arXiv:2303.00184v2 [physics.app-ph] 2 Mar 2023

使用勒让德原型进行参量放大器匹配

Ryan Kaufman[1,2] 和 Ofer Naaman[1]

[1]Google Quantum AI，戈莱塔，CA 93117[2]物理与天文学系，匹兹堡大学，匹兹堡，PA 15260

2023年3月3日

1 引言

有源负阻负载的匹配网络可用于设计具有指定增益和带宽特性的约瑟夫森参量放大器（JPA）。此前，[1] 和 [2], 介绍了切比雪夫 JPA 匹配网络，以及基于巴特沃斯原型的网络 [1, 3, 4]。[1], 附录 E 概述了原型系数的计算方法，其中包括切比雪夫和巴特沃斯原型的系数表。

本文介绍基于勒让德多项式 [5] 的 JPA 匹配网络。这类网络通常比参数相近的切比雪夫网络具有更低的波纹和更平缓的滚降，可视为介于巴特沃斯网络和切比雪夫网络之间。我们列出了基于勒让德多项式的参量放大器原型系数，涵盖多种增益和纹波参数以及不同的网络阶数。我们还借此机会进一步说明如何根据参考文献 [1] 综合这类网络。

2 勒让德滤波器特性

图 1 展示了采用四阶切比雪夫、巴特沃斯和勒让德多项式设计的 JPA 的计算增益随频率变化的情况。所有网络的设计增益均为 20 分贝，3 dB带宽均为 500 MHz。巴特沃斯网络的带宽始终定义为 3 dB 点之间的范围；而对于切比雪夫网络，只有在 3 dB 波纹设计中才如此，也就是说，切比雪夫网络的带宽是相对于波纹指定的。勒让德网络也指定了一个“波纹”参数，但在这种情况下，该参数只控制截止频率处的增益，而不控制通带内的实际增益波纹。图 1 中的切比雪夫和勒让德设计均指定了 3 dB 的纹波参数。

[1] 中的耦合模形式通过参数 β描述参量泵浦的强度。该参数是相对于 $2\gamma_0$归一化的参量耦合率，其中 γ_0 是器件各端口所有耗散率的几何平均值。比较图 1 中的设计可知，$\beta_{\mathrm{chebyshev}} = 0.342$、$\beta_{\mathrm{legendre}} = 0.285$ 和 $\beta_{\mathrm{butter}} = 0.179$，这意味着，在其他所有参数保持不变的情况下，勒让德约瑟夫森参量放大器所需的泵浦耦合高于巴特沃斯，但低于切比雪夫。

该图还展示了各种响应类型之间的主要差异。我们可以看到，勒让德网络的滚降比巴特沃斯网络更陡峭，但不如切比雪夫网络陡峭。我们还可以看到，与切比雪夫网络相比，勒让德网络通带内的波纹更小，而巴特沃斯网络的通带则是平坦的。

3 功率损耗函数与四极点综合

我们将采用基于插入损耗法的匹配网络综合流程。我们将构建勒让德约瑟夫森参量放大器的功率损耗函数，然后将 [1] 附录 E 中概述的步骤应用于具有 0.5 分贝纹波的四阶、20 分贝放大器这一具体情形。

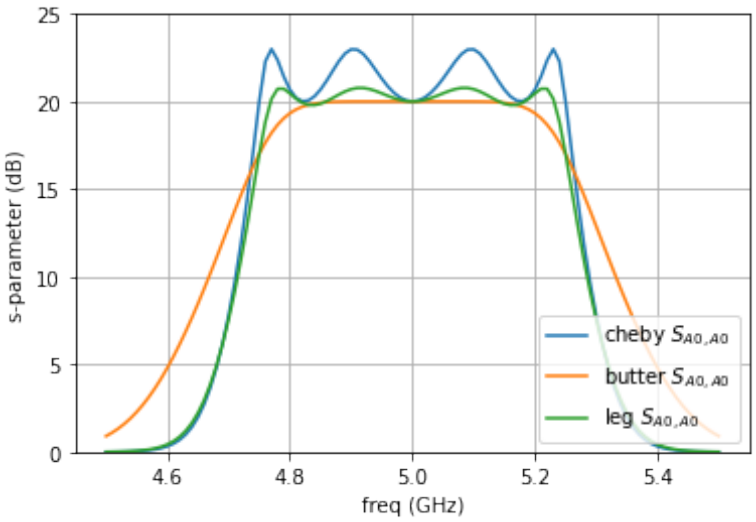

图 1：采用切比雪夫（蓝色）、巴特沃斯（橙色）和勒让德（绿色）多项式设计的 JPA 增益曲线比较。所有网络均设计为在中心频率处具有 20 分贝增益，且 3 分贝点带宽为 500 MHz。

3.1 功率损耗函数

功率损耗函数定义为

$$P_{IL} = A\left[1 + k^2 P_N^2(\omega)\right] \tag{1}$$

其中， A 和 k 为常数， $P_N(\omega)$ 是 N 阶勒让德多项式，是频率ω （以截止频率 $\omega_c = 2\pi \times 1$ Hz 归一化）的函数。功率损耗函数与网络的反射系数之间的关系为

$$|\Gamma(\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{P_{IL}} \tag{2}$$

对于中心频带处信号功率增益为 G （以线性功率单位表示）的设计，我们要求 [1]

$$|\Gamma(0)|^2 = \frac{1}{4G - 2} \equiv \tilde{G}^{-1}. \tag{3}$$

此外，对于指定的纹波参数 R^{dB} （以 dB 为单位），我们使用 $10\log_{10} G_m = G^{dB} - R^{dB}$计算截止频率处的线性功率增益 G_m ，其中 G^{dB} 为以 dB 为单位的信号增益。因此，我们要求在截止频率处

$$|\Gamma(1)|^2 = \frac{1}{4G_m - 2} \equiv \tilde{G}_m^{-1}. \tag{4}$$

In 在式（3）和式（4）中，我们用波浪号标记“双边带”增益量。

将式（3）和式（4）的条件与式（2）和式（1）结合起来，我们得到关于 A and k^2 的两个方程

$$k^2 = \frac{\tilde{G}^{-1} - \tilde{G}_m^{-1}}{P_N^2(0)(1 - \tilde{G}^{-1}) + \tilde{G}_m^{-1} - 1}, \tag{5}$$

$$A = \frac{1}{(1 + k^2)(1 - \tilde{G}_m^{-1})}. \tag{6}$$

注意，式（5）明确包含 $P_N^2(0)$。这是因为不同于切比雪夫多项式， $P_N(0)$ 对不同阶数的取值也不同。虽然对于奇数 N， $P_N(0) = 0$，但对于偶数 N，它是有限值的，并且其取值取决于 N。在截止频率处，对于所有 N，我们均采用了 $P_N(1) = 1$。对于奇数阶勒让德网络，式（5）和式（6）还可以进一步简化。现在，我们已经将 A 和 k^2 都表示为网络阶数、所需增益和纹波参数的函数，因此可以将式（1）的功率损耗函数写成频率的函数。

3.2 求四阶网络的系数

为了说明综合流程，我们将逐步进行计算，以提取四阶勒让德网络的原型系数；该网络用于使 JPA 在纹波参数为 0.5 分贝时达到指定的 20 分贝增益。需要注意的是，我们并不一定建议使用四阶网络，因为在大多数情况下三阶网络已经足够；这里采用四阶网络仅用于说明。

根据增益、波纹和阶数，我们可以写出功率损耗函数（式 (1)），并由此得到反射系数 $|\Gamma(s)|^2$，其中我们将变量替换为 $s = j\omega$。

$$|\Gamma(s)|^2 = \frac{P_{IL} - 1}{P_{IL}} = \frac{0.0069s^8 + 0.01183s^6 + 0.006256s^4 + 0.001s^2 + 0.003}{0.0069s^8 + 0.01183s^6 + 0.006256s^4 + 0.001s^2 + 1.003}. \tag{7}$$

接下来，我们需要对 $|\Gamma(s)|^2 = \Gamma(s)\Gamma^*(s)$ 进行因式分解。首先求出分子和分母中 8th 阶多项式的复根，然后从这些根中选取一部分，将 $\Gamma(s)$ 重构为两个 4th 阶多项式之比。

$|\Gamma(s)|^2$ 的分子的复根，我们称之为“零点”，z_i，如下：

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 0.2424 \pm 1.0395j \\ z_{3,4} &= -0.2424 \pm 1.0395j \\ z_{5,6} &= 0.5894 \pm 0.4275j \\ z_{7,8} &= -0.5894 \pm 0.4275j \end{aligned}$$

$|\Gamma(s)|^2$ 的分母的根，我们称之为“极点”，p_i，如下：

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= 1.6152 \pm 0.7568j \\ p_{3,4} &= -1.6152 \pm 0.7568j \\ p_{5,6} &= 0.6688 \pm 1.8277j \\ p_{7,8} &= -0.6688 \pm 1.8277j. \end{aligned}$$

图 2 显示了零点（叉号）和极点（圆圈）在复 s 平面上的位置。现在，我们从每个多项式的八个根中各选出四个，并选择位于复 s 平面左半平面的根，如图 2 中蓝色所示。分子中的这些根为 z_3，z_4，z_7，z_8，分母中的这些根为 p_3，p_4，p_7，p_8。

From 选定根后，我们可以构造多项式 R 和 D，使得 $\Gamma(s) = R/D$,

$$R(s) = (s - z_3)(s - z_4)(s - z_7)(s - z_8) \tag{8}$$

$$D(s) = (s - p_3)(s - p_4)(s - p_7)(s - p_8) \tag{9}$$

and 根据 $\Gamma(s)$，我们可以计算网络的输入阻抗，并展开 D 和 R ：

$$Z(s) = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)} = \frac{D(s) + R(s)}{D(s) - R(s)} = \frac{2.0s^4 + 6.262s^3 + 13.53s^2 + 19.09s + 12.65}{2.904s^3 + 9.049s^2 + 14.89s + 11.45}. \tag{10}$$

可以看出，阻抗 $Z(s)$ 的分子是一个四阶多项式，分母是一个三阶多项式。现在，我们可以进行多项式长除法，将 $Z(s)$ 表示为连分式 [1]。

$$Z(s) = 0.6886s + \cfrac{1}{0.8864s + \cfrac{1}{0.8918s + \cfrac{1}{0.2903s + \cfrac{1}{1.1055}}}}. \tag{11}$$

因此，具有指定增益和波纹的四阶勒让德匹配网络原型的系数，就是连分数展开的系数

$$g_i = \{1.0,\ 0.6886,\ 0.8864,\ 0.8918,\ 0.2903,\ 1.1055\}, \tag{12}$$

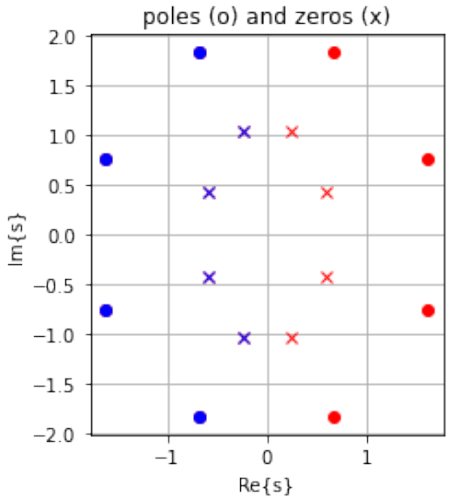

图 2： $|\Gamma(s)|^2$ 四阶勒让德放大器匹配网络的复极点和零点。在分子（零点）和分母（极点）的八个根中，我们选取位于左半平面的四个根，并以蓝色表示。

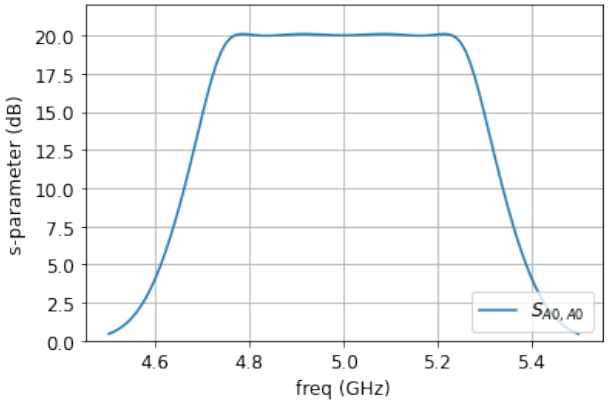

图 3：使用公式（12）中的系数计算得到的 4^{th}阶勒让德 JPA 的增益特性，其带宽为 500 MHz，中心频率为 5 GHz。

并且我们已将 $g_0 = 1.0$ 添加到列表中，表示信号源的电导。

接下来 [1], 我们现在可以使用公式（12）中的系数，求出表示该放大器的耦合模系统的端口耦合 γ_0、模式耦合$\beta_{k、\ k+1}$以及泵浦耦合强度 β_p ，

$$\gamma_0 = \gamma_{45} = \frac{\Delta\omega}{g_4 g_5}, \tag{13}$$

$$\beta_{k,k+1} = \frac{\Delta\omega}{2\gamma_0\sqrt{g_k g_{k+1}}}, \quad k = 1\ldots 3, \tag{14}$$

$$\beta_p = \frac{g_4 g_5}{2 g_0 g_1}, \tag{15}$$

其中， $\Delta\omega$ 是网络的全带宽。

图 3 显示了使用公式（12）中的系数设计的放大器的计算增益曲线 [1] ，其中心频率为 5 GHz，带宽为 500 MHz。我们得到 $\gamma_0/2\pi = 1.558$ GHz、$\beta_{12} = 0.315$、 $\beta_{23} = 0.18$、 $\beta_{34} = 0.205$和 $\beta_p = 0.233$。表1列出了适用于多种增益和纹波参数的二阶、三阶和四阶勒让德约瑟夫森参量放大器网络的原型系数。

4 计算电路参数

按照 [1], 中的步骤，我们可以使用表1 给出的滤波器原型系数，基于耦合谐振器网络拓扑计算器件元件值。该步骤需要以下输入：滤波器的阶数、 N、原型系数 $g_0, \ldots, g_{N+1}$、 Z_k 个 N 谐振器的特性阻抗、网络的分数带宽 w以及网络的中心频率 ω_0。我们将继续采用第 3 节中的示例，设计一个四阶勒让德网络，其 $\omega_0/2\pi = 5$ GHz、分数带宽为 $w = 0.1$、增益为 20 分贝、波纹为 0.5 分贝，并使用公式（12）中的系数。

合成简并放大器电路的原理图如图4所示，它是一个单端口网络。右侧的谐振器 R_1 包含非线性参数泵浦电感 L_{snake}，其余谐振器均为无源元件，共同构成匹配网络。我们从右侧的参数元件开始为谐振器编号，以便与将参数元件视为信号源的原型系数编号保持一致。此处考虑的非线性元件是“蛇形元件”，即参考文献 [6], 中使用的射频超导量子干涉器件阵列；不过，从网络设计的角度来看，它也可以等效为标准直流超导量子干涉器件[7]。图5展示了使用 Keysight ADS 进行的仿真。

4.1 谐振器阻抗

计算电路元件值的第一步是确定谐振器阻抗。首先，我们研究图4中的谐振器 R_1 ，其中包含电容并联约瑟夫森“蛇形”元件 L_{snake} [6]。我们将蛇形元件的工作磁通偏置点设定为 $L_{\text{snake}} = 150$ pH，使谐振器R_1 的阻抗为 $Z_1 = \omega_0 L_{\text{snake}} = 4.7\Omega$。

接下来，我们来处理末级谐振器 R_4。通常，该谐振器的阻抗可以相当任意，因为我们可以使用导纳倒相器 J_{45}（例如用耦合电容实现），将其与 50 Ω端口 [1] 的耦合强度设为合适的值。不过，我们希望避免使用输入耦合电容，因为它总会引入自身的频率依赖性，且耦合强度的这种频率依赖性往往无法接受。这里采用的一种方法是，限制 R_4 的阻抗，使其与环境 [8], 的耦合强度达到合适的值，从而无需使用耦合电容（本质上令 J_{45} 变得无关紧要）。具体做法是要求 $J_{45} Z_0 = 1$，其中

$$J_{45} = \sqrt{\frac{w}{g_4 g_5 Z_4 Z_0}}. \tag{16}$$

由此可将 R_4 阻抗设为

$$Z_4 = \frac{w Z_0}{g_4 g_5} = 15.58\,\Omega. \tag{17}$$

现在可以选择其余谐振器的阻抗，我们选取 $Z_2 = Z_3 = 20\Omega$。

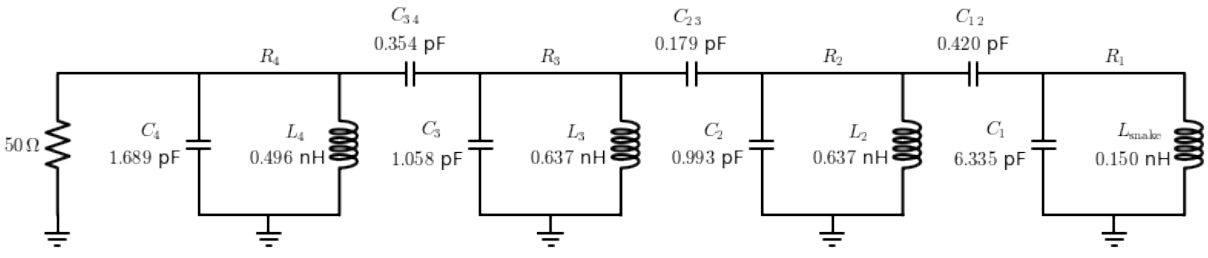

图4 ： 四阶勒让德匹配简并参量放大器的电路原理图。

4.2 耦合电容

现在谐振器阻抗已设定为 $Z_1 = 4.7\,\Omega$、 $Z_2 = Z_3 = 20\Omega$ 和 $Z_4 = 15.58\,\Omega$，我们可以计算其余的导纳倒相器数值，并据此计算耦合电容。

倒相器 J_{01} 将通过设置适当的泵浦幅度来处理，使闲频呈现 $-R_{PA}^{-1}$ 的导纳，从而

$$\frac{R_{PA}}{Z_1} = \frac{g_0 g_1}{w}, \tag{18}$$

关于这种耦合，电路设计方面无需再做任何工作。通过选择上述阻抗 Z_4，导纳倒相器J_{45} 也已一并处理。

接下来需要确　　定其余导纳倒相器的数值，我们可以通过以下公式计算：

$$J_{jk} = w\sqrt{\frac{1}{g_j g_k Z_j Z_k}}. \tag{19}$$

根据导纳倒相器数值，我们可以使用以下公式计算耦合电容：

$$C_{jk} = \frac{J_{jk}}{\omega_0}. \tag{20}$$

在我们的设计示例中，得到：

$$C_{12} = \frac{w}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{g_1 g_2 Z_1 Z_2}} = 0.420\,\text{pF}, \tag{21}$$

$$C_{23} = \frac{w}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{g_2 g_3 Z_2 Z_3}} = 0.179\,\text{pF}, \tag{22}$$

$$C_{34} = \frac{w}{\omega_0}\sqrt{\frac{1}{g_3 g_4 Z_3 Z_4}} = 0.354\,\text{pF}. \tag{23}$$

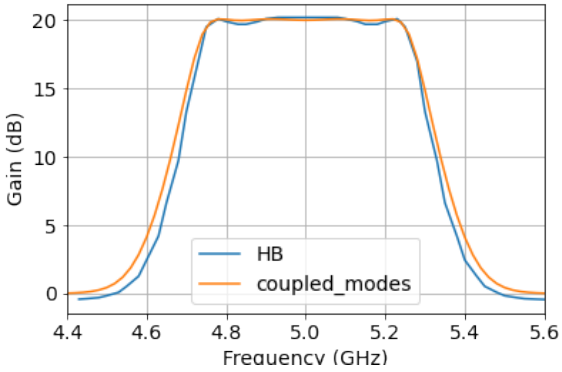

图5：比较第 3 节中使用耦合模矩阵的逆矩阵计算得到的增益（橙色），以及在 Keysight ADS 中使用图4所示电路和参数通过谐波平衡仿真计算得到的增益。

4.3 谐振器组件

既然耦合电容已计算完毕，我们可以继续构建网络中的谐振器，并将其实现为并联接地的集总元件并联 LC 谐振器。在每个谐振器中，电容将抵消

与其相邻导纳倒相器相关的负电容。

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 Z_1} - C_{12} = 6.352\,\mathrm{pF}, \tag{24}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0 Z_2} - C_{12} - C_{23} = 0.993\,\mathrm{pF}, \tag{25}$$

$$C_3 = \frac{1}{\omega_0 Z_3} - C_{23} - C_{34} = 1.058\,\mathrm{pF}, \tag{26}$$

$$C_4 = \frac{1}{\omega_0 Z_4} - C_{34} = 1.680\,\mathrm{pF}. \tag{27}$$

最后，利用 $L_i = Z_i/\omega_0$ 可以轻松计算出电感器，因此 $L_2 = L_3 = 0.637$ nH，且 L_4 =0.496 nH。请注意，我们从一开始就通过设置放大器的磁通偏置工作点，将 $L_1 = L_{\mathrm{snake}} = 150$ pH 设定好了。如图4所示，至此设计完成。

参考文献

[1]O. Naaman 和 J. Aumentado，“参量耦合网络的综合”，PRX Quantum **3**, 020201 (2022).[2]W. J. Getsinger，“用于拓宽反射式放大器带宽的原型”，IEEE微波理论与技术汇刊 **11**, 486–497 (1963).[3]B. T. Henoch，“一种设计宽带参量放大器的新方法”，IEEE微波理论与技术汇刊 **11**, 62–72 (1963).[4]T. Roy、S. Kundu、M. Chand、A. Vadiraj、A. Ranadive、N. Nehra、M. P. Patankar、J. Aumentado、A. Clerk 和 R. Vijay，“采用阻抗工程的宽带参量放大：超越增益-带宽积”，《应用物理快报》**107**, 262601 (2015).[5]M. T. Chryssomallis 和 J.N. Sahalos，“利用勒让德多项式乘积进行滤波器综合”，《电气工程》**81**, 419–424 (1999).[6]T. White、A. Opremcak、G. Sterling、A. Korotkov、D. Sank 等，“利用高动态范围约瑟夫森参量放大器读取量子处理器”，《应用物理快报》**122**, 014001 (2023).[7]J. Mutus、T. White、E. Jeffrey、D. Sank、R. Barends、J. Bochmann、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth 等，“带芯片上磁通偏置线的集总元件单端超导微波参量放大器的设计与表征”，《应用物理快报》**103**, 122602 (2013).[8]O. Naaman、D. Ferguson、A. Marakov、M. Khalil、W. Koehl 和 R. Epstein，“具有GHz带宽的高饱和功率约瑟夫森参量放大器”，载于2019 IEEE微波理论与技术学会国际微波研讨会（IMS）（IEEE，2019），第259–262页。

表1：采用功率损耗函数式（1）时，放大器增益和增益波纹取若干不同值、节网络为2、3和4节时的勒让德系数。系数 g_0 指有源负载。

信号增益	波纹	阶数	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$G = 17$ dB	$R = 0.1$ dB	2	1.0	0.2619	0.1348	1.1528		
		3	1.0	0.4924	0.4649	0.2567	0.8674	
		4	1.0	0.6884	0.7607	0.7975	0.2304	1.1528
	$R = 0.5$ 分贝	2	1.0	0.3898	0.2075	1.1528		
		3	1.0	0.6304	0.6100	0.3499	0.8674	
		4	1.0	0.8099	0.9137	0.9939	0.2996	1.1528
	$R = 1.0$ 分贝	2	1.0	0.4640	0.2542	1.1528		
		3	1.0	0.7020	0.6886	0.4060	0.8674	
		4	1.0	0.8661	0.9893	1.0989	0.3413	1.1528
	$R = 3.0$ 分贝	2	1.0	0.6181	0.3762	1.1528		
		3	1.0	0.8459	0.8477	0.5396	0.8674	
		4	1.0	0.9598	1.1333	1.3121	0.4440	1.1528
$G = 20$ 分贝	$R = 0.1$ 分贝	2	1.0	0.2080	0.1218	1.1055		
		3	1.0	0.4084	0.4399	0.2250	0.9045	
		4	1.0	0.5833	0.7364	0.7160	0.2244	1.1055
	$R = 0.5$ 分贝	2	1.0	0.3105	0.1868	1.1055		
		3	1.0	0.5244	0.5778	0.3055	0.9045	
		4	1.0	0.6886	0.8864	0.8918	0.2903	1.1055
	$R = 1.0$ 分贝	2	1.0	0.3703	0.2283	1.1055		
		3	1.0	0.5849	0.6527	0.3534	0.9045	
		4	1.0	0.7379	0.9608	0.9860	0.3295	1.1055
	$R = 3.0$ 分贝	2	1.0	0.4972	0.3343	1.1055		
		3	1.0	0.7066	0.8061	0.4656	0.9045	
		4	1.0	0.8219	1.1025	1.1789	0.4239	1.1055
$G = 25$ 分贝	$R = 0.1$ 分贝	2	1.0	0.1455	0.0995	1.0579		
		3	1.0	0.3074	0.3892	0.1849	0.9453	
		4	1.0	0.4552	0.6767	0.6122	0.2094	1.0579
	$R = 0.5$ 分贝	2	1.0	0.2179	0.1522	1.0579		
		3	1.0	0.3964	0.5117	0.2497	0.9453	
		4	1.0	0.5401	0.8170	0.7619	0.2688	1.0579
	$R = 1.0$ 分贝	2	1.0	0.2607	0.1853	1.0579		
		3	1.0	0.4432	0.5786	0.2877	0.9453	
		4	1.0	0.5806	0.8872	0.8422	0.3035	1.0579
	$R = 3.0$ 分贝	2	1.0	0.3537	0.2681	1.0579		
		3	1.0	0.5380	0.7176	0.3750	0.9453	
		4	1.0	0.6516	1.0215	1.0083	0.3849	1.0579
$G = 30$ 分贝	$R = 0.1$ 分贝	2	1.0	0.1040	0.0792	1.0321		
		3	1.0	0.2369	0.3357	0.1543	0.9689	
		4	1.0	0.3639	0.6065	0.5316	0.1912	1.0321
	$R = 0.5$ 分贝	2	1.0	0.1562	0.1207	1.0321		
		3	1.0	0.3066	0.4416	0.2074	0.9689	
		4	1.0	0.4338	0.7343	0.6610	0.2439	1.0321
	$R = 1.0$ 分贝	2	1.0	0.1872	0.1466	1.0321		
		3	1.0	0.3435	0.4998	0.2382	0.9689	
		4	1.0	0.4675	0.7987	0.7305	0.2743	1.0321
	$R = 3.0$ 分贝	2	1.0	0.2560	0.2103	1.0321		
		3	1.0	0.4189	0.6216	0.3081	0.9689	
		4	1.0	0.5282	0.9227	0.8748	0.3441	1.0321