arXiv:2303.00237v1 [math.OC] 1 Mar 2023

单纯 V-多面体析取割的幺半群强化

Aleksandr M. Kazachkov* Egon Balas†

2023年2月28日

摘要

析取割平面可以收紧混合整数线性规划的松弛。传统上，此类割是通过求解一个高维线性规划获得的，而其中增加的变量会使这一过程在计算上难以承受。采用 V-多面体视角是一种实用的替代方案，它可以通过一个变量数与原问题相同的线性规划来分离析取割。其缺点是，若不知道扩展表述中额外变量的取值，就无法直接采用经典的幺半群强化方法。我们推导了如何从生成 V-多面体析取割的线性规划解中计算这些取值。随后，我们展示了对含有多达 64 个项的析取所生成的割进行幺半群强化的计算实验。一些实例受到显著影响，强化使这些割所闭合的间隙从 0% 提高到 100%。然而，对于较大的析取，幺半群强化似乎效果较差，我们也指出了一个可能的原因。

1 引言

基于析取的割平面，或析取割，是混合整数规划问题中一类强有力的有效不等式，可作为分析或生成通用割的框架 [8]。其强大效力伴随着高昂的计算成本，因此优化求解器仅在非常特殊的情况下采用析取割。为提高其实用性，Balas 和 Kazachkov [10] 提出了一种基于松弛的$\mathcal{V}$-多面体析取割范式，以牺牲部分理论强度换取计算效率。该方法选取少量点和射线，其凸包构成析取的一个松弛；因此，某些潜在的割不再有效，但仍可保证获得强有力的割。此外，割

*美国佛罗里达州盖恩斯维尔，佛罗里达大学（akazachkov@ufl.edu）。

†E. Balas 在本手稿撰写期间去世。本手稿的写作始于两位作者均任职于卡内基梅隆大学期间。核心思想和早期成果记录于 Kazachkov 的博士学位论文 [37, 第 5]章。A.M. Kazachkov 独立完成了计算实验、分析和写作。

可由此松弛生成，称为ν-多面体（析取）割（VPC），生成过程可通过一个相对紧凑的线性规划实现，称为点射线线性规划（PRLP）；与之相比，析取割通常使用维数更高的割生成线性规划（CGLP） [8,14, 15]。因此，使用 VPC 时，通过添加项来改进析取、提高松弛质量，计算效率更高，从而能够获得与求解器中通常采用的割族有显著差异的析取割。

与求解器中的*Gomory*混合整数割（GMIC）及其他标准割相比，VPC 能大幅提高平均（整数性）间隙闭合率。然而，Balas 和 Kazachkov [10] 的计算实验揭示了一个有趣的现象：对于某些实例，即使使用大型变量析取，GMIC（可作为二项析取的割导出）仍然比 VPC 更强。例如，对于实例 `10teams`，该实例最初属于第三版混合整数规划库（MIPLIB）[18], , GMIC 可闭合 100% 的整数性间隙，而由 64 项析取得到的 VPC 闭合率为 0%。

这一现象的一种可能解释是，GMIC 得益于一种无法直接用于 VPC 的强化程序。具体而言，GMIC 的二项析取可以通过对单个变量上的析取进行幺半群强化得到 [9, 12, 38]。对更一般析取所产生的割进行幺半群强化也是可行的，但该程序似乎要求使用单纯的析取，其中每一项只施加一个新的约束。这并非理论上的障碍，因为一般析取的任何割，也可以从一种单纯析取得到；这种单纯析取由一般析取聚合定义每个析取项的约束而构造。用于此类聚合的乘子恰好就是该割有效性的 Farkas 证书。VPC 面临的主要挑战在于，这一证书并不能轻易获得，因为 PRLP 只有割系数对应的变量，而 CGLP 则显式包含 Farkas 乘子对应的变量。下文将总结我们的贡献：针对 Balas 和 Kazachkov [10], 提出的 VPC 框架的特定版本，找出一种高效应用幺半群强化的方法，并实现这一强化思路并对其进行计算评估。

贡献。 给定一个 VPC，可以在固定割系数的情况下求解 CGLP，并获取所需的聚合乘子值，以应用幺半群强化。不幸的是，与此相关的计算工作量可能大到难以承受。我们的首项贡献在 第 3 节中进行了讨论，即观察到求解 CGLP 是不必要的：对于每个析取项，只需使用一个易于识别的非奇异矩阵的逆即可。此外，对于 Balas 和 Kazachkov 提出并测试的 单纯的 VPC[10],，该逆矩阵可在割生成过程中直接获得。

接下来，在第 4 节中，我们将讨论在一组基准实例上对简单 VPC 进行强化的计算实验。对于规模最大为 64 项的析取，我们比较强化前后的强度，并与 GMIC 进行比较。我们发现，强化可以显著提高某些实例的闭合间隙。此外，我们发现，GMIC 与未强化 VPC 往往各自在不同实例上发挥作用；而应用幺半群强化后，这两个类别能够同时在更多实例上发挥作用。对于二项析取，结果尤为显著：强化 VPC 平均比未强化 VPC 多闭合 40% 的间隙。

例如，回到实例 10teams，来自单个变量析取的 VPC 闭合了 0% 的整数性间隙，但强化这些割后，这一数值升至 100%。然而，随着析取规模增大，强化带来的相对改进会减小。我们的最后一项贡献是在第5节中指出这一弱点的理论根源。

相关工作。关于析取割的幺半群强化，文献中的一个重点 [9] （另见 Balas [8, 第 7] 节）是分裂析取这一特殊情形。分裂析取是用于 GMIC 和相关割族的平行二项析取。在此背景下，使用 CGLP 可导出提升与投影切割 （L&PCs）[14], ，并可对其应用幺半群强化 [15, 第 2 节4]。正如 Balas 和 Perregaard[12], 所示，强化后的 L&PC 割族等价于 GMIC；而根据 Cornuéjols 和 Li [23]的讨论，它也等价于混合整数舍入不等式 [45, 46], 。Balas 和 Perregaard [12] 通过交割 [7]对这种联系给出了颇具启发性的几何解释：每个未被支配的 L&PC 都可以从原问题空间中的一个基导出为交割。因此，无需显式构造 CGLP，也不会妨碍对割进行事后强化，就能生成 L&PC。Bonami[19] 提出了另一种在变量的原空间中分离 L&PC 的方法，该方法同样适用于强化。无需构造高维 CGLP，是促使 L&PC 得以有效纳入多个求解器的关键进展。

要超越分裂析取，绕开 CGLP 仍至关重要。然而，前述方法[12, 19] 依赖于分裂集的性质；例如，对于一般析取，存在支配所有交割的割[5, 40, 11], ，因此不能指望仅在原空间中对基进行枢轴操作。尽管如此，一系列研究 [36, 20, 40] 将原空间中的割生成扩展到了含两项的一般析取，而幺半群强化则适用于由此得到的割[28]。文献中尚未报道将这一技术进一步扩展到更一般析取的方法。

这促使人们采用 VPC，因为 PRLP 的优势在于其变量数与原问题相同。难点在于，使用点和射线描述一个多面体，所需的规模可能远大于使用不等式描述，从而导致 PRLP 中出现数量呈指数增长的约束。因此，Perregaard和Balas[48] 以及 Louveaux 等人 [44] 先前的研究在采用 V-多面体视角时，自然地引入了行生成。在 Perregaard和 Balas[48], 针对含 16 项析取所做的实验中，通过带行生成的 PRLP 分离割，比通过 CGLP 快一个数量级。尽管如此，行生成仍然耗时，因为必须求解多个 PRLP 才能找到一个有效不等式。

Balas 和 Kazachkov 提出的补救方法 [10] 是为每个析取项构造一个松弛，由此得到的 PRLP 行数较少，并能立即生成有效割。这种方法能够快速从大型析取中生成割，但仅靠这些割所闭合的平均间隙小于 GMIC 所闭合的间隙。只有将 VPC 与 GMIC 一起使用时，才能观察到闭合间隙显著改善，这表明 VPC 影响的松弛区域与 GMIC 不同。然而，正如提到的那个 10teams实例所示，GMIC 闭合了全部间隙，而 VPC 毫无贡献；结果也表明，VPC 缺乏强化是一个显著缺陷。

如前所述，Balas 和 Jeroslow 提出的朴素单项式强化 [9]由于缺少聚合乘子的取值，无法直接应用于 VPC。Balas 和 Qualizza [13, 第 6] 节指出，由单纯形表多行产生的交叉多胞体析取，可以通过对定义该析取的不等式进行模化 并替换整数受限非基变量的系数来强化；他们还证明了两行情形下最优强化的形式。

幺半群强化的另一种方法是群论方法[35, 32], ，在某些条件下，该方法等价于幺半群强化。具体而言，“平凡提升”已应用于简单析取 [26, 24, 16, 25, 49]。通常，计算平凡提升的代价很高[30], ，而且它不能直接应用于任意析取割。

尽管本文完全通过 VPC 框架处理析取割生成，但还存在其他方法，可以在无需求解高维 CGLP 的情况下生成强析取割。任何此类方法都有可能受益于 Farkas 证书的高效计算。例如，文献中一种常见技术是利用析取通过倾斜来强化割，该技术已应用于线性和非线性整数优化问题[47, 39, 37, 42]。

2 记号与背景

我们的目标是寻找强有效割，以收紧给定有理数数据的以下混合整数线性规划的自然线性松弛：

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ & A_{i\cdot} x \geq b_i \qquad \text{for } i \in [q], \\ & x_j \geq 0 \qquad \text{for } j \in [n], \\ & x_j \in \mathbb{Z} \qquad \text{for } j \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{IP}$$

这里，$[n] := \{1, \ldots, n\}$ 对任意整数 n 均成立，而 $\mathcal{I} \subseteq [n]$ 是整数受限变量的集合。对于给定矩阵 A，我们用“$A_{i\cdot}$”表示其第 i 行，用“$A_{\cdot j}$”表示其第 j 列。令 P_I 表示 (IP) 的可行域，并令 $P := \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : Ax \geq b\}$。

强化表述 P（相对于 P_I）的一种方法是利用逻辑条件构造一个析取，然后可以据此为 P_I 推导出有效不等式。假设$\vee_{t \in \mathcal{T}} (D^t x \geq D^t_0)$ 是一个有效析取，即 $P_I \subseteq \cup_{t \in \mathcal{T}} \{x \in \mathbb{R}^n : D^t x \geq D^t_0\}$。令 $Q^t := \{x \in P : D^t x \geq D^t_0\}$。这是一个 H-多面体（不等式）描述。我们假设$Q^t \neq \emptyset$ 对所有 $t \in \mathcal{T}$ 均成立。

令 $P^t := \{x \in \mathbb{R}^n : A^t x \geq b^t\}$ 表示 Q^t 的一个松弛，其中 $A^t x \geq b^t$ 由定义 Q^t 的约束的一个子集定义。对于 VPC 程序，我们必须确保 P^t 的极点和射线相对较少，即它具有紧凑的 V-多面体描述 $(\mathrm{P}^t, \mathrm{R}^t)$，使得 $P^t = \mathrm{conv}(\mathrm{P}^t) + \mathrm{cone}(\mathrm{R}^t)$。定义析取包络 $P_D := \mathrm{cl\,conv}(\cup_{t \in \mathcal{T}} P^t)$，它可以用点射线集合 $(\mathrm{P}, \mathrm{R}) := (\cup_{t \in \mathcal{T}} \mathrm{P}^t, \cup_{t \in \mathcal{T}} \mathrm{R}^t)$ 描述。对于 $t \in \mathcal{T}$，令 q'_t为 A^t的行数。我们首先概述一些重要的析取规划概念，以及我们所要联系的两种割生成范式。

CGLP。生成的有效割的一种方法是通过 CGLP 实现，它是析取规划对偶性 [8, 第 4] 节的一种应用。具体而言，不等式 $\alpha^\intercal x \geq \beta$ 对 P_D 有效，当且仅当该不等式对每个 P^t，$t \in \mathrm{T}$ 都有效。因此，根据 Farkas 引理 [27]，$\alpha^\intercal x \geq \beta$ 对 P_D 有效，当且仅当以下关于变量 $(\alpha, \beta, \{v^t\}_{t\in\mathcal{T}})$ 的系统可行，其中对于每个 $t \in \mathrm{T}$，$v^t \in \mathbb{R}^{1\times q'_t}$ 是适当长度的行向量：

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^\intercal = v^t A^t \\ \beta \leq v^t b^t \\ v^t \in \mathbb{R}^{q'_t}_{\geq 0} \end{array}\right\} \text{ for all } t \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

We r将 $\{v^t\}_{t\in\mathcal{T}}$ 称为 P_D 上 $\alpha^\intercal x \geq \beta$ 有效性的***Farkas*** 证书 .

要利用（1）生成割，通常会在添加归一化条件后，针对一个 P_I-不可行点最大化违反程度，而归一化方式的选择可能至关重要 [29]。例如，¯可以将割的常数固定为$\beta \in \mathbb{R}$：

$$\left\{(\alpha, \{v^t\}_{t\in\mathcal{T}}) : (\alpha, \bar{\beta}, \{v^t\}_{t\in\mathcal{T}}) \text{ is feasible to } (1)\right\}. \tag{CGLP($\bar{\beta}$)}$$

PRLP。生成析取割的另一种方法是通过 _P_D [8, 第 5]，节中定义的反极集，该反极集是相对于给定的 $\beta \in \mathbb{R}$ 定义的：

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha^\intercal x \geq \bar{\beta} \text{ for all } x \in P_D\right\}.$$

¯显然，这包含了所有常数等于 β 的 P_D 的有效不等式。由于_$x \in P_D$当且仅当 $x \in$ conv(P)+cone(R) 时成立，因此 $\alpha^\intercal x \geq \beta$ 对 P_D 有效，当且仅当它满足 (P,R) 中的所有点和射线。由此得到以 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为变量、针对固定 β 的系统（PRLP(β)）：¯

$$\begin{array}{ll} \alpha^\intercal p \geq \bar{\beta} & \text{for all } p \in \mathcal{P} \\ \alpha^\intercal r \geq 0 & \text{for all } r \in \mathcal{R}. \end{array} \tag{PRLP($\bar{\beta}$)}$$

¯(PRLP(β)) 其可行解即为我们所称的 VPC。

¯如前所述，(PRLP(β)) 相较于 (CGLP(β)) 的优势在于无需将 Farkas 乘子作为变量，因此无需借助提升空间即可生成 VPC。正如我们接下来¯将看到的，(PRLP(β)) 的缺点在于，这些缺失的变量会在割生成后用于强化割。

幺半群 **强化**。Balas 和 Jeroslow [9]使用一个幺半群 d:

$$\mathbb{M} := \left\{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{T}|} : \sum_{t\in\mathcal{T}} \boldsymbol{m}_t \geq 0\right\}. \tag{$\mathbb{M}$}$$

此外还假设，对于每个 $t \in \mathrm{T}$，都存在一个有限下界向量 ℓ^t，使得$D^t x \geq \ell^t$ 对所有 $x \in P_I$均成立。令 $\Delta^t := D^t_0 - \ell^t$。

为强化该割，我们改进其基础析取。具体而言，给定一个有效的˜ ˜析取 $\vee_{t\in\mathcal{T}}($ $D^t x \geq D^t_0)$，对于任意 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{M}$ 和 $k \in \mathrm{I}$，析取 $\vee_{t\in\mathcal{T}}(D^t x \geq D^t_0)$

也有效，其中 $\tilde{D}^t_{\cdot k} := D^t_{\cdot k} + \Delta^t \boldsymbol{m}_t$，且对所有 $j \neq k$均成立。将未强化割的 Farkas 证书应用于强化后的析取，即可得到强化割。

令 q_t 表示 $D^t x \geq D^t_0$ 中关于项 $t \in \mathsf{T}$ 的约束数量。给定行向量 $(u^t,\ u^t_0) \in \mathbb{B}^{\geq 0}_{1\times q} \times \mathbb{B}^{\geq 0}_{1\times q_t}$，定义

$$\alpha^t_k := u^t A_{\cdot k} + u^t_0 D^t_{\cdot k}. \tag{α^t_k}$$

然后（使用适当的 CGLP），割 $\alpha^\intercal x \geq \beta$ 对 P_D有效，其中

$$\alpha_k := \max_{t\in\mathcal{T}}\{\alpha^t_k\} \qquad \text{and} \qquad \beta := \min_{t\in\mathcal{T}}\{u^t b + u^t_0 D^t_0\}.$$

（上述内容适用于对 $\vee_{t\in\mathcal{T}} Q^t$有效的割；对于 P_D，假设对于 Q^t 中不存在于 P^t的约束，其乘子的值为零。）定义 $\hat{}u^t_k := \alpha_k - \alpha^t_k$。现在我们对割 $\alpha^\intercal x \geq \beta$应用幺半群强化。

定理 1 （[9, 定理 3]）。给定 $(u^t, u^t_0) \in \mathbb{B}^{\geq 0}_{1\times q} \times \mathbb{B}^{\geq 0}_{1\times q_t}$，对于 $t \in \mathcal{T}$，不等式 $\tilde{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对 P_I有效，其中对于 $k \notin$ I</style}，$:= \alpha_k$，而对于 $k \in$ *I</style}*，

$$\tilde{\alpha}_k := \inf_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{M}} \max_{t\in\mathcal{T}} \left\{\alpha^t_k + u^t_0 \Delta^t \boldsymbol{m}_t\right\} = \alpha_k + \inf_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{M}} \max_{t\in\mathcal{T}} \left\{-\hat{u}^t_k + u^t_0 \Delta^t \boldsymbol{m}_t\right\}.$$

因此，Farkas 证书 $\{(u^t,\ u^t_0)\}_{t\in\mathcal{T}}$用于幺半群强化。无需求解 CGLP 来计算这些值，是我们接下来的目标。

3 PRLP 与 CGLP 解之间的对应关系

令 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 为 P_D的一个有效不等式，对应于 (PRLP(β))的一个可行解。我们的目标是在不显式求解 CGLP 的情况下，计算能够证明该割有效性的 Farkas 乘子。虽然可以求解满足 v^t、$\bar{\alpha}^\intercal = v^t A^t$、$\beta = v^t b^t$和 $v^t \geq 0$的值，但我们将借助基本的线性规划概念来改进这一做法。首先，我们在 第 3.1 节 和 3.2节介绍一种特殊情形：析取项 P^t 并非原始退化。这一条件由我们在实验中实现的 VPC 程序满足。接着，第 3.3 节 讨论一般情形所带来的挑战。

我们假设 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对 $\mathcal{T}$中的所有项都是支撑的。这样做是为了简化记号，否则我们需要在常数项一侧添加一个下标 t。具体而言，这一假设不失一般性，因为对于任意项 $t \in \mathcal{T}$，我们都可以增大该割的常数项一侧，直到得到一个对项 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta_t$ 支撑的 t不等式，尽管它可能对其他项无效。β_t 的值可以通过计算与 $\bar{\alpha}$ 中每个点的$\mathcal{P}$点积，快速求得。然后，我们可以找到一个证书 v^t 来证明 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta_t$ 对P^t有效；该证书也可用于证明较弱的不等式 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$。我们不加证明地给出这一结果的一个稍具一般性的版本，见引理 2。

引理 2。对于 $t \in \mathcal{T}$，设 $C^t \supseteq P^t$ 和 $\beta_t \geq \beta$ 满足 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta_t$ 对 C^t 有效。那么，给定一个证明不等式 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta_t$ 对 C^t 有效的 *Farkas* 证书，相同的乘子即可证明 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对 P^t有效。 □

为方便起见，我们引入额外记号，将 Q^t 的可行域记为 $\hat{}A^t x \geq \hat{}b^t$，并将这些约束的数量定义为 $\hat{}q_t := q + q_t + n$。对于 $N \subseteq [\hat{}q_t]$，将 Q^t 中由 N 索引的约束定义为 $\hat{}\ A^t_N x \geq \hat{}b^t_N$。

3.1 简单 VPC

我们在第 4 节中的实验设置沿用了 Balas 和 Kazachkov [10], 的设置，他们研究的是一种称为简单 VPC 的 VPC 框架变体。设 p^t 是 Q^t的一个顶点，对于 $t \in \mathrm{T}$。存在一个关于 p^t 的余基，即在定义Q^t 的约束中、在 p^t处取紧的 n 个线性无关约束的集合。令 $N^t \subseteq [\hat{}q_t]$ 表示这些 n 约束的索引，并定义基锥 $C^t := \{x \in \mathrm{R}^n : \hat{}\ A^t_{N^t} x \geq \hat{}b^t_{N^t}\}$。如果对于每一项，$P^t$ 都是一个基锥，则不等式 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \bar{\beta}$ 是一个简单 VPC。平移后的锥 C^t 具有特别简单的 V-多面体表示：存在唯一的极点 p^t，以及 n 条极射线 $\{r^i\}_{i\in[n]}$。i条极射线中的第 C^t 条对应于增加定义C^t [21, 第 6]章的第 i个约束的“松弛量”。引理 3 表明，对于简单 VPC，可以通过将割系数与C^t的射线进行点积，计算变量 $\{v^t\}_{t\in\mathcal{T}}$ 在 (CGLP(β)) 中的取值。

引理 3. 设 C^t 是由 N^t定义的基锥，其中 N^t是 Q^t的 n 个线性无关约束的索引。若 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对 C^t有效，则 C^t 中约束 $i \in [n]$ 对应的乘子值为 $v^t_i = \bar{\alpha}^\intercal r^i$，其中 r^i 是 $(\hat{}A^t_{N^t})^{-1}$的第 i 列。

证明。 为每个索引属于 N^t的行添加非负松弛变量 $s^t_{N^t}$，于是 $\hat{}\ A^t_{N^t} x - s^t_{N^t} = b^t_{N^t}$。接着注意到，作为余基，$\hat{}\ A^t_{N^t}$可逆，因此 $x = (\hat{}A^t_{N^t})^{-1} b^t_{N^t} + (\hat{}A^t_{N^t})^{-1} s^t_{N^t} = p^t + \sum_{i\in N^t} r^i s^t_i$. 。最后一个等式由 C^t的射线推导得出；例如，参见 Conforti 等人 [21,第 6]章。 □

因此，对于简单 VPC，在给定 P_D的点射线表示后，无需额外工作即可计算 Farkas 证书。此外，Balas 和 Kazachkov [10]从部分分支定界树的叶节点中获得简单 VPC，并将 p^t 用作每个叶节点处线性松弛的最优解；若实现得当，这可以进一步降低生成并强化 VPC 的计算负荷，因为射线的值可直接从最优单纯形表中读取，而该表通常可由求解器轻易获得。

3.2 无原始退化的松弛

假设松弛 $P^t \supseteq Q^t$ 是一个简单多面体，其中每个极点和射线都由一个唯一的 基 [50]定义。用于简单 VPC 的基锥 C^t 就是一个例子。虽然基锥这一设定看起来相当狭窄，但实际上它涵盖了更一般的情形。具体而言，总存在一个基锥 $C^t \supseteq P^t$，使得 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对 C^t有效且具有支撑性。

引理 4。 设 P^t 是一个简单多面体，并假设点射线集合 $(\mathcal{P}^t, \mathcal{R}^t)$ 满足 $P^t = \mathrm{conv}(\mathcal{P}^t) + \mathrm{cone}(\mathcal{R}^t)$。设 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 是关于 P^t的有效不等式。则存在一个顶点 $p^t \in \mathcal{P}^t$，使得 $\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对于与 p^t相关联的基锥 C^t 有效；该基锥是相对于 P^t的约束定义的。

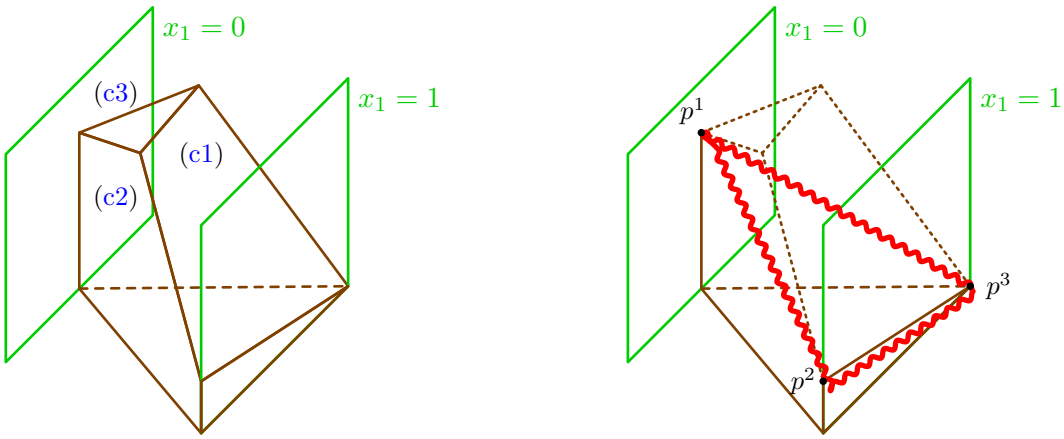


图1：示例1：尽管初始多面体非退化，析取项仍存在原始退化。第二个面板中的红色波浪线为VPC。

证明。 设 p^t 是 $\min_x\{\bar{\alpha}^\top x\colon\ x \in P^t\} = \min_p\{\bar{\alpha}^\top p\colon\ p \in \mathrm{P}^t\}$. 定义 $\beta_t := \bar{\alpha}^\top p$。注意，无需考虑 R^t 中的射线，因为优化问题必定有界，这是因为 $\bar{\alpha}^\top x \geq \beta_t$ 对所有 $x \in P^t$都有效。点 p^t 有唯一的基，因此基锥 C^t 由 P^t 中在 p^t处紧束的（恰好） n 个约束定义。 p^t 的最优性意味着所有约化成本均非负。因此， $\bar{\alpha}^\top r \geq 0$ 每条射线 $r \in C^t$。由于 $\bar{\alpha}^\top p^t = \beta_t \geq \beta$，不等式 $\bar{\alpha}^\top x \geq \beta$ 对 C^t有效。□

因此，我们可以运用引理2和3 来求出此情形下的 Farkas 证书。请注意，当给定的点射线集合仅包含极点和射线时，单纯多面体 C^t 的任意基锥对应的射线 P^t 都可以通过射线$\mathcal{R}^t$以及每个 $p - p^t$ 与 $p \in \mathcal{P}^t$ 相邻（相差一次枢轴操作）的点p^t所对应的方向来计算。

3.3 原始退化下的松弛

到目前为止，我们一直方便地假设松弛 P^t 是一个简单多面体。更一般地，总存在一个基锥 C^t，使得对 P^t 有效的割对 C^t也有效。通过示例1，我们说明当 $\bar{\alpha}^\top x \geq \beta$ 在 P^t的一个原始退化点处为支撑时所产生的复杂性：需要谨慎地为该点选择一个基，因为该不等式对某些基锥可能并不有效。在这些情况下，寻找一个有效基在计算上可能很复杂，这妨碍了直接应用我们依赖简单多面体的方法。本示例旨在突出 PRLP 与 CGLP 解之间实现完全对应的一个关键障碍，但本文不再进一步研究非退化情形。

示例1。 图1 展示了一个多面体 P，其定义为满足以下条件的可行解集合

$$
\begin{aligned}
-(13/8)x_1 - (1/4)x_2 - x_3 &\geq -15/8 && \text{(c1)}\\
(1/2)x_1 + x_2 &\geq 1/2 && \text{(c2)}\\
(1/2)x_1 - x_3 &\geq -3/4 && \text{(c3)}\\
(1/2)x_1 - x_2 &\geq -1/2 && \text{(c4)}\\
x_2 &\geq 0. && \text{(c5)}
\end{aligned}
$$

析取 $(-x_1 \geq 0) \vee (x_1 \geq 1)$ 给出的一个有效割，其系数为 $\bar{\alpha}^{\intercal} = (-5/8, -1/4, -1)^{-}$，常数项为 $\beta = -7/8$。右图所示的该割经过点 $p^1 = (0, 1/2, 3/4)$，该点位于 $P^1 := \{x \in P: -x_1 \geq 0\}$ 上。此点使四个不等式取等：三个用于定义 P （约束 (c2)–(c4)），另一个是定义析取的约束 $-x_1 \geq 0$。注意， P 是单纯的，但 P^1 不是。

要构造余基 N^1，使得该不等式对相关的基锥 C^1有效，我们必须从在 p^1处取等的约束中选出三个线性无关约束。其中一个不等式必须是 $-x_1 \geq 0$，否则我们就根本没有施加析取（但我们也知道该割对 P无效）。可以验证，此例中唯一有效的选择是 N^1，其中包含 (c3)、(c4) 以及析取不等式 $-x_1 \geq 0$。■

4 计算实验

我们基于 Balas 和 Kazachkov [10] from https://github.com/akazachk/vpc 使用的代码，实现了简单 VPC 的幺半群强化。本计算研究旨在衡量幺半群强化对 VPC 闭合的整数性间隙百分比的影响，并与未强化 VPC 和 GMIC 进行比较，同时考察不同析取规模下的效果。

代码在 HiPerGator 上运行。HiPerGator 是佛罗里达大学 Research Computing 提供的共享集群。计算设置与 Balas 和 Kazachkov [10, 第5节及附录 C]中所述的几乎完全相同。我们从 MIPLIB [17, 18, 4, 41, 31], CORAL [22], 和 NEOS 集合的并集中选取实例，并将范围限定为行数和列数均不超过 5,000、且符合 [10, 附录 C]所述其他标准的实例。由此得到 332 个适合进行闭合间隙比较的实例。不过，由于集群的内存资源有限，我们仅报告这 332 个实例中的 274 个。尽管数据集有所缩减，我们仍能识别出幺半群强化对实例影响的反复出现的模式。实例先由 Gurobi[34], 预处理，但割生成通过 COIN-OR 的 C++ 接口完成：使用 Clp [3] 求解线性规划，并使用 Cbc [1] 基于部分分支定界树构造析取。我们测试六种不同的析取规模，当叶节点数（析取项数）达到2^ℓ 时停止分支，适用于 $\ell \in [6]$。因此，我们报告了对最多包含 64 项析取的析取割进行幺半群强化的结果，不过每次仅使用一个析取。在求得线性规划松弛的最优解后，为每个分数整数变量生成一个 GMIC；对于每个固定的析取选择，GMIC 的数量也用作该实例所生成 VPC 数量的上限。两种方法均使用一轮割，

过程。GMIC 通过 `CglGMI` [2]生成，而 VPC 的生成过程与 Balas 和 Kazachkov [10], 所述的完全相同，之后再应用强化。

虽然 引理 3 使我们能够通过每个松弛的射线计算 Farkas 乘子的值 P^t，并且根据我们构建 PRLP 的方式，这些值很容易获得，但我们并未利用这一联系。相反，我们计算 $v^t = \bar{\alpha}^\intercal (A^t)^{-1}$。这种方法仍比求解 (CGLP($\beta$)) 的可行性版本更直接，其中 $\bar{\alpha}$ 固定。为确保本次探索性研究的数值安全性，我们使用 Eigen 库 [33] 重新计算 A^t 的逆矩阵，而不是针对每一项从 Cbc / Clp 的内部基逆矩阵中读取。

我们在 表1 中报告 VPC 和 GMIC 所闭合的平均整数性间隙百分比。前六行数据包含每种固定析取规模下的结果。倒数第二行数据标记为“最佳值”，采用所有析取中每个实例的最高闭合间隙。最后一行数据标记为“Wins”，报告“最佳值”闭合间隙至少比 GMIC 所闭合间隙高 10^{-3} 的实例数量。在各列中，我们用“G”表示 GMIC，用“V”表示未强化 VPC，用“V$^+$”表示强化 VPC。列“G+V”和“G+V$^+$”表示将 GMIC 与 VPC 结合使用的情况。实例分为两组：“全部”报告全部 274 个实例，而“$\geq$10%”报告其中未强化 VPC 单独应用时，在“最佳值”下至少闭合 10% 整数性间隙的 97 个实例。

就总体闭合间隙而言，尽管采用了 Balas 和 Kazachkov [10]，所报告的幺半群强化过程，仅使用 VPC 时，其在“全部”集合上的表现并未优于 GMIC；但将 VPC 与 GMIC 结合使用，相较于仅使用 GMIC，可使闭合间隙提高约 40%。尽管在 GMIC 中加入 VPC 可能会使割的数量翻倍，但即使经过多轮求解器默认割 [10] 后，一轮 VPC 仍能额外闭合大量间隙。因此，相较于 GMIC，VPC 会在不同区域收紧松弛。这一点也由“$\geq$10%”集合凸显出来，该集合包含 VPC 表现强劲的实例；对于该集合，GMIC 相对较弱，每个实例的最佳 VPC（单独使用）相较于仅使用 GMIC，使平均闭合间隙百分比提高了 75%。我们也可从“胜出”行中看到这一点：对于“$\geq$10%”集合，仅使用 VPC 在该集合的 97 个实例中有 73 个优于 GMIC。

接下来，我们总结幺半群强化所产生影响的一些观察结果。我们先看第一行数据，其中每个实例的 VPC 均由一个分裂析取得出。对于“全部”集合，幺半群强化影响了 87 个实例的 VPC 间隙闭合情况，并使 VPC 的平均闭合间隙提高了 ~1%，从 2.28% 提升至 3.25%，相对提升 40%。对于“$\geq$10%”集合，相应的相对提升为 20%。

尽管两项式的情况令人鼓舞，而且对于规模更大的析取，间隙闭合程度若能取得类似的相对提升，将会意义重大，但遗憾的是，这并未实现。从 表1可以看出，随着析取规模增大，幺半群强化的作用往往进一步减弱；对于来自 64 项析取的 VPC，间隙闭合程度仅绝对提升了 0.1%。我们将在下一节讨论造成这一现象的一个可能原因。

现在，我们比较“G+V$^+$”列和“G+V”列。在“全部”集合上，即使对于分裂析取，将 VPC 与 GMIC 结合时，强化的效果也很有限，强化仅使闭合间隙的百分比额外提高 0.23 %，保留了“V$^+$”与“V”之间约 23% 的改进。对于更大的析取，尽管

表1：根据用于构建部分分支定界树的叶节点数，VPC 和 GMIC 的平均间隙闭合百分比。“最佳值”指在所有部分树规模中，每个实例所达到的最大间隙闭合值。

	All					≥10%				
	G	V	V^+	G+V	G+V^+	G	V	V^+	G+V	G+V^+
2个叶节点	17.21	2.28	3.25	17.95	18.18	16.29	5.34	6.47	18.13	18.59
4个叶节点	17.21	3.35	3.72	18.37	18.54	16.29	7.81	8.35	19.14	19.48
8个叶节点	17.21	4.51	4.76	18.98	19.15	16.29	10.84	11.16	20.66	20.91
16个叶节点	17.21	6.41	6.57	20.54	20.67	16.29	15.81	16.05	24.86	25.04
32个叶节点	17.21	8.78	8.97	22.31	22.48	16.29	21.82	22.28	29.59	29.97
64个叶节点	17.21	10.46	10.57	23.72	23.83	16.29	25.59	25.85	32.90	33.14
Best	17.21	11.93	12.57	24.67	24.89	16.29	29.26	29.53	35.27	35.59
Wins		103	104	185	190		73	73	94	94

强化 VPC 带来的闭合间隙增幅很小，但在 VPC 的基础上加入 GMIC 后，仍保留了其中超过 80% 的改进。

对结果进行更仔细的考察支持了这一假设：幺半群强化是使 GMIC 能够比 VPC 闭合更多间隙的关键因素。我们根据强化 VPC 相对于未强化 VPC 在闭合间隙方面的增幅对实例进行排序；对于每一列，使用所有析取规模中的最佳闭合间隙。表 2 展示了排名前十的实例，并按照最后一列排序；该列计算了“V^+”与“V”之间的差值。表中包括此前讨论过的实例 `10teams`，以及另外六个实例；对于这些实例，未强化 VPC 至多闭合了 5% 的间隙。我们看到，对于这些实例，VPC 的幺半群强化弥合了其与 GMIC 之间差异的很大一部分。对于`neos-1281048`，情况则相反：121 个 GMIC 未闭合任何间隙，而 29 个未强化 VPC 闭合了 17% 的间隙；强化后，这一比例进一步提高到 29%。从该表中我们还观察到，“G+V”列中的数值通常完全来自 GMIC 或 VPC，但哪一类割更为重要则因实例而异。对于“G+V^+”列，情况仍然类似，不过现在我们发现了若干案例（`f2gap401600`、`p0548`、`mkc`），其中两个割族彼此互补。

虽然运行时间并非我们关注的重点，而且共享计算环境使墙钟时间难以准确衡量，表3给出了每个实例单次运行的平均秒数，包括生成 VPC 后再进行强化。平均而言，割生成所需的总时间从二项析取的不到一秒，到16项析取的50秒、32项析取的150秒，再到64项析取的近9分钟不等。平均每个割所需的时间，二项析取不到0.1秒，32项析取则高达9秒，64项析取则超过30秒。

表 2：强化 VPC 效果最佳的实例的间隙闭合百分比。

实例	G	V	V^+	G+V	$G+V^+$	V^+-V
10teams	100.00	0.00	100.00	100.00	100.00	100.00
neos-1281048	0.00	17.09	29.36	17.09	29.36	12.27
neos-1599274	34.65	0.00	11.19	34.65	34.65	11.19
f2gap401600	62.97	2.53	11.34	63.31	71.77	8.80
prod2	2.31	27.60	35.90	27.63	35.91	8.29
neos-942830	6.25	0.00	6.25	6.25	6.25	6.25
p0548	48.62	3.28	9.03	49.03	55.11	5.75
mkc	6.08	2.60	6.56	6.35	9.61	3.96
f2gap201600	60.27	8.58	12.13	60.27	60.27	3.56
neos-4333596-skien	20.84	7.05	9.83	20.84	20.85	2.78

5 选择　　适合强化的松弛

本节探讨随着析取项增多，幺半群强化效果减弱的一种潜在原因。根据定理 1，给定一个初始割 $\alpha^\intercal x \geq \beta$，我们可以将系数 α_k，$k \in \mathcal{I}$强化为

$$\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k + \inf_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{W}} \max_{t \in \mathcal{T}} \left\{ -\hat{u}_k^t + u_0^t \Delta^t \boldsymbol{m}_t \right\},$$

其中，$\hat{u}_k^t = \alpha_k - (u^t A_{\cdot k} + u_0^t D_{\cdot k}^t)$ 是 CGLP 约束 $\alpha_k \geq u^t A_{\cdot k} + u_0^t D_{\cdot k}^t$. 上的松弛量。等价地，$\hat{u}_k^t$ 是非负约束 $x_k \geq 0$ 对应的 Farkas 乘子。下一个引理重述了要求存在一个非基整数变量 k 以进行幺半群强化的（已知）原因。

引理 5. 若 $\hat{u}_k^t = 0$，则 $\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k$。

证明。 在这种情况下，$\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k + \inf^{\boldsymbol{m} \in} \mathbb{W} \max_{t \in \mathcal{T}} \{u_0^t \Delta^t \boldsymbol{m}_t\}$。 由于对每个 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{W}$，都有 $\sum_{t \in \mathcal{T}} \boldsymbol{m}_t \geq 0$，且 $u_0^t \Delta^t \geq 0$，因此最优解为 $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$。 □

在第 3 节的对应关系中，我们最终找到一个点 $p^t \in P^t$ 使得 $\bar{\alpha}^\intercal p^t = \beta_t$，其中 $\beta_t =$ 最小值$_p\{\bar{\alpha}^\intercal p : \ p \in \mathcal{P}^t\}$。随后，我们在 p^t 处计算一个基锥，使得该割有效，并使用这个（平移后的）锥计算 Farkas 证书的取值。然而，根据互补松弛，如果 $p_k^t > 0$，那么必然有 $\hat{u}_k^t = 0$。

Tab表 3：生成 V 列中割所需的平均时间（秒）$^+$ 的表　　1.

统计量	Set	2个叶节点	4个叶节点	8个叶节点	16个叶节点	32个叶节点	64个叶节点
割时间（秒）	All	0.76	6.39	15.33	49.90	149.84	525.78
	≥10%	0.92	9.31	21.06	130.45	273.51	521.99
时间/切割（秒）	All	0.08	0.39	0.97	2.65	9.00	30.54
	≥10%	0.07	0.35	0.79	2.46	7.75	20.19

尽管乍看之下，这似乎既令人遗憾又不可避免，但仍有两种可能的补救办法。首先，在选择 p'时可能存在对偶退化：每个这样的点都可能导出不同的 Farkas 证书，进而产生不同的强化。其次，正如 Balas 和 Qualizza [6]，所指出的，“有时弱化析取反而有助于强化”。虽然在那个语境中，弱化是通过向¯ ¯析取中添加项来实现的，但这一观点同样适用于我们的情形：如果 $\beta_t > \beta$，那么可以在 Q^t 中寻找另一个可能不可行的基，其中更多整数变量是非基变量，并且$\bar{\alpha}^\intercal x \geq \beta$ 对于相应的基锥仍然有效。

计算结果支持上述直觉。由分裂析取生成 VPC 时，平均而言，每个实例生成的割中约有 95% 至少有一个系数通过幺半群技术得到强化。对于 64项析取，这一比例降至 85%。此外，在平均意义上，对于已应用强化的 VPC，分裂析取的割系数中有 20% 得到强化；随着析取规模增大，这一数值稳步下降，因此，对于由 64项析取生成的类似 VPC，得到强化的系数仅占 10%。

6 结论

我们证明，无需显式求解高维 CGLP，也可以强化来自一般析取的割，并且这种强化对某些实例能够产生显著影响。然而，我们也指出了未来工作面临的若干挑战。首先，对于较大规模的析取，强化的平均效果不佳。虽然我们提出了一种可行的解释和补救方法，但该方法计算开销大，仍需进一步开发。其次，求解最优幺半群强化需要针对每个割求解一个整数规划；这是一个相对较小且容易的问题，但正如包含强化时间的 表3 所示，对于较大规模的析取，该问题仍可能耗时较长。可以通过仅对最有希望的割进行选择性强化来减轻这一负担，这些割可依据理论性质或有效启发式方法加以识别；也可以放弃对强化后割系数的最优性要求。我们的计算结果表明，VPC 和 GMIC 似乎具有互补作用；深入理解这一点，将有助于更广泛地采用析取割。

参考文献

[1] COIN-OR Branch and Cut。《v2}COIN-OR割生成库。
https://github.com/coin-or/CglCOIN-OR线性规划。
https://github.com/coin-or/ClpT. Achterberg、T. Koch 和 A. Martin。MIPLIB 2003。《运筹学快报》，34(4):361–372，2006。[5] Kent Andersen、Gérard Cornuéjols 和 Yanjun Li。分裂闭包与交割。《数学规划》，102(3，A辑):457–493，2005。

[6] E. Balas 和 A. Qualizza。幺半群切割强化再探。《离散优化》，9(1):40–49，2012。[7] Egon Balas。交割——一种新型的整数规划切割平面。《运筹学》，19(1):19–39，1971年。[8] Egon Balas。析取规划。《离散数学年刊》，5:3–51，1979年。[9] Egon Balas 和 Robert G. Jeroslow。混合整数规划的割强化。《欧洲运筹学杂志》，4(4):224–234，1980年。[10] Egon Balas 和 Aleksandr M. Kazachkov。V-多面体析取割，2022。URLhttps://arxiv.org/abs/2207.13619。[11] Egon Balas 和 Tamás Kis。标准交集切割、提升与投影切割和广义交集切割之间的关系。《数学规划》，第1–30页，2016年。[12] Egon Balas 和 Michael Perregaard。0-1规划中提升与投影切割、简单析取切割和混合整数 Gomory 切割之间的精确对应关系。《数学规划》，94(2-3，B辑):221–245，2003年。Aussois 2000组合优化研讨会。[13] Egon Balas 和 Andrea Qualizza。由多行导出的交割：一种析取规划方法。《EURO计算优化杂志》，1(1):3–49，2013年。[14] Egon Balas、Sebastián Ceria 和 Gérard Cornuéjols。混合0-1规划的提升与投影切割平面算法。《数学规划》，58(3，A辑):295–324，1993年。[15] Egon Balas、Sebastián Ceria 和 Gérard Cornuéjols。分支切割框架中的提升与投影混合0-1规划。《管理科学》，42(9):1229–1246，1996年。[16] Amitabh Basu、Pierre Bonami、Gérard Cornuéjols 和 François Margot。利用退化单纯形表进行双行切割的实验。《INFORMS计算期刊》，23(4):578–590，2011。[17] R. E. Bixby、E. A. Boyd 和 R. R. Indovina。MIPLIB：一组混合整数规划问题测试集。《SIAM新闻》，25:16，1992年。[18] R. E. Bixby、S. Ceria、C. M. McZeal 和 M. W. P Savelsbergh。更新后的混合整数规划库：MIPLIB 3.0。《Optima》，58:12–15，1998年6月。[19] Pierre Bonami。在提升与投影闭包上优化。《数学规划计算》，4(2):151–179，2012年。[20] Pierre Bonami、Michele Conforti、Gérard Cornuéjols、Marco Molinaro 和 Giacomo Zambelli。由二项析取导出的切割平面。《运筹学快报》，41(5):442–444，2013年。

[21] Michele Conforti、Gérard Cornuéjols 和 Giacomo Zambelli。《整数规划》，数学研究生教材第271卷。施普林格，Cham，2014。[22]CORAL。利哈伊大学计算优化研究。混合整数规划实例。
coral.ise.lehigh.edu/data-sets/mixed-integer-instances/，2020。访问于2020年9月。[23] Gérard Cornuéjols 和 Yanjun Li。整数规划的初等闭包。《运筹学快报》，28(1):1–8，2001。[24] Santanu S. Dey 和 Laurence A. Wolsey。通过提升构造双行混合整数割。《数学规划》，124(1-2, Ser. B):143–174，2010。[25] Santanu S. Dey、Andrea Lodi、Andrea Tramontani 和 Laurence A. Wolsey。双行单纯形表割的实际强度。《INFORMS计算期刊》，26(2):222–237，2014。[26] Daniel G. Espinoza。使用多行Gomory割进行计算。《运筹学快报》，38(2): 115–120，2010。[27] Julius Farkas。简单不等式理论。《纯粹与应用数学杂志》，124:1–27，1902。[28] Tobias Fischer 和 Marc E. Pfetsch。用于析取和互补约束的幺半群切割强化与广义混合整数舍入。《运筹学快报》，45 (6):556–560，2017。[29] Matteo Fischetti、Andrea Lodi 和 Andrea Tramontani。析取割的分离。《数学规划》，128(1-2, Ser. A):205–230，2011。[30] Ricardo Fukasawa、Laurent Poirrier 和 Álinson S. Xavier。二维中的（并非那么）平凡提升。《数学规划计算》，11(2):211–235，2019。[31] A. Gleixner、G. Hendel、G. Gamrath、T. Achterberg、M. Bastubbe、T. Berthold 等。MIPLIB 2017：第六版混合整数规划库的数据驱动编纂。《数学规划计算》，2021。[32] Ralph E. Gomory 和 Ellis L. Johnson。与角多面体相关的一些连续函数。《数学规划》，3(1):23–85，1972。[33] Gaël Guennebaud、Benoît Jacob 等。Eigen v3。http://eigen.tuxfamily.org，2010。[34] Gurobi Optimization, LLC。Gurobi优化器参考手册，2022。[35] Ellis L. Johnson。混合整数规划的群问题。《数学规划研究》，(2):137–179，1974。[36] Joaquim J. Júdice、Hanif D. Sherali、Isabel M. Ribeiro 和 Ana M. Faustino。针对含均衡约束的数学规划问题的基于互补性的划分与析取割算法。《全球优化杂志》，36(1):89–114，2006。

[37] Aleksandr M. Kazachkov。非递归切生成。博士论文，卡内基梅隆大学，2018。[38] Aleksandr M. Kazachkov 和 Felipe Serrano。幺半群切割强化。载于 Oleg Prokopyev 和 Panos M. Pardalos 编，《优化百科全书》。施普林格美国，马萨诸塞州波士顿。审稿中。[39] Mustafa Kılınç、Jeff Linderoth、James Luedtke 和 Andrew Miller。凸混合整数非线性规划的强分支不等式。《计算优化与应用》，59(3): 639–665，2014。[40] Tamás Kis。一般二项析取的提升与投影。《离散优化》，12: 98–114，2014。[41] T. Koch、T. Achterberg、E. Andersen、O. Bastert、T. Berthold、R. E. Bixby 等。MIPLIB 2010：混合整数规划库第5版。《数学规划计算》，3(2):103–163，2011。[42] Jan Kronqvist 和 Ruth Misener。凸混合整数非线性规划的析取切强化技术。《优化工程》，22(3):1315–1345，2021。[43] Robin Lougee-Heimer。运筹学通用优化接口：在运筹学界推广开源软件。*IBM*研究与开发杂志，47，2003。[44] Quentin Louveaux、Laurent Poirrier 和 Domenico Salvagnin。多行模型的强度。《数学规划计算》，7(2):113–148，2015。[45] George L. Nemhauser 和 Laurence A. Wolsey。整数与组合优化。Wiley-Interscience离散数学与优化丛书。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1988。[46] George L. Nemhauser 和 Laurence A. Wolsey。生成所有0-1混合整数规划割的递归过程。《数学规划》，46(1):379–390，1990。[47] Michael Perregaard。混合整数规划的析取切生成。博士论文，卡内基梅隆大学，9 2003。[48] Michael Perregaard 和 Egon Balas。由多项析取生成割。载于整数规划与组合优化，计算机科学讲义第2081卷，第348–360页。施普林格，柏林，2001。[49] Álinson S. Xavier、Ricardo Fukasawa 和 Laurent Poirrier。基于无穷范数的多行交割。《*INFORMS*计算期刊》，33(4):1624–1643，2021。[50] Günter M. Ziegler。多胞体讲义，数学研究生教材第152卷。Springer-Verlag，纽约，1995。