) \star y_\alpha) \otimes y_\beta + x_\alpha \otimes x_\beta \otimes ((a \star y_\alpha) \star y_\beta - (a \star y_\beta) \star y_\alpha) \\
&\qquad - y_\alpha \circ x_\beta \otimes a \circ x_\alpha \otimes y_\beta - x_\beta \otimes a \circ x_\alpha \otimes y_\alpha \star y_\beta \\
&\qquad - ((a \star y_\alpha) \circ x_\beta - y_\alpha \star (a \circ x_\beta)) \otimes x_\alpha \otimes y_\beta \\
&\qquad - (a \circ x_\alpha) \circ x_\beta \otimes y_\beta \otimes y_\alpha - x_\alpha \circ x_\beta \otimes y_\beta \otimes a \star y_\alpha - x_\beta \otimes x_\alpha \star y_\beta \otimes a \star y_\alpha \\
&\qquad + y_\beta \otimes (a \circ x_\alpha) \circ x_\beta \otimes y_\alpha + y_\beta \otimes x_\alpha \circ x_\beta \otimes a \star y_\alpha + x_\alpha \star y_\beta \otimes x_\beta \otimes a \star y_\alpha\Big) \\
&= (L_A(a) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes L_A(a) \otimes \mathrm{id})((\tau r)_{12} \circ r_{13} + r_{12} \circ r_{23} + r_{13} \star r_{23}) + ((\mathrm{id} \otimes L_A \\
&(a) \otimes \mathrm{id})(r + \tau r)_{12}) \circ r_{23} - ((L_A(a) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})r_{13}) \circ (r + \tau r)_{12} + (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes L_{A,\star}(\\
&a))(r_{23} \circ r_{13} - r_{13} \circ r_{23} - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} - \tau \otimes \mathrm{id})(r_{13} \circ r_{12} + r_{12} \star r_{23})).
\end{aligned}$$

这里用到了以下恒等式。

$$(a \star y_\alpha) \circ x_\beta - (a \circ x_\beta) \star y_\alpha = (a \circ y_\alpha) \circ x_\beta - a \circ (y_\alpha \circ x_\beta),$$
$$(a \star y_\alpha) \star y_\beta - (a \star y_\beta) \star y_\alpha = a \star (y_\beta \circ y_\alpha) - a \star (y_\alpha \circ y_\beta).$$

因此，式（6）成立当且仅当式（56）成立。类似地可验证第（e）项。 □

由引理 3.21，我们得到以下结论。

定理 3.22. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$。定义 $\Delta_r : A \to A \otimes A$ 如式 (52)所示。则 $(A, \circ, \Delta_r)$ 是一个 Novikov 双代数，当且仅当式（53）-（57）成立。

于是我们有以下特殊情形。

推论 3.23. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$ 为斜对称。定义$\Delta_r : A \to A \otimes A$ 如式 (52)所示。则 $(A, \circ, \Delta_r)$ 是一个 Novikov 双代数，当且仅当下列等式成立。

$$(L_A(a) \otimes id \otimes id - id \otimes L_A(a) \otimes id)(id \otimes \tau)(r \diamond r) + (id \otimes id \otimes L_{A,\star}(a))(r \diamond r - (\tau \otimes id)(r \diamond r)) = 0, \quad (58)$$
$$(id \otimes id \otimes id - id \otimes \tau)(id \otimes id \otimes L_{A,\star}(a))(r \diamond r) = 0 \text{ 对所有 } a \in A, \quad (59)$$

其中

$$r \diamond r := r_{13} \circ r_{23} + r_{12} \star r_{23} + r_{13} \circ r_{12}.$$

特别地，若 $r \diamond r = 0$，则 $(A, \circ, \Delta_r)$ 是一个 Novikov 双代数。

证明。 由 r 的斜对称性可知，等式 (56) 成立当且仅当等式 (58) 成立，而等式 (57) 成立当且仅当等式 (59) 成立。因此结论成立。 □

推论 3.23 促使我们引入以下概念，它类似于李代数中的经典杨–巴克斯特方程（CYBE）[13]。

定义 3.24. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$。方程

$$r \diamond r := r_{13} \circ r_{23} + r_{12} \star r_{23} + r_{13} \circ r_{12} = 0$$

称为 A 中的诺维科夫杨-巴克斯特方程（NYBE）。

为了将 CYBE 的斜对称解与拟 Frobenius 李代数之间的密切关系（见 [11]）推广到 Novikov 代数的情形，我们也给出以下概念。

定义 3.25. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数。若 A 上存在斜对称非退化双线性形式 $\omega(\cdot, \cdot)$，满足

$$\omega(a \circ b, c) - \omega(a \star c, b) + \omega(c \circ b, a) = 0 \quad \text{for all } a, b, c \in A, \quad (60)$$

则称 $(A, \circ, \omega(\cdot, \cdot))$ 为拟 Frobenius Novikov 代数。

因此，我们得到以下关系。

命题 3.26. 设 $(A, \circ)$ 是一个带有非退化双线性型 $\omega(\cdot, \cdot)$ 的 Novikov 代数。设 $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 A 的一组基，$\{f_\alpha | \alpha \in I\}$ 是关于双线性型 $\omega(\cdot, \cdot)$ 的对偶基，并且 $r = P_{\alpha \in I} e_\alpha \otimes f_\alpha \in A \otimes A$。那么，r 是 A 中 NYBE 的斜对称解，当且仅当 $(A, \circ, \omega(\cdot, \cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数。

证明。证明沿用李代数的相同论证，如[11, 定理 3.1]中所述。□

对于有限维向量空间 A，同构

$$A \otimes A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^*, \mathbf{k}) \otimes A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^*, A)$$

将一个 $r \in A \otimes A$ 识别为从 A^* 到 A 的映射，记为 T^r。具体地，设 $r = \sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha$，则 $T^r: A^* \to A$，$T^r(f) = \sum_\alpha \langle f, x_\alpha \rangle y_\alpha$ 对所有 $f \in A^*$ 均成立。

经过直接验证可得如下性质。

定理 3.27. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $r \in A \otimes A$ 为斜对称元。则 r 是 $(A, \circ)$ 中 NYBE 的一个解，当且仅当 T^r 满足

$$T^r(f) \circ T^r(g) = T^r(L^*_{A,\star}(T^r(f))g) - T^r(R^*_A(T^r(g))f) \quad \textit{for all} \quad f, g \in A^*.$$

定理 3.27 表明，T^r 所起的作用类似于李代数中的经典 $\mathcal{O}$-算子，后者是 CYBE 的算子形式 [27]。这促使我们给出如下概念，作为 NYBE 的算子形式。

定义 3.28. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 (V, l_A, r_A) 是一个表示。若线性映射 $T: V \to A$ 满足以下条件，则称其为与 (V, l_A, r_A) 的表示相关联的 $(A, \circ)$ 的 $\mathcal{O}$-算子：

$$T(u) \circ T(v) = T(l_A(T(u))v) + T(r_A(T(v))u) \quad \text{for all} \quad u, v \in V.$$

因此，对于 Novikov 代数 $(A, \circ)$ 及斜对称元 $r \in A \otimes A$，定理 3.27表明，r 是 $(A, \circ)$ 中 NYBE 的一个解，当且仅当 T^r 是与表示 $(A^*, L^*_{A,\star}, -R^*_A)$ 相关联的 $(A, \circ)$ 的 $\mathcal{O}$-算子。

定理 3.29. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 (V, l_A, r_A) 是一个表示。设 $T: V \to A$ 是一个线性映射，通过 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, A) \cong A \otimes V^*$ 与 $r_T \in A \otimes V^* \subseteq (A \ltimes_{l^*_A + r^*_A, -r^*_A} V^*) \otimes (A \ltimes_{l^*_A + r^*_A, -r^*_A} V^*)$ 相对应。则命题 3.2 中 Novikov 代数 $(A \ltimes_{l^*_A + r^*_A, -r^*_A} V^*, \bullet)$ 内的 $r = r_T - \tau r_T$ 是 NYBE 的一个解，当且仅当 T 是与 (V, l_A, r_A) 的表示相关联的 $(A, \circ)$ 的 $\mathcal{O}$-算子。

证明。证明沿用[3, 节中关于李代数的相同论证。 □

定义 3.30. 前 Novikov 代数是一个三元组 $(A, \lhd, \rhd)$，其中 A 是一个向量空间，且 $\lhd$ 和 $\rhd$ 是满足下列条件的二元运算

$$x \rhd (y \rhd z) = (x \rhd y + x \lhd y) \rhd z + y \rhd (x \rhd z) - (y \rhd x + y \lhd x) \rhd z, \tag{61}$$

$$x \rhd (y \lhd z) = (x \rhd y) \lhd z + y \lhd (x \lhd z + x \rhd z) - (y \lhd x) \lhd z, \tag{62}$$

$$(x \lhd y + x \rhd y) \rhd z = (x \rhd z) \lhd y, \tag{63}$$

$$(x \lhd y) \lhd z = (x \lhd z) \lhd y \quad \text{for all } x, y, z \in A. \tag{64}$$

备注 3.31. 从[5]的意义上说，前诺维科夫代数的歌剧是诺维科夫代数的歌剧的后继。另一方面，如果 $\lhd$ 和 $\rhd$ 仅满足方程（61）和（62），那么 $(A, \lhd, \rhd)$ 称为 *L*-树状代数，见 [7]。

例 3.32. 回顾一下，[30] Zinbiel代数 $(A, \cdot)$ 是一个向量空间 A，配备二元运算 $\cdot: A \otimes A \to A$，并满足

$$a \cdot (b \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c + (a \cdot b) \cdot c \quad \text{for all } a, b, c \in A.$$

对于 Zinbiel代数 $(A, \cdot)$ 上的导子 D，定义二元运算 $\lhd$ 和 $\rhd: A \otimes A \to A$，使得对所有 $a, b \in A$，$a \lhd b := D(b) \cdot a$，$a \rhd b := a \cdot D(b)$。

直接验证可知，$(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数。

For 一个前 Novikov 代数 $(A, \lhd, \rhd)$，定义线性映射 $L_\rhd, R_\lhd : A \to \mathrm{End}_k(A)$：

$$L_\rhd(a)(b) := a \rhd b, \quad R_\lhd(a)(b) := b \lhd a \quad \text{for all } a, b \in A.$$

命题 3.33. 设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数。二元运算

$$\circ : A \otimes A \to A, \quad x \circ y := x \lhd y + x \rhd y \quad \textit{for all } x, y \in A, \tag{65}$$

定义了一个 Novikov 代数，称为 $(A, \lhd, \rhd)$ 的伴随 Novikov 代数。此外，$(A, L_\rhd, R_\lhd)$ 是 $(A, \circ)$ 的一个表示。反过来，设 A 是一个向量空间，带有二元运算 $\rhd$ 和 $\lhd$。如果由公式 (65) 定义的 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $(A, L_\rhd, R_\lhd)$ 是 $(A, \circ)$ 的一个表示，那么 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数。

证明。第一个结论由 [5] 得出，其余结论容易验证。 □

下面的结论阐明了前 Novikov 代数与其伴随 Novikov 代数的 $\mathcal{O}$-算子之间的关系。

命题 3.34。 (a) 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，(V, l_A, r_A) 是 $(A, \circ)$ 的一个表示，且 $T : V \to A$ 是关于 (V, l_A, r_A) 的一个 $\mathcal{O}$-算子。则 V 上存在如下定义的前 Novikov 代数结构：

$$u \rhd v = l_A(T(u))v, \quad u \lhd v = r_A(T(v))u \ \textit{ for all } u, v \in V.$$

(b) 设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数，且 $(A, \circ)$ 是其伴随 Novikov 代数。则恒等映射是关于表示 $(A, L_\rhd, R_\lhd)$ 的 $(A, \circ)$ 上的一个 $\mathcal{O}$-算子。

证明。 (a) 可由直接验证得到，而 (b) 可由命题3.33得到。 □

定理 3.35。设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数，且 $(A, \circ)$ 是其伴随 Novikov 代数。则

$$r := \sum_{\alpha=1}^{n} (e_\alpha \otimes e_\alpha^* - e_\alpha^* \otimes e_\alpha), \tag{66}$$

是 Novikov 代数 $A \ltimes_{L_\rhd^* + R_\lhd^*, -R_\lhd^*} A^*$中的 NYBE 斜对称解，其中 $\{e_1, \ldots\ldots, e_n\}$ 是 A 的线性基，$\{e_1^*, \ldots\ldots, e_n^*\}$ 是 A^* 的对偶基。此外，$A \ltimes_{L_\rhd^* + R_\lhd^*, -R_\lhd^*} A^*$ 配备双线性型 $\omega(\cdot, \cdot)$，定义如下：

$$\omega(a + f, b + g) = \langle g, a \rangle - \langle f, b \rangle \ \textit{ for all } a, b \in A, \ f, g \in A^*, \tag{67}$$

是拟 Frobenius Novikov 代数。

证明。由命题 3.34 (b)，恒等映射 $\mathrm{id} : A \to A$ 是与 $(A, L_\rhd, R_\lhd)$ 相关联的 $(A, \circ)$ 的 $\mathcal{O}$-算子。因此，第一个结论由命题 3.29 得出。此外，在向量空间 $A \oplus A^*$ 中，与 $\omega(\cdot, \cdot)$ 相关的基 $\{e1, \cdots, e_n, e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 的对偶基为 $\{e_1^*, \cdots, e_n^*, -e1, \cdots, -e_n\}$。因此，第二个结论由命题 3.26 得出。□

4。由 Novikov-Yang-Baxter 方程得到的无限维李双代数

本节中，我们利用 NYBE 的斜对称解构造 CYBE 的斜对称解。我们还给出了由拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数的构造，这些李代数对应于 NYBE 的一类斜对称解所关联的拟 Frobenius Novikov 代数。结合第 3.3 节中的结果，前 Novikov 代数可用于获得大量无限维李双代数和拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。最后给出了一个具体例子。

本节中，假设 $(A, \circ)$ 是一个有限维Novikov代数。

设 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数。假设 $r = \sum^{i、j、\alpha} a_{i\alpha} \otimes b_{j\alpha} \in L \widehat{\otimes} L$ 如公式（11）所示。记

$$[r_{12}, r_{13}] := \sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} [a_{i\alpha}, a_{k\beta}] \otimes b_{j\alpha} \otimes b_{l\beta},\ [r_{12}, r_{23}] := \sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} a_{i\alpha} \otimes [b_{j\alpha}, a_{k\beta}] \otimes b_{l\beta},$$

$$[r_{13}, r_{23}] := \sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} a_{i\alpha} \otimes a_{k\beta} \otimes [b_{j\alpha}, b_{l\beta}],$$

只要这些和有意义即可。注意，当 $r = \sum_{i\in\mathbb{Z}、\alpha} c_{i、\alpha} \otimes d_{-i-s、\alpha} \in Lb\otimes L$ 对某个固定的 $s \in \mathbb{Z}$ 成立时，这些和是有意义的，而这正是我们接下来所关注的情形。

如果 $r \in L\ b\otimes L$ 是斜对称的，并且满足经典杨–巴克斯特方程（CYBE）

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$$

作为一个 $L\ b\otimes L\ b\otimes L$ 中的元素，那么称 r 为 L 中 CYBE 的完备解。

命题 4.1. 若 $r \in L\ b\otimes L$ 是 L 中 CYBE 的斜对称完备解，则对于如下定义的线性映射 $\delta : L \to L\ b\otimes L$

$$\delta(x) := (\mathrm{ad}_x \widehat{\otimes} \mathrm{id} + \mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{ad}_x) r \ \ for\ all\ x \in L, \tag{68}$$

三元组 $(L, [\cdot,\cdot], \delta)$ 是一个完备李双代数。

证明. 当 $r \in L \otimes L$ 是 CYBE [13] 的斜对称解时，结论成立。同样的论证也适用于完备情形。□

我们给出 NYBE 的解与 CYBE 的解之间的如下关系。

命题 4.2. 设 $(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，且 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。令 $L = A \otimes B$ 为诱导李代数。设 $r = \sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha \in A \otimes A$ 是 A 中 NYBE 的斜对称解。则对于由 B 的齐次元素组成的基 $\{e_p\}_{p\in\Pi}$ 及其关于双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 的齐次对偶基 $\{f_p\}_{p\in\Pi}$，张量元素

$$r_L := \sum_{p\in\Pi} \sum_{\alpha} (x_\alpha \otimes e_p) \otimes (y_\alpha \otimes f_p) \in L \widehat{\otimes} L \tag{69}$$

是 L 中 CYBE 的斜对称完备解。此外，如果二次的 $\mathbb{Z}$- 分次右 Novikov 代数为 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot)) = (\mathbf{k}[t, t^{-1}], \diamond, (\cdot,\cdot))$ 来自例 *2.19*，则

$$r_L := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\alpha} x_\alpha t^i \otimes y_\alpha t^{-i-1} \in L \widehat{\otimes} L \tag{70}$$

当且仅当 r 是 A 中 NYBE 的斜对称解时，r 是 L 中 CYBE 的斜对称完备解。

如果 B 是有限维右诺维科夫代数，则式（69）是有限和。

证明。 采用式（17）中的记号，我们有

$$\Big(e_q \otimes e_s, \sum_{p\in\Pi} e_p \otimes f_p\Big) = \sum_{p\in\Pi} (e_q, e_p)(e_s, f_p) = (e_q, e_s).$$

由于 B 上的 $(\cdot,\cdot)$ 是对称且非退化的，我们得到 $\sum_{p\in\Pi} e_p \otimes f_p = \sum_{p\in\Pi} f_p \otimes e_p$。因此，$r_L$ 是斜对称的。此外，

$$[r_{L12}, r_{L13}] + [r_{L12}, r_{L23}] + [r_{L13}, r_{L23}]$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{p,q\in\Pi}\sum_{\alpha,\beta}\Big&((x_\alpha\circ x_\beta\otimes e_p\diamond e_q - x_\beta\circ x_\alpha\otimes e_q\diamond e_p)\otimes(y_\alpha\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)\\
&+(x_\alpha\otimes e_p)\otimes(y_\alpha\circ x_\beta\otimes f_p\diamond e_q - x_\beta\circ y_\alpha\otimes e_q\diamond f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)\\
&+(x_\alpha\otimes e_p)\otimes(x_\beta\otimes e_q)\otimes(y_\alpha\circ y_\beta\otimes f_p\diamond f_q - y_\beta\circ y_\alpha\otimes f_q\diamond f_p)\Big).
\end{aligned}
$$

对于 $s,\ u,\ v\in\Pi$，采用式（17）中的记号，我们得到

$$
\Big(e_s\otimes e_u\otimes e_v,\ \sum_{p,q\in\Pi} e_p\diamond e_q\otimes f_p\otimes f_q\Big)=(e_s,e_u\diamond e_v),\ \Big(e_s\otimes e_u\otimes e_v,\ \sum_{p,q\in\Pi} e_q\diamond e_p\otimes f_p\otimes f_q\Big)=(e_s,e_v\diamond e_u),
$$

$$
\Big(e_s\otimes e_u\otimes e_v,\ \sum_{p,q\in\Pi} e_p\otimes f_p * e_q\otimes f_q\Big)=-(e_s,e_u\diamond e_v+e_v\diamond e_u).
$$

因此，由于 $(\cdot,\cdot)$ 在 B 上的非退化性，我们得到

$$
\sum_{p,q\in\Pi} e_p\otimes f_p\diamond e_q\otimes f_q=-\sum_{p,q\in\Pi}(e_p\diamond e_q\otimes f_p\otimes f_q+e_q\diamond e_p\otimes f_p\otimes f_q).
$$

同理，我们得到

$$
\sum_{p,q\in\Pi} e_p\otimes e_q\otimes f_p\diamond f_q=-\sum_{p,q\in\Pi}(e_p\otimes e_q\diamond f_p\otimes f_q+e_p\otimes e_q\otimes f_q\diamond f_p),
$$

$$
\sum_{p,q\in\Pi} e_p\otimes e_q\diamond f_p\otimes f_q=\sum_{p,q\in\Pi} e_q\diamond e_p\otimes f_p\otimes f_q,\ \sum_{p,q\in\Pi} e_p\otimes e_q\otimes f_q\diamond f_p=\sum_{p,q\in\Pi} e_p\diamond e_q\otimes f_p\otimes f_q.
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
&[r_{L12},r_{L13}]+[r_{L12},r_{L23}]+[r_{L13},r_{L23}]\\
=&\sum_{p,q\in\Pi}\sum_{\alpha,\beta}\Big((x_\alpha\circ x_\beta\otimes e_p\diamond e_q)\otimes(y_\alpha\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)-(x_\alpha\otimes e_p\diamond e_q)\otimes(y_\alpha\circ x_\beta\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)\\
&-(x_\alpha\otimes e_p\diamond e_q)\otimes(x_\beta\otimes f_p)\otimes(y_\alpha\circ y_\beta\otimes f_q)-(x_\alpha\otimes e_p\diamond e_q)\otimes(x_\beta\otimes f_p)\otimes(y_\beta\circ y_\alpha\otimes f_q\diamond f_p)\Big)\\
&-\sum_{p,q\in\Pi}\sum_{\alpha,\beta}\Big((x_\beta\circ x_\alpha\otimes e_q\diamond e_p)\otimes(y_\alpha\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)+(x_\alpha\otimes e_q\diamond e_p)\otimes(y_\alpha\circ x_\beta\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)\\
&+(x_\alpha\otimes e_q\diamond e_p)\otimes(x_\beta\circ y_\alpha\otimes f_p)\otimes(y_\beta\otimes f_q)+(x_\alpha\otimes e_q\diamond e_p)\otimes(x_\beta\otimes f_p)\otimes(y_\alpha\circ y_\beta\otimes f_q)\Big)\\
=&\ 0.
\end{aligned}
$$

因此，r_L 是 L 中 CYBE 的斜对称完备解。

接下来，我们考虑 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot))=(k[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$ 的情形。注意，$\{t^{-i-1}|i\in\mathbb{Z}\}$ 是 $k[t,t^{-1}]$ 的基，它关于由 $(t^i,t^j)=\delta_{i+j+1,0}$ 对所有 $i,j\in\mathbb{Z}$ 定义的双线性型与 $\{t^i|i\in\mathbb{Z}\}$ 对偶。于是，“若”部分由上述证明得出。

由于 $b\tau r_L=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_\alpha y_\alpha t^{-i-1}\otimes x_\alpha t^i=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_\alpha y_\alpha t^j\otimes x_\alpha t^{-j-1}$，令 $i=0$，可知 r 是斜对称的。此外，

$$
\begin{aligned}
0=&\ [r_{L12},r_{L13}]+[r_{L12},r_{L23}]+[r_{L13},r_{L23}]\\
=&\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha,\beta}(i(x_\alpha\circ x_\beta)t^{i+j-1}-j(x_\beta\circ x_\alpha)t^{i+j-1})\otimes y_\alpha t^{-i-1}\otimes y_\beta t^{-j-1}+x_\alpha t^i\otimes((-i-1)(y_\alpha\circ x_\beta)t^{-i+j-2}\\
&-j(x_\beta\circ y_\alpha)t^{-i+j-2})\otimes y_\beta t^{-j-1}+x_\alpha t^i\otimes x_\beta t^j\otimes((-i-1)(y_\alpha\circ y_\beta)t^{-i-j-3}+(j+1)(y_\beta\circ y_\alpha)t^{-i-j-3}).
\end{aligned}
$$

比较 $1\otimes t^{-1}\otimes t^{-2}$ 的系数可得，r 是 Novikov 代数 A 中 NYBE 的斜对称解。□

注 4.3. 设 $(B,\diamond) = (\mathbf{k}[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是例 $\mathbb{Z}$2.19 中的二次分次右 Novikov 代数。令 2.19。设 $r_L = r(t_1,t_2)$ 如公式（70）所示。对于 r_L，CYBE 可写为

$$[r_{12}(t_1,t_2),r_{13}(t_1,t_3)] + [r_{12}(t_1,t_2),r_{23}(t_2,t_3)] + [r_{13}(t_1,t_3),r_{23}(t_2,t_3)] = 0.$$

尽管该方程的形式类似于带谱参数的经典 Yang-Baxter 方程[13, 26], 但由于当 t_1, t_2, t_3 取自 k 时其无意义，因此二者的含义不同。

例 4.4. 设 $(A = ka \oplus kb \oplus kc, \circ)$ 是由下式给出的 Novikov 代数

$$a\circ a = a,\ a\circ b = \frac{1}{2}b,\ b\circ a = b,\ a\circ c = 0,\ c\circ a = c,$$
$$b\circ b = c,\ b\circ c = c\circ b = c\circ c = 0.$$

则 $(A, \circ)$ 的仿射化 L 是由 $na_i := at^i, b_i := bt^i, c_i := ct^i \mid i \in \mathbb{Z}o$ 张成的向量空间，其李括号为

$$[a_i,a_j] = (i-j)a_{i+j-1},\quad [a_i,b_j] = (\frac{i}{2}-j)b_{i+j-1},\quad [a_i,c_j] = -jc_{i+j-1},$$
$$[b_i,b_j] = (i-j)c_{i+j-1},\quad [b_i,c_j] = [c_i,c_j] = 0 \ \text{ for all } i,j\in\mathbb{Z}.$$

注意　到 L 同构于 [23] 中给出的无中心 Schr¨odinger-Virasoro 代数。

令 $r = b \otimes c - c \otimes b$。容易验证，r 是 Novikov 代数 $(A,\circ)$ 中 NYBE 的斜对称解。于是根据命题 4.2，$r_L = P_{i\in\mathbb{Z}}(b_i \otimes c_{-i-1} - c_i \otimes b_{-i-1})$ 是李代数 L 中 CYBE 的斜对称完备解。

推论 4.5。在与命题 4.2 相同的假设下，令 $\Delta_r : A \to A\otimes A$ 为由公式（52）定义的线性映射，其中 $r \in A \otimes A$；令 $\delta : L \to L\, b\otimes L$ 为由公式 (14) 定义的线性映射。则 $(A,\circ,-\Delta_r)$ 是 Novikov 双代数，因此根据定理 2.23，$(L,[\cdot,\cdot],\delta)$ 是完备李双代数。它与通过 r_L 由命题 4.1 得到的、由公式（68）定义的完备李双代数 δ 相同，其中 r_L 由公式（69）定义。换言之，图表 (3) 中从右数第二个方格交换:

$$\begin{array}{ccc} \textit{skewsymmetric solutions of NYBE} & \xrightarrow{\text{Cor.3.23}} & \textit{Novikov bialgebras} \\ \Big\downarrow \text{Prop.4.2} & & \Big\downarrow \text{Thm.2.23} \\ \textit{skewsymmetric solutions of CYBE} & \xrightarrow{\text{Prop.4.1}} & \textit{Lie bialgebras} \end{array}$$

证明。 根据推论 3.23，$(A,\circ,\Delta_r)$ 是一个 Novikov 双代数。于是 $(A,\circ,-\Delta_r)$ 也是一个 Novikov 双代数。根据定理 2.23，在 $L,[\cdot,\cdot],\delta)$ 上存在一个完备李双代数结构，其中 L 而δ 由 $-\Delta_r$ 通过公式（14）诱导得到。也就是说，对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，有

$$\begin{aligned}\delta(a\otimes b) = &\sum_{i,i,\beta}\sum_{\alpha}(-(a\circ x_\alpha\otimes b_{1i\beta})\otimes(y_\alpha\otimes b_{2j\beta}) + (y_\alpha\otimes b_{2j\beta})\otimes(a\circ x_\alpha\otimes b_{1i\beta})\\ &-(x_\alpha\otimes b_{1i\beta})\otimes(a\star y_\alpha\otimes b_{2j\beta}) + (a\star y_\alpha\otimes b_{2j\beta})\otimes(x_\alpha\otimes b_{1i\beta})).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}_{a\otimes b}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id} + \mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{ad}_{a\otimes b})\sum_{p\in\Pi}\sum_{\alpha}(x_\alpha\otimes e_p)\otimes(y_\alpha\otimes f_p)\\ =\ &\sum_{p\in\Pi}\sum_{\alpha}\big((a\circ x_\alpha\otimes b\diamond e_p - x_\alpha\circ a\otimes e_p\diamond b)\otimes(y_\alpha\otimes f_p)\end{aligned}$$

$$+(x_\alpha \otimes e_p) \otimes (a \circ y_\alpha \otimes b \diamond f_p - y_\alpha \circ a \otimes f_p \diamond b)\Big).$$

对于基元素 e_q、$e_s \in B$，我们有

$$\Big(e_q \otimes e_s, \sum_{p\in\Pi} b \diamond e_p \otimes f_p\Big) \quad = \quad (e_q, b \diamond e_s) = (-e_q \diamond e_s - e_s \diamond e_q, b).$$

类似地，我们得到

$$\Big(e_q \otimes e_s, \sum_{i,j,\beta} b_{1i\beta} \otimes b_{2j\beta}\Big) = (e_q \diamond e_s, b), \ \Big(e_q \otimes e_s, \sum_{p\in\Pi} e_p \otimes f_p \diamond b\Big) = (e_q \diamond e_s, b).$$

由 $(\cdot,\cdot)$ 的非退化性可知，

$$\sum_{p\in\Pi} b \diamond e_p \otimes f_p = \sum_{p\in\Pi} b \diamond f_p \otimes e_p = -\sum_{i,j,\beta} (b_{1i\beta} \otimes b_{2j\beta} + b_{2j\beta} \otimes b_{1i\beta}),$$
$$\sum_{p\in\Pi} e_p \otimes f_p \diamond b = \sum_{i,j,\beta} b_{1i\beta} \otimes b_{2j\beta}, \ \sum_{p\in\Pi} e_p \diamond b \otimes f_p = \sum_{i,j,\beta} b_{2j\beta} \otimes b_{1i\beta}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_{a\otimes b} \widehat{\otimes} \mathrm{id} + \mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{ad}_{a\otimes b}) \sum_{p\in\Pi} \sum_{\alpha} (x_\alpha \otimes e_p) \otimes (y_\alpha \otimes f_p) \\
= \ & -\sum_{i,j,\beta} \sum_{\alpha} \Big((a \circ x_\alpha \otimes b_{1i\beta}) \otimes (y_\alpha \otimes b_{2j\beta}) + (a \circ x_\alpha \otimes b_{2j\beta}) \otimes (y_\alpha \otimes b_{1i\beta}) + (x_\alpha \circ a \otimes b_{2j\beta}) \otimes (y_\alpha \otimes b_{1i\beta}) \\
& +(x_\alpha \otimes b_{1i\beta}) \otimes (a \circ y_\alpha \otimes b_{2j\beta}) + (x_\alpha \otimes b_{2j\beta}) \otimes (a \circ y_\alpha \otimes b_{1i\beta}) + (x_\alpha \otimes b_{1i\beta}) \otimes (y_\alpha \circ a \otimes b_{2j\beta})\Big) \\
= \ & \delta(a \otimes b).
\end{aligned}$$

由此得出结论。 □

结合定理 3.35、命题4.2 和推论 4.5，我们得到

定理 4.6. 设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数，且 $(A, \circ)$ 是相应的 Novikov 代数。设 r 是 Novikov 代数 A 中 NYBE 的斜对称解：$=A \ltimes_{L^*_\rhd} + R_{*_\lhd}$，$-R_{*_\lhd} A^*$ 由方程（66）定义。取 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 为一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数，并令诱导李代数 L 为 $A \otimes B$，它由 $(A, \circ)$ 和 $(B, \diamond)$ 诱导。那么，由方程（69）定义的 r_L 是 L 中 CYBE 的斜对称完备解。因此，存在一个完备李双代数 (L, δ)，其中 δ 通过 r_L由方程（68）定义。

现在，我们介绍与拟 Frobenius Novikov 代数的“仿射化”相对应的李代数结构。

定义 4.7. 设 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数。若存在一个斜对称、非退化的分次双线性型 $(\cdot,\cdot)_L$ 定义在 L 上，满足

$$([a,b],c)_L + ([c,a],b)_L + ([b,c],a)_L = 0 \ \text{ for all } a,b,c \in L, \tag{71}$$

则称 $(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 为拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。

注 4.8. 对于拟 Frobenius $\mathbb{Z}$ 分次李代数 $(L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i, (\cdot,\cdot)_L)$，当 $L = L_0$,$(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 时，它是通常的拟 Frobenius 李代数 [11]。

命题 4.9. 设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，$(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\diamond,(\cdot,\cdot))$ 是一个二次的 $\mathbb{Z}$ 分次右 Novikov 代数，且 $L=A\otimes B$ 是诱导李代数。在 L 上定义双线性型 $(\cdot,\cdot)_L$，如下：

$$(a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2)_L=\omega(a_1,a_2)(b_1,b_2)\quad for\ all\ a_1,a_2\in A,b_1,b_2\in B. \tag{72}$$

若 $(A,\circ,\omega(\cdot,\cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数，则 $(L,(\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。此外，若例 2.19 中的二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数为 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot))=(k[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$，则 $(L,(\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数，当且仅当 $(A,\circ,\omega(\cdot,\cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数。

证明。由于 $\omega(\cdot,\cdot)$ 是斜对称且非退化的，并且 $(\cdot,\cdot)$ 是对称、非退化且分次的，我们得到 $(\cdot,\cdot)_L$ 是斜对称、非退化且分次的。设 $a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2$ 且 $a_3\otimes b_3\in L$。我们得到

$$\begin{aligned}
&([a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2],a_3\otimes b_3)_L+([a_3\otimes b_3,a_1\otimes b_1],a_2\otimes b_2)_L+([a_2\otimes b_2,a_3\otimes b_3],a_1\otimes b_1)_L\\
=\ &\omega(a_1\circ a_2,a_3)(b_1\diamond b_2,b_3)-\omega(a_2\circ a_1,a_3)(b_2\diamond b_1,b_3)+\omega(a_3\circ a_1,a_2)(b_3\diamond b_1,b_2)\\
&-\omega(a_1\circ a_3,a_2)(b_1\diamond b_3,b_2)+\omega(a_2\circ a_3,a_1)(b_2\diamond b_3,b_1)-\omega(a_3\circ a_2,a_1)(b_3\diamond b_2,b_1)\\
=\ &(\omega(a_1\circ a_2,a_3)-\omega(a_1\circ a_3,a_2))(b_1\diamond b_2,b_3)+(\omega(a_2\circ a_3,a_1)-\omega(a_2\circ a_1,a_3))(b_2\diamond b_1,b_3)\\
&+(\omega(a_3\circ a_1,a_2)-\omega(a_3\circ a_2,a_1))(b_3\diamond b_1,b_2)\\
=\ &(\omega(a_1\circ a_2,a_3)-\omega(a_1\circ a_3,a_2))(b_1\diamond b_2,b_3)+(\omega(a_2\circ a_3,a_1)-\omega(a_2\circ a_1,a_3))(b_2\diamond b_1,b_3)\\
&-(\omega(a_3\circ a_1,a_2)-\omega(a_3\circ a_2,a_1))(b_1\diamond b_2+b_2\diamond b_1,b_3)\\
=\ &(\omega(a_1\circ a_2,a_3)-\omega(a_1\star a_3,a_2)+\omega(a_3\circ a_2,a_1))(b_1\diamond b_2,b_3)\\
&-(\omega(a_2\circ a_1,a_3)-\omega(a_2\star a_3,a_1)+\omega(a_3\circ a_1,a_2))(b_2\diamond b_1,b_3)\\
=\ &0.
\end{aligned}$$

因此，$(L,(\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。设二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数为 $(B,\diamond,(\cdot,\cdot))=(k[t,t^{-1}],\diamond,(\cdot,\cdot))$，如例 2.19 所示，并且 $(L,(\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数。容易看出，$\omega(\cdot,\cdot)$ 是斜对称的。对于所有 $a,b,c\in A$ 以及 $m,n,k\in\mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned}
0&=([at^m,bt^n],ct^k)_L+([ct^k,at^m],bt^n)_L+([bt^m,ct^k],at^m)_L\\
&=m(\omega(a\circ b,c)-\omega(a\star c,b)+\omega(c\circ b,a))-n(\omega(b\circ a,c)-\omega(b\star c,a)+\omega(c\circ a,b)).
\end{aligned}$$

令 $m=1$ 且 $n=0$，可得 $(A,\circ,\omega(\cdot,\cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数。至此，证明完成。□

结合命题 3.26、4.2 和 4.9，我们得到这些等价关系。

定理 4.10. 设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，并带有非退化双线性型 $\omega(\cdot,\cdot)$。设 $\{e_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 A 的一组基，$\{f_\alpha|\alpha\in I\}$ 是关于 $\omega(\cdot,\cdot)$ 的对偶基。令 $r=P_{\alpha\in I}e_\alpha\otimes f_\alpha\in A\otimes A$，并令 $L=A[t,t^{-1}]$ 为 $(A,\circ)$ 的仿射化。则以下条件等价。

(a) $(A,\circ,\omega(\cdot,\cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数。(b) r 是 A 中 NYBE 的一个斜对称解。(c) $r_L=P_{i\in\mathbb{Z}}P_{\alpha\in I}e_\alpha t^i\otimes f_\alpha t^{-i-1}\in L\otimes L$ 是 L 中 CYBE 的一个斜对称完备解。

(d) $(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数，其中 $(\cdot,\cdot)_L$ 由 $(at^i, bt^j)_L = \omega(a,b)\delta_{i+j+1,0}$ 定义，对所有 $a, b \in A$ 和 $i, j \in \mathbb{Z}$ 均成立。

值得指出的是，(c) 与 (d) 的等价关系给出了一些实例，其中有限维李代数的 CYBE 斜对称解与拟 Frobenius 李代数之间现有的等价关系被推广到了 [11] -分次李代数。$\mathbb{Z}$-分次李代数。

由定理 4.10 和 3.35，我们得到以下推论。

推论 4.11. 设 $(A, \lhd, \rhd)$ 是一个前 Novikov 代数，$(A, \circ)$ 是与之关联的 Novikov 代数。设 $A := A \ltimes_{L^*_\rhd + R^*_\lhd, -R^*_\lhd} A^*$ 为半直积 Novikov 代数。取 $(B, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 为一个二次的 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数，并设诱导李代数 L 为由 $(A, \circ)$ 和 $(B, \diamond)$ 得到的 $e \in A \otimes B$。则 $(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 连同由式 (72) 定义的 $(\cdot,\cdot)_L$ 构成一个拟 Frobenius 李代数，其中 $\omega(\cdot,\cdot)$ 由式 (67) 给出。

最后，为结束本文，我们给出一个由前 Novikov 代数得到的完备李双代数及拟 Frobenius $\mathbb{Z}$-分次李代数的简单例子。

例 4.12. 设 $(A = ke, \lhd, \rhd)$ 是由下式给出的一维前 Novikov 代数：

$$e \lhd e = e, \quad e \rhd e = 0.$$

令 $e^* \in A^*$ 为对偶基。那么，Novikov 代数 $A \ltimes_{L^*_\rhd + R^*_\lhd, -R^*_\lhd} A^*$ 是赋有如下乘法的向量空间 $ke \oplus ke^*$

$$e \circ e = e, \quad e \circ e^* = -e^*, \quad e^* \circ e = e^*, \quad e^* \circ e^* = 0.$$

根据定理 3.3 5，$r = e \otimes e^* - e^* \otimes e$ 是 $A \ltimes_{L^*_\rhd + R^*_\lhd, -R^*_\lhd} A^*$ 中 NYBE 的一个斜对称解 .

设 $(B, \diamond) = (k[t, t^{-1}], \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是例 2.19 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次右 Novikov 代数。由 $A \ltimes_{L^*_\rhd + R^*_\lhd, -R^*_\lhd} A^*$ 和 $(B, \diamond)$ 诱导的无限维李代数 L 是由 $\{e_i := et^i, f^i := e^* t^{-i-1} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 张成的向量空间，其李括号为

$$[e_i, e_j] = (i-j)e_{i+j-1}, \quad [e_i, f^j] = -(i-j-1)f^{j-i+1}, \quad [f^i, f^j] = 0 \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}.$$

根据命题 4.2，$r_L = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (e_i \otimes f^i - f^i \otimes e_i)$ 是 L 中 CYBE 的一个斜对称完备解。根据推论 4.5，存在一个完备李双代数结构 $(L, [\cdot,\cdot], \delta)$，其定义为

$$\delta(e_k) = k\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} e_{k+i-1} \otimes f^i - f^i \otimes e_{k+i-1}\Big), \quad \delta(f^k) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-k+2i-1) f^{k-i+1} \otimes f^i \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}.$$

根据定理 3.35，$(A \ltimes_{L^*_\rhd + R^*_\lhd, -R^*_\lhd} A^*, \bullet, \omega(\cdot,\cdot))$ 是一个拟 Frobenius Novikov 代数，其双线性型 $\omega(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$\omega(e,e) = \omega(e^*, e^*) = 0, \quad \omega(e, e^*) = -\omega(e^*, e) = 1.$$

根据定理 4.10，$(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 是一个拟 Frobenius 李代数，其双线性型 $(\cdot,\cdot)_L$ 定义为

$$(e_i, e_j)_L = (f^i, f^j)_L = 0, (e_i, f^j)_L = -(f^j, e_i)_L = \delta_{i,j} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{Z}.$$

注意，$(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 是一个 Frobenius 李代数，也就是说，存在一个定义在 L 上的线性函数 F，使得对于所有 $x, y \in L$，都有 $F([x,y]) = (x,y)_L$。事实上，L 上的线性函数 F 定义为

$$F(e_i) = 0, \quad F(f^i) = \delta_{i,1} \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}.$$

可以验证，对于所有 $x, y \in L$，都有 $F([x, y]) = (x, y)_L$。因此，$(L, (\cdot,\cdot)_L)$ 是一个 Frobenius 李代数。

致谢。本研究得到国家自然科学基金（12171129、11871421、11931009、12271265）、浙江省自然科学基金（LY20A010022）、杭州师范大学科学研究基金（2019QDL012）、中央高校基本科研业务费和南开至德基金的资助。感谢裴俊进行有益的讨论。我们感谢审稿人提出的建议，这些建议改进了本文。

利益声明。作者声明不存在需要披露的利益冲突。

数据可用性。本研究未创建或分析新数据。

参考文献

[1] R. Abedin, S. Maximov, A. Stolin and E. Zelmanov, 《拓扑李双代数结构及其分类》, arXiv:2203.01105v3, 2022. 3, 8[2] E. Arbarello, C. De Concini, V. Kac and C. Procesi, 《曲线模空间与表示论》, 数学物理通讯 117 (1988), 1-36. 2[3] C. Bai, 《经典杨–巴克斯特方程的统一代数方法》, 物理学杂志 A：数学与理论 40 (2007), 11073-11082. 3, 25[4] C. Bai, 《Frobenius 代数、Connes 余循环及其对偶性的双重构造》, J. Noncommun. Geom. 4 (2010), 475-530. 19[5] C. Bai, O. Bellier, L. Guo and X. Ni, 《运算的分裂、Manin 积与 Rota–Baxter 算子》, Int. Math. Res. Not. (2013), 485-524. 5, 25, 26[6] C. Bai, H. Li and Y. Pei, 顶点代数的 ϕ_ϵ协调模, 代数杂志 246 (2015), 211-242. 2[7] C. Bai, L. Liu and X. Ni, 《关于 L-dendriform 代数的一些结果》, J. Geom. Phys. 60 (2010), 940-950. 25[8] C. Bai and D. Meng, 《低维 Novikov 代数的分类》, 物理学杂志 A：数学与理论 34 (2001), 1581-1594. 7, 13[9] C. Bai and D. Meng, 《Novikov 代数上的双线性形式》, Internat. J. Theoret. Phys. 41 (2002), 495-502. 18[10] A. Balinsky and S. Novikov, 《流体动力学型泊松括号、Frobenius 代数与李代数》, 苏联数学文献 32 (1985), 228-231. 1, 2, 8[11] K. Beidar, Y. Fong and A. Stolin, 《关于 Frobenius 代数与量子杨–巴克斯特方程》, 美国数学会汇刊 349 (1997), 3823-3836. 24, 30, 32[12] N. Bourbaki, 《拓扑向量空间》, 第1—5章, 施普林格, 2003. 8[13] V. Chari and A. Pressley, 《量子群指南》, 剑桥大学出版社, 剑桥（1994）。3, 18, 21, 22, 24, 27, 29[14] V. Drinfeld, 《李群上的哈密顿结构、李双代数与经典杨–巴克斯特方程的几何意义》, 苏联数学文献 27 (1983), 68-71. 3[15] V. Drinfeld, 《量子群》, 《国际数学家大会论文集》（伯克利, 1986）, 798-820, 美国数学会, 1987. 3[16] A. Dzhumadil'daev, 《Novikov 旋子的余维增长与非 Koszul 性》, 数学物理通讯, 39 (2011), 2943-2952. 2, 6[17] W. L. Gan, 《dioperad 的 Koszul 对偶》, Math. Res. Lett. 10 (2003), 109-124. 4, 16[18] I. Gelfand and I. Dorfman, 《哈密顿算子及与之相关的代数结构》, 函数分析及其应用 13 (1979), 248-262. 2, 6[19] I. Gelfand and I. Dorfman, 《哈密顿算子与无限维李代数》, 函数分析及其应用 15 (1981), 173-187. 2[20] V. Ginzburg and M. Kapranov, 《拟运算子的 Koszul 对偶》, Duke Math. J. , 6 (1994), 203-272. 2, 8, 16[21] M. Guediri, 《带有不变洛伦兹对称双线性形式的 Novikov 代数》, J. Geom. Phys. 82 (2014), 132-144. 18

[22] J. Han, J. Li and Y. Su, 《Schr¨odinger-Virasoro 李代数上的李双代数结构》, 数学物理杂志, 50 (2009), 083504. 3[23] M. Henkel, 《Schr¨odinger 不变性与强各向异性临界系统》, 统计物理杂志, 75 (1994), 1023- 1029. 2, 29[24] Y. Hong, 《左对称代数的扩张结构与补空间分类》, 数学结果 74 (2019), 论文第32号, 24页。18[25] S. Khoroshkin, I. Pop, M. Samsonon, A. Stolin and V. Tolstoy, 《关于多项式代数上的某些李双代数结构及其量子化》, 数学物理通讯, 282 (2008), 625-662. 3[26] T. Krasnov and A. Zotov, 《由结合杨-巴克斯特方程解得到的三角可积陀螺》, 亨利·庞加莱年刊 20 (2019), 2671-2697. 29[27] B. Kupershmidt, 《经典 r 矩阵的本质》, 非线性数学物理杂志 6 (1999), 448-488. 3, 25[28]B. Kupershmidt, 《代数的相空间》, 数学出版物及其他作品（2010）。 http://trace.tennessee.edu/utk mathpubs/2. 4, 17[29] H. Lebzioui, 《关于伪欧几里得诺维科夫代数》, 代数杂志, 564 (2020), 300-316. 18[30] J.-L. Loday, 《莱布尼茨上同调的杯积与对偶莱布尼茨代数》, 斯堪的纳维亚数学杂志 77 (1995), 189- 196. 25[31] J. Loday and B. Vallette, 《代数歌剧》, 格伦德莱恩数学科学丛书346, 施普林格, 2012. 2, 8, 16[32] W. Michaelis, 《包含维拉索罗代数的一类无限维李双代数》, 数学进展 107 (1994), 365-392. 3[33] F. Montaner, A. Stolin and E. Zelmanov, 《流代数上的李双代数分类》, 数学精选 16 (2010), 935-962. 3[34] S. Ng and E. Taft, 《Witt 代数和维拉索罗代数上的李双代数结构分类》, 纯粹与应用代数杂志 151 (2000), 67-88. 3[35] J. M. Osborn, 《诺维科夫代数的模》, 当代数学 184 (1995), 327-327. 17[36] Y. Pei and C. Bai, 《Novikov 代数与 Schr¨odinger-Virasoro 李代数》, 物理学杂志 A：数学与理论 44 (2011), 045201, 18页。2[37] M. Semonov-Tian-Shansky, 《什么是经典 r 矩阵？》, 函数分析及其应用 17 (1983), 259-272. 3[38] M. Takeuchi, 《拓扑余代数》, 代数杂志 97 (1985), 505-539. 8[39] B. Vallette, 《PROP 的 Koszul 对偶》, 美国数学会汇刊 359 (2007), 4865-4943. 4, 16[40] X. Xu, 《二次共形超代数》, 代数杂志, 231 (2000), 1-38. 2[41] E. Zelmanov, 《关于一类局部平移不变李代数》, 苏联数学文献 35 (1987), 216-218. 18[42] F. Zhu and Z. Chen, 《带有结合双线性型的 Novikov 代数》, 物理学杂志 A：数学与理论 40 (2007), 14243-14251. 18 数学学院，杭州师范大学，杭州 311121，中华人民共和国

电子邮箱：yyhong@hznu.edu.cn

南开大学陈省身数学研究所与 LPMC，中华人民共和国天津 300071 电子邮箱：baicm@nankai.edu.cn

罗格斯大学数学与计算机科学系，美国新泽西州纽瓦克 07102 电子邮箱：liguo@rutgers.edu