无线系统中离散RIS优化的一种概率重构技术

Anish Pradhan，IEEE 学生会员；Harpreet S. Dhillon，IEEE 会士

arXiv:2303.00182v2 [eess.SP] 6 Sep 2023

摘要—可重构智能表面（RIS）可通过改变无线链路来创建虚拟视距链路、绕过遮挡、抑制干扰并提升定位能力，从而改善无线通信。然而，要使 RIS 能够改变无线信道，就需要仔细优化 RIS 相移。鉴于硬件限制，离散 RIS 更具实用性，但与离散 RIS 优化相比，连续 RIS 相移优化受到的关注要多得多；离散 RIS 优化则面临量化误差和可扩展性等问题。为解决这些问题，我们提出一种全面的概率技术，通过将离散优化变量解释为分类随机向量，并计算关于这些概率参数的期望，将离散优化问题转化为连续域概率参数的优化问题。我们严格证明，在无约束情形下，重构问题与原问题的最优点一致。对于有约束情形，我们证明转换后的问题是原问题的一种松弛。我们将所提技术应用于两种典型的离散 RIS 应用：信干噪比（SINR）最大化，以及开销感知速率和能量效率（EE）最大化。正如我们在 RIS 应用中所展示的，重构使原问题既可采用随机解释，也可采用解析解释。前者得到一种随机采样技术，后者则得到一种解析梯度下降（GD）方法，该方法采用闭式近似来计算期望。我们明确推导了所提算法的最坏情况计算复杂度。数值结果表明，所提技术适用于多种离散 RIS 优化问题，并且优于最近点投影（CPP）和半定松弛（SDR）等其他通用方法。

索引词——可重构智能表面、离散优化、分类随机变量。

I. 引言

可重构智能表面（RIS）由大量低成本反射单元组成，每个单元都能对入射信号施加可控相移，从而改变传播信道。然而，受硬件约束条件限制，每个反射单元引入的相移通常仅限于一组离散值。经过适当配置后，RIS 可创建多个虚拟视距链路 [2]，提升信道秩 [3]，将快衰落信道转变为慢衰落信道[4]，抑制同频干扰 [5]，提升定位性能 [6]–[8]，等等。然而，优化 RIS 的相移是实现这些优势的第一步。尽管

A. Pradhan 和 H. S. Dhillon 任职于美国弗吉尼亚州布莱克斯堡弗吉尼亚理工大学 Wireless@VT 电子与计算机工程系（邮箱：{pradhananish1、hd-hillon}@vt.edu）。谨此感谢美国国家科学基金会（资助项目 ECCS-2030215 和 CNS-2225511）的支持。本文部分内容将在 2023 年于加拿大多伦多举办的 IEEE PIMRC 会议上发表 [1]。

RIS优化已在文献中得到广泛研究，但研究重点大多放在相移连续的场景上，因为这种场景更便于分析无线网络的性能并推导其上界。因此，离散 RIS 优化技术往往被视为次要问题，而现有的离散 RIS 优化技术也存在各种问题，例如可扩展性不足，以及量化误差可能导致性能任意差。

受可扩展且可靠的离散 RIS 优化技术匮乏的启发 [9]，，以及半定松弛技术的随机解释 [10]，和近期从概率视角研究二元优化问题 [11] 的努力，我们提出一种综合技术，将离散变量的优化问题转化为连续域概率参数的优化问题。我们还严格证明，就最优点而言，变换后的问题在无约束情形下与原问题在数学上等价，而在有约束情形下则是原问题的松弛。此外，我们通过研究简单的二路划分问题，进一步深入理解这一重新表述，并给出了二元优化问题中二次型的若干矩和梯度结果。最后，我们将这一重新表述应用于两个不同的典型离散 RIS 优化问题，展示了随机方法和解析方法。数值结果证实，基于期望的算法优于传统方法。需要指出的是，尽管所提出的重新表述受到离散 RIS 的启发，但其适用范围更广，也有望应用于其他领域。

A. 相关工作与研究动机

尽管对离散 RIS 相移的研究与设计近期已引起一定关注，但大量文献将离散约束松弛为连续约束，求解该近似问题，然后将解量化为最近的离散点。已有研究表明，在最坏情况下，这种双重近似可能产生任意差的解 [9]。然而，连续 RIS优化仍然是离散RIS优化文献的重要组成部分。鉴于此，针对连续 RIS 相移，最常用的一些优化策略包括：a）半定松弛，b）最小化-最大化（MM）算法，c）惩罚方法，d）流形优化，e）交替方向乘子法（ADMM），以及 f）将相移而非其所提供的复增益视为优化变量。

在 [2], [12], 中，作者联合优化了有源波束成形向量和基于 RIS 的被动波束成形向量

，并在采用半定松弛的多天线系统中进行研究。[13] 的作者利用 RIS 提升多用户多输入单输出（MU-MISO）无线系统的物理层安全性。具体而言，他们结合罚函数法、半定松弛和逐次凸近似（SCA），处理 RIS 相移的单位模约束。 [14]提出了适用于 MU-MISO 无线系统的高能效 RIS设计。本文中，作者提出了两种算法以最大化网络能量效率。其中一种采用梯度下降法，另一种采用 MM算法，同时考虑单位模约束和实际功耗模型。类似地， [15], 的作者利用 MM算法和复圆流形（CCM）方法，提出了两种用于最大化多小区MIMO网络加权和速率的算法。在 RIS辅助反向散射系统中， [16]采用半定松弛与交替方向乘子法相结合的方式优化 RIS。[17], 通过交替方向乘子法，在 RIS 辅助的蜂窝无小区网络中最大化加权和速率。 [18] 的作者研究了 RIS 辅助无线网络中的资源分配问题。他们提出了一种算法，结合逐次凸近似和罚函数法，在总功率约束下联合优化 RIS 的相移和开关状态，以最大化能量效率。 [19] 的作者通过分式规划和流形优化技术优化 RIS 相移，从而提升物理层安全性。采用类似方法， [20] 的作者提出了一种结合半定松弛和流形优化技术的算法，用于优化 RIS 辅助边缘缓存系统。最近，本文作者将相移向量本身而非其所提供的复增益向量视为优化变量，并采用梯度下降法优化 RIS 相移以最大化信干噪比 [21] ，其方法与 [22]所用的方法类似。

在离散 RIS优化文献中，常用的优化工具包括穷举搜索、基于连续松弛的 CPP，以及分支定界（BB）方法。在 [23], 中，作者研究了一种实用的离散 RIS辅助宽带正交频分复用（OFDM）系统，并在交替优化框架下采用逐元素穷举搜索优化离散 RIS。 [24], [25] 的作者使用 BB 方法优化 MISO无线网络中的 RIS 相移，但该方法的复杂度会随 RIS 元件数量呈指数增长。 [26]中采用粒子群优化（PSO）算法联合优化一种配备低分辨率数模转换器（DACs）的 RIS辅助 MIMO系统。该算法适用于连续和离散 RIS 相移。为最大化 MIMO系统的可达速率， [27] 中的作者将离散 RIS约束松弛为连续约束，并使用投影梯度法（PGM）求解问题。 [28]中也采用了类似的连续松弛和 CPP 方法。具体而言， [28] 中的作者研究了多用户 MIMO场景中的频谱效率与能量效率权衡。在该论文中，离散 RIS 相移约束被松弛为连续约束，随后采用 MM 和加速梯度法求解。上述优化问题要么不具备可扩展性，要么因上述双重近似而导致性能可能任意差。不过，近期有一些研究 [9], [29], [30] 针对单输入单输出系统提出了可扩展的最优离散 RIS波束成形优化方法，因为所得目标函数具有低秩矩阵结构， $d \leq 2$ 该方法基于 [31]的固定秩结果。这些策略过于专用于单天线场景，因此存在局限；对于更实用的多天线场景，它们并不适用。

超越 RIS 领域的研究，已有一些关于二元二次优化问题[10], [11], [32]–[34]的有趣方法。 [10] 的作者表明，半正定松弛形式实际上是原始非凸二次规划的随机版本。即使非凸性源于二元变量，这种随机解释仍然成立。 [32], [33] 的作者采用概率数据关联（PDA）算法处理二元二次规划，将优化变量视为二元随机变量，并通过高斯噪声近似迭代更新概率。研究表明，该方法能够取得接近最优的结果。最近， [11] 的作者提出了一种针对二元优化问题的随机梯度下降框架，同样将优化变量视为随机变量，然后对其取期望。受这些概率优化技术以及缺乏新颖的通用离散 RIS 优化技术的启发，我们开发了一种综合性的概率技术，用于转换离散优化问题，从而为在连续概率参数域中处理这些问题开辟了新的途径。随后，我们将该技术应用于离散 RIS 场景，以展示其通用性和有效性。

B. 主要贡献

我们从概率的不同视角研究一般的离散优化问题，由此提出了一种适用范围广泛的综合性概率重构技术，其中包括离散 RIS 问题；这正是本研究最初的灵感来源。本文的主要贡献如下。

1) 面向一般离散优化问题的综合概率技术：我们提出一种综合概率技术，将一般离散优化问题（不限于二元规划）重构为连续域问题。具体而言，我们将优化变量的各个元素重新视为独立非同分布（i.n.i.d）的分类随机变量，并用目标函数及约束条件（如有）的期望替代它们。我们严格证明了：对于具有唯一最优解的一般无约束问题，原问题与重构问题在最优点上等价。此外，当原问题为约束问题时，我们证明变换后问题的原始解介于原问题的对偶解与原始解之间。我们还表明，当强对偶性成立时，变换后问题与原问题具有相同的最优目标值。利用这项技术，从非退化概率参数解中进行随机采样，只需与半定松弛（SDR）中的高斯随机化相近的样本数量，便可得到更优的解。

2) 二次型和二元随机向量相关的多种解析矩及其梯度推导：由于离散 RIS 问题通常涉及二元相移，采用我们的重构技术自然会得到与二次型和二元随机向量相关的期望。例如，信干噪比或保密速率的分母和分子通常都包含二次型 [22]。二次型是无线通信文献中频繁出现的一种典型构造。对于基于梯度的优化方法，还需要计算这些期望的梯度。因此，我们进一步推导了上述二次型的一阶矩和二阶矩及其梯度。这些关键的中间结果随后应用于我们的一种算法，充分体现了它们的重要性。

3) 用于 SINR 最大化的梯度下降算法：作为第一个典型案例研究，我们将该技术应用于 SINR 最大化问题，并提出随机梯度下降和解析梯度下降方法，以求解重构后的问题。在解析梯度下降算法中，我们推导并使用 SINR 期望的一阶和二阶泰勒近似，而在随机方法中则使用梯度估计量。结果表明，基于期望的算法优于所评估的传统实用方法。

4) 用于能量效率和速率最大化的三元随机向量随机采样方法：我们还将该技术应用于第二个案例研究，即开销感知的速率与能量效率最大化问题，该问题涉及与三元随机向量相关的期望。由于针对这一特定案例研究推导解析期望具有挑战性，我们针对这类三元随机向量开发了一种随机采样方法，使用蒙特卡洛（MC）样本估计梯度，从而展示了所提方法的灵活性。我们证明，该框架适用于非光滑目标函数形式，并且在无干扰和强干扰场景下均表现良好。此外，实验表明，所开发的随机方法能够适用于速率和能量效率等不同目标函数，而无需更改算法。

5）计算复杂度讨论：我们还使用大 O 符号推导了所有所提算法的最坏情况下的计算复杂度。

记号：标准复正态随机变量的分布记为 $\mathcal{CN}(0,1)$。矩阵、标量和向量实体分别记为 $\mathbf{X}$、x 和 $\mathbf{x}$。除非另有明确说明，所有向量均为列向量。对于向量 $\mathbf{x}$，$\mathrm{diag}(\mathbf{x})$ 表示以 $\mathbf{x}$ 的元素为对角元素的对角矩阵。对于矩阵 $\mathbf{X}$，$\mathbf{X}^H$、$\mathbf{X}^T$、$\mathrm{Re}(\mathbf{X})$、$\mathrm{Tr}(\mathbf{X})$、$\mathrm{diag}(\mathbf{X})$ 和 $\mathbf{X} \succeq 0$ 分别表示其共轭转置、转置、实部、迹、以向量形式表示的对角元素以及半正定性。此外，$\mathbf{X}_{wd} = \mathbf{X} - \mathrm{diag}(\mathbf{X})$。期望运算记为 $\mathrm{E}[\cdot]$，$\mathrm{var}(\cdot)$ 表示总方差算子，用于计算随机向量参数的方差协方差矩阵的迹；算子 $\odot$ 表示两个矩阵之间的逐元素乘法。L0 范数和 L2 范数分别记为 $\|\cdot\|_0$ 和 $\|\cdot\|_2$。维度为 N 的单位矩阵和全一列向量分别记为 $\mathbf{I}_N$ 和 $\mathbf{1}_N$。

II. 离散优化的概率重构

A. 无约束离散优化问题

我们首先考虑一个一般的无约束离散优化问题，不对目标函数的凸性作任何假设。优化变量是一个长度为 n 的向量，其中每个元素都可以取集合 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_b\}$ 中的一个离散值。

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n} \quad f(\mathbf{x}). \tag{1}$$

我们的主要目标是将该问题重构为一种不涉及离散域、且与原问题共享最优解的形式。为此，我们建议将 $\mathbf{x}$ 的各个元素重新视为独立非同分布的分类随机变量，其联合概率密度函数（PDF）如下：

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{b} \delta(x_i - c_j) p_{i,j}, p_{i,j} \in [0,1], \sum_{j=1}^{b} p_{i,j} = 1, \tag{2}$$

其中，矩阵 $\mathbf{P}$ 的第（i，j）个元素记为 $p_{i,\,j}$，$\mathbf{x}$ 的第 i 个元素记为 x_i，而 $\delta(\cdot)$ 是狄拉克δ函数。随后，我们将原问题重构为一个随机优化问题：

$$\min_{p_{i,j} \in \mathcal{F}} \quad \xi(\mathbf{P}) = \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})} \left[f(\mathbf{x}) \right], \tag{3}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是由式（2）定义的$p_{i,\,j}$的所有可能集合。式（1）与式（3）及其解集之间的联系总结如下引理所述。

引理1。问题（1）和（3）的解集分别记为$\Omega_{\mathbf{x}}$ 和$\Omega_{\mathbf{P}}$，并且

$$\Omega_{\mathbf{x}} \subseteq \Omega_{\mathbf{P}}.$$

此外，如果（1）的唯一最优解为$\mathbf{x}^{\mathrm{opt}}$，那么$\mathbf{P}^{\mathrm{opt}} = \mathrm{Degen}(\mathbf{x}^{\mathrm{opt}})$是（3）的唯一最优解，其中$\mathbf{P} = \mathrm{Degen}(\mathbf{x})$运算表示，仅当 $x_i = c_j$ 时，$\mathbf{P}$的第（i，j）项定义为$p_{i,\,j} = 1$，而所有其他项均为零。

证明：我们观察到，$\Omega_{\mathbf{x}}$ 包含 b^n 个元素，其中每个元素对应于$\mathbf{x}$可能取值的一种 b^n 组合。在（3）中，相应的$\mathbf{P} = \mathrm{Degen}(\mathbf{x})$可以达到相同的目标值，该矩阵是 n 退化分类分布的参数矩阵。下面通过一个例子进行说明。假设我们有一个向量$\mathbf{x} = [-1, 1, -1]^T$。$\mathbf{x}$的每个元素都可以取 $c_1 = 1$或 $c_2 = -1$。根据引理1中给出的$\mathrm{Degen}(\cdot)$函数定义，该向量对应的参数矩阵为：

$$\mathrm{Degen}(\mathbf{x}) = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个矩阵的含义如下：$\mathbf{x}$ 的第一个元素以概率 1 取值为 -1，第二个元素以概率 1 取值为 1，依此类推。参数矩阵

因此，若将 $\mathbf{x}$ 重新视为一个随机向量，该矩阵便表示 $\mathbf{x}$ 各元素的退化分布。重要的是，这个参数矩阵可以转换回原始的 $\mathbf{x}$ 向量。因此，对于 $\mathbf{x}$ 的每一种可能排列（如公式 (1) 所示），公式 (3) 中都存在一个对应的参数矩阵，使其具有相同的目标值。由此可见，集合 $\Omega_{\mathbf{x}}$ 必须包含在 $\Omega_{\mathbf{P}}$ 中。用数学语言表示，这一关系可写为 $\Omega_{\mathbf{x}} \subseteq \Omega_{\mathbf{P}}$。

对于任意可行的 $\mathbf{P}$，可以证明，

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \leq \xi(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{b^n} f(\mathbf{x}\{k\}) \mathbb{P}(\mathbf{x} = \mathbf{x}\{k\} | \mathbf{P}) \leq \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \tag{4}$$

其中，$\mathbf{x}\{k\}$ 表示 $\mathbf{x}$ 的所有可能b^n 种组合中的第 k 种组合。这是因为我们观察到，期望不过是 $f(\mathbf{x})$ 所有可能取值的凸组合。之所以如此，是因为概率项始终非负，且总和为一，因此期望可以表示为这些项的和。这种对标量值的凸组合本质上代表了概率加权平均。每个标量都由其对应的概率或发生可能性加权。这些概率从根本上决定了加权平均在线段上的位置，而该线段的端点分别是最小和最大的标量值。由于概率之和必须为一，该平均值不可能落在此范围之外。例如，当概率更倾向于较大的标量值时，所得组合就更靠近最大值，反之亦然。需要明确的是，将期望等同于凸组合，并不意味着期望是凸函数。我们讨论的并不是期望本身的凸性。然而，由于凸组合的固有性质，不等式 (4) 始终成立，如 [35] 所示。此外，Carath´eodory 定理也为这一事实提供了进一步的证明 [11]，[35]。

现在假设 $\mathbf{x}_{\text{opt}}$ 是 (1) 的唯一最优解。因此，$\mathbf{P}_{\text{opt}} = \text{Degen}(\mathbf{x}_{\text{opt}})$ 是 (3) 的一个最优解。考虑 $\exists \mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_{\text{opt}}$，使得 $\xi(\mathbf{P}_0) = \xi(\mathbf{P}_{\text{opt}}) = f(\mathbf{x}_{\text{opt}})$。参数矩阵 $\mathbf{P}$ 不能表示退化分类分布，因为相应的 $\mathbf{x}_0 = \text{Degen}^{-1}(\mathbf{P}_0)$ 将违反关于 $\mathbf{x}_{\text{opt}}$ 的唯一性假设。接下来考虑非退化分布的情形。由于已证明这两个问题的最优值相同，因此不失一般性，可以假设 $p^* = f(\mathbf{x}\{k_0\})$。然后，

$$\xi(\mathbf{P}_0) = \sum_{k=1}^{b^n} f(\mathbf{x}\{k\}) \mathbb{P}(\mathbf{x} = \mathbf{x}\{k\} | \mathbf{P}_0) = f(\mathbf{x}\{k_0\}) = p^* \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1, k \neq k_0}^{b^n} \left(f(\mathbf{x}\{k\}) - f(\mathbf{x}\{k_0\}) \right) \mathbb{P}(\mathbf{x} = \mathbf{x}\{k\} | \mathbf{P}_0) = 0. \tag{6}$$

对于某些 k，若要使 (6) 成立，$f(\mathbf{x}\{k\})$ 的值需要等于 $f(\mathbf{x}\{k_0\})$，这也将违反关于 k_0 的唯一性假设。

■

B. 约束离散优化问题的情形

接下来，我们探讨通过这种重新表述得到的此类重合最优解是否同样适用于约束问题。为此，下面我们在不假设凸性的情况下，写出一个带约束条件的一般优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n} \quad & f_0(\mathbf{x}), \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, r, \end{aligned} \tag{7}$$

其中，该问题的最优值和解集分别记为 p_c^* 和 $\Psi_{\mathbf{x}}$。变换后的形式表示为：

$$\begin{aligned} \min_{p_{i,j} \in \mathcal{F}} \quad & \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[f_0(\mathbf{x})], \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[f_i(\mathbf{x})] \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \\ & \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[h_j(\mathbf{x})] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, r, \end{aligned} \tag{8}$$

其最优值为 p_e^*，解集为 $\Psi_{\mathbf{P}}$。

引理 2。原优化问题 (7) 与变换后的问题 (8) 具有相同的对偶问题，其对偶解为 d^*。此外，

$$d^* \leq p_e^* \leq p_c^*. \tag{9}$$

证明：类似于引理1的证明，容易看出，对于 (7) 中的每个可行 $\mathbf{x}$，在 (8) 中都存在相应的可行参数矩阵 $\mathbf{P} = \text{Degen}(\mathbf{x})$。根据这一观察结果，并结合前述证明中的类似推理，可直接得出解集 $\Psi_{\mathbf{x}}$ 是 $\Psi_{\mathbf{P}}$的子集。因此，变换后的优化问题可视为原约束问题 (7) 的一种松弛，并能提供更优的最优值。由此可证明 $p_e^* \leq p_c^*$。

接下来，我们通过将原优化问题的对偶函数表示为拉格朗日函数 [36]，[37]的下确界来进行研究：

$$\begin{aligned} g_c(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \\ &= \inf_{\mathbf{x} \in \{c_1, c_2, \ldots, c_b\}^n} f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{r} v_j h_j(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{10}$$

其中，λ_i 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的第 i个分量，v_j 是$\mathbf{v}$的第 j个分量。此处讨论的向量是与我们的问题相关的对偶变量。我们可以将对偶函数视为公式（7）的软化形式，而公式（7）包含更严格的硬约束条件 [36]。关键的是，对于所有非负向量 $\boldsymbol{\lambda}$，对偶函数始终是原问题最优值 p_c^*的下界。有关这一著名结果的深入讨论，请参阅 [36]。接下来，利用引理1，我们可以将上述对偶函数改写为以下表达式：

$$\begin{aligned} g_c(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \inf_{p_{i,j} \in \mathcal{F}} & \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[f_0(\mathbf{x})] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[f_i(\mathbf{x})] + \\ & \sum_{j=1}^{r} v_j \mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{P})}[h_j(\mathbf{x})], \end{aligned} \tag{11}$$

其中，将凹对偶函数最大化后得到的最优对偶解记为 d^*。我们注意到，（8）的对偶函数等价于（11）。鉴于对偶函数具有下界性质，可以合理地得出结论 $d^* \leq p_{e^0}^*$。此外，强对偶性确保等式成立。综合这些不等式，我们推得 $d^* \leq p_e^* \leq p_c^*$，由此证明了该引理。这还表明，松弛（8）并非平凡问题，且由于对偶解有界，其上界为 d^*。

■

C. 双向划分示例讨论

在本小节中，我们将聚焦于简单的二路划分问题，以展示这一技术。我们着眼于这个基础示例，以便更全面地理解该技术，并更轻松地与其他概率方法进行比较。尽管所选问题涵盖了广泛的应用，例如 RIS辅助网络中的二进制相位波束成形 [9], ，我们还将在第三节深入探讨另外两个更复杂的应用。下面先介绍二路划分问题：

$$\max_{\mathbf{x} \in \{-1,1\}^n} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个对称矩阵。接下来，我们从以下结果出发，根据下面的引理1推导式 (12) 的重新表述：

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{\mathbf{x} \sim \mathbb{P}(\mathbf{x}|\mathbf{p}_x)} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j W_{ij} \right] \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{i=1}^{n} (2p_{x,i} - 1)(2p_{x,j} - 1) W_{ij} + \sum_{j=1}^{n} W_{ii}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，$\mathbf{p}$ 是参数向量，$p_{x,\ i} = \mathbb{P}[x_i = 1]$表示第 i个元素，x_i 表示 $\mathbf{x}$ 的第 i个元素，W_{ij} 表示 $\mathbf{W}$ 的第 i, j个元素。该结果可直接由以下事实得出：$\mathrm{E}[x_i] = 2p_{x,\ i} - 1$、$\mathrm{E}[x_i^2] = 1$，且各元素独立非同分布。

备注1。注意，如果 $\mathbf{y}$ 的所有元素都为 $+1$或-1，则 $\mathbf{y} = \mathrm{Degen}^{-1}(\mathbf{p}_x)$。换言之，在这种情况下，$\mathbf{y}$ 是一个可行的 $\mathbf{x}$，反之亦然。

据此，变换后的问题如下：

$$\max_{\mathbf{y} \in [-1,1]^n} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{W}_{wd} \mathbf{y}, \tag{14}$$

其中 $\mathbf{y} = 2\mathbf{p}_x - \mathbf{1}$，$\mathbf{W}_{wd}$ 是将对角元素设为零后的矩阵 $\mathbf{W}$。需要注意的是，我们实际上将二次0-1规划（BQP）转换为非凸盒约束二次规划（BoxQP），这凸显了我们的重构方法能够在保持最优点等价的同时改变问题结构。然而，这在优化领域中是一个已知结果[38], [39]，而我们的重构方法提供了一个概率证明。除了这种结构变化之外，我们还可以通过关注原问题的半定松弛（SDR），进一步深入了解我们的重构方法。该半定松弛可通过对以下随机规划的目标值及 (12) 的定义域取期望得到 $= 2$:

随机规划：对目标值及 (12) 的定义域取期望 [10]:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X} \succeq 0} \quad & \mathrm{E}_{\boldsymbol{\zeta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{X})} \left[\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\zeta} \right], \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{E}_{\boldsymbol{\zeta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{X})} \left[\boldsymbol{\zeta} \odot \boldsymbol{\zeta} \right] = \mathbf{1}_n, \end{aligned} \tag{15}$$

其中，$\mathbf{X}$ 是任意的对称半正定矩阵，$\boldsymbol{\zeta}$ 是一个服从零均值、协方差为 $\mathbf{X}$ 的正态分布的随机向量。根据简单的观察 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{\zeta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{X})} \left[\boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\zeta}^T \right] = \mathbf{X}$，这等价于下面描述的经典半定松弛问题：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}} \quad & \mathrm{Tr}\left(\mathbf{W} \mathbf{X} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} \succeq 0, \\ & \mathbf{X}_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{16}$$

在上述公式中，若加入秩一约束 $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = 1$，则该问题将等价于 (12)。然而，与 (12) 不同，这个松弛后的公式可在多项式时间内求解。当允许 x_i 为具有单位范数的多维向量时，也可以将半定松弛视为原问题的松弛。可以通过对半定松弛问题的解进行 Cholesky分解得到这些向量。如果两个这样的向量之间的夹角非常小，则意味着 $\mathbf{x}$ 中对应的两个元素更有可能属于同一组 [40]。换言之，半定松弛为我们提供了成对相关信息。相较之下，对我们重新表述的式 (14) 进行松弛后，将为我们提供原向量 $\mathbf{x}$ 的每个元素取 $+1$ 或 -1的概率。

本小节的研究结果表明，我们提出的重构方法有可能改变优化问题的结构。即使在简单的目标函数形式下这种变化微不足道，也可以预期，更复杂的目标函数形式将产生非平凡的变化，从而对优化过程的效率和有效性产生重大影响。我们将在第三节中与离散RIS优化相关的典型案例研究中，展示这些非平凡的结构变化。此外，结果表明，尽管我们的重构方法与半定松弛在所提供的信息方面存在差异，但从随机视角来看，两者在表述形式上具有相似性。这些结果促使我们进一步探索该方法在更复杂目标函数形式中的应用。

D. 二元随机向量的二次表达式的一些有用结果

由于大多数离散 RIS 应用都采用二元相移 RIS $\{-1, +1\}$，因为其操作和实现较为简单，因此有必要推导出与式（14）中定义的二元随机向量相关的解析矩及其梯度。它们可用于具有此类基于期望的表述的不同优化场景中。高阶矩结果的推导受到上一小节的启发，并将在下一节中大量使用。下面首先介绍协方差矩阵。

注 2. 对于具有独立非同分布

元素的随机向量 x [，其期望为 E[x] =y，协方差矩阵为

$$\mathrm{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = (\mathbf{y}\mathbf{y}^T) \odot \mathbf{E}_m + \mathbf{I}_N, \tag{17}$$

其中，E_m 是对角线元素为零的全一矩阵，p 的定义与式（29）类似。

现在，由于其性质显而易见，且式（13）中已给出部分证明，我们不再证明引理 3，而是直接陈述一阶矩及其梯度。

引理 3. 对于一个元素独立非同分布且期望为 $\mathrm{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{y}$ 的随机向量 $\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^n$，二次型与线性型之和的期望及其梯度为

$$\mu_{qf}(\mathbf{G}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathrm{E}[\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{z}^T\mathbf{x}] = \mathbf{y}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{y} + \mathrm{Tr}(\mathbf{G}) + \mathbf{z}^T\mathbf{y}, \tag{18}$$

$$\vartheta_{qf}(\mathbf{G}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}}\mathrm{E}[\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x}] = (\mathbf{G}_{wd} + \mathbf{G}_{wd}^T)\mathbf{y} + \mathbf{z}. \tag{19}$$

其中，G 是实对称矩阵。

接下来，我们推导一个非常重要的期望，它将在下一个定理中用于计算二次型与线性型之间的协方差。

定理 1. 对于一个元素独立非同分布且期望为 $\mathrm{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{y}$ 的随机向量 $\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^n$，二次型与线性型乘积的期望为

$$\mu_{ql}(\mathbf{G}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathrm{E}[\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x}\mathbf{z}^T\mathbf{x}] = 2\mathbf{y}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{z} + \mathbf{z}^T\mathbf{y}\mathrm{Tr}(\mathbf{G}) + \mathbf{1}^T\{(\mathbf{G}_{wd}\mathbf{Y}_{wd}) \odot \mathbf{Y}_{wd}\}(\mathbf{y} \odot \mathbf{z}), \tag{20}$$

其中，G 是一个实对称矩阵，且 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{1}^T$。

证明：见附录 A。 ■

我们仅在推论 1 中给出上述期望的梯度，不作证明。

推论 1. 定理 1 中推导出的期望的梯度可计算如下：

$$\vartheta_{ql}(\mathbf{G}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = 2\mathbf{G}_{wd}\mathbf{z} + \mathbf{z}\mathrm{Tr}(\mathbf{G}) + ((\mathbf{G}_T^T \odot \mathbf{E}_m)\mathbf{y}) \odot \mathbf{z} + \mathrm{diag}(\mathbf{G}_T\mathrm{diag}(\mathbf{y} \odot \mathbf{z})\mathbf{E}_m) + (\mathbf{G}_T \odot \mathbf{E}_m)(\mathbf{y} \odot \mathbf{z}), \tag{21}$$

其中，$\mathbf{G}_T = \mathbf{G}_{wd}\mathbf{T}_0$，，且 $\mathbf{T}_0 = \mathrm{diag}(\mathbf{y})\mathbf{E}_m$。

接下来，我们关注定理 2 中二次型的二阶矩。

定理 2. 对于一个元素独立非同分布且期望为 $\mathrm{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{y}$ 的随机向量 $\mathbf{x} \in \{-1, +1\}^n$，二次型的二阶矩为

$$\mu_{qs}(\mathbf{G}, \mathbf{y}) = \mathrm{E}[(\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x})^2] = \mathbf{y}^T(\mathbf{G}_s - \mathbf{F}(\mathbf{y}))\mathbf{y} + \mathrm{Tr}(\mathbf{G})^2 + 2\mathrm{Tr}(\mathbf{Z}) + (\mathbf{y}^T\mathbf{G}\mathbf{y})^2 - \mathbf{d}^T\mathbf{G}_g\mathbf{d}, \tag{22}$$

其中，G 为实对称矩阵，$\mathbf{d} = \mathbf{y} \odot \mathbf{y}$，$\mathbf{G}_s = 2\mathrm{Tr}(\mathbf{G})\mathbf{G}_{wd} + 4\mathbf{Z}_{wd}$，$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_{wd}\mathbf{G}_{wd}^T$，$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} \odot \mathbf{y})^T\mathrm{diag}(\mathbf{G})(\mathbf{G} + \mathbf{G}_{wd}) + 4\mathbf{U}_{wd}$，$\mathbf{U} = [\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{y} \odot \mathbf{y})^T]\mathbf{B}$，且 $\mathbf{G}_g = 2\mathbf{G}_{wd} \odot \mathbf{G}_{wd}$。矩阵 B 通过如下分块定义：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,1}, \ldots, \mathbf{b}_{1,N} \\ \cdots, \cdots, \cdots, \\ \mathbf{b}_{N,1}, \ldots, \mathbf{b}_{N,N}. \end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中，$\mathbf{b}_{k,j}$ 的第 i 个元素为 $\mathbf{b}_{k,j}^i = G_{wd_{ij}}G_{wd_{ki}}$。

证明：见附录 B。 ■

现在，我们推导推论 2 中二阶矩的梯度。

推论 2. 定理 2 中所推导期望的梯度可计算如下：

$$\vartheta_{qs}(\mathbf{G}, \mathbf{y}) = (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_s^T)\mathbf{y} + 2\mathbf{y}^T\mathbf{G}\mathbf{y}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T(\mathbf{G} + \mathbf{G}_{wd})\mathbf{y}(\mathrm{diag}(\mathbf{G}) \odot \mathbf{y}) - \mathbf{d}^T\mathrm{diag}(\mathbf{G})(\mathbf{G} + \mathbf{G}_{wd})\mathbf{y} - \mathrm{diag}(\mathbf{G})^T\mathbf{d}(\mathbf{G} + \mathbf{G}_{wd})^T\mathbf{y} - 2((\mathbf{G}_g + \mathbf{G}_g^T)\mathbf{d}) \odot \mathbf{y} - 8\mathbf{y} \odot \mathbf{b}_s - 4(\mathbf{U}_{wd} + \mathbf{U}_{wd}^T)\mathbf{y}, \tag{24}$$

其中，$\mathbf{d} = \mathbf{y} \odot \mathbf{y}$，且 $\mathbf{b}_s$ 的第 i 个元素为 $\mathbf{y}^T\mathbf{B}_t[i]\mathbf{y} - \mathrm{Tr}(\mathbf{B}_t[i])$。矩阵 $\mathbf{B}_t[i]$ 可通过将 $\mathbf{G}_{wd}$ 的第 i 列与 $\mathbf{G}_{wd}$ 的第 i 行相乘得到。

Proof: See Appendix C. ■

III. 所提重构的应用

在 MIMO 通信场景中，优化 RIS 相移可能是一项具有挑战性的任务，尤其是在处理离散 RIS 时。离散 RIS 问题通常更难求解，因此有必要将原问题拆分为可以分别处理的较小子问题。因此，我们重点关注文献中经常出现的离散 RIS 子问题的典型形式。为进行统一处理，我们选择了一种能够表示一系列 RIS 辅助场景和子问题的信号模型，包括设备到设备通信链路、通过天线选择使每根天线为不同用户提供服务的蜂窝网络，以及存在干扰源且接收波束成形向量保持固定的无线通信链路[21]。该信号模型可表示为以下点对点表示：

$$y_r = (h_{d_0} + \mathbf{h}_0^H\mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_0)x_{s,0} + \sum_{i=1}^{N_I}(h_{d_i} + \mathbf{h}_i^H\mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_i)x_{s,i} + w, \tag{25}$$

其中，y_r 是来自目标 Tx（记为 $i = 0$）的接收信号，h_{d_i} 表示第 i 个 Tx 与 Rx 之间的直达信道，$\mathbf{h}_i$ 是发射端到 RIS 信道，$\mathbf{f}_i$ 表示 RIS 到接收端信道，$x_{s,\,i}$ 是第 i 个 Tx 的数据，$\mathrm{E}[x_{s,i}^2] = \beta_i$，$\boldsymbol{\theta}$ 是N元素的离散 RIS 相位配置向量，N_I 是干扰源的数量，w 是加性噪声。请注意，用户和干扰源始终以其最大功率 p进行传输。对于一般的 MIMO 通信场景，这些信道可分别视为经过预编码向量和接收机波束成形向量左乘及右乘后的实际信道。借助这种灵活的信号模型，我们研究了 RIS 辅助无线通信系统的两种应用场景，即 SINR 最大化和开销感知 RIS 优化。请注意，在这两种情况下，均假设 RIS 由接收端通过 RIS 控制器 [41]进行控制。

A. 通过 RIS优化实现信干噪比 最大化

1) 系统模型：我们考虑由信号模型（25）所规定的一般系统模型。我们考虑可重构智能表面的相位向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \ldots \theta_n \ldots \theta_N]^T$和 $\theta_n \in \{-1, +1\}$。

为简化记号，我们还定义 $\mathrm{h}_{c_i} = \left(\mathrm{h}_i^H \mathrm{diag}(\mathrm{f}_i)\right)^H$。对于这一离散可重构智能表面，信干噪比可表示为：

$$\gamma = \frac{\beta_0 |h_{d_0} + \mathbf{h}_{c_0}^H \boldsymbol{\theta}|^2}{\sum_{i=1}^{N_I} \beta_i |h_{d_i} + \mathbf{h}_{c_i}^H \boldsymbol{\theta}|^2 + \sigma_w^2} = \frac{f_s(\boldsymbol{\theta})}{f_I(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} + \mathrm{s}^T \boldsymbol{\theta}}, \tag{26}$$

其中 $\mathrm{R}_i = \beta_i \mathrm{Re}\left(\mathrm{h}_{c_i} \mathrm{h}_{c_i}^H + \frac{|h_{d_i}|^2}{N} \mathrm{I}_N\right)$，$\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{N_I} \mathrm{R}_i + \frac{\sigma_w^2}{N} \mathrm{I}_N$，$\sigma_w^2$ 为加性高斯噪声的方差，$\mathrm{c}_i = {}_{N_I} 2 \beta_i \mathrm{Re}(\mathrm{conj}(h_{d_i} \mathrm{h}_{c_i}))$，且 $\mathrm{s} = \sum \mathrm{c}_{i \circ \ i=1}$

Algorithm 1: E-GD

Input: $\mathbf{R}_i, \mathbf{c}_i, \varrho, \varepsilon, \epsilon_{th}, \beta_{\text{init}}, G \ \forall i$
Output: $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{i+1}$
Initialize $t = 1$, $\delta_{GD} = 1$, and $\mathbf{y}_s^{(t)} = \mathbf{y}_{\text{init}}$.
while $\delta_{GD} \leq \epsilon_{th}$
do
  Initialize $\beta^{(1)} = \beta_{\text{init}}, d_f = -1$.
  Calculate $\nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)})$ from (32) or (33).
  while $d_f \leq 0$
  do
    $\mathbf{y}_{new} = \mathbf{y}_s^{(t)} - \beta^{(t)} \nabla_{\mathbf{y}_s} \left(\mathbf{y}_s^{(t)}\right)$.
    Find $\mathbf{y}_{proj}$ by clipping the vector $\mathbf{y}_{new}$ in $[-\mathbf{1}_N, +\mathbf{1}_N]$.
    $d_f =$
    $-\mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)}) - \varepsilon \beta^{(t)} \|\nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)})\|_2^2 + \mathcal{J}_l(\mathbf{y}_{proj})$.
    $\beta^{(t)} = \varrho \beta^{(t)}$.
  $\mathbf{y}_s^{(t+\frac{1}{2})} = \mathbf{y}_s^{(t)} - \beta^{(t)} \nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)})$.
  $\mathbf{y}_s^{(t+1)} \in \min_{\mathbf{v}_y \in [-1,+1]^N} \|\mathbf{v}_y - \mathbf{y}_s^{(t+\frac{1}{2})}\|$.
  $t = t + 1$.
  $\delta_{GD} = \|\mathbf{y}_s^{(t+1)} - \mathbf{y}_s^{(t)}\|_2^2$.
$\mathbf{p}_s = \frac{\mathbf{y}_s^{(t)} + 1}{2}$.
Based on this probability parameter vector $\mathbf{p}$, sample G RIS phase-shift vectors.
Choose the best RIS phase-shift vector $\boldsymbol{\theta}_{best}$ among them based on the resulting SINR.
$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_{best}$.

2）RIS优化：在本小节中，我们的目标是在 RIS 元件具有离散特性的情况下，最大化式（26）给出的信干噪比。优化问题描述如下：

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \{-1,+1\}^N} \quad -\frac{f_s(\boldsymbol{\theta})}{f_I(\boldsymbol{\theta})}. \tag{27}$$

由于该问题的定义域是离散的，且问题属于分式二次规划，一种常见的求解方法是放松离散域，然后将解投影到最近的离散点。在 [21] 中，通过梯度下降来解放松后的问题。需要注意的是，我们也在仿真结果中考虑了半定松弛。我们通过重构式（3）处理该问题，并将其转化为一个连续的定义域问题。重构后的问题如下：

$$\min_{\mathbf{y}_s \in [-1,+1]^N} \quad -\mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta} \sim \mathbb{P}_B(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p}_s)} \left[\frac{f_s(\boldsymbol{\theta})}{f_I(\boldsymbol{\theta})}\right], \tag{28}$$

其中，假设 $\mathrm{y}_s = 2\mathrm{p}_s - 1$ and $\boldsymbol{\theta}$ 服从联合概率密度函数

$$\mathbb{P}_B(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p}_s) = \prod_{n=1}^{N} \left(\delta(\theta_n - 1) p_{s,n} + \delta(\theta_n + 1)(1 - p_{s,n})\right), \tag{29}$$

其中，$p_{s,n} \in [0,1]$ 是 p_s and $\theta_n \in \{-1,+1\}$的第 n 个元素。我们提出了两种求解式（28）的方法：a）随机采样方法（SSA）；b）解析梯度下降方法。前一种方法通常不需要梯度的显式表达式，而后一种方法则需要。在 SSA 中，通常会在梯度下降算法中使用一种典型的梯度估计器，该估计器基于对数导数技巧和蒙特卡洛采样，如 [42], 中所述。在此基础上，我们提出了 SSA-B，这是一种针对二元变量、使用相同对数导数技巧和蒙特卡洛采样的 SSA 特例。此处省略 SSA-B 的细节，因为这种针对二元变量的 SSA 变体已经在另一种背景下出现过，即 [11] 中的贝叶斯最优实验设计。有关 SSA-B 的详细介绍，请参阅 [11, 算法 3。1]接下来，我们将详细介绍针对该案例研究的解析优化方法。在下一个案例研究中，我们将针对非二元随机向量明确推导 SSA，这直接源于我们在第二节中严格推导的一般概率重构技术。

在解析梯度下降方法中，直接计算相关随机变量比值的期望较为困难。因此，我们考虑对此类期望进行泰勒级数近似 [43]。一阶近似$\mathcal{J}_1(\mathrm{y}_s)$和二阶近似 $\mathcal{J}_2(\mathrm{y}_s)$如下所示：

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1(\mathbf{y}_s) &= \frac{\mathrm{E}[f_s(\boldsymbol{\theta})]}{\mathrm{E}[f_I(\boldsymbol{\theta})]} = \frac{\mu_{qf}(\mathbf{R}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{y}_s)}{\mu_{qf}(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}, \\
\mathcal{J}_2(\mathbf{y}_s) &= \mathcal{J}_1(\mathbf{y}_s) - \frac{\mathrm{E}[f_s(\boldsymbol{\theta}) f_I(\boldsymbol{\theta})]}{\mathrm{E}^2[f_I(\boldsymbol{\theta})]} + \frac{\mathrm{E}[f_I^2(\boldsymbol{\theta})]\mathrm{E}[f_s(\boldsymbol{\theta})]}{\mathrm{E}^3[f_I(\boldsymbol{\theta})]}.
\end{aligned} \tag{30}$$

二阶近似还需要另外两个期望，这两个期望及其梯度已在式（31）中推导得出。利用式（31）中的定义，我们可以将泰勒级数近似的梯度表示如下：

$$\nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_1(\mathbf{y}_s) = \frac{\vartheta_{qf}(\mathbf{R}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{y}_s) - \mathcal{J}_1(\mathbf{y}_s) \vartheta_{qf}(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}{\mu_{qf}(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_2(\mathbf{y}_s) = \nabla_{\mathbf{y}_s} \mathcal{J}_1(\mathbf{y}_s) - \frac{\vartheta_{cv}}{\mu_{qf}^2(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)} + \\
\mu_{qf}(\mathbf{R}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{y}_s) \left(\frac{\vartheta_v}{\mu_{qf}^3(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)} - \frac{3v(\mathbf{y}_s)\vartheta_{qf}(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}{\mu_{qf}^4(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}\right) + \\
\frac{2c_v(\mathbf{y}_s)\vartheta_{qf}(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}{\mu_{qf}^3(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)} + \frac{v(\mathbf{y}_s)\vartheta_{qf}(\mathbf{R}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{y}_s)}{\mu_{qf}^3(\mathbf{K}, \mathbf{s}, \mathbf{y}_s)}.
\end{aligned} \tag{33}$$

请注意，这些结论未给出证明，因为利用基本的链式法则即可轻易推导出来。有了这些梯度，我们便可以构建简单的投影更新规则

$$c_v(\mathbf{y}_s)=\mathrm{E}[f_s(\boldsymbol{\theta})f_I(\boldsymbol{\theta})]=\frac{\mu_{qs}(\mathbf{R}_0+\mathbf{K},\mathbf{y}_s)-\mu_{qs}(\mathbf{R}_0+\mathbf{K},\mathbf{y}_s)}{4}+\mu_{ql}(\mathbf{R}_0,\mathbf{s},\mathbf{y}_s)+\mu_{ql}(\mathbf{K},\mathbf{c}_0,\mathbf{y}_s)+\mathbf{c}_0^T\left((\mathbf{y}_s\mathbf{y}_s^T)\odot\mathbf{E}_m+\mathbf{I}_N\right)\mathbf{s},$$
$$\vartheta_{cv}=\nabla_{\mathbf{y}_s}c_v(\mathbf{y}_s)=\frac{\vartheta_{qs}(\mathbf{R}_0+\mathbf{K},\mathbf{y}_s)-\vartheta_{qs}(\mathbf{R}_0+\mathbf{K},\mathbf{y}_s)}{4}+\vartheta_{ql}(\mathbf{R}_0,\mathbf{s},\mathbf{y}_s)+\vartheta_{ql}(\mathbf{K},\mathbf{c}_0,\mathbf{y}_s)+\mathbf{s}\odot(\mathbf{E}_m(\mathbf{c}_0\odot\mathbf{y}_s))+$$
$$\mathbf{c}_0\odot(\mathbf{E}_m(\mathbf{s}\odot\mathbf{y}_s)),\quad v(\mathbf{y}_s)=\mathrm{E}[f_I^2(\boldsymbol{\theta})]=\mu_{qs}(\mathbf{K},\mathbf{y}_s)+\mathbf{s}^T\left((\mathbf{y}_s\mathbf{y}_s^T)\odot\mathbf{E}_m+\mathbf{I}_N\right)\mathbf{s}+2\mu_{ql}(\mathbf{K},\mathbf{s},\mathbf{y}_s),$$
$$\vartheta_v=\nabla_{\mathbf{y}_s}v(\mathbf{y}_s)=\vartheta_{qs}(\mathbf{K},\mathbf{y}_s)+2\mathbf{s}\odot(\mathbf{E}_m(\mathbf{s}\odot\mathbf{y}_s))+2\vartheta_{ql}(\mathbf{K},\mathbf{s},\mathbf{y}_s).\tag{31}$$

梯度下降算法如下:

$$\mathbf{y}_s^{(t+\frac{1}{2})}=\mathbf{y}_s^{(t)}-\beta^{(t)}\nabla_{\mathbf{y}_s}\mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)}),\tag{34}$$
$$\mathbf{y}_s^{(t+1)}\in\min_{\mathbf{v}_y\in[-1,+1]^N}\|\mathbf{v}_y-\mathbf{y}_{(t+\frac{1}{2})s}\|_2,\tag{35}$$

其中，$\mathbf{y}_s^{(t)}=2\mathbf{p}_s^{(t)}-\mathbf{1}$ 是在第 t次迭代时经变换的概率向量，$\beta^{(t)}$ 为步长，$\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{J}_l(\mathbf{y}_s^{(t)})$是在 $l\in\{1,2\}$条件下真实期望的 l阶泰勒近似的梯度。步骤（34）和（35）分别被视为梯度步和投影步。对于我们的盒约束，投影即是将向量 $\mathbf{y}_{(t+\frac{1}{2})s}$截断至 -1和 $+1$之间。我们还采用 Armijo-Goldstein（AG）线搜索 [44] 来寻找合适的步长；由于其递减特性，它能够避免鞍点 [45]。GD 方法的完整细节见算法1。请注意，根据备注1，可行的离散 $\boldsymbol{\theta}$ 也是可行的 $\mathbf{x}$，并且对应于生成 $\boldsymbol{\theta}$的退化概率密度函数本身。因此，我们找到使反射信号的相位与直达信号相位对齐的向量:

$$\varphi_n^{\text{init}}=e^{-j\left(\arg(\mathbf{h}_{c0})_n-\arg(h_{d_0})\right)},\quad\forall n=1,2,\ldots,N,\tag{36}$$

其中，$(\mathbf{h}_{c0})_n$ 表示 $\mathbf{h}_{c0}$ 的第 n 个元素，并将其投影到 $\{-1,+1\}$，以获得可行的 $\mathbf{y}_{\text{init}}$。投影梯度下降后，我们采样 G 个可行解，并选出其中最优的解。完整流程见算法1。请注意，与案例研究相关的数值结果将在下一节讨论。

B. 可重构智能表面辅助系统中的开销感知速率与能效最大化

为了解决另一种典型场景，我们现在聚焦于可重构智能表面子问题：要配置可重构智能表面以优化所选性能指标，首先需要确定最优反射单元数量 N_{opt}。然而，这仅适用于较简单的目标函数形式 [46]。为克服这一限制，我们提出一种全面的随机采样方法，可优化更复杂的目标函数形式，包括考虑干扰时的速率和能量效率，从而避免显式计算 N_{opt}。

1) 系统模型：我们的系统模型完全由式 (25) 中的信号模型决定。此外，我们还纳入了 [46]，[47] 中提出的开销和功耗模型。我们还假设每个 RIS 单元都能够关闭或 $\boldsymbol{\theta}\in\{-1,0,+1\}^N$。请注意，这使我们无需显式推导 N_{opt}。我们还假设估计信道是可靠的。现在，我们在考虑干扰和信道估计的情况下定义系统速率开销如下:

$$R(\boldsymbol{\theta})=\left(1-\frac{T_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)+T_F(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)}{T}\right)\times B\log_2\left(1+\frac{\beta_0|h_{d_0}+\mathbf{h}_0^H\mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_0|^2}{\sum_{i=1}^{N_I}\beta_i|h_{d_i}+\mathbf{h}_i^H\mathrm{diag}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_i|^2+\sigma_w^2}\right),\tag{37}$$

其中，带宽表示为 B，噪声方差为$\sigma_w^2=BN_0$，N_0 为噪声功率谱密度，时隙的总时长表示为 T，$T_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)$ 表示信道估计所需的时间，$T_F(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)$ 表示 RIS 配置的反馈时长。信道估计时间和反馈时长取决于 RIS 元件的数量 $\|\boldsymbol{\theta}\|_0$，其表达式如下，

$$T_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)=T_0(\|\boldsymbol{\theta}\|_0+1),$$
$$T_F(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)=\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|_0 b_F}{B_F\log\left(1+p_F\left|h_F\right|^2/(N_0B_F)\right)},\tag{38}$$

其中，T_0 是每个导频音的持续时间，$b_F=2$ 是用于表示每个RIS单元状态的比特数。此外，B_F、p_F和 h_F 分别表示反馈阶段的通信带宽、发射功率和有效信道。随后，总功耗可表示为

$$P_{tot}(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)=P_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)+\left(1-\frac{T_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)}{T}\right)\mu p+\frac{T_F(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)}{T}(\mu_F p_F-\mu p)+\|\boldsymbol{\theta}\|_0P_{c,n}+P_{c,0},\tag{39}$$

其中，$P_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)=\frac{P_0T_E(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)}{T}$ 是信道估计阶段的功耗，P_0 表示每个导频音的功率，p 是数据传输阶段的最大发射功率，$P_{c,n}$ 是运行每个RIS单元所需的功率，$P_{c,0}$ 是其余系统组件的静态硬件功耗。此外，$\frac{1}{\mu}$ 和$\frac{1}{\mu_F}$分别表示数据传输阶段和反馈阶段的发射放大器效率。最后，系统的能量效率定义为:

$$EE(\boldsymbol{\theta})=\frac{R(\boldsymbol{\theta})}{P_{tot}(\|\boldsymbol{\theta}\|_0)}.\tag{40}$$

在此系统模型中，RIS 元件的数量选为 $N=\min(N_{max},N_0)$，其中 N_{max} 是一个参数，N_0是满足 $T_E(N_0)+T_F(N_0)<T$的最大整数。此条件确保速率切合实际。

2) RIS优化：一般的优化问题可表示为,

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\{-1,0,+1\}^N}\ \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}),\tag{41}$$

算法 2：用于优化
算法 3 中子问题的 $\mathbf{r} \in \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$

输入：系统参数和信道，$\mathbf{r}_{\text{init}}$, t_{max}, ϵ_t, β_s, N_e, b_m
输出：$\mathbf{r}^*$
初始化 $t = 1$，$\delta_{SGD} = 1$，并令 $\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{r}_{\text{init}}$.
定义 $\bar{\mathbf{s}} = \begin{cases} \mathbf{p}, & \mathbf{r} = \mathbf{q} \\ \mathbf{q}, & \mathbf{r} = \mathbf{p} \end{cases}$
当 $\delta_{SGD} \le \epsilon_t$ 且 $t \le t_{max}$ 时 **do**
  计算 $\hat{b}^*_{\mathbf{r}}$ 根据引理 5。
  根据 (45) 计算 $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{r}}$。
  $\mathbf{r}^{(t+\frac{1}{2})} = \mathbf{r}^{(t)} - \beta_s \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^{(t+1)} \in \min_{\mathbf{v}_r \in [0,1]^N} \|\mathbf{v}_r - \mathbf{r}^{(t+\frac{1}{2})}\|_2$，满足 $\mathbf{r} \le \mathbf{1}_N - \bar{\mathbf{s}}$。
  $t = t + 1$。
  $\delta_{SGD} = \|\mathbf{r}^{(t+1)} - \mathbf{r}^{(t)}\|_2^2$.
$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^{(t+1)}$.

算法 3：SSA-T（基于块坐标下降框架）输入：系统参数和信道，ϵ, G_s输出：$\boldsymbol{\theta}^*$用随机向量初始化 $\mathbf{q}^*$，$i = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\Delta = \epsilon + 1$，并将 $\boldsymbol{\theta}_0$ 初始化为全零。当 $\Delta > \epsilon$ 时，执行以下操作：在固定 $\mathbf{q}^*$的情况下，通过算法 2 获得 $\mathbf{p}^*$。在固定 $\mathbf{p}^*$的情况下，通过算法 2 获得 $\mathbf{q}^*$。根据得到的 $\mathbf{p}^*$和 $\mathbf{q}^*$生成 G_s 个 $\boldsymbol{\theta}$ 样本。设置 $\gamma_{i+1} = \frac{1}{G_s} \sum_{g=1}^{G_s} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}\{g\})$ 和 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}\{g^*\}$，其中 g^* 是提供最佳目标值的随机样本的索引。如果 $\gamma_{i+1} \le \gamma_i$，则 $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i$；评估 $\Delta = |\gamma_{i+1} - \gamma_i|/\gamma_i$。$i = i + 1$。$\boldsymbol{\theta}^* = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}$。

其中 $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})$ 可以是 $-R(\boldsymbol{\theta})$ 或 $-EE(\boldsymbol{\theta})$。由于干扰项和 L0 范数的存在，目标函数是非光滑且非凸的，因此我们借助引理1，将问题重述如下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (0,1)^N} \quad & \mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta} \sim \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})} \left[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})\right], \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} + \mathbf{q} \le \mathbf{1}_N. \end{aligned} \tag{42}$$

我们假设 $\boldsymbol{\theta}$ 或 θ_n 的第 n 个元素是一个独立分类随机变量，其取值为 $+1$ 的概率为 q_n，对应于 $\mathbf{q}$ 的第 n 个元素；取值为 -1 的概率为 p_n，对应于 $\mathbf{p}$ 的第 n 个元素。该三元随机向量的联合概率密度函数可表示为：

$$\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q}) = \prod_{n=1}^{N} p_n^{\frac{\theta_n(\theta_n-1)}{2}} q_n^{\frac{\theta_n(\theta_n+1)}{2}} (1 - p_n - q_n)^{1-\theta_n^2}. \tag{43}$$

式（42）中耦合优化变量的存在使问题变得复杂。为解决这一问题，我们采用块坐标下降（BCD）框架。该方法将包含两组耦合变量的问题解耦为两个易于处理的子问题，每个子问题在固定另一组变量的同时，仅处理其中一组变量。这种方法不仅简化了问题，也受到 Dykstra算法在凸集交集上的投影与 BCD [48] 之间联系的启发。最终，我们使用 SSA 求解 BCD 结构所产生的子问题，如前一个案例研究所示。

首先，假设 $\mathbf{q}$ 固定，对式 (41) 中的目标函数求梯度。请注意，将 $\nabla_{\mathbf{p}}$ 替换为 $\nabla_{\mathbf{q}}$，即可轻松推导出 $\mathbf{p}$ 固定时以下所有推导过程，因此不再明确给出。不过，我们会在相应的引理中提供这些结果。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\mathbf{p}} =& \nabla_{\mathbf{p}} \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})\right] \overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^{3^N} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}\{k\}) \nabla_{\mathbf{p}} \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{k\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) \\ \overset{(b)}{=}& \sum_{k=1}^{3^N} \left(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}\{k\}) \nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{k\}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right) \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{k\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) \\ \overset{(c)}{=}& \mathrm{E}\left[\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) \nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right], \end{aligned} \tag{44}$$

其中，(a) 来自期望的定义，$\boldsymbol{\theta}\{k\}$表示按任意索引顺序排列的所有 3^N种可能组合中的第 k种，(b) 来自恒等式$\nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|(\mathbf{p},\mathbf{q}))} \nabla_{\mathbf{p}} \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})$，而 (c) 则将求和转换为期望。随机优化方法中该梯度的蒙特卡洛近似为：

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}\{j\}) \nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}), \tag{45}$$

其中，N_e 是所使用的样本数。为完整起见，并在不大幅增加N_e 的情况下减小该估计量的方差，我们在目标函数中引入基线 $b_{\mathbf{p}}$。此类估计量的形式如下：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} =& \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \left(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}\{j\}) - b_{\mathbf{p}}\right) \nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) \\ =& \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} \mathbf{d}_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \tag{46}$$

其中，$\mathbf{d}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q})$。注意，$\mathrm{E}[\mathbf{d}_{\mathbf{p}}] = 0$，原因如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})] =& \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})} \nabla_{\mathbf{p}} \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right] \\ \overset{(a)}{=}& \nabla_{\mathbf{p}} \sum_{k=1}^{3^N} \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{k\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0, \end{aligned} \tag{47}$$

其中，(a) 来自将期望展开为求和。利用这一结果，我们还可以证明这两个估计量都是无偏的，且 $\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] = \mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] = \mathbf{g}_{\mathbf{p}}$。在下一个引理中，我们给出三元随机向量的关键梯度结果，该向量在随机采样方法中起着重要作用。

引理 4. 联合概率密度函数对数关于

p 和 q 的梯度为：

$$\nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\theta_n\{j\}(\theta_n\{j\}-1)}{2p_n} + \frac{(\theta_n\{j\}^2-1)}{1-p_n-q_n} \right) \mathbf{e}_n, \quad (48)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\theta_n\{j\}(\theta_n\{j\}+1)}{2q_n} + \frac{(\theta_n\{j\}^2-1)}{1-p_n-q_n} \right) \mathbf{e}_n, \quad (49)$$

其中，$\mathbf{e}_n$ 是长度为 N的第 n个单位向量。

证明：我们首先代入联合概率密度函数：

$$\begin{aligned}&\nabla_{\mathbf{p}} \log \mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\theta_n\{j\}(\theta_n\{j\}-1)}{2} \nabla_{\mathbf{p}} \log p_n \\ &+ (1-\theta_n\{j\}^2) \nabla_{\mathbf{p}} \log(1-p_n-q_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\theta_n\{j\}(\theta_n\{j\}-1)}{2p_n} + \frac{(\theta_n\{j\}^2-1)}{1-p_n-q_n} \right) \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (50)$$

类似地，梯度 $\nabla_{\mathbf{q}}$log $\mathbb{P}_E$($\boldsymbol{\theta}\{j\}$|p,q)可以很容易地推导得到。■

有了这些重要的梯度，我们将在下一个引理中找出式（46）所定义估计量的最优基线。

引理 5. 关于p和q的最优基线为

$$b_{\mathbf{p}}^* = \frac{N_e}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n} + \frac{1}{1-p_n-q_n}} \mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T \mathbf{d}_{\mathbf{p}}],$$

$$b_{\mathbf{q}}^* = \frac{N_e}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{q_n} + \frac{1}{1-p_n-q_n}} \mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{q}}^T \mathbf{d}_{\mathbf{q}}], \quad (51)$$

其中，ˆgq 和dq 可通过分别将式（45）和（46）中的 $\nabla_{\mathbf{p}}$ 替换为 $\nabla_{\mathbf{q}}$ 来求得。

Proof: See Appendix D. ■

注 3. 我们还可以通过取 b_mˆ 批次的 N_e 数据点并求其平均值，得到 $b_{\mathbf{p}}^*$，以便在算法中使用，从而近似 E[ˆ$\mathbf{g}_{\mathbf{p}}^T \mathbf{d}_{\mathbf{p}}$] 。

现在，我们已具备开发适用于三元随机变量的随机采样方法所需的全部信息。用于求解子问题的算法如算法 2 所示，块坐标下降架构如算法 3 所示。在算法 2 中，$\mathbf{r}_{\text{init}}$ 的各个元素相互独立且服从相同的均匀分布 $\mathcal{U}(0, r_{max})$（i.i.d.），其中 $0 < r_{max} \leq 1$。通过选取较小的 r_{max}，我们可以控制解的初始稀疏度。

C. 最坏情况下的计算复杂度讨论

在本小节中，我们采用大 O 符号推导所提算法的最坏情况计算复杂度。然而，需要指出的是，基于梯度下降的算法的复杂度无法简单地用大 O 符号表示，因为收敛所需的迭代次数在很大程度上取决于初始点，因而无法精确确定 [49]。在相关文献中，迭代次数被视为一个参数，随后使用大 O 符号表示复杂度 [50]，[51]。在本小节中，我们采用相同的方法，同时在大 O 表达式中保留更多项，以便更好地比较所提算法。基于前面的讨论，这些算法基于五项基本操作：梯度计算、下降投影、内循环、外循环和采样。对于所有算法，下降投影操作的复杂度均为 $O(N)$。关于内循环操作，对于分别采用一阶和二阶泰勒近似的 E-GD，以及采用二元和三元变量的随机采样方法，基于梯度下降的算法分别需要 I_{E_1}、I_{E_2}、I_1 和 I_2 次迭代才能收敛。通常无需进行外循环迭代，采用三元变量的随机采样方法除外，这是由于块坐标下降框架所致。在这种情况下，我们假设需要 I_{BCD} 次迭代才能实现收敛。

1) 使用一阶泰勒级数近似的 E-GD：对于该算法，梯度计算步骤的复杂度主要由式 (32) 中二次型所涉及的矩阵乘法决定，其复杂度为 $O(N^2)$。由于需要对目标函数进行 G 次求值，采样步骤还会增加 $O(GN^2)$ 的复杂度，因此总复杂度为 $O(I_{E_1}(N^2+N) + GN^2)$。

2）采用二阶泰勒级数近似的 E-GD：对于该算法变体，梯度计算步骤主要受根据定理 2 计算矩阵U所需的矩阵乘法影响，其复杂度为 $O(N^4)$。其他步骤与一阶版本具有相同的复杂度，因此总复杂度为 $O(I_{E_2}(N^4+N) + GN^2)$。

3）针对二元变量的随机采样：该算法的第一步，即梯度估计器计算，主要由 N_{ens} 次目标函数评估主导，因此复杂度为 $O(N_{ens}N^2)$。由于需要进行 G_s 次目标函数评估，采样步骤的复杂度为 $O(G_sN^2)$，从而使总体复杂度为 $O(I_1(N_{ens}N^2+N) + G_sN^2)$。

4）针对三元变量的随机采样：该算法与二元变体之间的主要差异在于目标函数评估；由于额外的 L0范数计算，其复杂度为 $O(N^2+N)$。因此，总复杂度为 $O(I_{BCD}I_2(N_{ens}(N^2+N)+N)+G_sN^2)$。

IV. 仿真结果

在仿真结果中，我们重点研究一种典型（或许也是实际应用中最相关）的可重构智能表面场景：当直达路径被阻挡时，RIS 能够显著提升性能，即创建虚拟视距（LoS）链路，如 [14], [21], [52] 所示。整个仿真过程中，我们始终采用这一假设。此外，我们还考虑系统工作在高干扰状态，其中存在一个干扰源，其平均功率与用户的平均功率相近。这也凸显了我们所开发的算法应对高

干扰的能力。两种情况下采用的通用仿真参数为 $\beta_i = p\delta_{PL}$，其中 p为发射功率， $\delta_{PL} = -110$ dB、 $B = 5$ MHz 和 $N_0 = -174$ dBm/Hz [46]。此外，所有信道均服从莱斯分布，莱斯因子为 4；本节中的所有结果均对 1000 次独立信道实现取平均。

A. SINR 最大化与 RIS优化

在此应用中，我们将所开发算法的可达容量$C_{cap} = \log_2(1+\gamma)$与常用的半定松弛方法和CPP方法进行比较。发射功率 p 设为 0 dBm。算法参数为 $\varrho = 0.5$、 $\varepsilon = 0.0005$、 $\epsilon_{th} = 10^{-2}$、 $\beta_{\text{init}} = 0.01$ 和 $G = 100$。我们提出的一阶和二阶解析梯度下降算法分别记为 E-GD-1 和 E-GD-2，而我们提出的随机采样方法记为 SSA-B。文献 [21] 中针对连续相移所提出的梯度下降算法，其解投影到离散相移后也可作为基线，记为 CPP-1。将式 (27) 的约束放宽为连续约束后，其解对应的 CPP 记为 CPP-2。请注意，E-GD-1 与 CPP-2 唯一的区别在于最后的采样步骤：前者将解视为概率向量，而后者将其投影到 $\{-1,+1\}$ 以得到一个解。式 (36) 中简单信号对齐方案的 CPP 记为 SA。CPP 方法被用作比较基线，因为它们在速度方面更实用，而且相较于传统的分支定界方法（其计算规模难以随元素数量扩展），在文献中更常用。

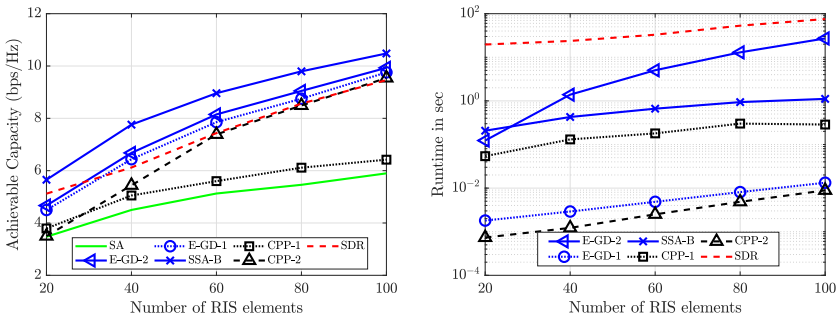
从图1a中可以看出，对于所有 N，所有基于期望的算法的表现都优于 CPP 算法；对于 $N > 20$，其表现也优于半定松弛。此外，SSA-B 的表现优于采用近似方法计算期望的基于期望的 EGD 算法。SSA-B 的优势在于其稳健的梯度估计无需依赖泰勒级数近似，因此结果更精确。此外，增大样本量可以提高 SSA-B 梯度估计的精度，但也会增加计算成本。此外，CPP-1 的表现不如 CPP-2，这是因为 CPP-1 针对具有单位模约束的连续可重构智能表面相移设计，其可重构智能表面优化变量的取值范围涵盖从 0 到 2π 的所有角度，对应于所有单位模复增益的集合。相比之下，CPP-2 的取值范围从 -1 到 1，更接近 $\{-1,+1\}$ 的原始取值范围。随着 RIS 元件数量增加，这种差异会更加明显，而且 CPP-2 带来的可达容量提升幅度比 CPP-1 更大。

在图1b中，我们绘制了所有算法在RIS 元件数量变化时单次迭代的运行时间。这些结果来自在配备16GB内存的3.6GHz Intel Core i7-4790 8核CPU系统上进行的仿真，该仿真用于生成图1a。从图中可以看出，SSA-B的运行时间介于E-GD-1和E-GD-2方法之间，而SDR的运行速度慢得难以接受。我们提出的E-GD-2方法的运行时间优于SDR，但由于梯度计算较为复杂，仍慢于其一阶对应方法。我们的解析梯度下降算法的总体性能取决于梯度复杂度与期望近似精度之间的权衡。这些仿真结果展示了基于期望的算法在离散优化问题中的优越性，并为此类解析期望推导提供了重要见解。

B. RIS 辅助系统中考虑开销的速率与能效最大化

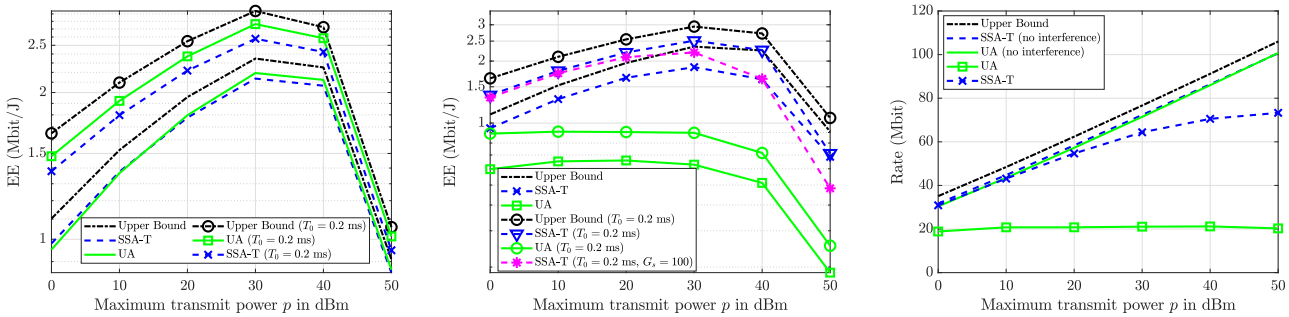
在此应用中，我们采用随机采样方法最大化系统的速率和能量效率。作为基线，我们将其与 [46] 中无干扰情形下的解投影到离散 RIS 相移后的结果进行比较。需要指出的是，存在干扰时，该基线不再适用，因为计算 RIS 单元最优数量所需的单峰性取决于无干扰时简单的目标结构。仿真参数根据 [46]设置： $B_F = 1$ MHz、$P_{c,0} = 45$ dBm、$P_{c,n} = 10$ dBm、 $\mu = \mu_F = 1$、 $T_0 = 1$ ms、 $p_F = 30$dBm、 $P_0 = 10$ dBm、 $T = 100$ ms 和 $N_{max} = 300$。优化算法参数为： $\epsilon = 10^{-6}$、 $N_e = 200$、$b_m = 10$、 $r_{max} = 0.1$、 $t_{max} = 300$、 $G_s = 10000$、 $\epsilon_t = 10^{-8}$、$\beta_s = 0.5$ （用于能效优化），以及 $\beta_s = 0.01$ （用于速率优化）。在仿真图中，上界通过 [46]提出的单峰方法（UA）计算，即在无干扰情况下采用最优连续相移。该方法的 CPP 也作为基线，记为 UA；我们的算法则记为 SSA-T，即针对三元变量的随机采样方法。

在图2a中，我们绘制了无干扰时随发射功率变化所达到的平均能量效率。对于 $T_0 = 1$ ms，我们的算法与单峰方法的表现非常相近。然而，对于 $T_0 = 0.2$ ms，在 $p = 30$ dBm 时，我们的算法所达到的能量效率比 UA 低 0.18 兆比特 / 焦耳。UA 方法在无干扰的连续 RIS 情形下可获得最优结果——这一情形可视为干扰为零的一般形式的特例——而且该方法自然也能很好地扩展到离散情形。相比之下，我们所提算法的适用范围更广，能够处理任意形式的目标函数。尽管这种灵活性有其优势，但代价是无法保证最优性，因此观察到的性能表现完全在预期之中。我们的算法在处理干扰方面独具优势，并且能够适用于任意一般形式的目标函数，而 UA 方法在这方面则明显表现不佳。因此，UA 方法在这一特定情况下表现更优并不意外，因为它正是专为无干扰场景设计的。这一区别凸显了随机采样方法的独特适用场景：当连续问题存在可靠的解时，离散投影可能就已足够。然而，当目标函数变得复杂时，即使其连续形式也是如此，我们所提算法便能发挥优势，在其他方法可能表现不佳的情况下提供高质量解。我们还可以观察到，在高发射功率区域，随着功耗占据主导，能量效率会下降，而我们的算法逐渐接近单峰方法和上界。



(a) 可达容量。 (b) 算法运行时间。

图1：所开发算法的比较。



(a) 无干扰时的能量效率与 p 的关系。 (b) 有干扰时的能量效率与 p 的关系。 (c) 速率与 p的关系。

图2：发射功率为 p dBm 时的性能。

	0 dBm	10 dBm	20 dBm	30 dBm	40 dBm	50 dBm
UA（$T_0 = 0.2$毫秒）	70.8	59.7	51.7	46.4	49.2	94.5
UA（$T_0 = 1$毫秒）	21.1	17.3	14.64	13	13.4	23.6
SSA-T（$T_0 = 0.2$毫秒）	52.7	47.4	46	46.1	47.9	40.7
SSA-T（$T_0 = 1$毫秒）	17.4	14.6	13.5	13.4	13.2	14.7

TABLE I：存在干扰时，使能量效率最大化所需的 RIS 元件平均数量（ p变化）

在图 2b 中，我们绘制了存在干扰时随发射功率变化所达到的平均能量效率。在存在干扰的情况下，如第三节所述，横轴上显示的发射功率表示用户和干扰源各自的最大发射功率。这模拟了一种非合作场景，其中每个实体都同时以峰值功率发射，以最大化自身性能。我们观察到，我们的算法仍然接近上界，而单峰方法则如预期般失效。我们还可以观察到， T_0越低，整体性能越好。原因有两方面：a）由于信道估计时间较短，我们有更多时间传输数据；b）能够为 RIS 单元提供更多开销，因此可以使用更多 RIS 单元。这一点可通过表 I 验证，其中我们报告了存在干扰时，为最大化能量效率而使用的 RIS 单元平均数量随发射功率的变化情况。我们还可以观察到图中 G_s 的影响。当 $G_s = 100$较低时，在 $p = 30$ dBm 下达到的能量效率比默认参数$G_s = 10000$情形低约 0.62 兆比特/焦耳。最后，在图 2c 中，我们观察到，在速率最大化问题中，无论是否存在干扰，所提算法的表现都比 UA 方法更接近上界。在无干扰的情况下，SSA-T 的性能略高于 UA。然而，在存在干扰的情况下，SSA-T 相较于 UA 的优势变得十分显著。此外，随着我们提高最大发射功率，可以明显看出，通过我们提出的方法实现的可达速率会达到饱和上限。这一上限是由干扰功率随用户发射功率成比例增加所导致的，而离散 RIS 无法完全抑制这种干扰。

五、结论

本文提出了一种适用于一般离散优化问题的新型概率重构技术。具体而言，我们将离散优化变量解释为分类随机向量，并对目标函数以及存在的任何约束取期望。我们从数学上严格证明：对于无约束问题，其唯一最优解对应的退化概率密度函数是变换后问题的唯一最优解；对于约束问题，变换后问题的原始解介于原问题的对偶解与原始解之间，这意味着变换后问题是原问题的松弛。然而，若强对偶性成立，变换后问题将与原约束问题具有相同的

目标值。我们还探讨了一个简单的二路划分问题，以进一步理解这种重构方法，例如它与半定松弛的相似性，以及改变问题结构的能力。最终，我们将该技术用于解决两类典型的离散 RIS 应用：a）SINR 最大化；b）考虑开销的速率和能效最大化。如 RIS 应用所示，这种重构方法既能对原问题作随机解释，也能作解析解释。对于 SINR 最大化问题，我们提出了一种基于期望闭式近似的解析梯度下降技术；同时，我们为这两类应用都提出了随机采样方法。数值结果揭示了所提解析梯度下降方法中梯度复杂度与近似精度之间存在根本性的权衡，并且基于期望的算法优于所评估的其他算法。仿真结果还表明，我们提出的框架具有很强的通用性，只需对算法稍作改动，便能很好地解决速率和能效最大化问题。具体而言，我们表明，当不存在干扰时，该框架的表现与专为无干扰情形设计的算法相当；即使存在干扰，它也能保持良好的性能。我们还明确计算了所提算法的最坏情况计算复杂度。鉴于该技术适用范围广泛，未来工作将利用它开发更精细的投影梯度下降框架，并提出一种处理约束问题的通用方法。

附录

A. 定理 1 的证明

期望可通过将矩阵表达式转换为级数和来计算，如下所示，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x}\mathbf{z}^T\mathbf{x}] = \quad & 2\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\sum_{j=1,k=j}^{n}\mathrm{E}[x_i]G_{ij}z_j + \\ \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{n}z_kx_k\sum_{i=1,i=j}^{n}x_i^2G_{ii}\right] + & \mathrm{E}\left[\sum_{i\neq j\neq k,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_ix_jx_kG_{ij}z_k\right] \\ \overset{(a)}{=} 2\mathbf{y}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{z} + \mathbf{z}^T\mathbf{y}\mathrm{Tr}(\mathbf{G}) & + \sum_{i\neq j\neq k,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_iy_jy_kG_{ij}z_k.\end{aligned} \tag{52}$$

在步骤 (a) 中，我们利用 G 是实对称矩阵这一事实，$x_i^2 = 1$，以及 $\mathrm{E}[x_i] = y_i$。第三项可表示为以下形式：

$$\sum_{i\neq j\neq k,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_iy_jy_kG_{ij}z_k = \begin{bmatrix}y_1z_1\\y_2z_2\\\vdots\\y_nz_n\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{y}^T\mathbf{G}_1\mathbf{y}\\\mathbf{y}^T\mathbf{G}_2\mathbf{y}\\\vdots\\\mathbf{y}^T\mathbf{G}_n\mathbf{y}\end{bmatrix}, \tag{53}$$

其中，G_i 表示将矩阵 G 的第 i 行和第 i 列置零后得到的矩阵。用矩阵形式表示，可写为 $\mathbf{1}^T\{(\mathrm{G}_{wd}\mathrm{Y}_{wd}) \odot \mathrm{Y}_{wd}\}(\mathbf{y} \odot \mathbf{z})$，其中 $\mathrm{Y} = \mathbf{y}\mathbf{1}^T$。证明完毕。

B. 定理 2 的证明

我们首先展开式 (54) 中的一般二次项，以此开始证明。在式 (54) 中，矩阵$\mathrm{U} = [\mathrm{I}_N \otimes (\mathbf{y} \odot \mathbf{y})^T]\mathrm{B}$，矩阵 B 按分块定义如下：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_{1,1},\ldots,\mathbf{b}_{1,N}\\\cdots,\cdots,\cdots,\\\mathbf{b}_{N,1},\ldots,\mathbf{b}_{N,N}.\end{bmatrix}, \tag{55}$$

其中，$\mathbf{b}_{k,\,j}$的第 i 个元素为 $\mathbf{b}_{k,\,j}^{i} = G_{wd_{ij}}G_{wd_{ki}}$。

考虑到最终表达式中不含数值系数的第 d 项记为 $S_d(\mathbf{x})$，上述表达式可表示为

$$q_s(\mathbf{x}) = S_1(\mathbf{x}) + S_2(\mathbf{x}) + 2S_3(\mathbf{x}) + 4S_4(\mathbf{x}) + S_5(\mathbf{x}). \tag{56}$$

考虑到 $x_i^2 = 1$，二次型的二阶矩可表示为，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[q_s(\mathbf{x})] = \mathrm{Tr}(\mathbf{G})(\mathbf{y}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{y} + \mathrm{Tr}(\mathbf{G})) + \mathrm{Tr}(\mathbf{G})\mathbf{y}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{y} + \\ 2\mathrm{Tr}(\mathbf{Z}) + 4\mathbf{y}^T\mathbf{Z}_{wd}\mathbf{y} + \sum_{l=1,i\neq j\neq k\neq l}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}y_iy_jy_ky_lG_{ij}G_{kl},\end{aligned} \tag{57}$$

其中 $\mathrm{Z} = \mathrm{G}_{wd}\mathrm{G}_{wd}^T$。对 (54) 求期望即可得到这一结果。注意，最后一项，即 $S_5(\mathbf{y})$，可由以下观察得出：

$$S_5(\mathbf{y}) = q_s(\mathbf{y}) - (S_1(\mathbf{y}) + S_2(\mathbf{y}) + 2S_3(\mathbf{y}) + 4S_4(\mathbf{y})). \tag{58}$$

结合最后两个表达式即可证明该定理。

C. 推论 2 的证明

由于大多数项的梯度都可直接计算 [53], [54], ，因此我们在此重点讨论非平凡的梯度计算。接下来推导 $\mathbf{y}^T\mathbf{U}_{wd}\mathbf{y}$ 关于 y 的梯度。根据链式法则，可写出以下表达式：

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^T\mathbf{U}_{wd}\mathbf{y}\right) = & \begin{bmatrix}\sum_k\sum_j y_jy_k\frac{\partial}{\partial y_1}\left((\mathbf{U}_{wd})_{jk}\right)\\\sum_k\sum_j y_jy_k\frac{\partial}{\partial y_2}\left((\mathbf{U}_{wd})_{jk}\right)\\\vdots\\\sum_k\sum_j y_jy_k\frac{\partial}{\partial y_N}\left((\mathbf{U}_{wd})_{jk}\right)\end{bmatrix} + \\ & (\mathbf{U}_{wd} + \mathbf{U}_{wd}^T)\mathbf{y},\end{aligned} \tag{59}$$

其中，$(\mathbf{U}_{wd})_{jk}$ 是矩阵U_{wd} 的第(j,k)个元素，矩阵U可表示为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}(\mathbf{y}\odot\mathbf{y})^T\mathbf{b}_{1,1},\ldots,(\mathbf{y}\odot\mathbf{y})^T\mathbf{b}_{1,N}\\\cdots,\cdots,\cdots,\\(\mathbf{y}\odot\mathbf{y})^T\mathbf{b}_{N,1},\ldots,(\mathbf{y}\odot\mathbf{y})^T\mathbf{b}_{N,N}\end{bmatrix}.$$

采用这一公式，内层导数为 $\frac{\partial}{\partial y_i}((\mathrm{U} \quad _ \quad _{wd\ jk} = 2y_{i\quad jk\ i\quad \forall j\neq k}$)) (b,) ，其中 (b,) 是.....的第 - 个元素

$$
\begin{aligned}
q_s(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x})^2 = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_j x_k x_l G_{ij} G_{kl} \\
&= \sum_{k=1,k=l}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_j x_k^2 G_{ij} G_{kk} + \sum_{l=1,k\neq l}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1,j=i}^{N} x_i^2 x_k x_l G_{ii} G_{kl} + 2\sum_{l=1,k\neq l}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 x_l^2 G_{lk} G_{kl} \\
&\quad + 4\sum_{k=1,i\neq j\neq k}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i=l}^{N} x_i^2 x_j x_k G_{ij} G_{ki} + \sum_{l=1,i\neq j\neq k\neq l}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_j x_k x_l G_{ij} G_{kl} \\
&= (\mathbf{x}\odot\mathbf{x})^T \mathrm{diag}(\mathbf{G}) \mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x} + (\mathbf{x}\odot\mathbf{x})^T \mathrm{diag}(\mathbf{G}) \mathbf{x}^T\mathbf{G}_{wd}\mathbf{x} + 2(\mathbf{x}\odot\mathbf{x})^T \mathbf{G}_{wd}\odot\mathbf{G}_{wd}(\mathbf{x}\odot\mathbf{x}) \quad + 4\mathbf{x}^T\mathbf{U}_{wd}\mathbf{x} + \\
&\quad \sum_{l=1,i\neq j\neq k\neq l}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_j x_k x_l G_{ij} G_{kl},
\end{aligned} \tag{54}
$$

向量 $\mathbf{b}_{j,\ k}$。最后，梯度可写为:

$$
\nabla_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}^T\mathbf{U}_{wd}\mathbf{y}\right) = 2\mathbf{y}\odot\begin{bmatrix} \sum\limits_{k\neq j}\sum\limits_{j} y_j y_k (\mathbf{b}_{j,k})_1 \\ \sum\limits_{k\neq j}\sum\limits_{j} y_j y_k (\mathbf{b}_{j,k})_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{k\neq j}\sum\limits_{j} y_j y_k \frac{\partial}{\partial y_N}(\mathbf{b}_{j,k})_N \end{bmatrix} +
$$

$$
(\mathbf{U}_{wd}+\mathbf{U}_{wd}^T)\mathbf{y} \overset{(a)}{=} 2\mathbf{y}\odot\mathbf{b}_s + (\mathbf{U}_{wd}+\mathbf{U}_{wd}^T)\mathbf{y}, \tag{60}
$$

其中，(a) 是通过一些矩阵运算以及 $\mathbf{b}_{j,k}$ 向量的定义得到的。

D. 引理 5 的证明

我们首先计算下文估计量$\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}$ 的总方差。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) = \mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] - \mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}]^T\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] \\
&\overset{(a)}{=} \mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] - \mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}]^T\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}] - 2b_{\mathbf{p}}\mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\mathbf{d}_{\mathbf{p}}] + b_{\mathbf{p}}^2\mathrm{E}[\mathbf{d}_{\mathbf{p}}^T\mathbf{d}_{\mathbf{p}}] \\
&\overset{(b)}{=} \mathrm{var}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) - 2b_{\mathbf{p}}\mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\mathbf{d}_{\mathbf{p}}] + b_{\mathbf{p}}^2\mathrm{var}(\mathbf{d}_{\mathbf{p}}),
\end{aligned} \tag{61}
$$

其中，$\mathrm{var}(\mathbf{d}_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{N_e^2}\sum_{j=1}^{N_e}\mathrm{var}(\nabla_{\mathbf{p}}\log\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}\{j\}|\mathbf{p},\mathbf{q}))$；由于方差与第 j 个索引无关，因此接下来可以忽略该索引，计算内部量的方差。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}\left(\nabla_{\mathbf{p}}\log\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right) \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\nabla_{\mathbf{p}}\log\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right)^T\left(\nabla_{\mathbf{p}}\log\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial\log\mathbb{P}_E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial p_n}\right)^2\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N}\mathrm{E}\left[\left(\frac{\theta_n(\theta_n-1)}{2p_n} + \frac{(\theta_n^2-1)}{1-p_n-q_n}\right)^2\right] \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{1-p_n-q_n}\right).
\end{aligned} \tag{62}
$$

将 (62) 代入 (61)，可得:

$$
\mathrm{var}(\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) = \mathrm{var}(\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}) - 2b_{\mathbf{p}}\mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\mathbf{d}_{\mathbf{p}}] + \frac{b_{\mathbf{p}}^2}{N_e}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{1-p_n-q_n}\right), \tag{63}
$$

其中，(a) 是由以下观察结果得出的：$\mathrm{E}[\theta_n^{2k_0}] = q_n + p_n$ 和 $\mathrm{E}[\theta_n^{2k_0+1}] = q_n - p_n$，其中 k_0 是非负整数。注意，这是关于 $b_{\mathbf{p}}$ 的凸二次表达式，我们可以令该方差的导数等于零，从而求得最小值。最优基线为 $b_{\mathbf{p}}^* = \frac{}{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n}+\frac{1}{1-p_n-q_n}}\mathrm{E}[\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{p}}^T\mathbf{d}_{\mathbf{p}}]$，引理得证。

参考文献

[1] A. Pradhan 和 H. S. Dhillon，“无约束离散 RIS 优化的新型概率重构技术”，发表于 IEEE PIMRC 会议论文集，2023 年，即将发表。[2] A. Pradhan、J. K. Devineni、H. S. Dhillon 和 A. F. Molisch，“分子再辐射的两种表现形式下太赫兹频段的智能表面优化”，发表于 IEEE Globecom 会议论文集，2021 年 12 月。[3] ¨O. ¨Ozdogan、E. Bj¨ Ornson 和 E. G. Larsson，“利用智能反射面提升 MIMO 通信中的秩”，发表于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，2020 年 5 月。[4] Z. Huang、B. Zheng 和 R. Zhang，“将衰落信道从快变转为慢变：IRS 辅助高速移动通信”，发表于 IEEE 国际通信会议（ICC）论文集，2021 年 6 月。[5] T. Jiang 和 W. Yu，“利用可重构智能表面进行干扰消零”，IEEE 期刊《通信领域精选》，第 40 卷，第 5 期，第 1392–1406 页，2022 年 1 月。[6] A. Elzanaty 、 A. Guerra 、 F. Guidi 和 M.-S. Alouini，“用于定位的可重构智能反射面：位置和方向误差界”，IEEE 信号处理汇刊，第 69 卷，第 5386–5402 页，2021 年 8 月。[7] D.-R. Emenonye、H. S. Dhillon 和 R. M. Buehrer，“近场和远场中存在位置和方向偏移时的 RIS 辅助定位”，arXiv:2210.03599，2022 年。[8] ——，“远场 RIS 辅助定位基础”，arXiv:2206.01652，2022 年。[9] Y. Zhang、K. Shen、S. Ren、X. Li、X. Chen 和 Z.-Q. Luo，“具有性能保证的智能反射面配置：最优波束成形”，IEEE 信号处理精选主题期刊，第 16 卷，第 5 期，第 967–979 页，2022 年 5 月。[10] Z.-q. Luo、W.-k. Ma、A. M.-c. So、Y. Ye 和 S. Zhang，“二次优化问题的半正定松弛”，IEEE 信号处理杂志，第 27 卷，第 3 期，第 20–34 页，2010 年 4 月。A. Attia、S. Leyffer 和 T. S. Munson，“二元优化的随机学习方法：在贝叶斯最优实验设计中的应用”，SIAM《科学计算杂志》，第 44 卷，第 2 期，第 B395–B427 页，2022 年 4 月。[12] J. Yuan、Y.-C. Liang、J. Joung、G. Feng 和 E. G. Larsson，“智能反射面辅助认知无线电系统”，IEEE 通信汇刊，第 69 卷，第 1 期，第 675–687 页，2020 年 10 月。

[13] X. Yu、D. Xu、Y. Sun、D. W. K. Ng 和 R. Schober，“利用智能反射面实现鲁棒安全无线通信”，IEEE 期刊《通信领域精选》，第 38 卷，第 11 期，第 2637–2652 页，2020 年 7 月。[14] C. Huang、A. Zappone、G. C. Alexandropoulos、M. Debbah 和 C. Yuen，“用于无线通信能量效率优化的可重构智能反射面”，IEEE 无线通信汇刊，第 18 卷，第 8 期，第 4157–4170 页，2019 年 6 月。[15] C. Pan、H. Ren、K. Wang、W. Xu、M. Elkashlan、A. Nallanathan 和 L. Hanzo，“依托智能反射面的多小区 MIMO 通信”，IEEE 无线通信汇刊，第 19 卷，第 8 期，第 5218–5233 页，2020 年 5 月。[16] H. Ma、H. Zhang、N. Zhang、J. Wang、N. Wang 和 V. C. M. Leung，“采用能量采集的可重构智能表面辅助协作式环境反向散射通信”，IEEE 无线通信快报，第 11 卷，第 6 期，第 1283–1287 页，2022 年 4 月。[17] S. Huang、Y. Ye、M. Xiao、H. V. Poor 和 M. Skoglund，“智能反射面增强型无小区网络的分布式波束成形设计”，IEEE 无线通信快报，第 10 卷，第 3 期，第 673–677 页，2020 年 12 月。[18] Z. Yang、M. Chen、W. Saad、W. Xu、M. Shikh-Bahaei、H. V. Poor 和 S. Cui，“采用分布式可重构智能反射面的能效无线通信”，IEEE 无线通信汇刊，第 21 卷，第 1 期，第 665–679 页，2021 年 7 月。[19] K. Feng、X. Li、Y. Han、S. Jin 和 Y. Chen，“利用智能反射面增强物理层安全”，IEEE 通信快报，第 25 卷，第 3 期，第 734–738 页，2020 年 12 月。[20] Y. Chen、M. Wen、E. Basar、Y.-C. Wu、L. Wang 和 W. Liu，“在边缘缓存中利用可重构智能反射面：联合混合波束成形与内容放置优化”，IEEE 无线通信汇刊，第 20 卷，第 12 期，第 7799–7812 页，2021 年 6 月。[21] A. Pradhan、M. A. Abd-Elmagid、H. S. Dhillon 和 A. F. Molisch，“极端分子再辐射表现形式下的太赫兹 RIS 鲁棒优化”，IEEE 无线通信汇刊，2023 年，即将发表。[22] Y. Ma、Y. Shen、X. Yu、J. Zhang、S. Song 和 K. B. Letaief，“大规模 IRS 辅助无线系统的低复杂度算法框架”，发表于 IEEE Globecom研讨会论文集，2020 年 12 月。[23] W. Cai、H. Li、M. Li 和 Q. Liu，“宽带系统中智能反射面辅助的实用建模与波束成形”，IEEE 通信快报，第 24 卷，第 7 期，第 1568–1571 页，2020 年 4 月。[24] Q. Wu 和 R. Zhang，“ 采用离散相移的智能反射面辅助无线网络波束成形优化”，IEEE 通信汇刊，第 68 卷，第 3 期，第 1838–1851 页，2019 年 12 月。[25] X. Yu、D. Xu 和 R. Schober，“利用智能反射面实现 MISO 通信的最优波束成形”，发表于 IEEE SPAWC 会议论文集，2020 年 5 月。[26] J. Dai、Y. Wang、C. Pan、K. Zhi、H. Ren 和 K. Wang，“采用低分辨率数模转换器的可重构智能表面辅助大规模 MIMO 系统”，IEEE 通信快报，第 25 卷，第 9 期，第 3124–3128 页，2021 年 7 月。[27] N. S. Perovi´c、L.-N. Tran、M. Di Renzo 和 M. F. Flanagan，“采用可重构智能反射面的 MIMO 系统可达速率优化”，IEEE 无线通信汇刊，第 20 卷，第 6 期，第 3865–3882 页，2021 年 2 月。[28] L. You、J. Xiong、D. W. K. Ng、C. Yuen、W. Wang 和 X. Gao，“RIS 辅助多用户 MIMO 上行传输中的能量效率与频谱效率权衡”，IEEE 信号处理汇刊，第 69 卷，第 1407–1421 页，2020 年 12 月。[29] J. Sanchez、E. Bengtsson、F. Rusek、J. Flordelis、K. Zhao 和 F. Tufvesson，“离散相位可重构智能反射面的最优低复杂度波束成形”，发表于 IEEE Globecom 会议论文集，2021 年 12 月。[30] R. Xiong、X. Dong、T. Mi 和 R. C. Qiu，“可重构智能表面的最优离散波束成形”，arXiv:2211.04167，2022 年。[31] K. Allemand、K. Fukuda、T. M. Liebling 和 E. Steiner，“无约束零一二次优化的一个多项式时间情形”，数学规划，第 91 卷，第 1 期，第 49–52 页，2001 年 5 月。[32] J. Luo、K. Pattipati、P. Willett 和 F. Hasegawa，“利用概率数据关联实现同步 CDMA 中的近最优多用户检测 ”，IEEE 通信快报，第 5 卷，第 9 期，第 361–363 页，2001 年 9 月。[33] A. Yellepeddi 、 K. J. Kim 、 C. Duan 和 P. Orlik，“关于利用概率数据关联在衰落信道上实现近指数分集”，发表于 IEEE 国际通信会议（ICC）论文集，2013 年 6 月。[34] J. Staines 和 D. Barber，“变分优化”，arXiv:1212 4507，2012 年。。[35] R. T. Rockafellar，《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1997 年，第 11 卷。[36] S. P. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》。剑桥大学出版社，2004 年。[37] Z.-Q. Luo 和 W. Yu，“通信与信号处理中的凸优化简介”，IEEE 期刊《通信领域精选》，第 24 卷，第 8 期，第 1426–1438 页，2006 年 8 月。[38] I. G. Rosenberg，“简短通信：0-1优化与非线性规划”，RAIRO - 运筹学 - 运筹学研究，第 6 卷，第 V2 期，第 95–97 页，1972 年。[39] Y. Xia、X. Sun、D. Li 和 X. Zheng，“盒约束非凸二次规划中对偶间隙的缩小”，SIAM优化期刊，第 21 卷，第 3 期，第 706–729 页，2011 年。[40] M. X. Goemans 和 D. P. Williamson，“利用半定规划改进最大割和可满足性问题的近似算法”，《美国计算机学会期刊》（JACM），第 42 卷，第 6 期，第 1115–1145 页，1995 年 11 月。[41] H. Kamoda、T. Iwasaki、J. Tsumochi、T. Kuki 和 O. Hashimoto，“采用单比特移相器的 60 GHz 电子可重构大型反射阵列”，IEEE 天线与传播汇刊，第 59 卷，第 7 期，第 2524–2531 页，2011 年 5 月。[42] R. J. Williams，“用于连接主义强化学习的简单统计梯度跟随算法”，《机器学习》，第 8 卷，第 3–4 期，第 229–256 页，1992 年 5 月。[43] A. Stuart 和 K. Ord，《肯德尔《高级统计学理论》：分布理论》。John Wiley & Sons，2010 年，第 1 卷。[44] J. Nocedal 和 S. J. Wright，《数值优化》。Springer，1999 年。[45] I. Panageas、G. Piliouras 和 X. Wang，“一阶方法几乎总能避开鞍点：趋于零的步长情形”，《神经信息处理系统进展》，第 32 卷，2019 年。[46] A. Zappone、M. Di Renzo、X. Xi 和 M. Debbah，“可重构智能表面的反射单元最佳数量”，IEEE《无线通信快报》，第 10 卷，第 3 期，第 464–468 页，2020 年 10 月。[47] A. Zappone、M. Di Renzo、F. Shams、X. Qian 和 M. Debbah，“智能无线电环境中可重构智能表面的开销感知设计”，IEEE《无线通信汇刊》，第 20 卷，第 1 期，第 126–141 页，2020 年 9 月。[48] R. J. Tibshirani，“Dykstra算法、交替方向乘子法与坐标下降：联系、见解和扩展”，《神经信息处理系统进展》，第 30 卷，2017 年。[49] J. You、S. Jung、J. Seo 和 J. Kang，“采用天线倾斜的无人机基站节能三维部署”，IEEE《通信快报》，第 24 卷，第 6 期，第 1323–1327 页，2020 年 6 月。[50] Z. Yang、J.-Y. Xia、J. Luo、S. Zhang 和 D. Gündüz，“学习辅助的灵活梯度下降MISO波束成形方法”，IEEE《无线通信快报》，第 11 卷，第 9 期，第 1895–1899 页，2022 年 9 月。[51] J.-C. Chen 和 Y.-C. Lin，“用于设计全数字大规模 MU-MIMO通信系统低分辨率有限字母表均衡器的投影梯度下降算法”，IEEE Access，第 11 卷，第 50 744–50 751 页，2023 年 5 月。[52] A. Pradhan、J. K. Devineni、H. S. Dhillon 和 A. F. Molisch，“太赫兹频段中分子再辐射两种表现形式下的智能表面优化”，发表于 IEEE Globecom 会议论文集，2021 年 12 月。[53] S. Laue、M. Mitterreiter 和 J. Giesen，“矩阵和张量表达式高阶导数的计算”，《神经信息处理系统进展》，第 31 卷，2018 年。[54] ——，“一种简单高效的张量微积分”，发表于 AAAI人工智能会议论文集，第 34 卷，第 04 期，2020 年，第 4527–4534 页。