关于光强广播信道容量区域

Sufang Yang，*IEEE* 研究生会员，Longguang Li，*IEEE* 会员，
和 Jintao Wang，*IEEE* 高级会员

arXiv:2303.00188v1 [cs.IT] 1 Mar 2023

摘要

本文研究光强广播信道（OI-BCs）的容量区域，其中输入受到峰值强度约束、平均强度约束或两者同时约束。借助若干随机变量（即均匀随机变量、指数随机变量和截断指数随机变量）的分解结果，并采用叠加编码（SC）方案，推导出容量区域的内界。随后，通过应用条件熵功率不等式（EPI）推导出外界。在高信噪比（SNR）区域，内界渐近地与外界相匹配，从而刻画了高 SNR 渐近容量区域。所得界还可推广至一般的K用户广播信道，且不会损失高 SNR 渐近最优性。

索引词

容量区域、光广播信道、强度调制-直接检测、光无线通信、峰值和/或平均强度约束。

I. 引言

近年来，无线通信技术迅速发展并不断完善，推动了智能手机、智能

本研究部分由国家自然科学基金委员会项目（编号：62101192）、上海市“扬帆计划”项目（编号：21YF1411000）以及清华大学-中国移动研究院联合创新中心资助。

Sufang Yang 现就职于中国北京 100084 清华大学电子工程系（电子邮箱：ysf20@mails.tsinghua.edu.cn）。

Longguang Li 就职于上海市多维信息处理重点实验室和华东师范大学通信与电子工程系，地址：中国上海 200241（电子邮箱：lgli@cee.ecnu.edu.cn）。

Jintao Wang 任职于中国北京 100084 清华大学北京信息科学与技术国家研究中心（BNRist），同时任职于中国北京 100084 清华大学电子工程系，以及中国深圳 518057 清华大学研究院（电子邮箱：wangjintao@tsinghua.edu.cn）。

机器人和无人驾驶汽车 [1]–[3]。这些移动终端为我们的日常生活带来了极大便利。随着移动终端数量不断增加，以及对稳定、高速数据传输的需求日益增长，传统射频（RF）无线频谱正面临严重拥堵。为了解决这一问题，我们迫切需要一种新兴的无线通信技术，以弥补传统射频通信的不足。

光无线通信（OWC）具有成本低、带宽资源丰富等优势，因而受到广泛关注 [4]–[7]。在光无线通信系统中，信息承载于发光二极管（LED）或激光二极管（LD）发出的光的强度上，并由光电探测器检测，这种方案称为强度调制直接检测（IM-DD）方案[8], [9]。这种独特的方案使光无线通信与射频系统之间存在根本差异。在这里，输入对应于光强度信号，因此是实值且非负的。此外，受电池限制和安全因素的影响，输入的峰值和/或平均光强通常受到约束 [10]–[13]。随着编码、调制和检测技术的发展，光无线通信系统已成功应用于办公室、医院和机场客舱 [14]–[16]。

一般而言，光无线通信系统可分为室外自由空间光通信（FSO）系统和室内可见光通信（VLC）系统 [17]–[19]。本文主要关注室内可见光通信系统，并从信息论视角对其进行探讨。关于单用户室内可见光通信系统信道容量的研究已相当广泛 [10], [11], [20]–[24]。例如，文献 [10] 在输入满足峰值和/或平均强度约束的条件下，推导了单用户信道容量的上界和下界。此外，研究还提出了低信噪比和高信噪比条件下的渐近容量结果。近年来，多用户可见光通信网络日益受到关注；在这类网络中，发射机为多个用户提供服务，使每个用户都能同时可靠地接收消息 [25]。

考虑到输入满足峰值和/或平均强度约束，已有多项研究探讨可见光通信网络的容量区域，包括广播信道（BC）、多址信道（MAC）和干扰信道（IC） [26]–[29]。对于广播信道网络，[26] 中的作者针对输入同时考虑了峰值和平均强度约束。他们基于截断高斯分布或开关键控（OOK）编码方案推导出容量区域的内界，并基于Bergmans方法推导出外界。这些界在低信噪比下渐近吻合，在高信噪比下则达到恒定间隙。对于多址信道网络，[27] 中的作者采用了与 [26] 类似的方法，所得界取得了相似的性能。

不同于 [27], , [28] 中的作者针对输入考虑了峰值或平均强度约束。他们基于均匀或指数分布编码方案推导出内界，该内界在高信噪比下达到渐近最优。对于干扰信道网络， [29]中的作者针对输入同时考虑了峰值和平均强度约束。他们基于将干扰视为噪声（TIN）或Han-Kobayashi方案推导出内界，并通过向接收端提供不同的边信息推导出外界。

本文研究光强广播信道（OI-BCs）。与 [26],不同，本文考虑输入受到三种不同强度约束：（1）仅有峰值强度约束；（2）仅有平均强度约束；（3）同时有峰值和平均强度约束。我们为所研究的光强广播信道提出了新的容量区域内界和外界。我们没有采用截断高斯码 [26], , 而是根据若干随机变量的分解结果采用叠加编码（SC）方案来推导内界。这些随机变量是在考虑峰值和/或平均强度约束时的最大熵输入 [10]。外界通过应用条件熵功率不等式（EPI） [30]推导得出。我们证明，这些界在高信噪比区间内渐近最优。此外，我们将这些界推广到 K用户光强广播信道，且不损失高信噪比下的渐近最优性。

本文其余部分安排如下。第二节介绍光强广播信道的信道模型。第三节和第四节分别分析双用户和 K 用户光强广播信道的容量区域。第五节总结全文。附录中给出了一些证明。

记号： 随机变量用大写字母表示，例如 X；其取值用小写字母表示，例如 x。随机变量的支撑集记为 supp(·)，期望记为 $\mathbb{E}[\cdot]$，特征函数记为 $\phi(\cdot)$。微分熵记为 h(·)，互信息记为 I(·; ·)。非负实数集合记为 $\mathbb{R}^+$ ，正自然数集合记为 $\mathbb{N}^+$。狄拉克 δ 函数记为 $\delta(\cdot)$，集合的凸包记为 Conv{·}。指标集 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 记为 $[k]$、 $k \in \mathbb{N}^+$ 和 $j = \sqrt{-1}$。函数 $A(t) \doteq B(t)$ 表示 $\lim_{t\to\infty}\{A(t) - B(t)\} = 0$。

—

II. Channel Model

对于单用户光强信道，信道输出为

$$Y = X + Z, \tag{1}$$

其中， X 表示信道输入， Z 表示方差为 σ^2的高斯噪声，即

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{2}$$

由于 X 与光强成正比，其支撑集必须满足

$$\mathsf{supp}(X) \subset \mathbb{R}^{+}. \tag{3}$$

考虑到 LED器件 的动态范围有限，以及对照明质量或能耗的要求，输入通常受到峰值强度约束：

$$\Pr(X \leq \mathsf{A}) = 1, \tag{4}$$

或/和平均强度约束：

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathsf{E}. \tag{5}$$

为方便起见，我们将最大瞬时强度与平均强度之比记为 α，即 $\alpha = \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{A}}$，其取值范围受限于 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$。

本文主要研究光强广播信道。我们首先考虑一个双用户光强广播信道，用户 k 处的信道输出为

$$Y_k = X + Z_k, \quad k \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

其中，X 表示信道输入，其支撑集满足式（3），并且也受到式（4）或/和式（5）的约束；Z_k 表示用户 k处的高斯噪声，并且

$$Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2), \quad k \in \{1, 2\}. \tag{7}$$

不失一般性，我们假设 $\sigma_1 \leq \sigma_2$。此外，当 $\mathsf{A} \gg \sigma_k$ 或 $\mathsf{E} \gg \sigma_k$, $k \in \{1, 2\}$ 时，对应于高信噪比区间。

在双用户光强广播信道中，用户 1 和用户 2 所需的消息分别记为 M_1 和 M_2。我们假设 M_1 和 M_2 相互独立。发射机对它们进行编码，并同时以编码速率 R_1和 R_2发送。如果随着码长趋于无穷，两个用户都能以趋于零的错误概率解码各自的消息，则称速率对 (R_1, R_2) 是可达的。该信道的容量区域是所有可达速率对构成的集合的闭包。

注意，式 (6) 中的信道属于加性高斯白噪声广播信道类，是一种物理退化信道 [25]。因此，我们有

$$Y_2 = Y_1 + \widetilde{Z}_2, \tag{8}$$

其中 $\widetilde{Z}_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2 - \sigma_1^2)$。双用户物理退化信道的容量区域由 [31, 定理 15.6.2] 表征，并总结如下引理：

引理 1. 式 (6) 中双用户光强广播信道的容量区域，其中 $X \to Y_1 \to Y_2$ 构成一个马尔可夫链，是满足以下条件的速率对 (R_1, R_2) 的集合

$$R_1 \leq \mathsf{I}(X; Y_1|U), \tag{9}$$

$$R_2 \leq \mathsf{I}(U; Y_2), \tag{10}$$

对于满足 (3)、(4) 或/和 (5) 的某些 $p_{U,\ X}(u,\ \ x)$。

上述记号和假设可以直接推广到 K用户 OI-BC，即，

$$Y_k = X + Z_k, \quad k \in [K], \tag{11}$$

其中 X是由独立消息 $M_1,\ M_2 \cdots,\ M_K$构成的码字，并满足 (3)、(4) 或/和 (5)；且 $Z_k \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma_k^2),\ \ k \in [K]$。不失一般性，我们还假设 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_K$。需要指出的是，上述 K用户 OI-BC 也是一个物理退化信道，并且有

$$Y_{k+1} = Y_k + \widetilde{Z}_{k+1}, \quad k \in [K-1], \tag{12}$$

其中 $\widetilde{Z}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2)$。 K用户物理退化信道的容量区域由 [25, 第 5 章7], [32, 定理 3] 刻画，并总结于以下引理:

引理 2. 式 (11) 中 K 用户光强广播信道的容量区域，其中 $X \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots \to Y_K$构成一条马尔可夫链，是满足以下条件的速率元组 $(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_K)$ 的集合

$$R_k \leq \mathsf{I}(U_k; Y_k|U_{k+1}), \quad k \in [K], \tag{13}$$

对于某个满足 (3)、(4) 或/和 (5) 的 $p_{U_{K-1}|U_K}(u_{K-1}|u_K)p_{U_{K-2}|U_{K-1}}(u_{K-2}|u_{K-1}) \cdots p_{U_1|U_2}(u_1|u_2)$，其中 $U_1 = X$, $U_{K+1} = \emptyset$，。

III. 双用户 OI-BC 的容量区域刻画

本节针对具有三种不同输入约束的双用户 OI-BC，刻画其容量区域。对于每种输入约束情形，我们首先介绍有关随机变量分解和已有单用户信道容量的一些预备知识，然后推导容量区域的内界和外界。最后，基于这些界刻画高信噪比容量区域。

A. 峰值强度受限 *OI-BC*

1) 预备知识：考虑到式 (4) 中的峰值强度约束，下面介绍均匀随机变量的分解以及现有的单用户信道容量。

引理 3 ([33]**)**。给定任意整数 $N \in \mathbb{N}^+$，均匀随机变量 S，即：

$$p_S(s) = \frac{1}{\mathsf{A}}, \quad s \in [0, \mathsf{A}], \tag{14}$$

可以 分解为两个独立随机变量 S_1 和 S_2之和，即

$$p_{S_1}(s_1) = \frac{N}{\mathsf{A}}, \quad s_1 \in \left[0, \frac{\mathsf{A}}{N}\right], \tag{15}$$

$$p_{S_2}(s_2) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta\Big(s_2 - \frac{n}{N} \times \mathsf{A}\Big). \tag{16}$$

为方便起见，将式（14）中的分布记为 $\mathsf{U}[0, \mathsf{A}]$。

引理4 ([10], [20]**).** 峰值强度受限光强信道的信道容量 $\mathsf{C}(\mathsf{A}, \sigma)$ 上界为

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma) = \min\left\{\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{4\sigma^2}\right), \log\left(1 + \frac{\mathsf{A}}{\sqrt{2\pi e}\sigma}\right)\right\}, \tag{17}$$

在高信噪比下，[1]

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma) \doteq \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma^2}\right). \tag{18}$$

2）容量区域的界： 基于 SC 方案推导出容量区域的内界。

定理1 （**内界**）。 当输入仅受式（4）中的峰值强度约束时，对于双用户光强广播信道，集合 $\mathsf{Conv}\{\cup_{N\in\mathbb{N}^+}\left(R_1^{\mathsf{in}}(N)\ R_2^{\mathsf{in}}(N)\right)\}$ 中的速率对均可达，其中

$$R_1^{\mathsf{in}}(N) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e N^2\sigma_1^2}\right), \tag{19a}$$

$$R_2^{\mathsf{in}}(N) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_2^2}\right) - \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{N}, \sigma_2\right). \tag{19b}$$

证明。 我们首先将消息 M_1 和 M_2 分别独立编码为信号 X_1 和 X_2，其中 X_1服从 $\mathsf{U}[0, \frac{\mathsf{A}}{N}]$，而 X_2 服从 _

$$p_{X_2}(x_2) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta\Big(x_2 - \frac{n}{N} \times \mathsf{A}\Big). \tag{20}$$

接着，我们采用一种叠加编码方案，使得 $X = X_1 + X_2$。应用引理 3 可得， X服从 $\mathsf{U}[0, \mathsf{A}]$, 这满足式（4）中的峰值强度约束。在引理 1 中，我们令 U

[1]需要注意的是，$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A},\ \sigma)$ 还可以进一步简化为 $\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A},\ \sigma) \doteq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma^2}\right)$，但为了简化后续计算，我们在式（18）中保留当前形式。

代入 $U = X_2$。因此，我们可以计算可达速率 $\mathsf{I}(X;Y_1|X_2)$ 和 $\mathsf{I}(X_2;Y_2)$，它们分别作为 R_1 和 R_2的内界。一方面，

$$\begin{aligned}
\mathsf{I}(X;Y_1|X_2) &= \mathsf{I}(X_1;X_1+Z_1) && (21)\\
&= \mathsf{h}(X_1+Z_1) - \mathsf{h}(Z_1) && (22)\\
&\geq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{e^{2\mathsf{h}(X_1)}}{e^{2\mathsf{h}(Z_1)}}\right) && (23)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e N^2\sigma_1^2}\right). && (24)
\end{aligned}$$

其中，(23) 由熵功率不等式得出。另一方面，

$$\begin{aligned}
\mathsf{I}(X_2;Y_2) &= \mathsf{h}(Y_2) - \mathsf{h}(Y_2|X_2) && (25)\\
&= \mathsf{h}(X+Z_2) - \mathsf{h}(X_1+Z_2) && (26)\\
&\geq \frac{1}{2}\log\left(e^{2\mathsf{h}(X)}+e^{2\mathsf{h}(Z_2)}\right) - \mathsf{h}(X_1+Z_2) && (27)\\
&\geq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_2^2}\right) - \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{N},\sigma_2\right). && (28)
\end{aligned}$$

其中，(27) 由熵功率不等式得出；(28) 成立是因为 X_1 受限于 $[0,\frac{\mathsf{A}}{N}]$且与高斯噪声 Z_2独立，因此我们可以用 $\mathsf{h}(X_1+Z_2) \leq \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{N},\ \sigma_2\right)+\mathsf{h}(Z_2)$ 来界定 $\mathsf{h}(X_1+Z_2)$。

结合 (24) 和 (28)，(19) 中的速率对 $\left(R_1^{\mathsf{in}}(N)\ R_2^{\mathsf{in}}(N)\right)$是可达的。此外，通过在这些可达速率对之间采用时分策略，集合 $\mathsf{Conv}\{\cup_{N\in\mathbb{N}^+}\left(R_1^{\mathsf{in}}(N)\ R_2^{\mathsf{in}}(N)\right)\}$ 中的速率对均是可达的。最后，证明完毕。

□

基于条件熵功率不等式推导容量区域的外界。

定理2 (外界)。 当输入仅受式（4）中的峰值强度约束时，双用户光强广播信道的容量区域被 $\cup_{\rho\in[0,1]}(R_1^{\mathsf{out}}(\rho)\ R_2^{\mathsf{out}}(\rho))$ 外界所界定，其中

$$R_1^{\mathsf{out}}(\rho) = \frac{1}{2}\log\left\{1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\left(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{A},\sigma_2)}-1\right)\right\}, \tag{29a}$$

$$R_2^{\mathsf{out}}(\rho) = \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A},\sigma_2) - \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{A},\sigma_2). \tag{29b}$$

证明。 我们首先利用引理 1 推导用户 2 的可达速率 R_2 的上界，然后推导用户 1 的可达速率 R_1 的上界。当 $U \to X \to Y_2$ 构成马尔可夫链时，可得

$$\mathsf{h}(Y_2|U) \geq \mathsf{h}(Y_2|X) = \mathsf{h}(Z_2). \tag{30}$$

此外，我们有

$$\mathsf{h}(Y_2|U) \le \mathsf{h}(Y_2) \le \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_2) + \mathsf{h}(Z_2). \tag{31}$$

注意到，$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_2)$ 关于 A 单调递增，并且当 A 趋于 0 时趋于 0。结合 (30) 和 (31)，存在 $\rho \in [0,1]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_2|U) = \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{A}, \sigma_2) + \mathsf{h}(Z_2). \tag{32}$$

应用引理 1，可达速率 R_2 的上界为

$$\begin{aligned} R_2 &\le \mathsf{I}(U; Y_2) && (33)\\ &= \mathsf{h}(Y_2) - \mathsf{h}(Y_2|U) && (34)\\ &\le \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_2) - \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{A}, \sigma_2), && (35) \end{aligned}$$

其中，将 $\mathsf{h}(Y_2) \le \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_2) + \mathsf{h}(Z_2)$ 和 (32) 代入 (34)，即可得到 (35)。此外，可达速率 R_1 的上界为

$$\begin{aligned} R_1 &\le \mathsf{I}(X; Y_1|U) && (36)\\ &= \mathsf{h}(Y_1|U) - \mathsf{h}(Z_1) && (37)\\ &\le \frac{1}{2}\log\left(e^{2\mathsf{h}(Y_2|U)} - e^{2\mathsf{h}(\tilde{Z}_2|U)}\right) - \mathsf{h}(Z_1) && (38)\\ &= \frac{1}{2}\log\left\{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\left(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{A}, \sigma_2)} - 1\right)\right\}, && (39) \end{aligned}$$

其中，注意到 $Y_2 = Y_1 + Z_2$，并且我们可以利用条件熵功率不等式对 $\mathsf{h}(Y_1|U)$ 进行界定，使得 $\mathsf{h}(Y_1|U) \le \frac{1}{2}\log\left(e^{2\mathsf{h}(Y_2|U)} - e^{2\mathsf{h}(\tilde{Z}_2|U)}\right)$；将 (32) 代入 (38)，即可得到 (39)。结合 (35) 和 (39)，证明完毕。 □

高信噪比容量区域是基于定理1中的内界和定理2中的外界推导得到的。我们将其总结如下。

定理 3 (渐近容量区域). 当输入仅受式 (4) 中的峰值强度约束时，在高信噪比下，双用户光强广播信道的容量区域渐近收敛于如下区域，其中速率对 $(R_1,\ R_2)$ 满足

$$R_1 \stackrel{\cdot}{\le} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\rho^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right), \tag{40a}$$

$$R_2 \stackrel{\cdot}{\le} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{(1-\rho^2)\mathsf{A}^2}{\rho^2\mathsf{A}^2 + 2\pi e\sigma_2^2}\right), \tag{40b}$$

其中有 $\rho \in [0,1]$。

证明。 在高信噪比下，峰值强度受限光强信道的单用户容量结果由引理4给出。将其代入定理2，我们得到高信噪比下的容量区域的外界为 $\cup_{\rho\in[0,1]}(R_1^{\text{out}}(\rho)\ R_2^{\text{out}}(\rho))$，其中

$$R_1^{\text{out}}(\rho) \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\rho^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right), \tag{41a}$$

$$R_2^{\text{out}}(\rho) \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(1-\rho^2)\mathsf{A}^2}{\rho^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}\right). \tag{41b}$$

为方便起见，我们将上述外界的边界写为

$$R_2^{\text{out}} \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_2^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\left(e^{2R_1}-1\right)\right),\ R_1\in\left[0,\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right)\right]. \tag{42}$$

接下来，我们将证明，在高信噪比下，定理1中的内界与（41）一致。将（18）代入（19），可得凸包$\{\cup_{N\in\mathbb{N}^+}\left(R_1^{\text{in}}(N)\ R_2^{\text{in}}(N)\right)\}$中的速率对均为可达，其中

$$R_1^{\text{in}}(N) \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi eN^2\sigma_1^2}\right), \tag{43}$$

$$R_2^{\text{in}}(N) \doteq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}{\mathsf{A}^2+2\pi eN^2\sigma_2^2}\times N^2\right). \tag{44}$$

为分析由上述可达速率对刻画的内界，我们固定一个整数 N，并推导两个相邻速率对 $\left(R_1^{\text{in}}(N)\ R_2^{\text{in}}(N)\right)$ 和（$R_1^{\text{in}}(N+1)\ R_2^{\text{in}}(N+1)$）的凸包，它们构成一条直线段：

$$\begin{aligned} R_2^{\text{in}} &\doteq \frac{\log\left(\frac{\mathsf{A}^2+2\pi eN^2\sigma_2^2}{\mathsf{A}^2+2\pi e(N+1)^2\sigma_2^2}\times\frac{(N+1)^2}{N^2}\right)}{\log\left(\frac{\mathsf{A}^2+2\pi e(N+1)^2\sigma_1^2}{\mathsf{A}^2+2\pi eN^2\sigma_1^2}\times\frac{N^2}{(N+1)^2}\right)}\left(R_1-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi eN^2\sigma_1^2}\right)\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}{\mathsf{A}^2+N^2 2\pi e\sigma_2^2}\times N^2\right) \\ &\doteq -R_1+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right),\ R_1\in[R_1^{\text{in}}(N),R_1^{\text{in}}(N+1)],\ \forall N\in\mathbb{N}^+. \end{aligned} \tag{45}$$

我们计算 $R_2^{\text{out}}-R_2^{\text{in}}$ 之间的差距，使得

$$R_2^{\text{out}}-R_2^{\text{in}} \doteq \log\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\left(e^{2R_1}-1\right)\right)+R_1 \tag{46}$$

$$\doteq \log\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\rho^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_2^2}\right)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\rho^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right) \tag{47}$$

$$\doteq 0,\quad R_1\in[R_1^{\text{in}}(N),R_1^{\text{in}}(N+1)],\ \forall N\in\mathbb{N}^+. \tag{48}$$

其中，将（41a）代入（46）即可得到（47）。当我们取$\mathbb{N}^+$中的所有可能整数 N 时，可得

$$R_2^{\text{out}}-R_2^{\text{in}} \doteq 0,\quad \forall R_1\in\left[0,\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right)\right], \tag{49}$$

这表明，定理2中的外界和定理1中的内界在高信噪比下是紧的。因此，我们完成了证明。

□

容量区域的推导界如图1所示，其中假设 $\sigma_2 = 2\sigma_1$ 且 A信噪比$_k = \frac{\mathsf{A}}{\sigma_k}$, $k \in \{1, 2\}$。从图中可以直观地看出，随着信噪比增大，内界和外界逐渐收紧，这从数值上验证了推导结果。

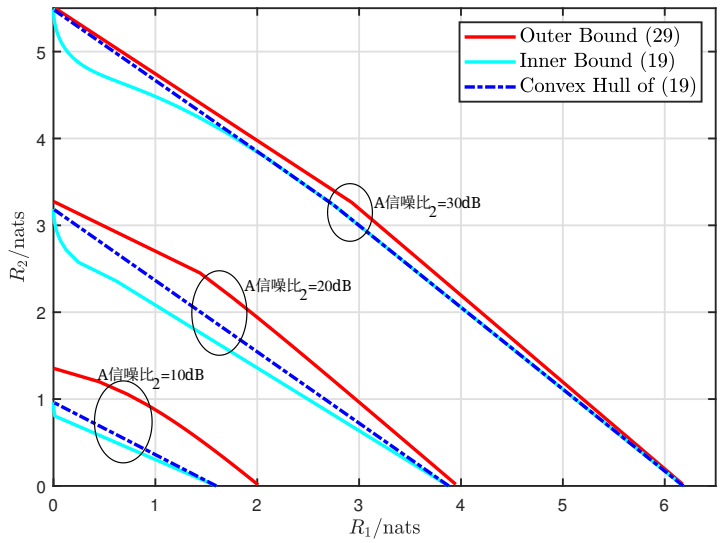


图1：具有峰值强度约束的双用户 OI-BC 容量区域界。

B. 平均强度受限 *OI-BC*

1）预备知识：考虑式（5）中的平均强度约束，下面介绍指数随机变量的分解以及现有的单用户信道容量。

引理 5 ([33])。给定任意的 $\mathsf{E} > 0$、$\mathsf{E}_1 > 0$ 和 $\mathsf{E}_1 \le \mathsf{E}$，一个指数随机变量 S，即，

$$p_S(s) = \frac{1}{\mathsf{E}} e^{-\frac{s}{\mathsf{E}}}, \quad s \in [0, +\infty), \tag{50}$$

可以被 分解为两个独立随机变量 S_1 和 S_2 之和，即，

$$p_{S_1}(s_1) = \frac{1}{\mathsf{E}_1} e^{-\frac{s_1}{\mathsf{E}_1}}, \quad s_1 \in [0, +\infty), \tag{51}$$

$$p_{S_2}(s_2) = \frac{\mathsf{E}_1}{\mathsf{E}} \delta(s_2) + \left(1 - \frac{\mathsf{E}_1}{\mathsf{E}}\right) \times \frac{1}{\mathsf{E}} e^{-\frac{s_2}{\mathsf{E}}}, \quad s_2 \in [0, +\infty). \tag{52}$$

为方便起见，将式 (50) 中的分布记为指数分布(E)。

引理 6 ([10], [21], [22])。 平均强度约束光强信道的信道容量 $\mathsf{C}(\mathsf{E},\ \sigma)$ 上界为

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{E},\sigma)=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{e}{2\pi}\left(2+\frac{\mathsf{E}}{\sigma}\right)^{2}\right\}, \tag{53}$$

在高信噪比下,

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{E},\sigma)\doteq\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{e\mathsf{E}^{2}}{2\pi\sigma^{2}}\right). \tag{54}$$

2) 容量区域的界: 容量区域的内界如下所述。

定理 4 (内界)。 当输入仅受式 (5) 中的峰值强度约束时，集合 $\cup_{\rho\in[0,1]}\left(R_1^{\mathsf{in}}(\rho)\ R_2^{\mathsf{in}}(\rho)\right)$ 中的速率对对于双用户光强广播信道均为可达，其中

$$R_1^{\mathsf{in}}(\rho)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{e\rho^{2}\mathsf{E}^{2}}{2\pi\sigma_1^{2}}\right), \tag{55a}$$

$$R_2^{\mathsf{in}}(\rho)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{e\mathsf{E}^{2}}{2\pi\sigma_2^{2}}\right)-\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{E},\sigma_2). \tag{55b}$$

证明。 证明与定理1的证明类似。这里我们主要强调其中的差异。与峰值强度约束下的 OI-BC 不同，此处 X_1 服从指数分布 $\mathsf{Exp}(\rho\mathsf{E})$，且 X_2 服从

$$p_{X_2}(x_2)=\rho\delta(s_2)+(1-\rho)\times\frac{e^{-\frac{x_2}{\mathsf{E}}}}{\mathsf{E}},\quad x_2\in[0,+\infty), \tag{56}$$

其中 $\rho\in[0,1]$。将其代入引理 5，我们得到 X 服从指数分布 $\mathsf{Exp}(\mathsf{E})$，其满足式 (5) 中的平均强度约束。此外，注意到 X_1 满足 $\mathbb{E}[X_1]=\rho\mathsf{E}$ ，并且独立于高斯噪声 Z_2，因此我们可以将 $\mathsf{h}(X_1+Z_2)$界定为

$$\mathsf{h}(X_1+Z_2)\le\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{E},\sigma_2)+\mathsf{h}(Z_2). \tag{57}$$

最后，按照从 (21) 到 (28) 的类似步骤，即可完成证明。

□

容量区域的外界如下所示。

定理 5 (外界)。 当输入仅受限于平均强度约束时

(5)中，对于双用户光强广播信道，容量区域被外界限定为 $\cup_{\rho\in[0,1]}(R_1^{\mathsf{out}}(\rho)\ R_2^{\mathsf{out}}(\rho))$，其中

$$R_1^{\mathsf{out}}(\rho)=\frac{1}{2}\log\left\{1+\frac{\sigma_2^{2}}{\sigma_1^{2}}\left(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{E},\sigma_2)}-1\right)\right\}, \tag{58a}$$

$$R_2^{\mathsf{out}}(\rho)=\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{E},\sigma_2)-\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho\mathsf{E},\sigma_2). \tag{58b}$$

证明。 证明与定理2的证明类似。注意

$$\mathsf{h}(Y_2|U) \geq \mathsf{h}(Z_2), \tag{59}$$

$$\mathsf{h}(Y_2|U) \leq \mathsf{C}_{\text{ub}}(\mathsf{E}, \sigma_2) + \mathsf{h}(Z_2). \tag{60}$$

此处，$\mathsf{C}_{\text{ub}}(\mathsf{E}, \sigma_2)$ 关于 E 单调递增，并且当 E 趋于 0 时趋于 0。因此，存在 $\rho \in [0,1]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_2|U) = \mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{E}, \sigma_2) + \mathsf{h}(Z_2). \tag{61}$$

最后，按照从 (33) 到 (39) 的类似步骤，证明得证。

□

将引理 6 中的单用户容量结果代入 (55) 和 (58)，即可直接得到高信噪比容量区域。总结如下。

定理 6 (渐近容量区域)。 当输入仅受 (5) 中的平均强度约束时，在高信噪比下，双用户光强广播信道的容量区域渐近收敛至满足以下条件的区域，其中速率对 (R_1, R_2)

$$R_1 \dot{\leq} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{e\rho^2\mathsf{E}^2}{2\pi\sigma_1^2}\right), \tag{62a}$$

$$R_2 \dot{\leq} \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{e(1-\rho^2)\mathsf{E}^2}{e\rho^2\mathsf{E}^2 + 2\pi\sigma_2^2}\right), \tag{62b}$$

其中 $\rho \in [0,1]$。

推导得到的容量区域界如图 2 所示，其中假设 $\sigma_2 = 2\sigma_1$，且能量信噪比为 $_k = \frac{\mathsf{E}}{\sigma_k}$、$k \in \{1,2\}$。

C. 峰值和平均强度约束下的光强广播信道

1）预备知识：考虑式（4）和式（5）中的峰值和平均强度约束，下面介绍截断指数随机变量的分解以及已有的单用户信道容量。

引理 7 ([33]**)**。 给定任意整数 $N \in \mathbb{N}^+$，一个截断指数随机变量 S，即

$$p_S(s) = \frac{1}{\mathsf{A}}\frac{\mu}{1-e^{-\mu}}e^{-\frac{\mu s}{\mathsf{A}}}, \quad s \in [0, \mathsf{A}], \quad \mu > 0, \tag{63}$$

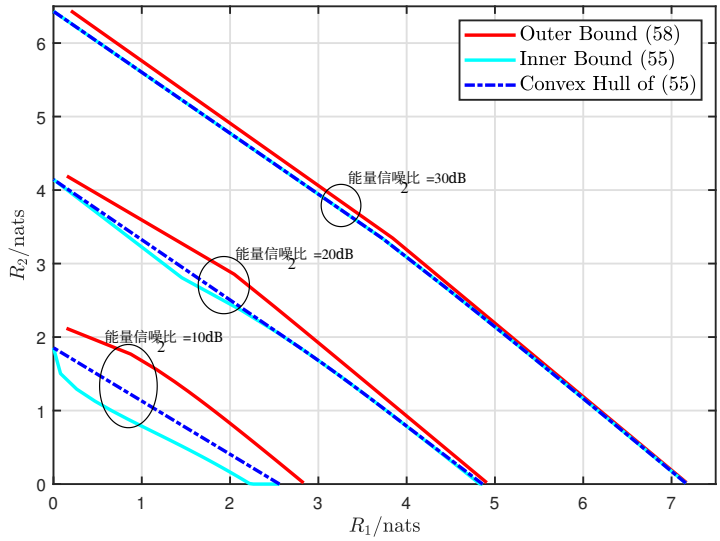


图 2：具有平均强度约束的双用户 OI-BC 容量区域界限。

可以分解为两个独立随机变量 S_1 和 S_2之和，即

$$p_{S_1}(s_1) = \frac{1}{\mathsf{A}} \frac{\mu}{1 - e^{-\frac{\mu}{N}}} e^{-\frac{\mu s_1}{\mathsf{A}}}, \quad s_1 \in \left[0, \frac{\mathsf{A}}{N}\right], \tag{64}$$

$$p_{S_2}(s_2) = \frac{1 - e^{-\frac{\mu}{N}}}{1 - e^{-\mu}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{\mu n}{N}} \delta\left(s_2 - \frac{n}{N} \times \mathsf{A}\right). \tag{65}$$

为方便起见，将式 (65) 中的分布记为 Texp(A， μ)。

引理8 ([10])。峰值和平均光强受限光强信道的信道容量 C(A， σ; $\mu^\star$) 的上界为

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma; \mu^\star) = \inf_{\beta_1 > 0, \beta_2 > 0} B(\beta_1, \beta_2), \tag{66}$$

其中

$$\beta_1 = \sigma \log\left(1 + \frac{\mathsf{A}}{\sigma}\right) \tag{67}$$

$$\beta_2 = \mu^\star \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta_1^2}{2\sigma^2} \times \left(\frac{1}{\mu^\star} - \frac{e^{-\mu^\star}}{1 - e^{-\mu^\star}}\right)\right)\right), \tag{68}$$

且 $B(\beta_1, \beta_2)$ 见下一页底部的式（66a）。参数 $\mu^\star$ 是下列方程的唯一解

$$\frac{1}{\mu^\star} - \frac{e^{-\mu^\star}}{1 - e^{-\mu^\star}} = \alpha. \tag{69}$$

在高信噪比下，

$$\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma; \mu^\star) \doteq \frac{1}{2} \log\left(1 + \exp\left(2 - \frac{2\mu^\star e^{-\mu^\star}}{1 - e^{-\mu^\star}}\right) \left(\frac{1 - e^{-\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2 \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e \sigma^2}\right). \tag{70}$$

2) 容量区域的界： 容量区域的内界如下所述。

定理 7（**内界**）。 当输入同时受到（4）和（5）中的峰值和平均强度约束时，集合 Conv $\{\cup_{N\in\mathbb{N}^+}\big(R_1^{\text{in}}(N),\ R_2^{\text{in}}(N)\big)\}$ 中的速率对对于双用户 OI-BC 均是可达的，其中

$$R_1^{\text{in}}(N)=\frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\mu^\star e^{-\frac{\mu^\star}{N}}}{N\left(1-e^{-\frac{\mu^\star}{N}}\right)}\right)\left(\frac{1-e^{-\frac{\mu^\star}{N}}}{\mu^\star}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right), \tag{71a}$$

$$R_2^{\text{in}}(N)=\frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\mu^\star e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_2^2}\right)-\mathsf{C}_{\text{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{N},\sigma_2;\frac{\mu^\star}{N}\right). \tag{71b}$$

证明。 假设 X_1 服从 Texp($\frac{\mathsf{A}}{N}$，$\frac{\mu^\star}{N}$)，且 X_2 服从

$$p_{X_2}(x_2)=\frac{1-e^{-\frac{\mu^\star}{N}}}{1-e^{-\mu^\star}}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-\frac{\mu^\star n}{N}}\delta\Big(x_2-\frac{n}{N}\times\mathsf{A}\Big), \tag{72}$$

其中 $N\in\mathbb{N}^+$。将它们代入引理 7，可得 X 服从 Texp(A， $\mu^\star$)，其满足（4）和（5）中的峰值和平均强度约束。此外，注意到 X_1 满足$X_1\in[0,\mathsf{A}/N]$ 和 $\mathbb{E}[X_1]=\rho\mathsf{E}$，并且与高斯噪声 Z_2 相互独立，因此我们可以将 h(X_1+Z_2) 界定为

$$\mathsf{h}(X_1+Z_2)\le\mathsf{C}_{\text{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{N},\sigma_2;\frac{\mu^\star}{N}\right)+\mathsf{h}(Z_2). \tag{73}$$

最后，按照从（21）到（28）的类似步骤，即可完成证明。

□

以下外界见于 [26, 定理 1]。这里，我们也可以利用条件熵功率不等式给出一个新的证明，其与定理 2 的证明类似，故略去

$$\begin{aligned}B(\beta_1,\beta_2)=&\left(1-\mathcal{Q}\left(\frac{\beta_1+\left(\frac{1}{\mu^\star}-\frac{e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right)\mathsf{A}}{\sigma}\right)-\mathcal{Q}\left(\frac{\beta_1+(1-\left(\frac{1}{\mu^\star}-\frac{e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right))\mathsf{A}}{\sigma}\right)\right)\\&\times\log\left(\frac{\mathsf{A}}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{\beta_2\beta_1}{\mathsf{A}}}-e^{-\beta_2\left(1+\frac{\beta_1}{\mathsf{A}}\right)}}{\sqrt{2\pi}\beta_2\left(1-2\mathcal{Q}\left(\frac{\beta_1}{\sigma}\right)\right)}\right)\\&-\frac{1}{2}+\mathcal{Q}\left(\frac{\beta_1}{\sigma}\right)+\frac{\beta_1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\beta_1^2}{2\sigma^2}}+\frac{\sigma}{\mathsf{A}}\frac{\beta_2}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\beta_1^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(\mathsf{A}+\beta_1)^2}{2\sigma^2}}\right)\\&+\beta_2\left(\frac{1}{\mu^\star}-\frac{e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right)\left(1-2\mathcal{Q}\left(\frac{\beta_1+\frac{\mathsf{A}}{2}}{\sigma}\right)\right).\end{aligned} \tag{66a}$$

。

引理 9（**外界**）。 当输入同时受到式 (4) 和式 (5) 中峰值和平均强度约束时，双用户光强广播信道的容量区域受外界 $\cup_{\rho\in[0,1]}\{R_1^{\text{out}}(\rho),\ R_2^{\text{out}}(\rho)\}$ 限制，其中

$$R_1^{\text{out}}(\rho)=\frac{1}{2}\log\left\{1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\left(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\sigma_2;\mu^\star)}-1\right)\right\}, \tag{74a}$$

$$R_2^{\text{out}}(\rho)=\mathsf{C}_{\text{ub}}(\mathsf{A},\sigma_2;\mu^\star)-\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\sigma_2;\mu^\star), \tag{74b}$$

高信噪比容量区域如下所述。

定理 8（**渐近容量区域**）。 当输入同时受到式 (4) 和式 (5) 中峰值和平均强度约束时，在高信噪比下，双用户光强广播信道的容量区域渐近收敛到满足以下条件的区域，其中速率对为 (R_1,R_2)：

$$R_1\ \dot{\leq}\ \frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\rho\mu^\star e^{-\rho\mu^\star}}{1-e^{-\rho\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right), \tag{75a}$$

$$R_2\ \dot{\leq}\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{\exp\left(2-\frac{2\mu^\star e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}{\exp\left(2-\frac{2\rho\mu^\star e^{-\rho\mu^\star}}{1-e^{-\rho\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}\right), \tag{75b}$$

其中 $\rho\in[0,1]$。

证明。 证明过程与定理 3 的证明类似。在此之前，我们需要推导一个在高信噪比区间内有效的新外界。注意，$\mathsf{h}(Y_2|U)$ 可被界定为

$$\mathsf{h}(Y_2|U)\geq\mathsf{h}(Z_2), \tag{76}$$

$$\mathsf{h}(Y_2|U)\leq\mathsf{C}_{\text{ub}}(\mathsf{A},\sigma_2;\mu^\star)+\mathsf{h}(Z_2). \tag{77}$$

函数 $\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma_2;\rho\mu^\star)$，$\rho\in[0,1]$，关于 ρ 单调递增，并且在高信噪比下，当 ρ 趋于 0 时趋近于零。（有关 $\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma_2;\rho\mu^\star)$ 单调性的更多细节，请参见附录 A）。结合（76）和（77），存在 $\rho\in[0,1]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_2|U)=\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\sigma_2;\rho\mu^\star)+\mathsf{h}(Z_2). \tag{78}$$

通过与从（33）到（39）类似的论证，我们得到在高信噪比下 ，

$$R_1\ \dot{\leq}\ \frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\rho\mu^\star e^{-\rho\mu^\star}}{1-e^{-\rho\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\right), \tag{79}$$

$$R_2 \overset{.}{\leq} \frac{1}{2}\log\left(\frac{\exp\left(2-\frac{2\mu^\star e^{-\mu^\star}}{1-e^{-\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2 \mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}{\exp\left(2-\frac{2\rho\mu^\star e^{-\rho\mu^\star}}{1-e^{-\rho\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2 \mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_2^2}\right). \tag{80}$$

最后，结合上述新推导出的外界和定理 7 中的内界，我们即可完成证明。

□

容量区域的推导界如图 3 所示，其中假设 $\sigma_2 = 2\sigma_1$、$\alpha = 0.4$ 和信噪比$_k = \frac{\mathsf{A}}{\sigma_k}$ $k \in \{1,2\}$。

—

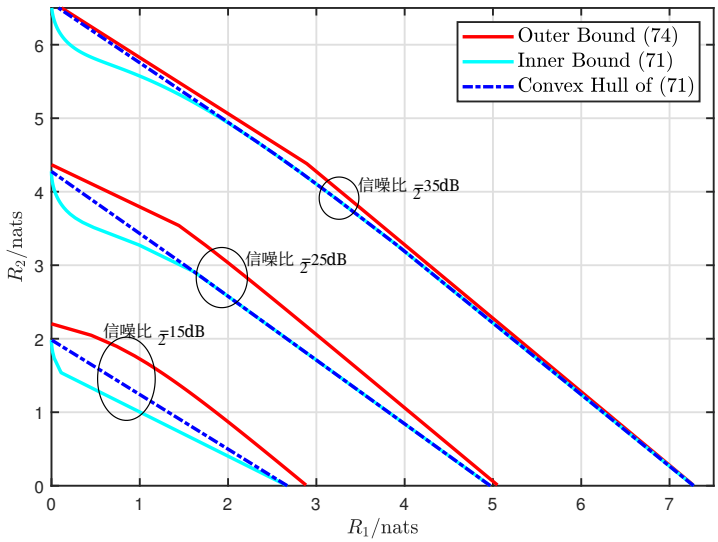


图 3：当$\alpha = 0.4$时，具有峰值和平均强度约束的双用户 OI-BC 的容量区域界。

IV. K用户光强广播信道的容量区域刻画

本节考虑三种输入约束，并将双用户 OI-BC 的容量区域推广到 K 用户 OI-BC。对于每种输入约束，先推导内界，再推导外界。最后，基于这些界刻画高信噪比容量区域。

A. 峰值强度受限 *OI-BC*

基于 SC 方案推导容量区域的内界 .

定理 9 (内界)。 当输入仅受式 (4) 中的峰值强度约束时，集合 $\mathrm{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}(R_1^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{N})\ R_2^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{N})\ \cdots,\ R_K^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{N}))\}$ 中的速率元组对于一个K-用户 OI-BC 均为可达的，其中

$$R_k^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{N}) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e(\prod_{n=k}^K N_n)^2\sigma_k^2}\right) - \mathcal{C}_{\mathrm{up}}\left(\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k-1}^K N_n}, \sigma_k\right),\ k\in[K], \tag{81}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}=\{\boldsymbol{N}=[N_0,N_1,\cdots,N_K]:\ N_n\in\mathbb{N}^+,\quad \forall n\in\{0\cup[K]\},\quad N_0\gg 0,\quad N_K=1\}$。[2]

证明。我们首先将消息 M_1、M_2、$\cdots$、M_K 分别独立编码为信号 X_1、X_2、$\cdots$、X_K，其中 X_1 服从 $\mathsf{U}\Big[0,\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=1}^{K}N_n}\Big]$ 和 $\forall k\in\{2,3,\cdots,K\}$:

$$p_{X_k}(x_k)=\frac{1}{N_{k-1}}\sum_{i=0}^{N_{k-1}-1}\delta\left(x_k-\frac{i}{N_{k-1}}\times\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k}^{K}N_n}\right). \tag{82}$$

然后我们采用一种 SC方案，使得 $X=\sum_{n=1}^{K}X_n$。记

$$X_{k,\text{sum}}=\sum_{n}^{k}X_n,\quad k\in[K]. \tag{83}$$

结合引理 3，我们得到 $X_{k,\ \text{sum}}$ 服从 $\mathsf{U}\Big[0,\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k}^{K}N_n}\Big]$，且 X 服从 $\mathsf{U}[0,\mathsf{A}]$，这满足式 (4) 中的峰值强度约束。在引理 2 中，我们将 U_k 代入 $U_k=\sum_{n=k}^{K}\overline{X_n}$ 因此，我们可以计算可达速率 $\mathsf{I}\big(\sum_{n=k}^{K}X_n;Y_k\ \big|\ \sum_{n=k+1}^{K}X_n\big)$，作为 R_k、$k\in[K]$的内界。为此，我们将 $\mathsf{I}\big(\sum_{n=k}^{K}X_n;Y_k\ \big|\ \sum_{n=k+1}^{K}X_n\big)$ 化简为

$$\mathsf{I}\left(\sum_{n=k}^{K}X_n;Y_k\ \middle|\ \sum_{n=k+1}^{K}X_n\right)=\mathsf{I}\Big(X_k;\sum\nolimits_{n=1}^{k}X_n+Z_k\Big) \tag{84}$$

$$=\mathsf{h}\Big(\sum\nolimits_{n=1}^{k}X_n+Z_k\Big)-\mathsf{h}\Big(\sum\nolimits_{n=1}^{k-1}X_n+Z_k\Big) \tag{85}$$

$$\geq\frac{1}{2}\log\Big(e^{2\mathsf{h}\left(\sum_{n=1}^{k}X_n\right)}+e^{2\mathsf{h}(Z_k)}\Big)-\mathsf{h}\Big(\sum\nolimits_{n=1}^{k-1}X_n+Z_k\Big) \tag{86}$$

$$\geq\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e(\prod_{n=k}^{K}N_n)^2\sigma_k^2}\right)-\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k-1}^{K}N_n},\sigma_k\right), \tag{87}$$

其中，(86)由熵功率不等式得出；(87)则基于以下事实：$\sum_{n=1}^{k-1}X_n$ 受 $\Big[\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k-1}^{K}N_n}\Big]$ 限制，且与高斯噪声 Z_k 相互独立。结合(87)，证明得以完成。

□

容量区域的外界是基于条件熵功率不等式推导的。

定理10 (外界). 当输入仅受(4)中的峰值强度约束时，

K用户 OI-BC 的容量区域由以下外界限定：

$\cup_{\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}}(R_1^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ R_2^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ \cdots,R_K^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}))$，其中

$$R_k^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sigma_k^2+\sigma_K^2\big(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K)}-1\big)}{\sigma_k^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}\right\},\quad k\in[K], \tag{88}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}=[\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_K]:\ \rho_k\in[0,1],\quad \rho_{k-1}\leq\rho_k,\quad \forall k\in[K],\quad \rho_0=0,\quad \rho_K=1\}$.

[2]我们假设 $N_0\gg 0$ 等价于 $\frac{1}{N_0}=0$。 —

证明。我们首先借助引理 2推导用户 K 的可达速率 R_K 的上界，然后推导其余用户 $k \in [K-1]$的可达速率 R_k。当 $U_K \to X \to Y_K$ 构成马尔可夫链时，可得

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K) \geq \mathsf{h}(Y_K|X) = \mathsf{h}(Z_K). \tag{89}$$

此外，我们有

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K) \leq \mathsf{h}(Y_K) \leq \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_K) + \mathsf{h}(Z_K). \tag{90}$$

因此，存在 $\rho_{K-1} \in [0,1]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K) = \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A}, \sigma_K) + \mathsf{h}(Z_K) \tag{91}$$

$$= \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_K^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big). \tag{92}$$

根据引理 2，用户 K 的可达速率可上界为

$$R_K \leq \mathsf{I}(U_K; Y_K) \tag{93}$$

$$= \mathsf{h}(Y_K) - \mathsf{h}(Y_K|U_K) \tag{94}$$

$$\leq \mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\mathsf{A}, \sigma_K) + \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_K^2\big) - \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_K^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big) \tag{95}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sigma_K^2 + \sigma_K^2\big(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_K\mathsf{A},\sigma_K)} - 1\big)}{\sigma_K^2 + \sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)}\right\}. \tag{96}$$

此外，用户 k、 $k \in [K-1]$的可达速率 R_k 可上界为

$$R_k \leq \mathsf{I}(U_k; Y_k|U_{k+1}) \tag{97}$$

$$= \mathsf{h}(Y_k|U_{k+1}) - \mathsf{h}(Y_k|U_k), \quad k \in [K-1], \tag{98}$$

其中，(98)成立是因为 $U_{k+1} \to U_k \to Y_k$ 构成一个马尔可夫链。为推导(98)的上界，我们先分析 $\mathsf{h}(Y_k|U_k)$，再分析 $\mathsf{h}(Y_k|U_{k+1})$。

为分析 $\mathsf{h}(Y_k|U_k)$，我们假设 $\forall k \in [K]$,

$$\mathsf{h}(Y_k|U_k) = \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_k^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big). \tag{99}$$

由式 (92) 可知，若 $k = K$，则式 (99) 成立。接着，我们固定一个特定的 $i \in \{2, \cdots, K\}$，并假设当 $k = i$ 时式 (99) 成立，即:

$$\mathsf{h}(Y_i|U_i) = \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_i^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{i-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big). \tag{100}$$

我们将 $\mathsf{h}(Y_{i-1}|U_{i-1})$ 的上界估计为

$$\mathsf{h}(Y_{i-1}|U_{i-1}) \le \mathsf{h}(Y_{i-1}|U_i) \tag{101}$$

$$\le \frac{1}{2}\log\big(e^{2\mathsf{h}(Y_i|U_i)} - 2\pi e(\sigma_i^2 - \sigma_{i-1}^2)\big) \tag{102}$$

$$= \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_{i-1}^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{i-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big), \tag{103}$$

其中，由于 $U_i \to U_{i-1} \to Y_{i-1}$ 构成一个马尔可夫链，(101)成立；将~条件熵功率不等式代入 $Y_{i-1} + Z_i = Y_i$ 可得 (102)；将 (100) 代入 (102) 可得 (103)。另一方面，由于 $U_i \to X \to Y_{i-1}$ 也构成一个马尔可夫链，我们将 $\mathsf{h}(Y_{i-1}|U_{i-1})$下界为

$$\mathsf{h}(Y_{i-1}|U_{i-1}) \ge \mathsf{h}(Y_{i-1}|X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma_{i-1}^2). \tag{104}$$

结合(103)和(104)，存在 $\rho_{i-2} \in [0, \rho_{i-1}]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_{i-1}|U_{i-1}) = \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_{i-1}^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{i-2}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big). \tag{105}$$

因此，当 $k = i-1$时，(99)也成立。根据数学归纳法，(99)对 $\forall k \in [K]$成立。为~分析 $\mathsf{h}(Y_k|U_{k+1})$，我们首先注意到 $Y_k + Z_{k+1} = Y_{k+1}$。根据条件熵功率不等式，我们得到

$$\mathsf{h}(Y_k|U_{k+1}) \le \frac{1}{2}\log\big(e^{2\mathsf{h}(Y_{k+1}|U_{k+1})} - 2\pi e(\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2)\big) \tag{106}$$

$$= \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\sigma_k^2 + 2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)\big),\ k \in [K-1]. \tag{107}$$

将 (99) 和 (107) 代入 (98)，得到

$$R_k \le \frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sigma_k^2 + \sigma_K^2\big(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K)} - 1\big)}{\sigma_k^2 + \sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\mathsf{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{A},\sigma_K)} - 1)}\right\}, \quad k \in [K-1]. \tag{108}$$

结合 (96) 和 (108)，证明完成。 □

高信噪比容量区域基于定理 9 的内界和定理10 的外界推导得出。我们总结如下。

定理 11 (渐近容量区域)。 当输入仅受 (4) 中的峰值强度约束时，在高信噪比下， K 用户 OI-BC 的容量区域渐近收敛至满足以下条件的区域，其中速率元组 $(R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_K)$

$$R_k \dot{\le} \frac{1}{2}\log\left(\frac{\rho_k^2\mathsf{A}^2 + 2\pi e\sigma_k^2}{\rho_{k-1}^2\mathsf{A}^2 + 2\pi e\sigma_k^2}\right), \quad k \in [K], \tag{109}$$

其中 $\boldsymbol{\rho} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}} = \{\boldsymbol{\rho}:\ \rho_k \in [0,1],\quad \rho_{k-1} \le \rho_k,\quad \forall k \in [K],\quad \rho_0 = 0,\quad \rho_K = 1\}$。

证明。 将引理4中的单用户容量结果代入定理10，我们得到高信噪比下的容量区域外界为 $\cup_{\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}}(R_1^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ R_2^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ \cdots,\ R_K^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}))$，其中

$$R_k^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}) \doteq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\rho_k^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}{\rho_{k-1}^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}\right),\quad k\in[K]. \tag{110}$$

我们将上述外界的边界表示为

$$R_K^{\text{out}} \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\sum_{m=1}^{K-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}\right), \tag{111}$$

其证明见附录B。 R_K^{out}的导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_K^{\text{out}}}{\partial R_k^{\text{out}}} &\doteq -\frac{\sum_{m=1}^{k-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}+\frac{\sigma_k^2}{\sigma_K^2}\prod_{n=k}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}}{1+\sum_{m=1}^{K-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}(e^{2R_m^{\text{out}}}-1)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}} && (112)\\
&= -\frac{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_1^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=2}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}+\sum_{m=2}^{k-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}+\frac{\sigma_k^2}{\sigma_K^2}\prod_{n=k}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}}{1+\sum_{m=1}^{K-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}(e^{2R_m^{\text{out}}}-1)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}}\\
&\doteq -\frac{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_K^2}\frac{\rho_1^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_1^2}\prod_{n=2}^{K-1}\frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}^2}+\sum_{m=2}^{k-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(\frac{\rho_m^2}{\rho_{m-1}^2}-1\right)\prod_{n=m+1}^{K-1}\frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}^2}+\frac{\sigma_k^2}{\sigma_K^2}\prod_{n=k}^{K-1}\frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}^2}}{1+\frac{\rho_{K-1}^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}} && (113)\\
&= -\frac{\frac{\rho_{K-1}^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}+\sum_{m=2}^{k-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(\frac{\rho_m^2}{\rho_{m-1}^2}-1\right)\frac{\rho_{K-1}^2}{\rho_m^2}+\frac{\sigma_k^2}{\sigma_K^2}\frac{\rho_{K-1}^2}{\rho_{k-1}^2}}{1+\frac{\rho_{K-1}^2\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}} && (114)\\
&\doteq -1,\quad k\in[K-1], && (115)
\end{aligned}$$

其中，(113)由(110)和(149)得出。因此，在高信噪比下，外界的边界是一个$(K-1)$维超平面。为方便起见，我们将其记为 $\mathcal{H}_{\text{out}}$。

接下来，我们将证明在高信噪比下，定理 9 中的内界在 $\mathcal{H}_{\text{out}}$ 下是紧的。将(18)代入(81)，可得 $\mathsf{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\ \cdots,\ R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$中的速率元组均可达，其中

$$R_k^{\text{in}}(\boldsymbol{N}) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{\mathsf{A}^2}{(\prod_{n=k}^{K}N_n)^2}+2\pi e\sigma_k^2}{\frac{\mathsf{A}^2}{(\prod_{n=k-1}^{K}N_n)^2}+2\pi e\sigma_k^2}\right),\quad k\in[K]. \tag{116}$$

为分析可达区域 $\mathsf{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\ \cdots,\ R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$，我们定义一个新区域$\mathcal{R}$，使得

$$\mathcal{R} = \cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N}),\cdots,R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right). \tag{117}$$

由于 $\mathcal{R}\subseteq\mathsf{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\ \cdots,R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$，因此， $\mathcal{R}$中的速率元组也是可达的。

然后，我们对 $\mathcal{R}$有两点观察。首先，给定任意 $\boldsymbol{N} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}$，如果 $\boldsymbol{\rho}$ 满足

$$\rho_k = \frac{1}{\prod_{n=k}^{K} N_n}, \quad k \in \{0 \cup [K]\}, \tag{118}$$

然后结合 (110) 和 (116)，可得

$$\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N}), \cdots, R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right) \doteq (R_1^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}), \cdots, R_K^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})), \quad \forall \boldsymbol{N} \in \mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}. \tag{119}$$

因此， $\mathcal{R}$中的任意可达速率元组，在高信噪比下都等于超平面 $\mathcal{H}_{\text{out}}$ 上的某个速率元组，即 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}_{\text{out}}$。其次，给定任意 $k \in [K]$，若令

$$N_{k-1} \to +\infty, \tag{120}$$

$$N_n \to 1, \quad n \in \{k, \cdots, K\}, \tag{121}$$

然后结合 (116)，可得 $\mathcal{R}$ 中的以下速率元组是可达的：

$$\Big(0, \cdots, 0, \underbrace{\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e \sigma_k^2}\right)}_{k}, 0, \cdots, 0\Big), \quad k \in [K]. \tag{122}$$

由 (110) 可知，(122) 中的这些可达速率元组恰好是超平面 $\mathcal{H}_{\text{out}}$ 上的角点。

现在，我们可以分析可达区域 $\mathsf{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N}) \cdots, R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$。注意，

$$\mathsf{Conv}\left\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N}), \cdots, R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\right\} = \mathsf{Conv}\{\mathcal{R}\}. \tag{123}$$

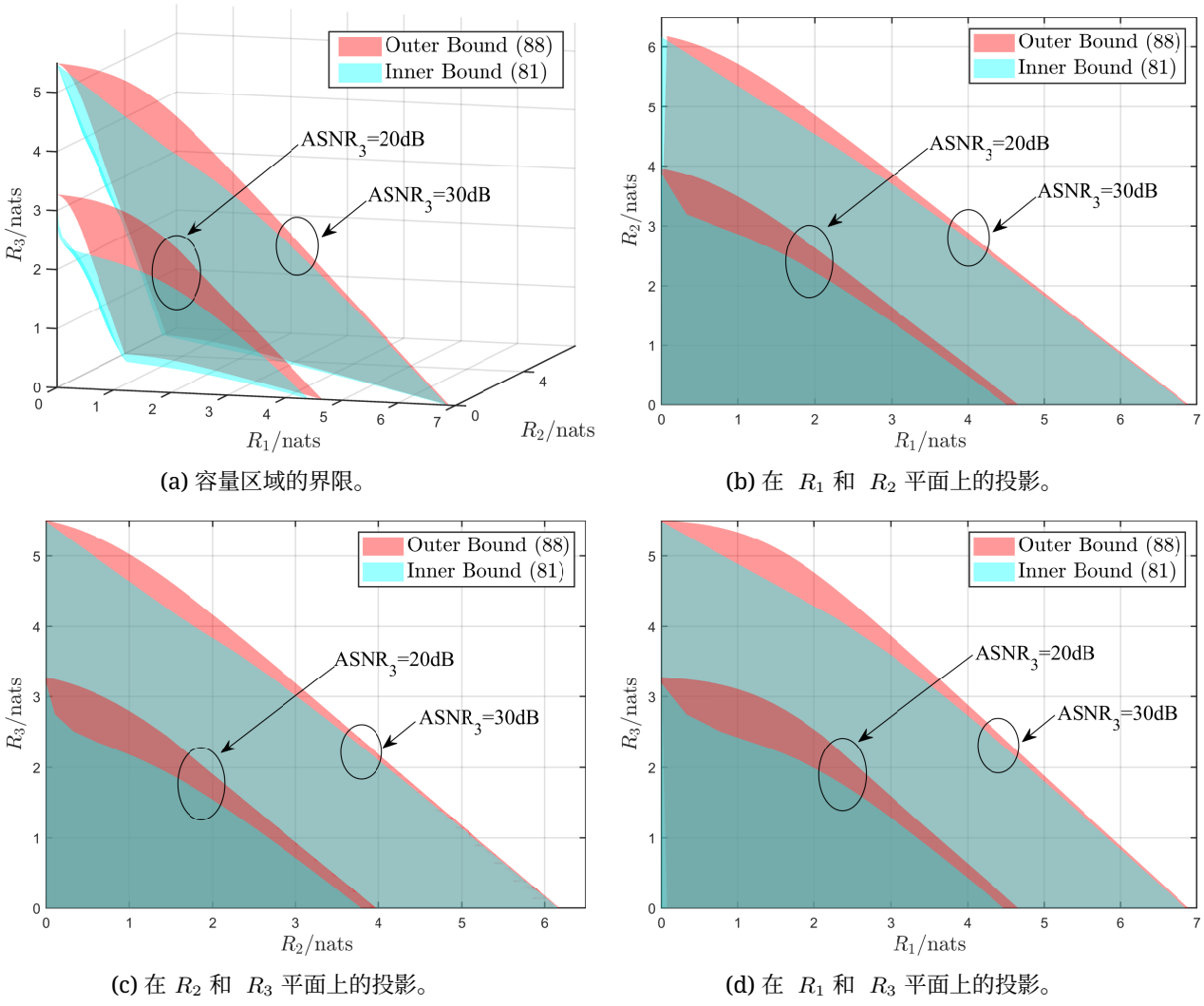
基于以上关于 $\mathcal{R}$ 的两个观察结果，即：(1) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}_{\text{out}}$；(2) 超平面$\mathcal{H}_{\text{out}}$上的角点可由 $\mathcal{R}$中的某些速率元组实现，我们得出 $\mathsf{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N}) \cdots, R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$也是一个 $(K-1)$ 维超平面，并且与 $\mathcal{H}_{\text{out}}$ 重叠。因此，定理 9 中的内界与定理10中的外界在高信噪比下是紧的，至此证明完成。

□

推导得到的容量区域界如图 4 所示，其中假设 $K = 3$、$\sigma_3 = 2\sigma_2 = 4\sigma_1$ 和 $\mathsf{ASNR}_k = \frac{\mathsf{A}}{\sigma_k}$、$k \in \{1, 2, 3\}$。图中首先展示三维容量区域的界，然后分别将结果投影到 R_2 和 R_3 平面、R_2 和 R_3 平面以及 R_2 和R_3 平面。由图 4 可见，随着信噪比增大，内界和外界变得更加紧致，这进一步验证了推导结果。

B. 平均强度受限 *OI-BC*

容量区域的内界如下所述。



(a) 容量区域的界限。

(b) 在 R_1 和 R_2 平面上的投影。

(c) 在 R_2 和 R_3 平面上的投影。

(d) 在 R_1 和 R_3 平面上的投影。

图 4：具有峰值强度约束的 3 用户光学强度广播信道的容量区域界限。

定理 12 (内界)。 当输入仅受式（5）中的平均强度约束时，集合 $\cup_{\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho})\ R_2^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho})\ \cdots,\ R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho})\right)$ 中的速率元组对于一个 K-用户 OI-BC 均为可达的，其中

$$R_k^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{e\rho_k^2\mathsf{E}^2}{2\pi\sigma_k^2}\right)-\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{E},\sigma_k),\quad k\in[K],\tag{124}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}=[\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_K]:\ \rho_k\in[0,1],\quad \rho_{k-1}\le\rho_k,\quad \forall k\in[K],\quad \rho_0=0,\quad \rho_K=1\}$。

证明。 假设 X_1 服从指数分布$(\rho_1\mathsf{E})$，且 $\forall k\in\{2,3,\cdots,K\}$，

$$p_{X_k}(x_k)=\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}\delta(x_k)+\left(1-\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}\right)\times\frac{1}{\rho_k\mathsf{E}}e^{-\frac{x_k}{\rho_k\mathsf{E}}},\ x_k\in[0,+\infty).\tag{125}$$

根据引理 3，我们得到 $X_{k,\ \text{sum}}$ 服从 Exp$(\rho_k\mathsf{E})$，且 X 服从 Exp(E)，满足式 (5) 中的平均强度约束。然后，按照定理 9 的证明中的类似步骤，

即可完成证明。 □

我们在定理13中提出容量区域的外界，其证明与定理10的证明采用类似的论证，故此处省略。

定理13 (外界)。 当输入仅受式（5）中的平均强度约束时，a K用户 OI-BC 的容量区域具有如下外界：

$\cup_{\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}}(R_1^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ R_2^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ \cdots,\ R_K^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}))$，其中

$$R_k^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sigma_k^2+\sigma_K^2\left(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_k\mathsf{E},\sigma_K)}-1\right)}{\sigma_k^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{E},\sigma_K)}-1)}\right\},\quad k\in[K], \tag{126}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}=[\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_K]:\ \rho_k\in[0,1],\quad \rho_{k-1}\le\rho_k,\quad \forall k\in[K],\quad \rho_0=0,\quad \rho_K=1\}$。

高信噪比容量区域可通过将引理6中的单用户容量结果代入式（124）和（126）直接得到。总结如下。

定理14 (渐近容量区域)。 当输入仅受式 (5) 中的平均强度约束时，在高信噪比下， K 用户光强广播信道的容量区域渐近收敛到满足以下条件的区域：速率元组 $(R_1,R_2,\cdots,R_K)$

$$R_k\ \dot{\le}\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{e\rho_k^2\mathsf{A}^2+2\pi\sigma_k^2}{e\rho_{k-1}^2\mathsf{A}^2+2\pi\sigma_k^2}\right),\quad k\in[K], \tag{127}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}:\ \rho_k\in[0,1],\quad \rho_{k-1}\le\rho_k,\quad \forall k\in[K],\quad \rho_0=0,\quad \rho_K=1\}$。

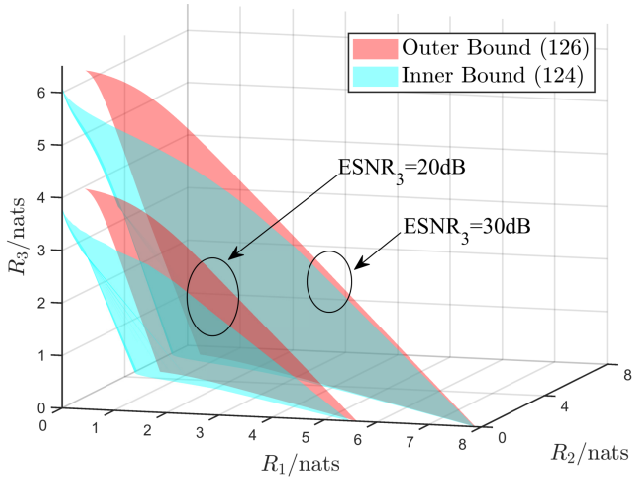
容量区域的推导界如图5所示，其中我们假设 $K=3$、$\sigma_3=2\sigma_2=4\sigma_1$，且 $\text{ESNR}_k=\frac{\mathsf{E}}{\sigma_k}$ $k\in\{1,2,3\}$。

C. 峰值和平均强度约束下的光强广播信道

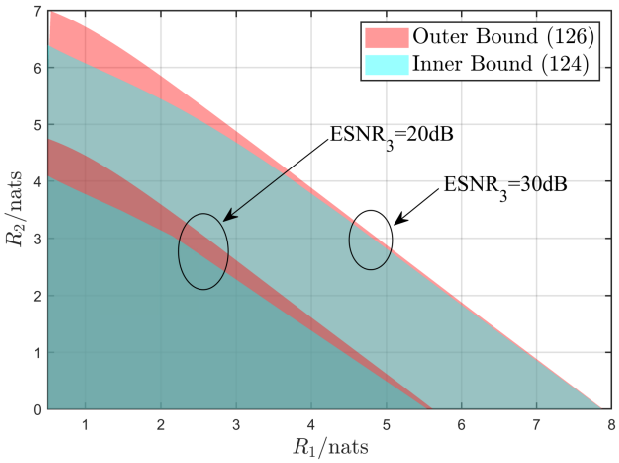
容量区域的内界提出如下。

定理 15 (内界)。 当输入同时受到式（4）和（5）中的峰值强度约束与平均强度约束时，集合 $\text{Conv}\{\cup_{\boldsymbol{N}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}}}\left(R_1^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\ R_2^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\ \cdots,\ R_K^{\text{in}}(\boldsymbol{N})\right)\}$ 中的速率元组对于一个 K用户 OI-BC 均为可达的，其中

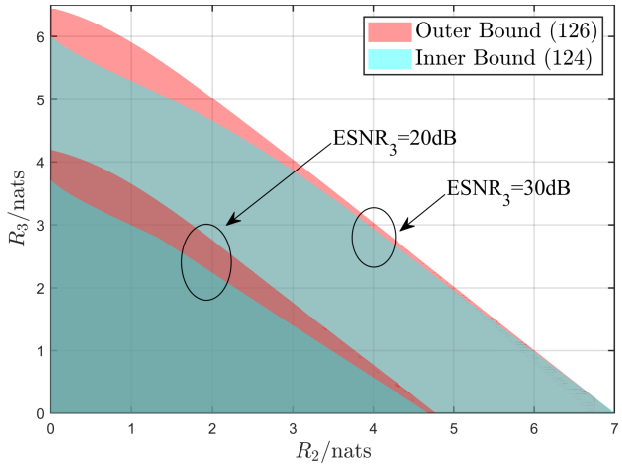
$$\begin{aligned}R_k^{\text{in}}(\boldsymbol{N})=\frac{1}{2}\log\Bigg\{&1+\exp\left(2-\frac{\frac{2\mu^\star}{\prod_{n=k}^K N_n}e^{-\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^K N_n}}}{1-e^{-\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^K N_n}}}\right)\left(\frac{1-e^{-\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^K N_n}}}{\mu^\star}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_k^2}\Bigg\}\\&-\mathsf{C}_{\text{ub}}\left(\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k-1}^K N_n},\sigma_k;\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k-1}^K N_n}\right),\quad k\in[K],\end{aligned} \tag{128}$$



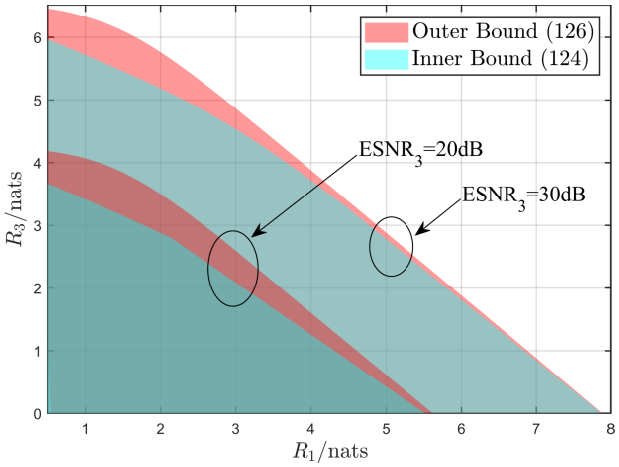
(a) 容量区域的界。



(b) 在 R_1 和 R_2 平面上的投影。



(c) 在 R_2 和 R_3 平面上的投影。



(d) 在 R_1 和 R_3 平面上的投影。

图5：平均强度约束下 3 用户光学强度广播信道的容量区域界。

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{N}} = \{\boldsymbol{N} = [N_0, N_1, \cdots, N_K]: \quad N_n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall n \in \{0 \cup [K]\}, \quad N_0 \gg 0, \quad N_K = 1\}$。

证明。 假设 X_1 服从 $\text{Texp}\left(\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=1}^{K} N_n}, \frac{\mu^\star}{\prod_{n=1}^{K} N_n}\right)$ 和 $\forall k \in \{2, 3, \cdots, K\}$,

$$p_{X_k}(x_k) = \frac{1 - e^{-\frac{\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^{K} N_n}}{N_{k-1}}}}{1 - e^{-\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^{K} N_n}}} \sum_{n=0}^{N_{k-1}-1} e^{-\frac{\frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^{K} N_n} n}{N_{k-1}}} \delta\left(x_k - \frac{n}{N_{k-1}} \times \frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k}^{K} N_n}\right). \tag{129}$$

根据引理 3，我们得到，式 (83) 中的 $X_{k,\text{sum}}$ 服从截断指数分布 $\left(\frac{\mathsf{A}}{\prod_{n=k}^{K} N_n}, \frac{\mu^\star}{\prod_{n=k}^{K} N_n}\right)$，而 X 服从截断指数分布$(\mathsf{A}, \mu^\star)$，这满足式 (4) 和 (5) 中的峰值和平均强度约束。然后，与定理 9 的证明类似，我们即可完成证明。

□

以下外界已在 [26,定理 5] 中给出。我们也可以利用条件熵功率不等式给出一种新的证明，该证明与定理 10 的证明类似，故此处略去。

引理 10 (外界)。 当输入同时满足式 (4) 和式 (5) 中的峰值和平均强度约束时， K 用户 OI-BC 的容量区域的外界为 $\cup_{\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}}(R_1^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ R_2^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})\ \cdots,\ R_K^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}))$，其中

$$R_k^{\text{out}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sigma_k^2+\sigma_K^2\left(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K;\mu^\star)}-1\right)}{\sigma_k^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{A},\sigma_K;\mu^\star)}-1)}\right\},\quad k\in[K], \tag{130}$$

其中 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}=[\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_K]\colon\ \rho_k\in[0,1],\ \rho_{k-1}\le\rho_k,\ \forall k\in[K],\ \rho_0=0,\ \rho_K=1\}$.

高信噪比容量区域如下所示。

定理 16 (渐近容量区域)。 当输入同时受到式(4)和式(5)中的峰值强度约束和平均强度约束时，在高信噪比下， K用户 OI-BC 的容量区域渐近收敛至满足以下条件的区域，其中速率元组 ($R_1,R_2,\cdots,R_K$)

$$R_k\ \dot{\le}\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{\exp\left(2-\frac{2\rho_k\mu^\star e^{-\rho_k\mu^\star}}{1-e^{-\rho_k\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho_k\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}{\exp\left(2-\frac{2\rho_{k-1}\mu^\star e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}{1-e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2\mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}\right), \tag{131}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}=\{\boldsymbol{\rho}:\ \ \rho_k\in[0,1],\ \rho_{k-1}\le\rho_k,\ \forall k\in[K],\ \rho_0=0,\ \rho_K=1\}$。

证明。 该证明遵循与定理 11 的证明类似的论证。在此之前，我们需要推导一个在高信噪比区间内有效的新外界。注意,

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K)\ge\mathsf{h}(Z_K), \tag{132}$$

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K)\le\mathsf{C}_{\text{ub}}(\mathsf{A},\sigma_K;\mu^\star)+\mathsf{h}(Z_K). \tag{133}$$

在高信噪比下，$\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma_K;\ \rho\mu^\star)$， $\rho\in[0,1]$关于 ρ单调递增，并且当 ρ 趋近于 0 时趋近于零。因此，存在 $\rho_{K-1}\in[0,1]$ 使得

$$\mathsf{h}(Y_K|U_K)=\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K;\rho_{K-1}\mu^\star)+\mathsf{h}(Z_K) \tag{134}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_K^2+2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K;\rho_{K-1}\mu^\star)}-1)\right). \tag{135}$$

此外，类似于从（99）到（107）的步骤，我们可以得到

$$\mathsf{h}(Y_k|U_k)=\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_k^2+2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{k-1}\mathsf{A},\sigma_K;\rho_{k-1}\mu^\star)}-1)\right),\ k\in[K-1], \tag{136}$$

$$\mathsf{h}(Y_k|U_{k+1})\le\frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_k^2+2\pi e\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K;\rho_k\mu^\star)}-1)\right),\ k\in[K-1], \tag{137}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=[\rho_1,\cdots,\rho_K]\in\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\rho}}$。 然后，根据引理 2，在高信噪比下，我们有

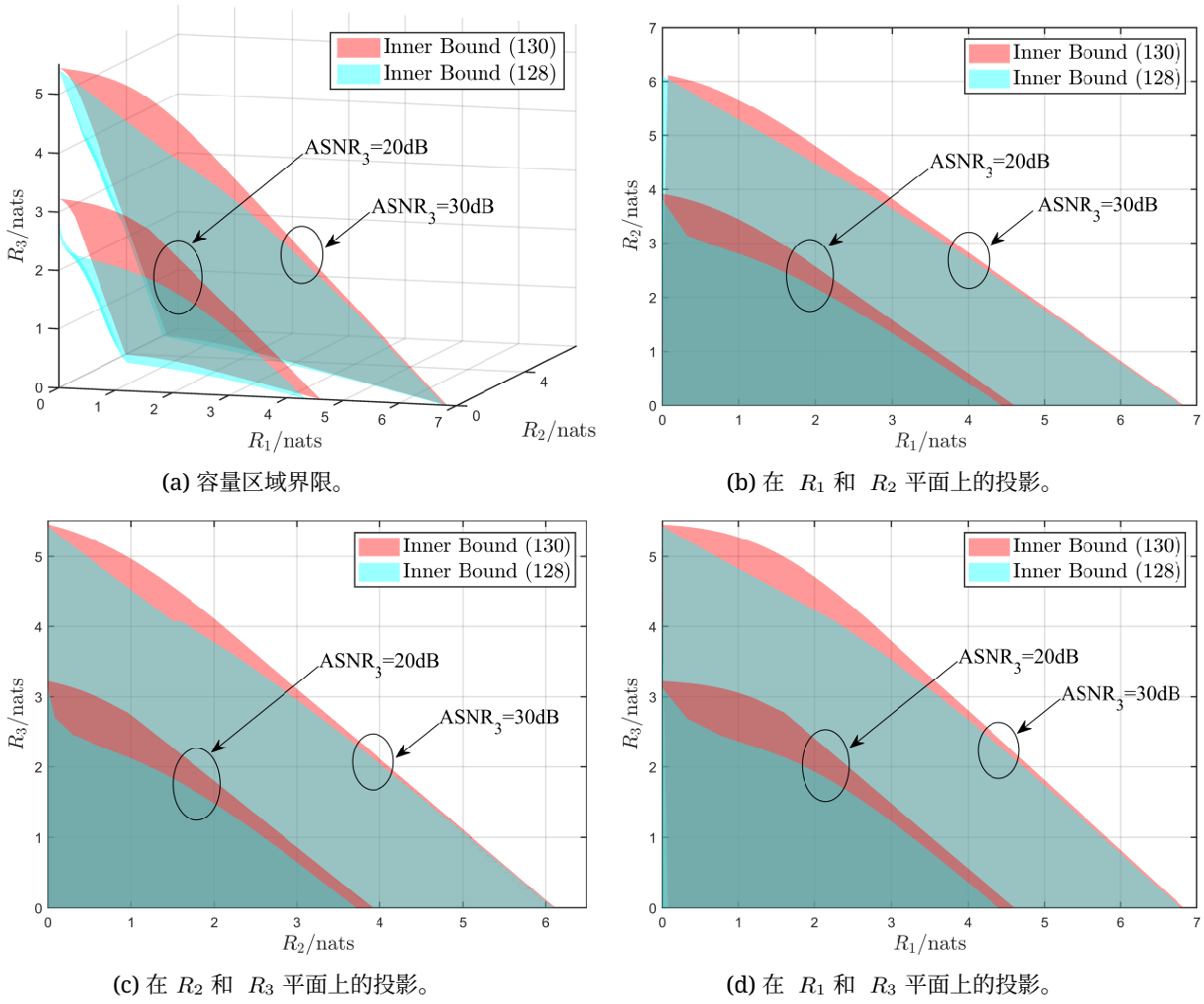
$$R_k\le\mathsf{h}(Y_k|U_{k+1})-\mathsf{h}(Y_k|U_k) \tag{138}$$

$$\dot{\leq} \frac{1}{2}\log\left(\frac{\exp\left(2-\frac{2\rho_k\mu^\star e^{-\rho_k\mu^\star}}{1-e^{-\rho_k\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho_k\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2 \mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}{\exp\left(2-\frac{2\rho_{k-1}\mu^\star e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}{1-e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho_{k-1}\mu^\star}}{\mu^\star}\right)^2 \mathsf{A}^2+2\pi e\sigma_k^2}\right),\ k\in[K]. \tag{139}$$

最后，结合上述新推导出的外界与定理 15 中的内界，即可完成证明。

□

推导出的容量区域界限如图 6 所示，其中假设 $K = 3$,$\sigma_3 = 2\sigma_2 = 4\sigma_1$, $\alpha = 0.4$，且 $\mathrm{ASNR}_k = \frac{\mathsf{A}}{\sigma_k}$, $k \in \{1,2,3\}$。



(a) 容量区域界限。

(b) 在 R_1 和 R_2 平面上的投影。

(c) 在 R_2 和 R_3 平面上的投影。

(d) 在 R_1 和 R_3 平面上的投影。

图 6：当$\alpha = 0.4$时，具有峰值和平均强度约束的 3 用户光学强度广播信道的容量区域界限。

V. 结论

本文刻画了光强广播信道的容量区域。我们考虑了三种不同的输入约束，即：(1) 仅有峰值强度约束；(2) 仅有平均强度约束；(3) 同时具有

峰值和平均强度约束。我们首先考虑双用户 OI-BC。通过精心设计每个用户的输入并采用 SC方案，得到新的内界；通过应用条件熵功率不等式，得到容量区域的新外界。在高信噪比下，内界和外界渐近匹配。随后，我们将结果推广到一般的 K 用户 OI-BC，且在高信噪比下仍保持渐近最优。作为本工作的延伸，研究信道衰落对光强广播信道容量区域的影响将会很有趣，可参见 [34]–[36]。

附录 A
高信噪比下 $\mathsf{C}_{\mathrm{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma;\rho\mu)$ 的单调性

注意，在高信噪比下，

$$\mathsf{C}_{\mathrm{ub}}(\mathsf{A},\sigma;\mu)\doteq\frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\mu e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}\right)\left(\frac{1-e^{-\mu}}{\mu}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma^2}\right). \tag{140}$$

我们将函数 $g_1(\rho)=\mathsf{C}_{\mathrm{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma;\rho\mu)$ 记为，即，

$$g_1(\rho)=\frac{1}{2}\log\left(1+\exp\left(2-\frac{2\rho\mu e^{-\rho\mu}}{1-e^{-\rho\mu}}\right)\left(\frac{1-e^{-\rho\mu}}{\mu}\right)^2\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma^2}\right),$$
$$\rho\in[0,1],\quad \mu>0,\quad \mathsf{A}>0,\quad \sigma>0. \tag{141}$$

固定 μ、 A 和 σ 后，我们发现， $g_1(\rho)$ 的单调性等价于以下函数的单调性:

$$g_2(x)=\exp\left(2-\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\times(1-e^{-x})^2,\ x\geq 0, \tag{142}$$

$$g_3(x)=\exp\left(1-\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\times(1-e^{-x}),\ x\geq 0, \tag{143}$$

其中 $g_2(x)=\big(g_3(x)\big)^2$。为了证明 $g_3(x)$ 关于 x 单调递增，我们只需分析以下函数:

$$g_4(x)=1-\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}},\quad x\geq 0 \tag{144}$$

$g_4(x)$的推导如下:

$$g_4'(x)=\frac{xe^{-x}+e^{-2x}-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2},\quad x\geq 0 \tag{145}$$

随着 x 从 0 增加到 $+\infty$，分子 $xe^{-x}+e^{-2x}-e^{-x}$ 关于 x 先增大后减小。由于 $g_4'(0)=0$，且 $g_4'(+\infty)=0$。因此，我们可以得到

$$g_4'(x)\geq 0,\quad x\geq 0 \tag{146}$$

最后，我们可以得出结论： $g_1(\rho)$ 关于 ρ 单调递增。等价地，在高信噪比下，$\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho\mathsf{A},\ \sigma;\rho\mu)$ 关于 ρ 单调递增。

APPENDIX B
PROOF OF EQ. (111)

结合定理10，可得

$$R_K^{\text{out}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_K^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_K\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}{\sigma_K^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}\right) \tag{147}$$

$$\doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\left(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{K-1}\mathsf{A},\sigma_K)}-1\right)\right),. \tag{148}$$

其中，(148)由引理4中的单用户容量结果以及 $\rho_K=1$得出。为刻画 R_K^{out}与 R_k^{out}、 $k\in[K-1]$之间的关系，我们假设

$$e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_k\mathsf{A},\sigma_K)}-1 \doteq \sum_{m=1}^{k}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{k}e^{2R_n^{\text{out}}},\quad k\in[K-1]. \tag{149}$$

我们采用数学归纳法证明(149)。回顾

$$R_1^{\text{out}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_1\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}{\sigma_1^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_0\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}\right) \tag{150}$$

$$\doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_K^2}{\sigma_1^2}\left(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_1\mathsf{A},\sigma_K)}-1\right)\right). \tag{151}$$

于是可得

$$e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_1\mathsf{A},\sigma_K)}-1 \doteq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_1^{\text{out}}}-1\right). \tag{152}$$

因此，当 $k=1$时，(149)成立。接下来，我们固定一个特定的 $i\in\{1,\cdots,K-2\}$，并假设当 $k=i$时(149)成立，即

$$e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_i\mathsf{A},\sigma_K)}-1 \doteq \sum_{m=1}^{i}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{i}e^{2R_n^{\text{out}}}, \tag{153}$$

由此可得

$$R_{i+1}^{\text{out}} \doteq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_{i+1}^2+\sigma_K^2(e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{i+1}\mathsf{A},\sigma_K)}-1)}{\sigma_{i+1}^2+\sigma_K^2\sum_{m=1}^{i}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}(e^{2R_m^{\text{out}}}-1)\prod_{n=m+1}^{i}e^{2R_n^{\text{out}}}}\right), \tag{154}$$

and

$$e^{2\mathsf{C}_{\text{ub}}(\rho_{i+1}\mathsf{A},\sigma_K)}-1 \doteq e^{2R_{i+1}^{\text{out}}}\times\left(\frac{\sigma_{i+1}^2}{\sigma_K^2}+\sum_{m=1}^{i}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{i}e^{2R_n^{\text{out}}}\right)-\frac{\sigma_{i+1}^2}{\sigma_K^2} \tag{155}$$

$$=\sum_{m=1}^{i+1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{i+1}e^{2R_n^{\text{out}}}. \tag{156}$$

因此，若 $k = i + 1$，则式（149）也成立。最后，根据数学归纳法，我们得出式（149）对每个 $k \in [K-1]$ 都成立。

将（149）代入（148），R_K^{out} 与 R_k^{out}、$k \in [K-1]$ 之间的关系可表示为

$$R_K^{\text{out}} \doteq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma_K^2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\sum_{m=1}^{K-1}\frac{\sigma_m^2}{\sigma_K^2}\left(e^{2R_m^{\text{out}}}-1\right)\prod_{n=m+1}^{K-1}e^{2R_n^{\text{out}}}\right), \tag{157}$$

至此证明完毕。

参考文献

[1] P. Yang, Y. Xiao, M. Xiao 和 S. Li，《6G无线通信：愿景与潜在技术》，*IEEE*网络，第33卷，第4期，第70-75页，2019年7月。[2] M. Giordani、M. Polese、M. Mezzavilla、S. Rangan 和 M. Zorzi，《迈向6G网络：用例与技术》，*IEEE*通信杂志，第58卷，第3期，第55-61页，2020年3月。[3] M. Z. Chowdhury、M. Shahjalal、S. Ahmed 和 Y. M. Jang，《6G无线通信系统：应用、需求、技术、挑战与研究方向》，*IEEE*开放获取通信学会期刊，第1卷，第957-975页，2020年7月。[4] M. A. Khalighi 和 M. Uysal，《自由空间光通信综述：通信理论视角》，*IEEE*通信调查与教程，第16卷，第4期，第2231-2258页，2014年第四季度。[5] H. Kaushal 和 G. Kaddoum，《空间光通信：挑战与缓解技术》，*IEEE*通信调查与教程，第19卷，第1期，第57-96页，2017年第一季度。[6] P. H. Pathak、X. Feng、P. Hu 和 P. Mohapatra，《可见光通信、组网与感知：综述、潜力与挑战》，*IEEE*通信调查与教程，第17卷，第4期，第2047-2077页，2015年第四季度。[7] D. Karunatilaka、F. Zafar、V. Kalavally 和 R. Parthiban，《基于LED的室内可见光通信：现状》，*IEEE*通信调查与教程，第17卷，第3期，第1649–1678页，2015年第三季度。[8] C. Cox、E. Ackerman、R. Helkey 和 G. E. Betts，《直接检测模拟光链路》，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第45卷，第8期，第1375-1383页，1997年8月。[9] S. C. J. Lee、S. Randel、F. Breyer 和 A. M. J. Koonen，《用于强度调制和直接检测光通信系统的PAM-DMT》，*IEEE*光子技术快报，第21卷，第23期，第1749-1751页，2009年12月。[10] A. Lapidoth、S. M. Moser 和 M. A. Wigger，《关于自由空间光强度信道的容量》，*IEEE*信息论汇刊，第55卷，第10期，第4449-4461页，2009年10月。[11] A. Chaaban、J. -M. Morvan 和 M. -S. Alouini，《自由空间光通信：容量界、近似及一种新的球填充视角》，*IEEE*通信汇刊，第64卷，第3期，第1176-1191页，2016年3月。[12] J. Zhou 和 W. Zhang，《高斯噪声下带宽受限光强度信道的容量》，*IEEE*通信汇刊，第65卷，第6期，第2481-2493页，2017年6月。[13] A. Chaaban、Z. Rezki 和 M. -S. Alouini，《并行光无线信道的基本极限：容量结果与中断概率表述》，*IEEE*通信汇刊，第65卷，第1期，第296-311页，2017年1月。[14] T. Fath 和 H. Haas，《室内环境下光无线通信MIMO技术的性能比较》，*IEEE*通信汇刊，第61卷，第2期，第733-742页，2013年2月。[15] M. Uysal 和 H. Nouri，《光无线通信——一项新兴技术》，载于第*16*届国际透明光网络会议（*ICTON*）论文集，2014年7月，第1–7页。

[16] Z. Ghassemlooy、S. Arnon、M. Uysal、Z. Xu 和 J. Cheng，《新兴光无线通信：进展与挑战》，IEEE通信选定领域期刊，第33卷，第9期，第1738-1749页，2015年9月。[17] V. W. S. Chan，《自由空间光通信》，《光波技术》，第24卷，第12期，第4750-4762页，2006年12月。[18] T. Komine 和 M. Nakagawa，《使用LED灯的可见光通信系统基础分析》，IEEE消费电子学汇刊，第50卷，第1期，第100-107页，2004年2月。[19] H. Elgala、R. Mesleh 和 H. Haas，《室内光无线通信：潜力与最新进展》，IEEE通信杂志，第49卷，第9期，第56-62页，2011年9月。[20] A. L. McKellips，《峰值受限离散时间信道容量的简单紧致界》，载于IEEE国际信息论研讨会论文集，美国伊利诺伊州芝加哥，2004年6月27日–7月2日，第348页。[21] S. Hranilovic 和 F. R. Kschischang，《受高斯噪声影响的功率与带宽受限光强度信道的容量界》，IEEE信息论汇刊，第50卷，第5期，第784-795页，2004年5月。[22] A. A. Farid 和 S. Hranilovic，《高斯噪声下无线光强度信道的容量界》，IEEE信息论汇刊，第56卷，第12期，第6066-6077页，2010年12月。[23] A. Chaaban、Z. Rezki 和 M. -S. Alouini，《峰值与平均约束下MIMO光强度信道的低信噪比渐近容量》，IEEE通信汇刊，第66卷，第10期，第4694-4705页，2018年10月。[24] L. Li、S. M. Moser、L. Wang 和 M. Wigger，《关于MIMO光无线信道的容量》，IEEE信息论汇刊，第66卷，第9期，第5660–5682页，2020年10月。[25] A. E. Gamal 和 Y.-H. Kim，《网络信息论》，剑桥，英国：剑桥大学出版社，2011年。[26] A. Chaaban、Z. Rezki 和 M. S. Alouini，《关于强度调制直接检测光广播信道的容量》，IEEE无线通信汇刊，第15卷，第5期，第3114–3130页，2016年1月。[27] A. Chaaban、O. M. S. Al-Ebraheemy、T. Y. Al-Naffouri 和 M.-S. Alouini，《高斯IM-DD光多址信道的容量界》，IEEE无线通信汇刊，第16卷，第5期，第3328–3340页，2017年3月。[28] J. Zhou 和 W. Zhang，《光强度多址信道容量区域的界》，IEEE通信汇刊，第67卷，第11期，第7629–7641页，2019年8月。[29] Z. Zhang 和 A. Chaaban，《双用户IM/DD干扰信道的容量界》，IEEE通信汇刊，第70卷，第9期，第5960-5974页，2022年9月。[30] S. Verdu 和 Dongning Guo，《熵功率不等式的简单证明》，IEEE信息论汇刊，第52卷，第5期，第2165-2166页，2006年5月。[31] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论基础》，第2版。美国纽约州纽约：Wiley，2006年。[32] C. Nair 和 Z. V. Wang，《三接收端弱噪声广播信道的容量区域》，IEEE信息论汇刊，第57卷，第7期，第4058-4062页，2011年7月。[33] L. Li、R. -H. Chen、J. Zhou，《关于双用户光强度多址信道的和容量》，arXiv预印本 arXiv:2211.06691，2022年。[34] X. Zhu 和 J. M. Kahn，《大气湍流信道中的自由空间光通信》，IEEE通信汇刊，第50卷，第8期，第1293-1300页，2002年8月。[35] E. Bayaki、R. Schober 和 R. K. Mallik，《伽马-伽马衰落下MIMO自由空间光系统的性能分析》，IEEE通信汇刊，第57卷，第11期，第3415-3424页，2009年11月。[36] F. Yang、J. Cheng 和 T. A. Tsiftsis，《存在非零轴向瞄准误差时的自由空间光通信》，IEEE通信汇刊，第62卷，第2期，第713-725页，2014年2月。