arXiv:2303.00241v1 [math.RT] 1 Mar 2023

非对称 q-柯西恒等式与伊wahori代数的表示

叶夫根尼·费金、IEVGEN MAKEDONSKYI 和 DANIEL ORR

ABSTRACT. $t = 0$特化的道町–野海型柯西恒等式，将某个无穷乘积改写为类型 GL_n的特化非对称 Macdonald 多项式。我们将该无穷乘积解释为某个矩阵空间上函数空间的特征。我们证明，函数空间存在一个滤过，其分次部分同构于伊wahori代数的若干广义全局 Weyl 模的张量积。我们将这些分次部分的特征与特化道町–野海公式中的各项对应起来。我们猜想，对于所有单李代数，伊wahori群上的函数空间都存在类似的滤过，并证明了 SL_n的情形。我们的构造可视为流代数对 Borel 子群上函数的 van der Kallen 滤过的扩展。

1. INTRODUCTION

著名的柯西恒等式

$$\prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{\lambda=(\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0)} s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_n)$$

可以将左侧的无穷乘积改写为舒尔函数乘积之和（见 [M1]）。该恒等式有着广泛的应用和多种诠释（例如见 [BC, BP, BW, Ok, OR, St]）。特别地，可以将左侧理解为方阵空间上多项式函数的特征，并将这个函数空间分解为李代数$\mathfrak{gl}_n$上的双模的直和。在这种方法中，舒尔函数的乘积表现为不可约 $\mathfrak{gl}_n$ 模张量积的特征。从表示论的角度来看，柯西恒等式与彼得-外尔定理（见 [PW, TY]）十分相近，因为后者将单群上的函数空间分解为不可约表示张量积的直和。

经典柯西恒等式可推广至流代数的情形。相应的数值恒等式如下（见 [M1]）

$$\prod_{k\ge 0}\prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_jq^k)^{-1}=\sum_{\lambda=(\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0)} p_\lambda(x;q)p_\lambda(y;q)\prod_{a=1}^{n}(q)^{-1}_{\lambda_a-\lambda_{a+1}},$$

其中， $x=(x_1,\dots,x_n)$、 $p_\lambda(x;q)$ 表示 q-Whittaker 函数，而 $(q)_m$表示 q-Pochhammer 符号（注意， q-Whittaker 函数等于非对称 Macdonald 多项式 $E_{w_0\lambda}(x;q,0)$ 的 $t=0$ 特化，见 [BF、Et、CO1、CO2、GLO]）。在 [FKM] 中，作者提出将左边解释为定义在方阵空间上的多项式函数空间的特征，其中系数取自一个变量的多项式环。作者在该函数空间上构造了一种滤过，使得关联分次空间的齐次分量同构于最高权代数上的全局 Weyl 模的张量积。论文 [FKM] 还给出了彼得–外尔定理在流代数中的类似形式，通过特化的 Macdonald 多项式的乘积来表示环群上函数空间的特征。

经典柯西恒等式有一个非对称版本（见 [CK, L, MN]）

$$\prod_{1\le i\le j\le n}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n}E_\lambda(x;0,0)E_\lambda(y;\infty,\infty).$$

这里 E_λ 表示 GL_n 型的非对称 Macdonald 多项式， $E_\lambda(x;0,0)$ 是关键多项式（又称 Demazure 模的特征），而 $E_\lambda(y;\infty,\infty)$ 是德马祖尔原子（又称范德卡伦模的特征——即 Demazure 模除以所有较小 Demazure子模之和所得的商）。van der Kallen 定理的一个 $\mathfrak{gl}_n$ 版本 [vdK] 为非对称柯西恒等式提供了表示论上的对应形式。具体而言，左边替换为上三角矩阵上多项式函数空间的特征。该函数空间带有一个由 $\lambda\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ 索引的滤过，使得关联分次空间的齐次部分同构于 Demazure 模与范德卡伦模的张量积。对于所有单李群，范德卡伦定理均成立，前提是将上三角矩阵空间替换为相应单李群的 Borel 子群。

道町–野海提出了非对称柯西恒等式的一个 (q,t)-版本（见 [MN]）。道町–野海公式的 $t=0$ 特化形式为

$$\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{1}{1-x_iy_j}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{1}{(qx_iy_j;q)_\infty}=\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n}a_\lambda(q)E_\lambda(x;q,0)E_\lambda(y;q^{-1},\infty) \tag{1.1}$$

其中， $a_\lambda(q)$ 是 E_λ 的 Cherednik 范数。注意，当 $q=0$ 时，(1.1) 化为上述非对称柯西恒等式。容易看出，(1.1) 的左端计算的是多项式值矩阵空间的伊wahori型子空间上的多项式函数空间的特征。本文的主要目标是寻求其表示论

解释，并写出和证明适用于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ 的 (1.1) 的一个类似公式。我们还对所有单李代数提出了一个猜想。下面更详细地介绍我们的结果。

下文中，我们固定一个特征为 0 的代数闭域 $\Bbbk$。令 M_n 为系数取自 $\Bbbk$ 的 n 阶方阵空间。令$M_n[z]=M_n\otimes\Bbbk[z]$ 为元素是单变量多项式的矩阵空间。我们用 $M_n[z]^+$ 表示上三角矩阵子空间与空间 $M_n\otimes z\Bbbk[z]$ 的直和（因此，$M_n[z]^+$ 是 Iwahori 子代数的$\mathfrak{gl}_n$ 版本）。于是，(1.1) 的左端自然地可识别为多项式函数空间$\Bbbk[M_n[z]^+]$的特征，其中 q 对应 z次，x_i、y_j 分别对应对角环面的左作用和右作用。为得到右端的各项，我们在限制对偶空间 $\Bbbk[M_n[z]^+]^\vee$ 上构造一个滤过 $\mathcal{F}_\lambda$, $\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，并描述其齐次部分$\mathcal{F}_\lambda/\sum_{\mu\succ\lambda}\mathcal{F}_\mu$。更确切地说，对一个合成 λ，我们考虑 Iwahori 代数（类型为 $\mathfrak{gl}_n$）的某个左模 $\mathbb{D}_\lambda$ 和右模 $\mathbb{U}_\lambda^o$。这两个模是具有特征的广义全局 Weyl 模（的$\mathfrak{gl}_n$版本）（参见 [FMO、FKM、NS、NNS1、NNS2]）。模 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}_\lambda^o$带有分次（交换）代数 $\mathcal{A}_\lambda^D$（即所谓的最高权代数）的作用，该作用与流代数 $\mathfrak{gl}_n[z]$ [CFK]）的作用相交换。我们的第一个主要结果如下:

定理 1. 对任意 $\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$,

$$\mathcal{F}_\lambda/\sum_{\mu\succ\lambda}\mathcal{F}_\mu\simeq\mathbb{D}_\lambda\otimes_{\mathcal{A}_\lambda^D}\mathbb{U}_\lambda^o.$$

我们还证明了代数 $\mathcal{A}_\lambda^D$在 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}_\lambda^o$上自由作用。为了将定理 1 与公式 (1.1) 联系起来，我们注意到（见 [FKM、I、OS、RY、Sa]）

$$\operatorname{ch}\mathbb{D}_\lambda=a_\lambda(q)E_\lambda(x;q,0),\ \operatorname{ch}\mathbb{U}_\lambda^o=a_\lambda(q)E_\lambda(y;q^{-1},\infty),\ \operatorname{ch}\mathcal{A}_\lambda^D=a_\lambda(q).$$

非对称 q-柯西恒等式 (1.1) 有一个 $\mathfrak{sl}_n$-版本。注意，$\mathfrak{sl}_n$ 的权格 P 是将 $\mathfrak{gl}_n$权格 $\mathbb{Z}^n$ 对向量 (1, . . . , 1) 的张成空间取商得到的。将 (1.1) 中具有相同 $\mathfrak{sl}_n$权的项合并，我们得到恒等式

$$(1.2)\quad (x_1\cdots x_ny_1\cdots y_n;q)_\infty\prod_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{1-x_iy_j}\prod_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{(qx_iy_j;q)_\infty}=\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n}a_\lambda(q)E_\lambda(x;q,0)E_\lambda(y;q^{-1},\infty),$$

其中 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n$ 是至少有一个坐标等于零的非负整数向量子集。我们证明，左侧与 Iwahori 群 $\mathrm{I}\subset SL_n[z]$上的多项式函数空间的特征一致。现在，我们的目标是给出 (1.2) 右侧的一个表示论实现。为此，我们注意到 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n$ 可与李代数 $\mathfrak{sl}_n$的权格 P 等同。对于元素 $\lambda\in P$，我们

考虑 $\mathfrak{sl}_n[z]$ 模 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}^o_\lambda$，它们是带特征的 $\mathfrak{sl}_n$广义全局 Weyl 模的特例。这两个模都带有多项式代数 $\mathcal{A}^D_\lambda$ 的作用，且该作用与流代数 $\mathfrak{sl}_n[z]$ 的作用相交换（我们注意到，在单键情形下，0- 特化 $\mathbb{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}^D_\lambda} \Bbbk_0$ 同构于相应的 1 级仿射 Demazure 模）。我们在函数空间 $\Bbbk[\mathrm{I}]$上引入递增滤过 $\mathcal{G}_\lambda$，使得以下定理成立：

定理 2. 对任意 $\lambda \in P$,

$$\mathcal{G}_\lambda / \sum_{\mu \prec \lambda} \mathcal{G}_\mu \simeq (\mathbb{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}^D_\lambda} \mathbb{U}^o_\lambda)^\vee, \tag{1.3}$$

其中上标中的 $\vee$ 表示限制对偶空间。

与 $\mathfrak{gl}_n$ 情形一样，代数 $\mathcal{A}^D_\lambda$ 在 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}^o_\lambda$ 上自由作用。从（1.3）的右端到左端存在一个自然映射。数值恒等式（1.2）等价于断言该映射是一个同构。

$\mathfrak{sl}_n$ 情形中的滤过 $\mathcal{G}_\lambda$ 可以看作 van der Kallen 结果 [vdK] 在 Iwahori 情形下的推广。我们猜想，定理 2 对任意单李代数都成立（目前由于若干技术困难，我们还无法证明这一点）。设 P 是单李代数 $\mathfrak{g}$ 的权格，$\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根集。我们还令 I 表示 $G[z]$ 内的 Iwahori 子群，其中 G 是 $\mathfrak{g}$ 的李群。

猜想 1. 函数空间 $\Bbbk[\mathrm{I}]$ 具有一个滤过，使得其关联分次空间同构于关于 $\lambda \in P$的直和，其中各项为形如 $(\mathbb{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}^D_\lambda} \mathbb{U}^o_\lambda)^\vee$ 的模，它们是具有特征 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}^o_\lambda$的某些广义全局 Weyl 模。

我们能够证明，对于所有 $\mathfrak{g}$，模 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}^o_\lambda$ 都具有最高权代数 $\mathcal{A}^D_\lambda$ 的自由作用。猜想 1 的组合对应如下所述。

猜想 2. 有如下恒等式

$$\frac{\sum_{\lambda \in P} X^\lambda Y^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta_+}(1-X^\alpha)\prod_{\alpha \in \Delta}(qX^\alpha;q)_\infty} = \sum_{\lambda \in P} a_\lambda(q) E_\lambda(X;q,0) E_\lambda(Y;q^{-1},\infty)$$

其中 $a_\lambda(q)$ 是 E_λ的 Cherednik 范数。

对于 $\mathfrak{sl}_n$，猜想 2 由 (1.2) 推出，正如我们将在定理 3.4 中证明的那样。我们注意到，与猜想 1 密切相关的问题是在 Iwahori 背景下是否存在 BGG 互反定理（见 [CI, CG, Kh]）。我们计划在其他地方讨论这一问题。

本文的组织如下。第2节汇总单李代数表示的基本记号。第3节研究关于 $\mathfrak{gl}_n$ 和 $\mathfrak{sl}_n$的非对称 q-柯西恒等式的组合学。第4节介绍并研究伊wahori代数的某些模族。

第5节利用这些模推导出非对称 q-柯西恒等式的表示论描述，并在第6节证明 $\mathfrak{sl}_n$ 情形下的一个类似定理。最后，我们在附录中考察秩一例子。

致谢。感谢 Ivan Cherednik 和 Satoshi Naito 的热心交流与帮助。D.O. 衷心感谢西蒙斯基金会（数学家合作资助，638577）和马克斯·普朗克数学研究所（波恩马克斯·普朗克数学研究所）提供的支持。

2. 预备知识

2.1. 单李代数。设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\Bbbk$ 上的单李代数，其嘉当分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$。令 $\Delta=\Delta_+\sqcup\Delta_-\subset\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系。对于每个 $\alpha\in\Delta_+$，我们用 $e_\alpha\in\mathfrak{n}_+$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中相应的切瓦利生成元。同样，对于 $\alpha\in\Delta_-$，我们用 f_α 表示 $\mathfrak{n}_-$ 中权为 α 的切瓦利生成元。对于 $\alpha\in\Delta$，记 $\alpha>0$ 为 $\alpha\in\Delta_+$，$\alpha<0$ 为 $\alpha\in\Delta_-$。我们用 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 表示单根，用 $\{\omega_i\}_{i\in I}$ 表示基本权。对于根 $\alpha\in\Delta$，我们用 $\alpha^\vee\in\mathfrak{h}$ 表示相应的余根。对于典范配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\mathfrak{h}^*\times\mathfrak{h}\to\mathbb{k}$，有 $\langle\omega_i,\alpha_j^\vee\rangle=\delta_{ij}$。

令 $Q=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ 为根格，$Q_+=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ 为正根锥。令 $P=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\omega_i$ 为权格，$P_+=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$ 为支配权锥。令 $P_-:=-P_+$ 为反支配权锥。令 $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\in P_+$。

令 W 为 $\mathfrak{g}$ 的外尔群。对于根 $\alpha\in\Delta$，相应的反射记作 $s_\alpha\in W$。对于每个 $i\in I$，定义 $s_i:=s_{\alpha_i}$。令 w_0 为 W 中的最长元。

对于每个 $\lambda\in P$，令 $\lambda_-\in P_-$ 为属于 λ 的 W-轨道的唯一反支配权。用 $v(\lambda)$ 表示 W 中满足 $v(\lambda)\lambda=\lambda_-$ 且长度最小的唯一元素。在 P 上定义偏序 $\succeq$：当且仅当 $\lambda_--\mu_-\in-Q_+$ 且当 $\lambda_-=\mu_-$ 时 $v(\lambda)\leq v(\mu)$，有 $\lambda\succeq\mu$。

2.2. 特征。设 $\mathbb{Z}[P]$ 为 P 的群代数，它是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其基为 $\{X^\lambda\}_{\lambda\in P}$，满足：对于所有 λ、$\mu\in P$，均有 $X^\lambda X^\mu=X^{\lambda+\mu}$。记 $\mathbb{Z}[[P]]$ 为由所有（可能无限的）形式和 $\sum_{\lambda\in P}c_\lambda X^\lambda$ 组成的 $\mathbb{Z}[P]$-模，其中 $c_\lambda\in\mathbb{Z}$。令 $X_i=X^{\omega_i}$（$i\in I$），我们还可以写作 $X^\lambda=\prod_{i\in I}X^{\langle\lambda,\ \alpha_i^\vee\rangle}$。

对于任意（左）$\mathfrak{h}$-模 M 和 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，我们定义

$$ {}_\lambda M=\{m\in M: hm=\lambda(h)m \text{ for all } h\in\mathfrak{h}\}. $$

如果 M 有一个分解

$$ M=\bigoplus_{\lambda\in P}{}_\lambda M,\qquad \dim{}_\lambda M<\infty, $$

那么我们将 M 的特征定义为形式和

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\lambda \in P} (\dim {}_\lambda M) X^\lambda \in \mathbb{Z}[[P]].$$

类似地，对于任意右 $\mathfrak{h}$-模 M，我们定义

$$M_\lambda = \{m \in M : mh = \lambda(h)m \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}.$$

如果 M 有一个分解

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda, \qquad \dim M_\lambda < \infty,$$

那么我们定义右特征

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\lambda \in P} (\dim M_\lambda) Y^\lambda$$

在另一个 $\mathbb{Z}[[P]]$ 副本中，其基元素记为 $\{Y^\lambda\}_{\lambda \in P}$。

最后，对于 M 这一 $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$-双模，我们对所有 $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ 定义 ${}_\lambda M_\mu = {}_\lambda M \cap M_\mu$。若 M 有一个分解

$$M = \bigoplus_{\lambda, \mu \in P} {}_\lambda M_\mu, \dim {}_\lambda M_\mu < \infty,$$

则我们将双模特征定义为

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\lambda, \mu \in P} (\dim {}_\lambda M_\mu) X^\lambda Y^\mu$$

作为 $\mathbb{Z}[[P \times P]] = \{\sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda,\mu} X^\lambda Y^\mu$ 中的一个元素：$c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}\}$。后者是 $\mathbb{Z}[P \times P] \cong \mathbb{Z}[P] \otimes \mathbb{Z}[P]$ 上的一个模，其元素是上述形式的有限和。

在分次情形下（见 §4.1），我们还考虑由 q 中系数取自 $\mathbb{Z}[[P \times P]]$ 的幂级数组成的阿贝尔群 $(\mathbb{Z}[[P \times P]])[[q]]$，它是环 $(\mathbb{Z}[P \times P])[[q]]$ 上的一个模。

2.3. $\mathfrak{gl}_n$ 和 $\mathfrak{sl}_n$。我们还考虑李代数 $\mathfrak{gl}_n$。令 E_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ 为矩阵单位。我们考虑由对角矩阵构成的嘉当子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n$，$\mathfrak{h} =$ 张成$\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$。我们采用标准的嘉当分解，其中 $\mathfrak{n}_+ =$ 张成$\{E_{ij}\}_{i<j}$.。我们用 $P(\mathfrak{gl}_n)$ 表示权格 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$。根是元素 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i \neq j$，正根为 $i < j$。对于任意正根 $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i < j$，我们使用记号 $h_i := E_{ii}$ 和 $e_\alpha = E_{ij}$ 和 $f_{-\alpha} = E_{ji}$。

我们将 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ 视为元素 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P(\mathfrak{gl}_n)$。支配权于是对应于满足$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$的元组 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$。外尔群是对称群 S_n。

$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ 的元素称为组合。在 $\mathfrak{gl}_n$ 情形下，我们考虑权为组合的 $\mathfrak{h}$-模的特征。因此，对于一个左

$\mathfrak{h}$-模 M，使得

$$M = \bigoplus_{\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} {}_\lambda M, \qquad \dim {}_\lambda M < \infty,$$

其中 $M_\lambda = \{m \in M :$ 对于 $i = 1$、……、$n\}$，我们定义特征

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\lambda \in P} (\dim {}_\lambda M) x^\lambda \in \mathbb{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]$$

其中 $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$。右模的特征以类似的方式定义，只是使用变量 $\{y_i\}$ 而不是 $\{x_i\}$。然后，按照上述自然方式，使用两组变量定义双模的特征。

我们将 $\mathfrak{sl}_n$ 的权格实现为商 $P(\mathfrak{sl}_n) = P(\mathfrak{gl}_n)/\mathbb{Z}\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1} = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$，并将商映射 $P(\mathfrak{gl}_n) \to P(\mathfrak{sl}_n)$ 记为 $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$。类型 $\mathfrak{gl}_n$ 中嘉当子代数、Borel 子代数等的每个表示，都可以视为类型 $\mathfrak{sl}_n$ 中相应子代数的表示。有限维模的特征上的限制映射由以下满射环同态给出

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] &\xrightarrow{\text{res}} \mathbb{Z}[P(\mathfrak{sl}_n)] \\ x_i &\longmapsto X^{\overline{\varepsilon}_i} \end{aligned}$$

回顾记号 $X_i = X^{\omega_i}$，其中 $\omega_i (i = 1, \ldots, n-1)$ 是 $\mathfrak{sl}_n$ 的基本权，我们也可以如下描述此映射：

$$\operatorname{res}(x_1) = X_1, \quad \operatorname{res}(x_i) = X_{i-1}^{-1} X_i (i = 2, \ldots, n-1), \quad \operatorname{res}(x_n) \mapsto X_{n-1}^{-1}.$$

注意，$\mathbb{Z}[P(\mathfrak{sl}_n)] \cong \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ 是 Laurent 多项式环，而对于 $\mathfrak{gl}_n$，我们得到的是普通多项式环，因为我们只考虑权为组合的表示。

2.4. q-Pochammer 符号。定义 $(a; q)_m = \prod_{i=0}^{m-1} (1 - q^i a)$，其中 $m \geq 0$；$(a; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i a)$、$(q)_m = (q;\ q)_m$，以及 $(q)_\infty = (q;\ q)_\infty$。

3. Nonsymmetric q-Cauchy identities in type A

我们回顾 [MN] 关于 $\mathfrak{gl}_n$ 非对称 Macdonald 多项式的柯西恒等式，并考察其 $t = 0$ 特化。我们为特化后的 $\mathfrak{sl}_n$ 非对称 Macdonald 多项式建立相应的恒等式。注意，本节始终采用 §2.3 中的约定。

3.1. Macdonald 多项式。固定一个正整数 n，并按照 §2.3，令 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ 为变量。对于任意合成 $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，记 $E_\lambda = E_\lambda(x; q, t) \in \mathbb{K}[x]$ 为 [Ch2, HHL], 中定义的 $\mathfrak{gl}_n$ 非对称 Macdonald 多项式，其中 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, t)$。多项式 $E_\lambda(x; q, t)$ 关于 $x_1, \ldots, x_n$ 是齐次的，总次数为 $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$。图

^{g}形 $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ 是集合

$$\operatorname{dg}(\lambda) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

我们用 $(i,j) \in \lambda$ 表示 $(i,j) \in \mathrm{dg}(\lambda)$。按照[HHL], 的约定，我们定义了 $s = (i,j) \in \lambda$的广义臂长函数和腿长函数:

$$\begin{aligned} \mathrm{leg}_\lambda(s) &= \lambda_i - j \\ \mathrm{arm}_\lambda(s) &= |\{k < i : j \le \lambda_k \le \lambda_i\}| + |\{k > i : j \le \lambda_k + 1 \le \lambda_i\}|. \end{aligned}$$

我们定义

$$a_\lambda(q,t) = \prod_{s\in\lambda} \frac{1 - q^{\mathrm{leg}_\lambda(s)+1} t^{\mathrm{arm}_\lambda(s)+1}}{1 - q^{\mathrm{leg}_\lambda(s)+1} t^{\mathrm{arm}_\lambda(s)}}.$$

$\mathfrak{sl}_n$ 非对称 Macdonald 多项式 $E_\lambda(X;\, q,t) \in \mathbb{K}[P(\mathfrak{sl}_n)]$（对于 $\lambda \in P(\mathfrak{sl}_n)$） [Ch2] 可通过 §2.3 中的限制映射 res（扩展为 $\mathbb{K}$-线性）与 $\mathfrak{gl}_n$ 对应的多项式联系起来。具体而言，对于任意 $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n \subset P(\mathfrak{gl}_n)$，直接根据这些多项式的定义可验证

$$\mathrm{res}(E_\lambda(x;q,t)) = E_{\overline{\lambda}}(X;q,t). \tag{3.1}$$

3.2. 非对称柯西恒等式。 [MN] 的非对称柯西恒等式给出了函数的展开式

$$E(x,y;q,t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i y_i} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1 - t x_i y_j}{1 - x_i y_j} \prod_{1\le i,j\le n} \frac{(q t x_i y_j; q)_\infty}{(q x_i y_j; q)_\infty}.$$

转化为非对称 Macdonald 多项式的乘积。

定理 3.1（[MN，定理 2.1]）。有

$$E(x,y;q,t) = \sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n} a_\lambda(q,t) E_\lambda(x;q,t) E_\lambda(y;q^{-1},t^{-1}). \tag{3.2}$$

证明。严格来说， [MN，定理 2.1] 断言

$$E(x,y;q,t) = \sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n} \tilde{a}_\lambda(q,t) \tilde{E}_\lambda(x;q,t) \tilde{E}_\lambda(y;q^{-1},t^{-1}),$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\lambda(q,t) &= a_{w_0(\lambda)}(q,t) \\ \tilde{E}_\lambda(x;q,t) &= w_0 E_{w_0(\lambda)}(x;q^{-1},t^{-1}). \end{aligned}$$

不难看出，这两个公式是等价的。 □

我们将 (3.2) 视为亚纯函数之间的等式。当 $|q|$、 $|t|$、 $|x_i|$、 $|y_i| < 1$ 时，等式两边均为正则函数。虽然这并非显然，但众所周知（例如参见 [HHL，公式 (37)]），$E_\lambda(y;q^{-1},t^{-1})$ 在 $(q,t) = (0,0)$ 处是正则的。

3.3. $t=0$ 特化。将 $t=0$ 代入 (3.2)，得到：

推论 3.2。我们有

$$E(x,y;q)=\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_\lambda(q)E_\lambda(x;q,0)E_\lambda(y;q^{-1},\infty) \tag{3.3}$$

其中

$$E(x,y;q)=E(x,y;q,0)=\prod_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{1-x_iy_j}\prod_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{(qx_iy_j;q)_\infty}$$

and

$$a_\lambda(q)=a_\lambda(q,0)=\prod_{\substack{s\in\lambda\\ \mathrm{arm}_\lambda(s)=0}}\frac{1}{1-q^{\mathrm{leg}_\lambda(s)+1}}.$$

例如，由 [HHL] 可知，$E_\lambda(x;q,0)$ 和 $E_\lambda(y;q^{-1},\infty)$ 的系数都属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$。此外，根据 E_λ 的齐次性可知，对于任意固定的单项式 $x^\mu y^\nu$，等式 (3.3) 右侧对其有贡献的项数有限。特别地，两边作为形式幂级数均收敛，因此我们可以将 (3.3) 视为 $\mathbb{Z}[[x,y,q]]=\mathbb{Z}[[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,q]]$ 中的一个恒等式。

下面的引理给出了量 $a_\lambda(q)$ 的另一种表达式：

引理 3.3。对于任意 $\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，我们有：

$$a_\lambda(q)=(q;q)^{-1}_{(\lambda_-)_1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1}\begin{cases}(q;q)^{-1}_{-\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle} & \text{if } v(\lambda)^{-1}\alpha_j>0\\ (q;q)^{-1}_{-\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle-1} & \text{if } v(\lambda)^{-1}\alpha_j<0\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $\lambda_-\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ 和 $v(\lambda)\in S_n$ 如§2.1 中所述。

证明。根据 [MN，引理 2.5]，，对于 $\lambda\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，我们有：

$$a_\lambda(q,t)=a_{\lambda_-}(q,t)\prod_{\substack{\alpha>0\\ \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>0}}\frac{(1-q^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}t^{-\langle\rho,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle+1})(1-q^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}t^{-\langle\rho,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle-1})}{(1-q^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}t^{-\langle\rho,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle})^2}$$

注意，$\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>0$ 意味着 $\langle\lambda_-,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle>0$，因此 $v(\lambda)\alpha<0$。因此，我们可以在上式中设 $t=0$，得到

$$a_\lambda(q,0)=a_{\lambda_-}(q,0)\prod_{\substack{\alpha>0\\ \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>0\\ \langle\rho,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle=-1}}(1-q^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}).$$

现在很容易看出，映射 $\alpha\mapsto -v(\lambda)\alpha$ 在集合 $\{\alpha>0:\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>0$ 与 $\langle\rho,v(\lambda)\alpha^\vee\rangle=-1\}$ 以及 $\{\alpha_j:\ v(\lambda)^{-1}\alpha_j<0\}$之间给出了一个双射。此外，对于属于这些集合的 $\alpha>0$ 和 $\alpha_j=-v(\lambda)\alpha$，有

$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = -\langle \lambda_-, \alpha_j^\vee \rangle$. 因此我们可以写成

$$a_\lambda(q) = a_{\lambda_-}(q) \prod_{\substack{1 \le j \le n-1 \\ v(\lambda)^{-1}\alpha_j < 0}} (1 - q^{-\langle \lambda_-, \alpha_j^\vee \rangle}).$$

最后，我们考虑

$$a_{\lambda_-}(q) = \prod_{\substack{s \in \lambda_- \\ \mathrm{arm}_{\lambda_-}(s) = 0}} \frac{1}{1 - q^{\mathrm{leg}_{\lambda_-}(s)+1}}$$

满足臂长$_{\lambda_-}(s) = 0$ 的格子 $s \in \lambda_-$ 恰好如下：对于 $1 \le j < n$，有$(j + 1, (\lambda_-)_j + 1) \ldots, (j + 1, (\lambda_-)_{j+1})$；而对于$(1, 1) \ldots, (1, (\lambda_-)_1)$。这些格子的腿长$_{\lambda_-}(s)+1$ 分别等于$\lambda_-(_{j+1}-)\lambda_-j$、.....、1（对应 $1 \le j < n$）以及$(\lambda_-)_1$、.....、1。结合前一段，我们便得到所述公式。□

3.4. 从 $\mathfrak{gl}_n$ 到 $\mathfrak{sl}_n$。现在，通过考察(3.3)在投影 $P(\mathfrak{gl}_n) \to P(\mathfrak{sl}_n)$下的行为，我们将证明以下结论：

定理 3.4. 设 $E_\lambda(X; q, t)$ 为 $\mathfrak{sl}_n$ 非对称 Macdonald 多项式。则在 $(\mathbb{Z}[[P(\mathfrak{sl}_n) \times P(\mathfrak{sl}_n)]])[[q]]$ 中有以下恒等式：

$$\frac{\sum_{\lambda \in P(\mathfrak{sl}_n)} X^\lambda Y^\lambda}{(q;q)_\infty^{n-1}} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{1 - X^{\overline{\varepsilon}_i} Y^{\overline{\varepsilon}_j}} \prod_{1 \le i \ne j \le n} \frac{1}{(qX^{\overline{\varepsilon}_i} Y^{\overline{\varepsilon}_j}; q)_\infty} = \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{sl}_n)} \mathrm{ch}(\mathcal{A}_\lambda^D) E_\lambda(X; q, 0) E_\lambda(Y; q^{-1}, \infty). \tag{3.5}$$

其中， $\mathcal{A}_\lambda^D$ 是下文 (4.10) 中定义的分次多项式代数，$\mathrm{ch}(\mathcal{A}_\lambda^D) \in \mathbb{Z}[[q]]$ 是其希尔伯特级数。

注 3.5. 尽管 $(\mathbb{Z}[[P(\mathfrak{sl}_n) \times P(\mathfrak{sl}_n)]])[[q]]$ 不是一个环，我们的证明将表明，(3.5) 左侧的乘积是良定义的（形式展开时）。

证明. 我们先消除 (3.3) 右侧的一些冗余。令 $(\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n \subset (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n$ 为至少有一个坐标等于 0 的非负整数向量所成的子集。于是，$(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n$ 中的每个元素都可以唯一地写成 $\lambda + m\mathbf{1}$ 的形式，其中 $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n$ 且 $m \ge 0$。此外， $P(\mathfrak{sl}_n)$ 中的每个元素在 $(\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n$ 中都有唯一的代表元。

由 E_λ 的定义（例如， [HHL，定义 2.1.1]）可立即得出

$$E_{\lambda + m\mathbf{1}}(x; q, t) = (x_1 \cdots x_n)^m E_\lambda(x; q, t).$$

因此，我们可以将 (3.3) 的右端写为

$$\sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n} a_\lambda(q) E_\lambda(x; q, 0) E_\lambda(y; q^{-1}, \infty) \sum_{m=0}^\infty \frac{(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n)^m}{(q;q)_m}.$$

根据 q-二项式定理，我们可以将内层求和化简如下：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n)^m}{(q;q)_m} = \frac{1}{(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n; q)_\infty}.$$

将这个因子移到 (3.3) 的另一边，我们得到

$$(3.6)\quad (x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n; q)_\infty \prod_{1 \le i \le j \le n} \frac{1}{1 - x_i y_j} \prod_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{(q x_i y_j; q)_\infty} = \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n} a_\lambda(q) E_\lambda(x; q, 0) E_\lambda(y; q^{-1}, \infty).$$

现在的基本思路是，考虑 (3.6) 在将投影 res $\otimes$ res : $x^\lambda y^\mu \mapsto X^{\overline{\lambda}} Y^{\overline{\mu}}$ 扩展到无穷和后所得的像。然而，这个像并非总是有定义，因此需要谨慎处理。对于$F(x,y) = \sum_{\lambda,\ \mu \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n} c_{\lambda,\ \mu} x^\lambda y^\mu \in \mathbb{Z}[[x,y]]$，这个和

$$\overline{F}(X,Y) = \sum_{\lambda,\mu \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n} c_{\overline{\lambda},\overline{\mu}} X^{\overline{\lambda}} Y^{\overline{\mu}} \in \mathbb{Z}[[P(\mathfrak{sl}_n) \times P(\mathfrak{sl}_n)]]$$

有定义，当且仅当对于每个 $\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n$，都存在有限多个整数 k, l 使得 $c_{\lambda + k\mathbf{1},\ \mu + l\mathbf{1}} \neq 0$。因此，对于

$$F(x,y,q) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x,y) q^k \in \mathbb{Z}[[x,y,q]] = (\mathbb{Z}[[x,y]])[[q]],$$

我们定义

$$\overline{F}(X,Y,q) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}_k(x,y) q^k \in (\mathbb{Z}[[P(\mathfrak{sl}_n) \times P(\mathfrak{sl}_n)]])[[q]]$$

当且仅当每个 $F_k(x,y)$ 都满足这一有限性条件时。

现在，我们将这些考虑应用于 (3.6)，先从左边开始。

引理 3.6。对于

$$F(x,y) = \frac{1 - x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i y_i)} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

$\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$ 特征 $\overline{F}(X,Y)$ 定义良好，且等于

$$\overline{F}(X,Y) = \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{sl}_n)} X^\lambda Y^\lambda \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{1 - X^{\overline{\varepsilon}_i} Y^{\overline{\varepsilon}_j}}.$$

证明。首先，在 $\mathbb{Z}[[x,y]]$ 中有如下结果，其中我们令 $z_i = x_i y_i$:

$$\begin{aligned}\frac{1-x_1\cdots x_n y_1\cdots y_n}{\prod_{i=1}^n(1-x_iy_i)} &= (1-z_1\cdots z_n)\sum_{\nu\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n}\\ &= \sum_{\nu\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n} z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n}.\end{aligned}$$

因此，我们可以写成

$$F(x,y) = \sum_{\nu\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n}\sum_{\{m_{i,j}\}} x^{\nu+\sum_{i<j} m_{i,j}\varepsilon_i} y^{\nu+\sum_{i<j} m_{i,j}\varepsilon_j} \tag{3.7}$$

其中，内层求和遍历所有由非负整数构成的集合 $\{m_{i,j}\}_{i<j}$。我们需要证明，对于任意给定的上述 ν 和 $\{m_{i,j}\}$，都存在有限多个其他的 ν' 和 $\{m'_{i,j}\}$，使得

$$\begin{aligned}\nu + \sum_{i<j} m_{i,j}\varepsilon_i + k(1,\dots,1) &= \nu' + \sum_{i<j} m'_{i,j}\varepsilon_i\\ \nu + \sum_{i<j} m_{i,j}\varepsilon_j + l(1,\dots,1) &= \nu' + \sum_{i<j} m'_{i,j}\varepsilon_j\end{aligned} \tag{3.8}$$

对于某些 k、$l\in\mathbb{Z}$。将两边的所有分量相加，我们得到

$$\begin{aligned}|\nu| + \sum_{i<j} m_{i,j} + kn &= |\nu'| + \sum_{i<j} m'_{i,j}\\ |\nu| + \sum_{i<j} m_{i,j} + ln &= |\nu'| + \sum_{i<j} m'_{i,j}\end{aligned} \tag{3.9}$$

这些结果合在一起便可推出 $k = l$。现在对原方程组作差，得到

$$\sum_{i<j} m_{i,j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j) = \sum_{i<j} m'_{i,j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j). \tag{3.10}$$

对于固定的 $\{m_{i,j}\}$，满足 (3.10) 的 $\{m'_{i,j}\}$ 的数量有限。回到 (3.8)，现在可知 k 有上界，因为等式右边的最小坐标受到条件 $\nu'\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})_0^n$ 的约束，而且 $\{m'_{i,j}\}$ 只有有限种可能。当然，k 也有下界，因为 (3.9) 的左边必须非负。由此可知，k 只有有限种可能，因此 ν' 也只有有限种可能。

现在已知 $\overline{F}(X,Y)$ 定义良好，所述公式便可由 (3.7) 得出。□

左边（3.6）中其余的因子实际上属于子环 $\mathbb{Z}[x,y][[q]]\subset\mathbb{Z}[[x,y,q]]$，因此映射到环 $\mathbb{Z}[P(\mathfrak{sl}_n)\times P(\mathfrak{sl}_n)][[q]]$ 的元素。由此可推得，

（3.6）有良定义的投影到 $\mathbb{Z}[[P(\mathfrak{sl}_n) \times P(\mathfrak{sl}_n)]][[q]]$，且结果由（3.5）的左边给出。这里必须注意，

$$(qX^\mu Y^\mu;q)_\infty^{\pm 1} \sum_{\lambda\in P(\mathfrak{sl}_n)} X^\lambda Y^\lambda = (q;q)_\infty^{\pm 1} \sum_{\lambda\in P(\mathfrak{sl}_n)} X^\lambda Y^\lambda$$

对任意 $\mu \in P(\mathfrak{sl}_n)$。

最后，由于 (3.6) 的右端是非负项之和，其投影也必定以上述意义良定义，因此我们可以分别投影每一项，从而得到 (3.5)。我们利用 (3.1) 从 $\mathfrak{gl}_n$ 得到$\mathfrak{sl}_n$ Macdonald 多项式，再利用 (3.4) 将 $a_\lambda(q)$（$\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$）与由 (4.10) 给出的 $\mathcal{A}^D_\lambda$ 的分次特征对应起来。□

4. Representations of current algebras

4.1. 当前代数。令 $\mathfrak{g}[z] = \mathfrak{g} \otimes \Bbbk[z]$ 为单李代数 $\mathfrak{g}$的流代数。我们通过设定每个 $a \in \mathfrak{g}\setminus\{0\}$ 和 $m \geq 0$ 的 deg $a \otimes z^m = m$，在 $\mathfrak{g}[z]$ 上赋予一个分次。我们使用记号 $az^m = a\otimes z^m$, $a = a\otimes 1$。

设 $\mathcal{I} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g} \otimes z\Bbbk[z] \subset \mathfrak{g} \otimes \Bbbk[z]$ 为 Iwahori 子代数。若存在 $M = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j$，使得每个 M_j 都是 $\mathfrak{h}$ 半单的（即每个 M_j 都是 $\mathfrak{h}$ 权空间之和），且对所有 $g \in \mathfrak{g}$、$i \geq 0$都有 $(g \otimes z^i)M_j \subset M_{i+j}$，则称 M 为分次 $\mathcal{I}$模。我们将 M 的特征定义为以下形式线性组合

$$\operatorname{ch} M = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j \operatorname{ch} M_j,$$

其中 ch M_j 是 $\mathfrak{h}$-模的特征。下文中，我们始终考虑其 $\mathfrak{h}$-权属于 P的模 M。若对每个 $j \in \mathbb{Z}$都有 ch $M_j \in \mathbb{Z}[P]$，则称 ch M是良定义的。若 M是以 v为循环向量的循环的模，则除非另有说明，我们假设 $v \in M_0$。

设 $M_j = \bigoplus_{\lambda\in P} M_{j,\ \lambda}$ 为 $\mathfrak{h}$-权分解，且 dim$M_{j,\ \lambda} < \infty$。我们用 $M^\vee$ 表示限制对偶空间 $M^\vee = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{\lambda\in P} M^*_{j,\ \lambda}$。

回顾集合 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_+} \cup \{f_{-\alpha} \otimes z\}_{\alpha\in\Delta_+}$ following[FeMa]上的 W-作用：对于元素 $\sigma \in W$ 和 $\alpha \in \Delta_+$，我们定义

$$\widehat{\sigma} e_\alpha = \begin{cases} e_{\sigma(\alpha)}, & \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \\ f_{\sigma(\alpha)} \otimes z, & \sigma(\alpha) \in \Delta_-, \end{cases} \quad \widehat{\sigma}(f_{-\alpha} \otimes z) = \begin{cases} e_{-\sigma(\alpha)}, & \sigma(\alpha) \in \Delta_-, \\ f_{-\sigma(\alpha)} \otimes z, & \sigma(\alpha) \in \Delta_+. \end{cases}$$

对于 $\alpha \in \Delta_+$ 和 $r \geq 0$，我们还将使用以下记号：

$$e_{\widehat{\sigma}\alpha+r\delta} = \begin{cases} e_{\sigma(\alpha)} \otimes z^r, & \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \\ f_{\sigma(\alpha)} \otimes z^{r+1}, & \sigma(\alpha) \in \Delta_-, \end{cases},$$

$$e_{\widehat{\sigma}(-\alpha+\delta)+r\delta} = \begin{cases} e_{-\sigma(\alpha)} \otimes z^r, & \sigma(\alpha) \in \Delta_-, \\ f_{-\sigma(\alpha)} \otimes z^{r+1}, & \sigma(\alpha) \in \Delta_+. \end{cases}$$

令 $\lambda_- \in P_-$、$\sigma \in W$，并令 $\lambda = \sigma(\lambda_-) \in P$。

定义 4.1. 广义 Weyl 模 W_λ 是由循环向量 w_λ 生成的循环 $\mathcal{I}$ 模，其定义关系如下，对所有 $\alpha \in \Delta_+$:

$$\widehat{\sigma}(f_{-\alpha} \otimes z) z^k w_\lambda = 0,\ k \geq 0;$$
$$(\widehat{\sigma}(e_\alpha))^{\langle -\lambda_-, \alpha^\vee \rangle + 1} w_\lambda = 0;$$
$$z\mathfrak{h}[z] w_\lambda = 0.$$

全局广义 Weyl 模 $\mathbb{W}_\lambda$ 的定义是通过省略最后一个关系得到的。

注 4.2. 若 σ 是单位元（即 $\lambda \in P_-$），则广义 Weyl 模 W_λ 同构于（局部）Weyl 模 $W(w_0\lambda)$（参见 [FeMa]）。

4.2. 定义。对于反主导权 λ_- 和元素 $\sigma \in W$，我们定义两个模 $U_{\sigma(\lambda_-)}$ 和 $\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)}$ 如下：$U_{\sigma(\lambda_-)}$ 是一个循环的 $\mathcal{I}$-模，其循环向量 $u_{\sigma(\lambda_-)}$ 具有 $\mathfrak{h}$-权 $\sigma(\lambda_-)$，并满足以下关系：

$$(h \otimes 1) u_{\sigma(\lambda_-)} = \langle h, \sigma(\lambda_-) \rangle u_{\sigma(\lambda_-)},$$
$$\mathfrak{h} \otimes z\Bbbk[z] u_{\sigma(\lambda_-)} = 0,$$
$$(e_{\widehat{\sigma}(-\alpha+\delta)+r\delta}) u_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, r \geq 0,$$
$$(f_{\sigma(\alpha)} \otimes z)^{-\langle \lambda_-, \alpha^\vee \rangle + 1} u_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, \sigma\alpha \in \Delta_-,$$
$$(e_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle \lambda_-, \alpha^\vee \rangle} u_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, \sigma\alpha \in \Delta_+.$$

$\mathcal{I}$-模 $\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义与 $U_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义不同之处在于，前者删去了第一行关系：$\mathfrak{h} \otimes z\Bbbk[z] u_{\sigma(\lambda_-)} = 0$。

以类似的方式，我们定义模 $D_{\sigma(\lambda_-)}$ 和 $\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)}$ 如下：$D_{\sigma(\lambda_-)}$是由循环向量 $d_{\sigma(\lambda_-)}$ 生成的循环 $\mathcal{I}$-模，其权为 $\mathfrak{h}$-权 $\sigma(\lambda_-)$，并满足以下关系：

$$(h \otimes 1) d_{\sigma(\lambda_-)} = \langle h, \sigma(\lambda_-) \rangle d_{\sigma(\lambda_-)},$$
$$\mathfrak{h} \otimes z\Bbbk[z] d_{\sigma(\lambda_-)} = 0,$$
$$(e_{\widehat{\sigma}(-\alpha+\delta)+r\delta}) d_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, r \geq 0,$$
$$(f_{\sigma(\alpha)} \otimes z)^{-\langle \lambda_-, \alpha^\vee \rangle} d_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, \sigma\alpha \in \Delta_-,$$
$$(e_{\sigma(\alpha)} \otimes 1)^{-\langle \lambda_-, \alpha^\vee \rangle + 1} d_{\sigma(\lambda_-)} = 0,\ \alpha \in \Delta_+, \sigma\alpha \in \Delta_+.$$

$\mathcal{I}$-模 $\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义与 $D_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义不同之处在于，前者删去了第一行关系：$\mathfrak{h} \otimes z\Bbbk[z] d_{\sigma(\lambda_-)} = 0$。

注 4.3. $\mathcal{I}$-模 $\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)}$、$U_{\sigma(\lambda_-)}$、$\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)}$ 和 $D_{\sigma(\lambda_-)}$ 仅依赖于权 $\sigma(\lambda_-)$，而不分别依赖于 σ 和 λ_-。因此，讨论任意 $\lambda \in P$对应的模 $\mathbb{U}_\lambda$、U_λ、$\mathbb{D}_\lambda$ 和 D_λ 是有意义的。

引理 4.4. 在类型 ADE 中，模 D_λ 与一级 Demazure 模同构。特别地，

$$\mathrm{ch}(D_\lambda) = E_\lambda(X; q, 0) \tag{4.1}$$

其中 $E_\lambda(X;q,t)$ 是对应于 $\mathfrak{g}$ [Ch1, Ch2]（非扭曲）仿射化的非对称 Macdonald 多项式。

证明。Demazure 模的定义关系见 [J, Ma]。对于仿射 Kac-Moody 李代数的 Demazure 模，相关关系在 [FL] 中被重新表述。在一级的情形下，[FL] 中的关系可写为

$$(e_{\sigma(\alpha)}\otimes z^s)^{k+1}d_{\sigma(\lambda_-)}=0,\ \sigma(\alpha)\in\Delta_+, s\geq 0, k=\max(0,-\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle-s),$$
$$(f_{\sigma(\alpha)}\otimes z^s)^{k+1}d_{\sigma(\lambda_-)}=0,\ \sigma(\alpha)\in\Delta_-, s>0, k=\max(0,-\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle-s),$$
$$\mathfrak{h}\otimes z\Bbbk[z]d_{\sigma(\lambda_-)}=0,\quad (h\otimes 1)d_{\sigma(\lambda_-)}=\sigma(\lambda_-)(h)d_{\sigma(\lambda_-)}\ \forall h\in\mathfrak{h}.$$

需要证明，模 $D_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义关系包含于上述关系中，并且 $D_{\sigma(\lambda_-)}$ 的关系生成 Demazure 模的关系理想。要证明第一个断言，只需注意 max(0, $-\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle-s$) $=0$，除非 $\alpha^\vee\in\Delta_+$。第二个断言可由 $\mathfrak{sl}_2$ 情形下的标准计算得出。

最后，类型 ADE 中的公式 (4.1) 已在 [Sa, I] 中得到证明。 □

注 4.5. 我们注意到，如果 $\mathfrak{g}$ 不是 ADE 型，那么 D_λ 与相应的 Demazure 模不同构。不过，我们预计等式 (4.1) 在所有类型中都成立。

对于 U-模，我们有如下类比于 (4.1) 的结果，它由[FKM] 对所有类型证明：

$$\mathrm{ch}(U_\lambda)=w_0E_{w_0(\lambda)}(X;q^{-1},\infty).$$

4.3. 特征广义 Weyl 模。设 $\lambda_-,\mu\in P_-$满足 $\lambda_--\mu\in P_-$。我们固定一个约化分解

$$t_\mu=\pi s_{j_1}\dots s_{j_l},\ \pi\in\Pi,\ j_1,\dots,j_l\in I\cup\{0\},\ l=\ell(t_\mu) \tag{4.2}$$

在扩张仿射 Weyl 群 $W_{\mathrm{af}}=P\rtimes W$中，其中 $\Pi\subset W_{\mathrm{af}}$ 是零长度元素的集合（即 $\Pi\simeq P/Q$）。我们考虑由下式定义的仿射余根β_1、.....、 β_l

$$\beta_l=\alpha_{j_l}^\vee,\beta_{l-1}=s_{j_l}\alpha_{j_{l-1}}^\vee,\dots,\beta_1=s_{j_l}\dots s_{j_2}\alpha_{j_1}^\vee \tag{4.3}$$

（见 [RY, OS]）。我们有分解 $\beta_j=\bar\beta_j+(\deg\ \beta_j)\delta^\vee$，其中$\bar\beta_j\in\Delta^\vee$，$\deg\beta_j\in\mathbb{Z}$，且 $\delta^\vee$ 是虚余根。注意，$\bar\beta_j$ 始终是负余根，并且 $\deg\beta_j>0$，因为 (4.2) 是一个约化表达式，且 $\mu\in P_-$。

对于正根 α 和数 $m=1$，.....，l，我们定义

$$l_{\alpha,m}=-\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle-|\{j:\ \bar\beta_j=-\alpha^\vee,1\leq j\leq m\}|. \tag{4.4}$$

定义 4.6（[FeMa，FMO]）。具有特征 $W_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的广义 Weyl 模是一个 $\mathcal{I}$ 模，它是 $W_{\sigma(\lambda_-)}$ 对由以下元素生成的子模取商所得：

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha)}^{l_{\alpha,m}+1}w_{\sigma(\lambda_-)},\ \alpha\in\Delta_+ \tag{4.5}$$

（回想一下，$w_{\sigma(\lambda_-)}$ 是 $W_{\sigma(\lambda_-)}$ 的循环向量。）类似地，我们将具有特征 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的广义全局 Weyl 模定义为一个 $\mathcal{I}$模，它是 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}$ 对 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}$ 中由 (4.5) 生成的子模取商所得。

我们需要使用以下来自 [FKM] 的定理

定理 4.7。设 λ_-、μ、$\lambda_- - \mu \in P_-$，并令 β_j 由（4.3）定义。则

$$\operatorname{ch} \mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m) = \frac{\operatorname{ch} W_{\sigma(\lambda_-)}(m)}{(q)_{\lambda_- + \omega(m)}},$$

其中

$$\omega(m) := \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ -\bar{\beta}_i = \alpha_j^\vee \text{ is simple}}} \omega_j.$$

我们定义代数 $\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\, m}$。

定义 4.8. 设 $\lambda_- \in P_-$、$\sigma \in W$ 和 $m \ge 0$。那么 $\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\, m}$ 是泛包络代数 $\mathrm{U}(z\mathfrak{h}[z])$ 对消去循环向量 $w_{\sigma(\lambda_-)} \in W_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的理想取商所得的代数。

注 4.9. 定义 4.8 表明，带特征 $W_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的广义 Weyl 模的权 $\sigma(\lambda_-)$ 子空间作为向量空间同构于代数 $\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\, m}$。

引理 4.10. 存在一个 z-分次代数的同构：

$$\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-),m} := \mathbb{k}[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k]\big|_{j \in I,\ k=1,\dots,-\langle \lambda_-, \alpha_j^\vee \rangle - |\{i=1,\dots,m:\ -\bar{\beta}_i = \alpha_j^\vee\}|}. \tag{4.6}$$

证明. 显然，$\mathfrak{h}$ 由形如 $h_{\sigma(\alpha_j)}$（其中 j =1,... , n）的向量张成。因此

$$\mathrm{U}(z\mathfrak{h}[z]) = \mathbb{k}[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k], j \in I, k = 1, \dots.$$

根据 PBW 定理的标准论证，$\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的 $\sigma(\lambda_-)$-权子空间等于 $\mathrm{U}(z\mathfrak{h}[z])$ $w_{\sigma(\lambda_-)}$。通过 $\mathfrak{sl}_2$ 计算可知，对于任意正的 l，向量 $h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^l . w_{\sigma(\lambda_-)}$ 属于空间

$$\mathbb{k}[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k,\ k = 1, \dots, -\langle \lambda_-, \alpha_j^\vee \rangle - |\{i = 1, \dots, m:\ -\bar{\beta}_i = \alpha_j^\vee\}|] . w_{\sigma(\lambda_-)},$$

因此，对循环向量 $w_{\sigma(\lambda_-)}$ 应用（4.6）式右端，即可得到 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的 $\sigma(\lambda_-)$-权子空间。然而，根据定理 4.7，（4.6）式右端的 z-特征与 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 的 $\sigma(\lambda_-)$- 权子空间的特征相等。这就证明了（ 4.6 ）式。□

对于任意 $f \in \mathrm{U}(\mathcal{I})$，映射 $w_{\sigma(\lambda_-)} \mapsto f w_{\sigma(\lambda_-)}$ 定义了一个自同态

$$\mathrm{U}(\mathcal{I}) w_{\sigma(\lambda_-)} \to \mathrm{U}(\mathcal{I}) f w_{\sigma(\lambda_-)}$$

模$\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$。因此，代数 $\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\, m}$ 通过端同态作用于模 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$，我们可以将 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 视为 $(\mathcal{I}, \mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\, m})$-双模。

定理 4.11。$\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\,m}$ 的右作用在 ($\mathcal{I}(\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\,m})$-双模 $\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 上是自由的。

证明。由 PBW 定理和引理 4.10，我们有：

$$\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m) = \mathrm{U}(\widehat{\sigma}(z\mathfrak{n}_-[z]))w_{\sigma(\lambda_-)}\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-),m}.$$

根据定义，我们有左 $\mathcal{I}$-模的如下同构

$$\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m) \otimes_{\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-),m}} \Bbbk \simeq W_{\sigma(\lambda_-)}(m).$$

因此，右 $\mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\,m}$-模$\mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(m)$ 具有生成空间，其特征等于 ch($W_{\sigma(\lambda_-)}(m)$)。于是利用定理 4.7，我们得到该右模是自由的。□

4.4. 与具有特征的广义 Weyl 模的对应。我们固定 $\lambda_- \in P_-$，并假设 $\sigma \in W$ 是类 $\sigma\cdot\mathrm{stab}_W(\lambda_-)$ 中长度最大的元素。置 $\lambda' = w_0\sigma(\lambda_-)$。那么，$v(\lambda') = \sigma^{-1}w_0$ 是满足 $v(\lambda')\lambda' = \lambda_-$ 的最短元素。此外，分解 $t_{\lambda_-} = v(\lambda')u(\lambda')$ 和 $t_{\lambda_-} = \sigma u'(\lambda')$ 可细化为约化分解（参见例如 [FKM]）。

若我们固定约化表达式

$$v(\lambda') = s_{i_1}\dots s_{i_r},\ u(\lambda') = \pi s_{i_{r+1}}\dots s_{i_M},$$

则可得到一个约化表达式

$$t_{\lambda_-} = \pi s_{\pi^{-1}i_1}\dots s_{\pi^{-1}i_r}s_{i_{r+1}}\dots s_{i_M}. \tag{4.7}$$

以类似的方式，我们固定约化表达式

$$\sigma = s_{i'_1}\dots s_{i'_{r'}},\ u'(\lambda') = \pi' s_{i'_{r'+1}}\dots s_{i'_M},$$

并得到一个约化表达式

$$t_{\lambda_-} = \pi' s_{\pi'^{-1}i'_1}\dots s_{\pi'^{-1}i'_{r'}}s_{i'_{r+1}}\dots s_{i'_M}. \tag{4.8}$$

命题 4.12. 设余根 β_j 由约化分解 (4.7) 定义。则

$$U_{\sigma(\lambda_-)} \simeq W_{\sigma(\lambda_-)}(\ell(w_0) - \ell(\sigma)),$$
$$\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)} \simeq \mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(\ell(w_0) - \ell(\sigma)).$$

设余根 β_j 由约化分解 (4.8) 定义。则

$$D_{\sigma(\lambda_-)} \simeq W_{\sigma(\lambda_-)}(\ell(\sigma)),$$
$$\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)} \simeq \mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(\ell(\sigma)).$$

注 4.13. 模 $W_{\sigma(\lambda_-)}$ 只取决于 $\sigma(\lambda_-)$，而不分别取决于 σ 和λ_-。我们注意到，选择 σ 为类 $\sigma\cdot\mathrm{stab}_W(\lambda_-)$ 中的最长元素，可将 Weyl 模参数化为这样的配对 (σ, λ_-)。

命题 4.12 的证明。我们需要证明，$W_{\sigma(\lambda_-)}(\ell(w_0) - \ell(\sigma))$ 的定义关系 (4.5) 与 $U_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义关系一致。令 $r := \ell(v(\lambda')) = \ell(\sigma^{-1}w_0) = \ell(w_0) - \ell(\sigma)$, 它是集合 $\Delta_+ \cap \sigma^{-1}\Delta_+$ 的基数。

只需证明 $\{-\bar\beta_1^\vee, \dots, -\bar\beta_r^\vee\} = \Delta_+ \cap \sigma^{-1}\Delta_+$。根据定义，对于 $k = 1$, ..., r, 我们有

$$\begin{aligned}\beta_k^\vee &= s_{i_M} \dots s_{i_{r+1}} s_{\pi^{-1}i_r} \dots s_{\pi^{-1}i_{k+1}} \alpha^\vee_{\pi^{-1}i_k} \\ &= t_{-\lambda_-}\pi s_{\pi^{-1}i_1} \dots s_{\pi^{-1}i_{k-1}} s_{\pi^{-1}i_k} \alpha^\vee_{\pi^{-1}i_k} \\ &= t_{-\lambda_-} s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(-\alpha^\vee_{i_k}).\end{aligned}$$

$t_{-\lambda_-}$ 在 Δ^a 上的作用保持仿射余根的有限（横杠）部分。因此，$\beta_1^\vee$、...、$\beta_r^\vee$ 的有限部分取负后，恰好是被 $w_0\sigma$ 映射为负根的正根。因此，对定义方程进行比较可得

$$U_{\sigma(\lambda_-)} \simeq W_{\sigma(\lambda_-)}(r),$$

$$\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)} \simeq \mathbb{W}_{\sigma(\lambda_-)}(r),$$

这就是断言的第一部分。

第二个断言的证明完全类似。 □

我们相对于约化分解 (4.7) 定义 $\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)} := \mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\,\ell(w_0)-\ell(\sigma)}$，相对于约化分解 (4.8) 定义 $\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)} := \mathcal{A}_{\sigma(\lambda_-)\,\ell(\sigma)}$。注意，我们有:

$$\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)} = \Bbbk[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k]_{j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,-\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle-\delta_{j,\sigma}}, \tag{4.9}$$

其中，若 $\sigma(\alpha_j) \in \Delta_+$，则 $\delta_{j,\sigma} = 1$; 否则为 0。此外，我们还有:

$$\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)} = \Bbbk[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k]_{j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,-\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle-1+\delta_{j,\sigma}}. \tag{4.10}$$

注记 4.14. 容易看出，代数 $\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)}$ 和 $\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)}$ 取决于权 $\lambda = \sigma(\lambda_-) \in P$，但不分别取决于 σ 和 λ_-。

推论 4.15. 代数 $\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)}$ 在 $\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)}$ 上自由作用，并且

$$\operatorname{ch}\mathbb{U}_{\sigma(\lambda_-)} = \operatorname{ch}U_{\sigma(\lambda_-)}\operatorname{ch}\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)}.$$

代数 $\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)}$ 在 $\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)}$ 上自由作用，并且

$$\operatorname{ch}\mathbb{D}_{\sigma(\lambda_-)} = \operatorname{ch}D_{\sigma(\lambda_-)}\operatorname{ch}\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)}.$$

4.5. 右模。本小节中，我们定义右模 U^o_λ 和 $\mathbb{U}^o_\lambda$。

对于反主导权 λ_- 和元素 $\sigma \in W$，右模 $U^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 与 $\mathbb{U}^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 定义如下: $U^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 是循环右 $\mathcal{I}$-模

其循环向量为 $u^o_{\sigma(\lambda_-)}$，具有 $\mathfrak{h}$-权 $\sigma(\lambda_-)$，并满足以下关系：

$$u^o_{\sigma(\lambda_-)}\mathfrak{h}\otimes z\Bbbk[z]=0,$$
$$u^o_{\sigma(\lambda_-)}(e_{\widehat{\sigma}(\alpha)+r\delta})=0,\ \alpha\in\Delta_+, r\geq 0$$
$$u^o_{\sigma(\lambda_-)}(f_{\sigma(\alpha)}\otimes z)^{\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle+1}=0,\ \alpha\in\Delta_-,\sigma\alpha\in\Delta_-,$$
$$u^o_{\sigma(\lambda_-)}(e_{\sigma(\alpha)}\otimes 1)^{\langle\lambda_-,\alpha^\vee\rangle}=0,\ \alpha\in\Delta_-,\sigma\alpha\in\Delta_+.$$

如前所述，$\mathcal{I}$-模$\mathbb{U}^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义与$U^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义不同之处在于去掉了第一条关系。

命题 4.16. 我们有 z-分次向量空间$U^o_{\sigma(\lambda_-)}\ \simeq U_{-\sigma(\lambda_-)}$的一个同构。空间 $U_{-\sigma(\lambda_-)}$ 上的右 $\mathcal{I}$-模结构由伊wahori代数上的负恒等映射诱导；该右模同构于$U^o_{\sigma(\lambda_-)}$。

证明。负恒等映射在空间$U_{-\sigma(\lambda_-)}$上诱导出右 $\mathcal{I}$-模结构。该右模的循环向量的 $\mathfrak{h}$ 权等于 $-\sigma(\lambda_-)=(\sigma w_0)\lambda_{-,*}$，其中 $\lambda_{-,*}=-w_0\lambda_-\in P_-$。现在，右模 $U^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 的定义关系由左模$U_{-\sigma(\lambda_-)}$ 的定义关系结合变量变换 $\sigma\to\sigma w_0$，$\lambda_-\to\lambda_{-,*}$得到。□

推论 4.17. 模 $\mathbb{U}^o_{\sigma(\lambda_-)}$ 具有 $(\mathcal{A}^U_{-\sigma(\lambda_-)}\mathcal{I})$-双模结构，且作为左 $\mathcal{A}^U_{-\sigma(\lambda_-)}$-模是自由的。

推论 4.18. 对任意 $\lambda\in P$，有

$$\mathrm{ch}(U^o_\lambda)=E_\lambda(Y;q^{-1},\infty).$$

证明. 命题 4.16 蕴含

$$\mathrm{ch}(U^o_{\sigma(\lambda_-)})=\mathrm{ch}(U_{-\sigma(\lambda_-)}|_{X_i\mapsto Y_i^{-1}}).$$

因此我们有

$$\mathrm{ch}(U^o_{\sigma(\lambda_-)})=w_0E_{-w_0\sigma(\lambda)}(X;q^{-1},\infty)_{X_i\mapsto Y_i^{-1}}.$$

现在只需注意到右端等于 $E_\lambda(Y;q^{-1};\infty)$（因为变换 $-w_0$ 是由 Dynkin 图的自同构诱导的）。□

4.6. $\mathfrak{gl}_n$ 版本。我们回顾一下 $\mathfrak{gl}_n$ 上全局 Weyl 模的定义。设 $\lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varepsilon_i$ 是 $\mathfrak{gl}_n$ 的一个支配整权。我们如下定义全局 Weyl 模。令 $\bar{\lambda}=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_{i+1})\omega_i$ 为相应的 $\mathfrak{sl}_n$ 权，并考虑 $\mathfrak{sl}_n$的全局 Weyl 模 $\mathbb{W}_{\bar{\lambda}}$。

回顾记号 $h_\ell=E_{\ell,\ell}$, $\ell=1,\dots,n$；特别地，$\mathfrak{gl}_n[z]=\mathfrak{sl}_n[z]\oplus\Bbbk h_\ell[z]$。为了给出 $\mathfrak{gl}_n$ 的全局 Weyl 模的定义，我们

还需要引入一个记号。我们定义

$$\varphi_k^\ell : \Bbbk[h_\ell z^i]_{i\geq 0} \to \Bbbk[s_1,\dots,s_k],\ h_\ell z^i \mapsto s_1^i + \dots + s_k^i. \tag{4.11}$$

则 $\mathfrak{gl}_n[z]$ 模 $\mathbb{W}_\lambda$ 定义为

$$\mathbb{W}_\lambda = \mathbb{W}_{\bar\lambda} \otimes \Bbbk[h_n z^i]_{i\geq 0} / \ker \varphi_{\lambda_n}^n, \tag{4.12}$$

其中， $\mathfrak{sl}_n[z]$ 作用于第一个张量因子，而 $\Bbbk h_n[z]$ 作用于第二个张量因子。

现在定义模 $\mathbb{U}_\lambda$ 和 $\mathbb{D}_\lambda$。设 $\ell' = 1,\dots,n$ 为一个满足以下条件的数:

$$\lambda_{\ell'} = \lambda_{\min} := \min\{\lambda_\ell\}.$$

则定义

$$\mathbb{U}_\lambda = \mathbb{U}_{\bar\lambda} \otimes \Bbbk[h_{\ell'} z^i]_{i\geq 0} / \ker \varphi_{\lambda_{\min}}^{\ell'}, \tag{4.13}$$

$$\mathbb{D}_\lambda = \mathbb{D}_{\bar\lambda} \otimes \Bbbk[h_{\ell'} z^i]_{i\geq 0} / \ker \varphi_{\lambda_{\min}}^{\ell'}. \tag{4.14}$$

以类似的方式定义右模 $\mathbb{U}_\lambda^o$。

$\mathfrak{gl}_n$ 的局部模的定义与其$\mathfrak{sl}_n$ 类比并无太大差异。更准确地说，类型 $\mathfrak{gl}_n$ 中的局部模的定义关系由类型 $\mathfrak{sl}_n$ 中的定义关系添加以下条件得到: $z\Bbbk h_\ell[z]$ 湮灭循环向量，且 $\mathfrak{gl}_n$ 嘉当子代数通过权 λ作用。显然，在类型 $\mathfrak{gl}_n$ 中，模 $\mathbb{D}_\lambda$、 $\mathbb{U}_\lambda$ 在其最高权代数上是自由的。此外，我们有

$$\mathrm{ch}\mathcal{A}_\lambda^D = \mathrm{ch}\mathcal{A}_{\bar\lambda}^D(q;q)_{\lambda_{\min}}^{-1},\ \mathrm{ch}\mathcal{A}_\lambda^U = \mathrm{ch}\mathcal{A}_{\bar\lambda}^U(q;q)_{\lambda_{\min}}^{-1}. \tag{4.15}$$

回顾一下，类型 $\mathfrak{gl}_n$ 中左权模的特征属于$\Bbbk[x_1,\dots,x_n,q]$，右权模的特征属于 $\Bbbk[y_1,\dots,y_n,q]$。

命题 4.19. 对于一个 $\mathfrak{gl}_n$-权 λ，我们有

$$\mathrm{ch}(D_\lambda) = E_\lambda(x_1,\dots,x_n;q;0),$$

$$\mathrm{ch}(U_\lambda^o) = E_\lambda(y_1,\dots,y_n;q^{-1};\infty).$$

证明。作为分次向量空间，模 D_λ （分别地， U_λ^o）同构于 $D_{\bar\lambda}$ （分别地， $U_{\bar\lambda}^o$）。现在，所需的特征公式由推论 4.18、引理 4.4 以及下列等式推出:

$$\mathrm{ch}(D_{\lambda+(1,\dots,1)}) = x_1\dots x_n \mathrm{ch}(D_\lambda),\ \mathrm{ch}(U^o_{\lambda+(1,\dots,1)}) = y_1\dots y_n \mathrm{ch}(D_\lambda),$$
$$E_{\lambda+(1,\dots,1)}(x_1,\dots,x_n;q;t) = x_1\dots x_n E_\lambda(x_1,\dots,x_n;q;t).$$

□

4.7. 张量双模。

命题 4.20。 存在自然同构 $\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)} \simeq \mathcal{A}^D_{-\sigma(\lambda_-)}$

证明。回顾（4.9）、（4.10）

$$\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)} := \Bbbk[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k]_{j\in I,\ k=1,\dots,\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle-\delta_{j,\sigma}},$$
$$\mathcal{A}^D_{\sigma(\lambda_-)} = \Bbbk[h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k]_{j\in I,\ k=1,\dots,-\langle\lambda_-,\alpha_j^\vee\rangle-1+\delta_{j,\sigma}}$$

以及记号 $\lambda^*_- = -w_0(\lambda_-)$、$\alpha_{j^*} = -w_0(\alpha_j)$。注意 $h_{\sigma(\alpha_j)} = -h_{-\sigma(\alpha_j)}$。显然 $-\sigma(\lambda_-) = \sigma w_0(-w_0(\lambda_-)) = \sigma w_0(\lambda^*_-)$，并且 $\delta_{j,\ \sigma} = 1 - \delta_{j^*,\ \sigma w_0}$。因此，映射 $h_{\sigma(\alpha_j)} \mapsto -h_{\sigma w_0(\alpha_{j^*})}$ 给出了同构

$$\mathcal{A}^U_{\sigma(\lambda_-)} \to \mathcal{A}^D_{-\sigma(\lambda_-)}.$$

□

下述（$\mathcal{I},\mathcal{I}$）-双模在本文中起着关键作用。我们使用前一个命题中的同构。

定义 4.21。对于权 $\lambda \in P$，我们按以下方式定义双模 $\mathbb{T}_\lambda$：

$$\mathbb{T}_\lambda := \mathbb{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}^D_\lambda} \mathbb{U}^o_\lambda.$$

回顾一下，对于分次权（$\mathfrak{h},\mathfrak{h}$）-双模，其特征属于$\mathbb{Z}[P\times P][[q]]$。

引理 4.22。 $\mathbb{T}_\lambda$ 的特征等于

$$\mathrm{ch}(D_\lambda)\mathrm{ch}(\mathcal{A}^D_\lambda)\mathrm{ch}(U^o_\lambda) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}^D_\lambda)E_\lambda(X;q,0)E_\lambda(Y;q^{-1},\infty).$$

证明。设 $d_1,\dots,d_l$ 是 $\mathbb{D}_\lambda$ 的权基，$u_1,\dots,u_{l'}$ 是 $\mathbb{U}^o_\lambda$ 作为 $\mathrm{ch}(\mathcal{A}^D_\lambda)$ 上自由模的权基。我们有以下分次向量空间的同构:

$$\mathrm{span}\{d_1,\dots,d_l\} \simeq D_\lambda,\ \mathrm{span}\{u_1,\dots,u_{l'}\} \simeq U^o_\lambda.$$

Then

$$\mathbb{D}_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{l} d_i\mathcal{A}^D_\lambda,\ \mathbb{U}^o_\lambda = \bigoplus_{j=1}^{l'} \mathcal{A}^D_\lambda u_j$$

and

$$\mathbb{T}_\lambda = \bigoplus_{i=1,\dots,l,j=1,\dots,l'} d_i\mathcal{A}^D_\lambda u_j.$$

证明至此完成。 □

引理 4.23。双模 $\mathbb{T}_\lambda$ 是由生成元 $\bar{w}_\lambda := d_\lambda \otimes u_\lambda$ 生成的循环双模，并满足以下定义关系：

$$\widehat{\sigma}(\mathfrak{n}_-[z])\bar{w}_\lambda = 0 = \bar{w}_\lambda \widehat{\sigma}(\mathfrak{n}_+[z]), \tag{4.16}$$

$$hz^0\bar{w}_\lambda = -\bar{w}_\lambda hz^0 = \lambda(h)\bar{w}_\lambda,\ h \in \mathfrak{h}, \tag{4.17}$$

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha)}^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle+1}\bar{w}_\lambda = 0,\ \bar{w}_\lambda e_{\widehat{\sigma}(-\alpha)}^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle+1} = 0,\ \textit{if}\ \alpha, \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \tag{4.18}$$

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha)}^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}\bar{w}_\lambda = 0,\ \bar{w}_\lambda e_{\widehat{\sigma}(-\alpha)}^{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle} = 0,\ \textit{if}\ \alpha, -\sigma(\alpha) \in \Delta_+, \tag{4.19}$$

$$h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k\bar{w}_\lambda = -\bar{w}_\lambda h_{\sigma(\alpha_j)} \otimes z^k,\ k \geq 0. \tag{4.20}$$

在 $\mathfrak{gl}_n$ 情形下，还需添加关系

$$\ker \varphi^\ell_{\lambda_{\min}}\bar{w}_\lambda = \{0\},\ \lambda_{\min} = \lambda_\ell. \tag{4.21}$$

证明。为证明其循环性，我们注意到，关于右作用，向量 $d_\lambda \otimes u_\lambda$的 U($\mathcal{I}$)-张成空间与 $d_\lambda \otimes \mathbb{U}^o_\lambda$重合。现在在左侧施加 U($\mathcal{I}$)，便得到整个双模 $\mathbb{T}_\lambda$。

我们将显然，关系 (4.16)-(4.20) 定义的模模为 $\widetilde{\mathbb{T}}_\lambda$ 上成立。因此我们有满射 $\mathbb{T}_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{T}_\lambda$。

根据定义，我们有右模的态射：

$$\eta : \mathbb{U}^o_\lambda \to \bar{w}_\lambda \mathrm{U}(\mathcal{I}) \subset \widetilde{\mathbb{T}}_\lambda,\ u_\lambda \mapsto \bar{w}_\lambda.$$

于是，元素 $\eta(u_j)$ 构成 $\mathbb{T}_\lambda$ 作为左 $\mathcal{I}$-模的一个基。对于每个左子模 U($\mathcal{I}$)$\eta(u_j)$，我们都有一个左模的态射

$$\mathbb{D}_\lambda \to \mathrm{U}(\mathcal{I})\eta(u_j), d_\lambda \mapsto \eta(u_j).$$

因此，我们有左模的一个满射（按左右权分次）

$$\mathbb{D}_\lambda \otimes_{\Bbbk} \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{l'}\} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{T}}_\lambda.$$

然而，左模 $\mathbb{D}_\lambda \otimes_{\Bbbk} \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_{l'})$ 的特征与 $\mathbb{T}_\lambda$ 的特征重合。证明完毕。□

5. Filtrations for General Linear group

5.1. 空间 $M_n[z]^+$。令 $V = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ 为 $\mathfrak{gl}_n$ 的标准 n 维表示，并取其权基，即对于矩阵单位 E_{ij}:

$$E_{ij}v_k = \delta_{j,k}v_i.$$

回顾

$$\mathfrak{b}_+ = \mathrm{span}\{E_{ij},\ i \leq j\},\ \mathfrak{n}_- = \mathrm{span}\{E_{ij},\ i > j\}.$$

设 V^o 为具有基 v^o_1、.....、v^o_n 的标准右表示，使得

$$v^o_k E_{ij} = \delta_{i,k}v^o_j.$$

于是，空间 $V \otimes_{\Bbbk} V^o$ 具有自然的 ($\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{gl}_n$)-双模结构。空间 $V \otimes_{\Bbbk} V^o \otimes \Bbbk[z]$ 具有 ($\mathfrak{gl}_n[z], \mathfrak{gl}_n[z]$)-双模结构。更

确切地说，考虑变量集 $v_{ij}^{(l)}$, $i,j=1,\dots,n, l=0,1,\dots$。那么我们有如下作用：

$$E_{ij}z^l v_{kk'}^{(l')} = \delta_{j,k} v_{ik'}^{(l+l')},\ v_{kk'}^{(l')} E_{ij} z^l = \delta_{i,k'} v_{kj}^{(l+l')}.$$

Let

$$M_n := V \otimes_{\Bbbk} V^o,$$

$$M_n[z] := V \otimes_{\Bbbk} V^o \otimes \Bbbk[z].$$

利用莱布尼茨法则，我们在对称幂 $S^N(M_n[z])$ 上得到双模结构。

对于一个合成 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$，我们赋予其一个 $\mathfrak{gl}_n$ 权 $\sum\lambda_i\varepsilon_i$（回忆一下，$\mathfrak{sl}_n$ 的单根由 $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$ 给出）。对于两个大小为 N 的合成 λ、μ，若 $\lambda-\mu$ 是单根的非负整数系数和，则记作 $\lambda\geq\mu$。

回忆一下，x_i 表示左权 ε_i 的形式指数，而 y_i 表示右权 ε_i 的形式指数。特别地，

$$\mathrm{ch}(M_n[z]) = \frac{(x_1+\dots+x_n)(y_1+\dots+y_n)}{1-q}.$$

下述定理证明见 [FKhM]（定理 B）。

定理 5.1。双模 $S^N(M_n[z])$ 存在一个以长度为 n 且满足 $\lambda\vdash N$ 的分拆 λ 为指标的递降滤过 F_λ，使得

$$F_\lambda/F_{>\lambda} \simeq \mathbb{W}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}_\lambda} \mathbb{W}_\lambda^o.$$

滤过 F_λ 定义如下。$(\mathfrak{gl}_n,\mathfrak{gl}_n)$-子双模 $S^N(M_n)\subset S^N(M_n[z])$ 具有如下分解：

$$S^N(M_n) = \bigoplus_{\lambda\in P_+,\lambda\vdash N} V_\lambda\otimes_{\Bbbk} V_\lambda^o.$$

那么 $F_\lambda = \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n[z])\,(V_\lambda\otimes_{\Bbbk} V_\lambda^o)\,\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n[z])$。

我们用 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathfrak{gl}_n$ Iwahori 子代数 $\mathfrak{b}_+[z]\oplus z\mathfrak{n}_-[z]$。我们考虑由 $M_n[z]^+\subset M_n[z]$ 定义的 Iwahori 子双模

$$M_n[z]^+ := \mathrm{span}\{v_{ij}^{(l)},\ l\geq 0 \text{ for } i\leq j \text{ and } l\geq 1 \text{ for } i>j\}.$$

双模结构通过莱布尼茨法则扩展到对称幂 $S^N(M_n[z]^+)$。

下一个引理与 [FKhM]（引理 3.4）完全类似。我们分三步证明，其中前两步与 [FKhM] 相同，最后一步则非常相似。

引理 5.2. $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模 $S^N(M_n[z]^+)$ 由集合生成

$$S := \left\{\prod_{i=1}^n (v_{ii}^{(0)})^{r_{ii}}, r_{ii}\geq 0, \sum_i r_{ii}=N\right\}.$$

证明. 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 以下等式成立：

$$\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S = \operatorname{span}\left\{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{r_{ii}} v_{ii}^{(s_{ii}^k)},\ s_{ii}^k \geq 0,\ \sum_i r_{ii} = N\right\}.$$

这一事实的证明通过对非零指数s_{ii}^k的个数进行归纳来完成。假设根据归纳，$\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S$ 包含所有具有如下形式的元素$x = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{r_{ii}}(v^{(s_{ii}^k)}{}_{ii})$，且非零指数的个数 s_{jj}^k 等于$b < r_{jj}$。然后将元素 $h_j z^a$ 作用于 x，得到若干元素之和，其中除一个以外的所有元素，其非零指数的个数 s_{jj}^k均等于 b。剩下的那一项等于整数倍的

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq j}}\prod_{k=1}^{r_{ii}} v_{ii}^{(s_{ii}^k)} \cdot \prod_{k=1}^{r_{jj}-1} v_{jj}^{(s_{jj}^k)} \cdot v_{jj}^{(a)}.$$

这就完成了归纳步骤。

步骤 2. 接下来我们证明以下断言：

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S = \operatorname{span}\left\{\prod_{i\leq j}\prod_{k=1}^{r_{ij}} v_{ij}^{(s_{ij}^k)}, s_{ij}^k \geq 0, \sum r_{ij} = N\right\}. \tag{5.1}$$

对于一对 $i_0 \leq j_0$，我们将 S_{i_0,j_0} 记为满足条件的单项式集合 $\prod_{i\leq j}\prod_{k=1}^{r_{ij}} v_{ij}^{(s_{ij}^k)}$ 的线性张成

$$\text{if } j > j_0 \text{ or } j = j_0, i < i_0, \text{ then } r_{ij} = 0 \text{ provided } i \neq j.$$

我们通过归纳证明 (5.1)：证明对所有的 i_0, j_0，都有 $S_{i_0,j_0} \subset \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S$（(5.1) 是 (i_0, j_0) 为 $=(1, n)$ 的情形）。归纳过程如下。首先，注意到显然有 $S_{1,i_0} = S_{i_0+1,i_0+1}$。牢记这一点，我们从平凡情形 (i_0, j_0) 为 $=(1, 1)$ 开始，然后依次考察 (2, 2)、(1, 2)、(3, 3)、(2, 3)、(1, 3)，依此类推（换言之，归纳步骤从 S_{i_0+1,j_0} 转到 S_{i_0,j_0}）。

考虑空间 $S_{i_0,\ j_0}$ 上的递增滤子：

$$G_p = \operatorname{span}\left\{\prod_{i\leq j}\prod_{k=1}^{r_{ij}} v_{ij}^{(s_{ij}^k)}, r_{ij} = 0 \text{ for } j > j_0 \text{ or } j = j_0, i < i_0, r_{i_0 j_0} \leq p\right\}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\Bbbk E_{i_0,i_0+1}[z]).\operatorname{span}&\left\{\prod_{k=1}^{r_{i_0+1,j_0}} v_{i_0+1,j_0}^{(s_{i_0+1,j_0}^k)},\ s_{i_0+1,j_0}^k \geq 0\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\prod_{k=1}^{r_{i_0+1,j_0}} v_{i_0+1,j_0}^{(s_{i_0+1,j_0}^k)} \prod_{k=1}^{r_{i_0,j_0}} v_{i_0,j_0}^{(s_{i_0,j_0}^k)},\ s_{i_0+1,j_0}^k, s_{i_0,j_0}^k \geq 0\right\}\end{aligned} \tag{5.2}$$

（例如参见 [FKhM], 引理 3.3）。现在令 $\mathrm{U}_{p'} \subset \mathrm{U}(\mathbb{k}E_{i_0,i_0+1}[z])$ 表示泛包络代数上的标准（递增）PBW滤过（即 $\mathrm{U}^{p'}$ 由长度不超过 s 的单项式张成）。那么 $U_{p'}G_p \subset G_{p+p'}$，而最高次数项（关于形如 $v^{(s_{i_0,j_0}\text{的元素个数})}_{i_0,j_0}$）来自作用 (5.2)。因此，对于所有 p, $G_p \subset \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S$。

以类似的方式可以证明

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S = S\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z]).$$

步骤3。我们证明：

$$\begin{aligned}(5.3)\quad &\mathrm{U}(z\mathfrak{n}_-[z])\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S \\ &= \operatorname{span}\left\{\prod_{i,j}\prod_{k=1}^{r_{ij}} v_{ij}^{(s_{ij}^k)}, s_{ij}^k \geq 0 \text{ for } i \leq j,\ s_{ij}^k \geq 1 \text{ for } i > j\right\}.\end{aligned}$$

对于一对 $i_0 \geq j_0$，我们将 $S'_{i_0,\ j_0}$ 定义为满足条件的单项式集合 $\prod_{i,j}\prod_{k=1}^{r_{ij}} v_{ij}^{(s_{ij}^k)}$ 的线性张成

$$\text{if } j < j_0 \text{ or } j = j_0, i > i_0, \text{ then } r_{ij} = 0 \text{ provided } i \leq j.$$

我们通过证明对所有的对 i_0、j_0，利用归纳可得 $S'_{i_0,\ j_0} \subset \mathrm{U}(z\mathfrak{n}_-[z])\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+[z])\mathrm{U}(\mathfrak{h}[z])S$，来证明（5.3）。归纳过程如下。首先，我们注意到显然的等式 $S'_{i_0,\ n} = S'_{i_0-1,\ i_0-1}$。我们从平凡情形（$i_0$, j_0）=（n, n）开始，然后继续处理（$n-1$, $n-1$）、（n, $n-1$），依此类推。如同前一步骤，我们可以证明 $S'_{i_0,\ j_0} = \mathrm{U}(z\mathbb{k}E_{i_0,\ j_0}[z])S'_{i_0-1,\ j_0}$。这就完成了归纳证明。□

5.2. 关系的验证。设 λ 是正整数 N 的一个合成。我们记

$$(5.4)\qquad \mathcal{F}_\lambda := \sum_{\mu \succeq \lambda} \mathrm{U}(\mathcal{I}) \prod_{i=1}^{n} (v_{ii}^{(0)})^{\mu_i} \mathrm{U}(\mathcal{I}) \subset S^N(M_n[z]^+),$$

其中 μ 是 N 的一个合成。注意，$\mathcal{F}_\lambda \supset \mathcal{F}_\nu$，条件是 $\nu \succeq \lambda$。

在接下来的几个引理中，我们验证关系 (4.16)–(4.20) 在关联分次模 $\bigoplus_\lambda \mathcal{F}_\lambda / \sum_{\mu \succeq \lambda} \mathcal{F}_\mu$ 上成立。回顾记号 $\lambda = \sigma(\lambda_-)$。

引理 5.3。对于 $\alpha \in \Delta_-$：

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha_i+\delta)} z^l \prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu,$$

$$\prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} e_{\widehat{\sigma}(-\alpha_i)} z^l \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu.$$

证明。根据定义，若 $\lambda_i \geq \lambda_j$，则有 $\varepsilon_i - \varepsilon_j \in \sigma(\Delta_-)$。对于满足 $\lambda_i \geq \lambda_j$ 的 i, j，若 $i < j$，且若 $i > j$，则有 $l \geq 0$ 和 $l \geq 1$：

$$E_{ij} z^l \prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} = \lambda_j (v_{jj}^{(0)})^{\lambda_j - 1} v_{ij}^{(l)} \prod_{k=1,\dots,n,k\neq j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}.$$

类似地

$$\prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} E_{ji} z^l = \lambda_j (v_{jj}^{(0)})^{\lambda_j - 1} v_{ji}^{(l)} \prod_{k=1,\dots,n,k\neq j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}.$$

然而：

$$\lambda_j (v_{jj}^{(0)})^{\lambda_j - 1} v_{ij}^{(l)} \prod_{k\neq j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i + 1} \left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_j - 1} (v_{ii}^{(0)})^{\lambda_i + 1} \prod_{k\neq i,j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \right) E_{ij} z^l$$

第二种情形也有类似的等式。根据序$\succ$的定义： $\lambda + \varepsilon_i - \varepsilon_j \succ \lambda$。证明完毕。□

引理 5.4。对于 $\lambda_i < \lambda_j$、 $i > j$:

$$(E_{ij} z)^{\lambda_j - \lambda_i} \prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu. \tag{5.5}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} (E_{ji})^{\lambda_j - \lambda_i} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu. \tag{5.6}$$

对于 $\lambda_i < \lambda_j$、 $i < j$:

$$(E_{ij})^{\lambda_j - \lambda_i + 1} \prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu. \tag{5.7}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} (E_{ji} z)^{\lambda_j - \lambda_i + 1} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu. \tag{5.8}$$

证明。我们有：

$$\begin{aligned} &(E_{ij})^{\lambda_j - \lambda_i + 1} \prod_{k=1}^{n} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \\ &\qquad = \binom{\lambda_j}{\lambda_i - 1} (v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i - 1} (v_{ij}^{(0)})^{\lambda_j - \lambda_i + 1} \prod_{k\neq j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \\ &= \binom{\lambda_j}{\lambda_i - 1} \Big/ \binom{\lambda_j + 1}{\lambda_i} \left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i - 1} (v_{ii}^{(0)})^{\lambda_j + 1} \prod_{k\neq i,j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \right) (E_{ij})^{\lambda_j - \lambda_i + 1}. \end{aligned}$$

这就证明了 (5.7)。

为证明 (5.8)，我们计算

$$\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}(E_{ji}z)^{\lambda_j-\lambda_i+1}$$

$$=\binom{\lambda_j}{\lambda_i-1}(v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i-1}(v_{ji}^{(1)})^{\lambda_j-\lambda_i+1}\prod_{k\neq j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}$$

$$=\binom{\lambda_j}{\lambda_i-1}\Big/\binom{\lambda_j+1}{\lambda_i}(E_{ji}z)^{\lambda_j-\lambda_i+1}\left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i-1}(v_{ii}^{(0)})^{\lambda_j+1}\prod_{k=1,\dots,n,\ k\neq i,j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}\right).$$

现在我们证明 (5.5)。有

$$(E_{ij}z)^{\lambda_j-\lambda_i}\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}$$

$$=\binom{\lambda_j}{\lambda_i}(v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i}(v_{ij}^{(1)})^{\lambda_j-\lambda_i}\prod_{k\neq j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}$$

$$=\left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i}(v_{ii}^{(0)})^{\lambda_j}\prod_{k\neq i,j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}\right)(E_{ij}z)^{\lambda_j-\lambda_i}.$$

因此，$(E_{ij}z)^{\lambda_j-\lambda_i}\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}$属于 $\mathsf{U}(\mathcal{I})\ \prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{(s_{ij}\lambda)_k}\mathsf{U}(\mathcal{I})$。

然而，根据假设 $s_{ij}\lambda\succ\lambda$。这就完成了 (5.5) 的证明。

最后，以下计算证明了等式 (5.6)：

$$\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}(E_{ji})^{\lambda_j-\lambda_i}$$

$$=\binom{\lambda_j}{\lambda_i}(v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i}(v_{ji}^{(0)})^{\lambda_j-\lambda_i}\prod_{k\neq j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}$$

$$=(E_{ji})^{\lambda_j-\lambda_i}\left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_i}(v_{ii}^{(0)})^{\lambda_j}\prod_{k\neq i,j}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}\right).$$

□

下面的引理显而易见。

引理 5.5。

$$h_iz^l\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}=\lambda_k(v_{ii}^{(0)})^{\lambda_i-1}v_{ii}^{(l)}\prod_{k\neq i}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k},$$

$$\prod_{k=1}^{n}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}h_iz^l=-\lambda_k(v_{ii}^{(0)})^{\lambda_i-1}v_{ii}^{(l)}\prod_{k\neq i}(v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k}.$$

最后，我们需要检查关系 (4.21)。回顾映射 (4.11)。设 r'为满足 $\lambda_{r'} = \min\{\lambda_r\}$ 的数。

引理 5.6。

$$\ker \varphi^{r'}_{\lambda_{r'}} \prod_{k=1}^{n} (v^{(0)}_{kk})^{\lambda_k} = \{0\}.$$

证明。根据定义，我们有：

$$h_{r'} z^l \prod_{k \neq r'} (v^{(0)}_{kk})^{\lambda_k} = 0.$$

因此，我们需要证明

$$\ker \varphi^{r'}_{\lambda_{r'}} (v^{(0)}_{r'r'})^{\lambda_{r'}} = \{0\}.$$

我们定义线性同构

$$\psi : \operatorname{span} \left\{ \prod_{i=0}^{\infty} (v^{(i)}_{r'r'})^{a_i} \right\}_{\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lambda_{r'}} \longrightarrow \Bbbk[s_1, \dots, s_{\lambda_{r'}}]^{\mathfrak{S}_{\lambda_{r'}}}$$

（见（4.11））定义为

$$\psi \left(\prod_{i=1}^{\lambda_{r'}} v^{(\nu_i)}_{r'r'} \right) := \frac{1}{|Stab(\nu)|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda_{r'}}} s_1^{\nu_{\sigma(1)}} \dots s_{\lambda_{r'}}^{\nu_{\sigma(\lambda_{r'})}}$$

对于任意分拆 ν。于是容易看出

$$\psi \circ h_{r'} z^l = (s_1^l + \dots + s_{r'}^l) \circ \psi,$$

即， ψ 将嘉当元素 $h_{r'} z^l$ 的作用确定为与牛顿和 $s_1^l + \dots + s_{r'}^l$的乘法。□

命题 5.7. 存在双模 $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ 的满射

$$\mathbb{T}_\lambda \twoheadrightarrow \mathcal{F}_\lambda \Big/ \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu \, .$$

证明。根据构造，双模 $\mathcal{F}_\lambda \Big/ \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu$ 是循环的，其生成元为 $\prod_{k=1}^{n} (v^{(0)}_{kk})^{\lambda_k}$。由于引理 5.3、5.4、5.5、5.6，该模上的所有定义关系均得到满足。□

定理 5.8.

$$\mathbb{T}_\lambda \simeq \mathcal{F}_\lambda \Big/ \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu \, .$$

证明。我们有

$$E(x, y; q, 0) = \sum_{N=0}^{\infty} \operatorname{ch} S^N(M_n[z]^+).$$

因此，得益于等式 (3.3) 和 (3.4)，命题 5.7 中的满射是一个同构。□

6. Functions on the Iwahori subgroup in $SL_n[z]$

本节中我们研究李代数 $\mathfrak{sl}_n$。特别地，第 4 节中在最一般情形下定义的所有代数、模等，都只考虑类型 A 。我们的目标是详细描述 Iwahori 子群 I $\subset SL_n[z]$ 上函数空间的双模。我们先在一般设定下讨论函数空间。

6.1. 一般情况。对于代数群 G ，我们考虑一个维数为 n 的忠实表示 V 。这给出了 G 到带有坐标 u_{ij}、 i、 $j = 1$、.....、 n 的 n^2 维向量空间 End(V) 的嵌入。于是 End(V) 自然具有 G-双模结构；因此， G-双模结构也赋予了由 u_{ij}、 i、 $j = 1$、.....、 n 线性张成的空间。设 f_1、.....、 $f_m \in \Bbbk[u_{ij}]_{i,\ j=1,\ .....,\ n}$ 是切出群 G 像的理想的一组生成元。那么，由 f_1、.....、 f_m 生成的理想在李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 的作用下保持不变。

令 $G[z]$ 为群 G 的环群。我们考虑变量集 $u_{ij}^{(k)}$ 、 i、 $j = 1$、.....、 n、 $k = 0$、1、.....。定义 $u_{ij}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} u_{ij}^{(k)} s^k$ 以及展开式

$$f_l(u_{ij} \mapsto u_{ij}(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_l^{(k)} s^k.$$

Then

$$\Bbbk[G[z]] = \Bbbk[u_{ij}^{(k)}]/\langle f_l^{(k)} \rangle_{l=1,\dots,m,\ k=0,1,\dots}.$$

注意，空间 $\Bbbk[G[z]]$ 具有自然的 $(\mathfrak{g}[z], \mathfrak{g}[z])$ 双模结构，其中 $\mathfrak{g}[z]$ 是 $G[z]$的李代数。因此，空间 $\Bbbk[G[z]]^*$ 也具有自然的 $(\mathfrak{g}[z], \mathfrak{g}[z])$-双模结构。

现在我们考虑 Iwahori 子群 I $\subset G[z]$。空间 $\Bbbk$[I]* $\subset \Bbbk[G[z]]^*$ 具有自然的 (I, I)-双模结构。给定变量 $u_{ij}^{(k)}$ 的一个单项式，我们将该单项式中各变量上标之和称为它的 z-次数。多项式环 $\Bbbk[u_{ij}^{(k)}]$ 上相应的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次称为 z-分次。注意，所有关系 $f_l^{(k)}$ 关于此分次都是齐次的。因此，环 $\Bbbk[G[z]]$ 和 $\Bbbk$[I] 继承了 z-分次。

6.2. 函数环的特征。令 $u_{ij}^{(k)} \in (M_n[z]^+)^*$ 为定义在空间 $M_n[z]^+$ 上的坐标函数，即 $u_{ij}^{(k)} (v^{(k')}{}_{i'j'}) = \delta_{i,\ i'} \delta_{j,\ j'} \delta_{k,\ k'}$。我们记

$$u_{ij}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} u_{ij}^{(k)} s^k,$$

其中，若 $i > j$，则为 $u_{ij}^{(0)} = 0$ 。令

$$\mathbf{I} \subset SL_m[z] \subset M_n[z]^+$$

为 Iwahori 子群。作为一个簇，I 是由以下关系定义的仿射子簇

$$\prod_{i=1}^{n} u_{ii}(s) - 1 = 0.$$

这里的关系是指：该簇由左侧表达式各项系数生成的理想定义。设 $f^{(k)}$ 为展开式中的系数

$$\prod_{i=1}^{n} u_{ii}(s) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} s^k. \tag{6.1}$$

引理 6.1. 元素 $f^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$ 构成一个正则序列。

证明. 显然， $f_{(0)}$不是零因子。假设 $f^{(0)}, \ldots, f_{(k)}$构成一个正则序列。设 R 为包含所有变量 $u_{ij}^{(l)}$ 的多项式环，并设 $R_k \subset R$ 为由 $u_{ij}^{(l)}$ 生成的多项式子环，其中 $l \leq k$。于是$R = R_k[u_{ij}^{(l)}, l > k]$。元素 $f_{(0)} \ldots, f^{(k)}$属于 R_k。因此

$$R \Big/ \langle f^{(0)}, \ldots, f^{(k)} \rangle = (R_k \Big/ \langle f^{(0)}, \ldots, f^{(k)} \rangle)[u_{ij}^{(l)}, l > k].$$

注意，

$f^{(k+1)} = u_{11}^{(k+1)} u_{22}^{(0)} \ldots u_{nn}^{(0)} + u_{11}^{(0)} u_{22}^{(k+1)} \ldots u_{nn}^{(0)} + \cdots + u_{11}^{(0)} u_{22}^{(0)} \ldots u_{nn}^{(k+1)} + a$,

其中 $a \in R_k$。假设 $f^{(k+1)}$是环 $R/\langle f_{(0)}$.....$, f_{(k)} \rangle$ 中的零因子，即 $f^{(k+1)} b = 0$ 对某个 b成立。特别地，相对于变量 $u_{11}^{(k+1)}$， $f^{(k+1)} b = 0$的最高次项为零；因此 $u_{22}^{(0)} \ldots u_{nn}^{(0)}$是 $R_k/\langle f^{(0)}$,.....$, f_{(k)} \rangle$ 中的零因子。然而

$$u_{22}^{(0)} \ldots u_{nn}^{(0)} = \left(u_{11}^{(0)} \right)^{-1} \mod f^{(0)},$$

即单项式 $u_{22}^{(0)} \ldots u_{nn}^{(0)}$是可逆的。因此 $f_{(0)}$....., $f^{(k)}, f_{(k+1)}$是正则序列，我们通过归纳完成证明。□

注意，这些元素关于 z-度是齐次的。此外，相对于格 $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}($ $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \simeq \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$，它们在左侧和右侧都是齐次的。$f^{(k)}$ 的左右权分别等于 $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$，其 z-度等于 k。回顾q-Pochhammer 符号

$$(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

命题 6.2。空间 $\mathbb{k}[\mathrm{I}]$ 的特征等于

$$\frac{(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n; q)_\infty}{\prod_{i \leq j} (x_i y_j; q)_\infty \prod_{i > j} (q x_i y_j; q)_\infty}$$

关于该映射，即（3.5）的左侧。

证明。我们有

$$\mathrm{ch}(\Bbbk[M_n[z]^+]) = \frac{1}{\prod_{i\le j}(x_i y_j;q)_\infty \prod_{i>j}(q x_i y_j;q)_\infty}.$$

我们考虑标准的 Koszul分解（例如参见 [Eis]）

$$\cdots \to \bigoplus_{0\le k_1<\cdots<k_l} f^{(k_1)}\dots f^{(k_l)}\Bbbk[M_n[z]^+] \to \cdots \to \bigoplus_{0\le k_1} f^{(k_1)}\Bbbk[M_n[z]^+] \to \Bbbk[M_n[z]^+] \to \Bbbk[\mathbf{I}],$$

因为 $f_{(0)}f^{(1)}$，.....构成一个正则序列。现在，对该分解各分量的 $\mathfrak{sl}_n$特征取交错和，便得到所需的 $\Bbbk[\mathbf{I}]$ 的特征表达式。□

推论6.3。

$$\mathrm{ch}(\Bbbk[\mathbf{I}]) = \sum_{\lambda\in P} \mathrm{ch}(\mathcal{A}_\lambda^D) E_\lambda(X;q,0) E_\lambda(Y;q^{-1},\infty).$$

证明。由方程（3.6）可知。 □

6.3. $\Bbbk[\mathbf{I}]$上的滤过。本小节中，我们在 Iwahori群上的函数空间上构造一个递增滤过 $\mathcal{G}_\lambda \subset \Bbbk[\mathbf{I}]$，并描述其关联分次空间。

回忆一下，权格 $P = P(\mathfrak{sl}_n)$ 可与由$\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n$ 最小元素为零的非负整数元组构成的集合相识别（因为自然满射 $\mathbb{Z}^n = P(\mathfrak{gl}_n) \to P$ 到 $(\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n$的限制是一一对应的）。对于一个权 $\lambda \in P$，我们用 $u_\lambda \in \Bbbk[\mathbf{I}]$ 表示乘积$\prod_{i=1}^n($ $u_{ii}^{(0)})^{\mu_i}$，其中 $\mu = (\mu_1, \dots..., \mu_n) \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})_0^n$对应于 λ。

引理 6.4. 空间 $\Bbbk[\mathbf{I}]$ 作为 $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模，由向量 u_λ, $\lambda \in P$ 余生成。

证明. 我们首先证明，$\Bbbk[\mathbf{I}]$ 由子空间 $\Bbbk[B] \subset \Bbbk[\mathbf{I}]$ 余生成（$\Bbbk[B]$ 包含在 $\Bbbk[$ $\mathbf{I}]$ 中，后者是由 $u_{ij}^{(0)}$ 生成的子代数）。

假设存在一个函数 $\Psi \in \Bbbk[\mathbf{I}]$，使得

$$\mathrm{U}(\mathcal{I})\Psi\mathrm{U}(\mathcal{I}) \cap \Bbbk[B] = 0. \tag{6.2}$$

我们可以（并且将会）假设 Ψ 是齐次的，且具有严格正的 z 次数。我们还将假设该次数是可能的最小值（即不存在具有性质 (6.2) 且 z 次数小于 Ψ 次数的函数）。于是，方程 (6.2) 表明，Ψ 在群的乘积 $\exp(z\mathfrak{g}[z]) \times \exp(z\mathfrak{g}[z])$ 的左右作用下是不变的。换言之，对于任意 $g_z \in \mathrm{I}$ 以及 $(a,b) \in \exp(z\mathfrak{g}[z]) \times \exp(z\mathfrak{g}[z])$，都有 $\Psi(g_z) = \Psi(a g_z b)$。事实上，由于 Ψ 具有正的 z 次数，且在满足性质 (6.2) 的条件下具有最小的 z 次数，我们得出 $\mathrm{U}(z\mathfrak{g}[z])\Psi\mathrm{U}(z\mathfrak{g}[z]) = 0$，这等价于断言 Ψ 在群的乘积 $\exp(z\mathfrak{g}[z]) \times \exp(z\mathfrak{g}[z])$ 下不变。

我们注意到集合

$$\exp(z\mathfrak{g}[z])B\exp(z\mathfrak{g}[z])\subset\mathbf{I}$$

是开稠密的。对于元素 $g_z\in\exp(z\mathfrak{g}[z])B\exp(z\mathfrak{g}[z])$，我们记 $g_z=ag_0b, a,b\in\exp(z\mathfrak{g}[z])$， $g_0\in B$。由于函数 Ψ 在 $\exp(z\mathfrak{g}[z])\times\exp(z\mathfrak{g}[z])$ 下不变，我们得到：

$$\Psi(g_z)=\Psi(ag_0b)=\left((a^{-1}\times b^{-1})\Psi\right)(g_0)=\Psi(g_0)=0$$

这是因为 Ψ 的 z-次数为正。因此 $\Psi=0$。

接下来只需证明 $\Bbbk[B]$ 作为 $(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$-双模由向量 u_λ, $\lambda\in P$ 余生成。这很容易看出，因为 $\Bbbk[B]$ 是变量 $u_{ij}^{(0)}$ 的乘积所张成的空间。□

现在我们将滤过 $\mathcal{G}_\lambda\subset\Bbbk[\mathbf{I}]$ 定义如下：

$$\mathcal{G}_\lambda=\{\Psi\in\Bbbk[\mathbf{I}]:\ \mathrm{U}(\mathcal{I})\Psi\mathrm{U}(\mathcal{I})\cap\mathrm{span}\{u_\mu,\mu\in P\}\subset\mathrm{span}\{u_\mu,\mu\preceq\lambda\}\}.$$

根据引理 6.4， $\mathcal{G}_\lambda$ 是 $\Bbbk[\mathbf{I}]$上的递增滤子。注意，由于（$\mathcal{I},\mathcal{I}$）在 $\Bbbk[M_n[z]^+]$ 上的作用保持变量 $u_{ij}^{(k)}$ 中的次数不变，因此定义 $\mathcal{G}_\lambda$ 时的交是有限维的。

下面的引理很容易证明，证明从略。

引理 6.5. 商 $\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu$ 关于 z-分次具有有限维齐次分量。空间（$\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu$）$^\vee$具有自然的（$\mathcal{I},\mathcal{I}$）-双模结构，且其循环向量为 $u_\lambda^\vee$。

我们的目标是证明（$\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu$）$^\vee\simeq\mathbb{T}_\lambda$（见引理 4.23）。我们知道，（$\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu$）$^\vee$和 $\mathbb{T}_\lambda$ 都是循环的（$\mathcal{I},\mathcal{I}$）-双模，并且

$$\sum_{\lambda\in P}\mathrm{ch}(\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu)^\vee=\sum_{\lambda\in P}\mathrm{ch}\mathbb{T}_\lambda$$

（因为左右两边都等于 $\Bbbk[\mathbf{I}]$ 的特征。）因此，只需证明该满射的存在性

$$\mathbb{T}_\lambda\to(\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu)^\vee. \tag{6.3}$$

6.4. 函数的对偶空间。为构造满射 (6.3)，我们定义子空间 $\mathcal{F}_\lambda\subset\Bbbk[\mathbf{I}]^*$，使其具有以下性质：

- $\mathcal{F}_\lambda\subset\mathcal{F}_\mu$ 若 $\lambda\succ\mu$,
- $\mathcal{F}_\lambda/\sum_{\mu\succ\lambda}\mathcal{F}_\mu$ 是一个循环的 $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模,
- 存在一个 $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模的满射 $\mathbb{T}_\lambda\to\mathcal{F}_\lambda/\sum_{\mu\succ\lambda}\mathcal{F}_\mu$,
- 存在一个 $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模的满射 $\mathcal{F}_\lambda/\sum_{\mu\succ\lambda}\mathcal{F}_\mu\to(\mathcal{G}_\lambda/\sum_{\mu\prec\lambda}\mathcal{G}_\mu)^\vee$。

为定义 $\mathcal{F}_\lambda$ 并证明上述陈述，我们构造了一些来自故事中 $\mathfrak{gl}_n$ 一侧的向量 $v_\mu\in\Bbbk[B]^*\subset\Bbbk[\mathbf{I}]^*$。

我们有满射 $\Bbbk[M_n[z]^+] \twoheadrightarrow \Bbbk[\mathbf{I}]$ 以及对偶嵌入$\Bbbk[\mathbf{I}]^* \hookrightarrow \Bbbk[M_n[z]^+]^*$。回顾显式实现

$$\Bbbk[M_n[z]^+] = \Bbbk[u_{ij}^{(k)} : \ k \geq 0 \text{ if } i \leq j, \ k \geq 1 \text{ if } i > j].$$

有如下映射

$$\Bbbk[M_n[z]^+] \twoheadrightarrow \Bbbk[M_n[z]^+] \Big/ \Big\langle f^{(0)}, f^{(1)}, \dots \Big\rangle$$

及其对偶化

$$\phi : \left(\Bbbk[M_n[z]^+] \Big/ \Big\langle f^{(0)}, f^{(1)}, \dots \Big\rangle\right)^* \hookrightarrow \left(\Bbbk[M_n[z]^+]\right)^*, \tag{6.4}$$

其中 $\sum_{k\geq 0} f^{(k)} s^k = \prod_{i=1}^n u_{ii}(s) - 1$ （见（6.1））。我们用 $v_{ij}^{(k)} \in (M_n[z]^+)^{\vee\vee}$ 表示 $u_{ij}^{(k)} \in (M_n[z]^+)^\vee$ 的对偶线性形式（注意，$(M_n[z]^+)^{\vee\vee}$与 $M_n[z]^+$同构）。于是，我们有定义在基上的模$S^N((M_n[z]^+)^\vee)$与 $S^N(M_n[z]^+)$之间的配对：

$$\left(\prod_{i,j,k} (u_{ij}^{(k)})^{t_{ij}^k}, \prod_{i,j,k} (v_{ij}^{(k)})^{s_{ij}^k}\right) = \prod_{i,j,k} \delta_{t_{ij}^k, s_{ij}^k} \binom{N}{\{t_{ij}^k\}}^{-1}.$$

因此， $\Bbbk[M_n[z]^+]$ 与 $S(M_n[z]^+)$之间有相同的配对。

对于合成 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$， 回顾相应 $\mathfrak{sl}_n$ 权的记号 $\overline{\nu} = \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_i - \nu_{i+1})\omega_i$。对于整数权 $\mathfrak{sl}_n$ $\mu \in P$，我们定义

$$v_\mu := \sum_{\nu:\ \overline{\nu} = \mu} \binom{\nu_1 + \cdots + \nu_n}{\nu_1, \dots, \nu_n} \prod_{i=1}^n (v_{ii}^{(0)})^{\nu_i}.$$

引理 6.6。对于任意 $\mu \in P$

$$v_\mu \in \phi\left(\Bbbk[M_n[z]^+] \Big/ \Big\langle f^{(0)}, f^{(1)}, \dots \Big\rangle\right)^*.$$

有 $(v_\mu, u_\lambda) = \delta_{\mu,\ \lambda}$。

证明。注意到，由次数原因，v_μ自动与 $\langle f^{(1)}, f^{(2)}, \dots \rangle$正交。因此，我们只需证明：对于任意单项式 $u = \prod_{i,\ j} \prod_{k=1}^{r_{ij}} u_{ij}^{(t_{ij}^k)}$， 元素 $u(1 - \prod_{i=0}^n u_{ii}^{(0)})$ 与 v_μ 正交。显然，若对某个 $i \neq j$ 有 $r_{ij} \neq 0$ ，或对某个 k 有 $t_{ij}^k \neq 0$ ，则该结论成立。因此，只需考虑

$$u = \prod_{i=1}^n (u_{ii}^{(0)})^{\eta_i}$$

对于某个合成 η。容易看出，对于这类单项式， $u(1 - \prod_{i=0}^n u_{ii}^{(0)})$ 与 v_μ 的标量积除非满足 $\bar{\eta} = \mu$，否则为零。然而

$$u\left(1 - \prod_{i=0}^n u_{ii}^{(0)}\right) = \prod_{i=1}^n (u_{ii}^{(0)})^{\eta_i} - \prod_{i=1}^n (u_{ii}^{(0)})^{\eta_i + 1}$$

对于满足 η 的 $\bar{\eta}=\mu$，有

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(u_{ii}^{(0)})^{\eta_i}, v_\mu\right)=1.$$

因此 $v_\mu \in \phi\left(\Bbbk[u_{ij}^{(k)}]_{i\le j}\,/\left\langle f_{(0)}\, f_{(1)}\ \dots\right\rangle\right)^*$。最后，等式 $(v_\mu, u_\lambda) = \delta_{\mu,\ \lambda}$ 由显式公式可得。□

我们定义以下子空间 $\mathcal{F}_\lambda \subset \Bbbk[\mathrm{I}]^*$:

$$\mathcal{F}_\lambda = \sum_{\nu\succeq\lambda} \mathrm{U}(\mathcal{I}) v_\nu \mathrm{U}(\mathcal{I}).$$

我们有两个显然的性质:

- $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{F}_\mu$ 当 $\lambda \succ \mu$ 时,
- $\mathcal{F}_\lambda / \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu$ 是一个带循环向量 v_λ 的 $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模。

引理 6.7. $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-双模之间存在一个自然配对:

$$\left(\mathcal{G}_\lambda / \sum_{\mu\prec\lambda} \mathcal{G}_\mu\right) \times \left(\mathcal{F}_\lambda / \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu\right) \to \Bbbk,$$

由此得到满射同态

$$\mathcal{F}_\lambda / \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu \to (\mathcal{G}_\lambda / \sum_{\mu\prec\lambda} \mathcal{G}_\mu)^\vee. \tag{6.5}$$

证明. 根据 $\mathcal{G}_\lambda$ 和 $\mathcal{F}_\lambda$ 的定义，有

$$(\mathcal{G}_\lambda, \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu) = 0,\ (\sum_{\mu\prec\lambda} \mathcal{G}_\mu, F_\lambda) = 0.$$

由此得到所需的配对以及同态 (6.5)，它将循环向量 v_λ 映至循环向量 $u_\lambda^\vee$（其中 $u_\lambda^\vee$ 以显然的方式与 u_λ 对偶）。□

现在我们将证明存在一个满射同态 $\mathbb{T}_\lambda \to \mathcal{F}_\lambda / \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu$。回顾 $\lambda = \sigma(\lambda_-),\quad \lambda\in P,\quad \lambda_-\in P_-$。

命题 6.8. 对于所有 $\lambda\in P$，以下关系均成立：对于 $\alpha\in\Delta_-$, $l\ge 0$

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha+\delta)} z^l v_\lambda \in \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu,$$
$$v_\lambda e_{\widehat{\sigma}(-\alpha)} z^l \in \sum_{\mu\succ\lambda} \mathcal{F}_\mu;$$

对于 $\alpha \in \Delta_+$, $\sigma(\alpha) \in \Delta_-$:

$$(e_{\widehat{\sigma}(\alpha)})^{\langle \alpha, \lambda \rangle} v_\lambda \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu,$$
$$v_\lambda (e_{-\widehat{\sigma}(\alpha)})^{\langle \alpha, \lambda \rangle} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu;$$

对于 $\alpha \in \Delta_+$, $\sigma(\alpha) \in \Delta_+$:

$$(e_{\widehat{\sigma}(\alpha)})^{\langle \alpha, \lambda \rangle + 1} v_\lambda \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu,$$
$$v_\lambda (e_{-\widehat{\sigma}(\alpha)})^{\langle \alpha, \lambda \rangle + 1} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu.$$

最后，对于任意 $h \in \mathfrak{h}$

$$h z^k v_\lambda = -v_\lambda h z^k.$$

证明。我们利用引理 5.3 证明第一个结论（其余结论以类似方式利用引理 5.4 和引理 5.5 证明）。我们需要证明

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha+\delta)} z^l \sum_{\nu:\ \overline{\nu}=\lambda} \binom{\nu_1 + \cdots + \nu_n}{\nu_1, \ldots, \nu_n} \prod_{i=1}^n (v_{ii}^{(0)})^{\nu_i} \in \sum_{\mu \succ \lambda} \mathcal{F}_\mu.$$

设 $\alpha \in \Delta_-$，并令 $\sigma(\alpha) = \varepsilon_i - \varepsilon_j$。回顾一下（见引理 5.3 的证明），对于任意 l

$$E_{ij} z^l \prod_{k=1}^n (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i + 1} \left((v_{jj}^{(0)})^{\lambda_j - 1} (v_{ii}^{(0)})^{\lambda_i + 1} \prod_{k \neq i,j} (v_{kk}^{(0)})^{\lambda_k} \right) E_{ij} z^l.$$

因此

$$e_{\widehat{\sigma}(\alpha+\delta)} z^l v_\lambda = v_{\lambda + \sigma(\alpha)} e_{\widehat{\sigma}(\alpha+\delta)} z^l.$$

这就推出了所需结论，因为 $\lambda + \sigma(\alpha) \succ \lambda$（因为 α 为负且 $\lambda = \sigma(\lambda_-)$）。□

定理 6.9. 存在一个 $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-双模的同构

$$\mathbb{T}_\lambda \simeq (\mathcal{G}_\lambda / \sum_{\mu \prec \lambda} \mathcal{G}_\mu)^\vee.$$

证明. 命题 6.8 和引理 6.7 表明，存在一个 $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-双模的满射

$$\mathbb{T}_\lambda \twoheadrightarrow (\mathcal{G}_\lambda / \sum_{\mu \prec \lambda} \mathcal{G}_\mu)^\vee. \tag{6.6}$$

现在，推论 3.6 告诉我们，$\bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{T}_\lambda$ 的特征与 $\mathbb{k}[\mathrm{I}]^\vee$ 的特征一致。因此，映射 (6.6) 是一个同构。□

AppendixA. Example

设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$。那么，Iwahori群 I 是 Borel 子群 $B\subset SL_2$ 与幺幂群 exp($\mathfrak{sl}_2\otimes z\mathbb{k}[z]$) 的半直积。因此

$$\operatorname{ch}\mathbb{k}[\mathbf{I}]=\operatorname{ch}\mathbb{k}[B]\operatorname{ch}S^\bullet(\mathfrak{sl}_2\otimes z\mathbb{k}[z])=\frac{\sum_{i\in\mathbb{Z}}X^iY^i}{(q)_\infty(XY^{-1};q)_\infty(qX^{-1}Y;q)_\infty}$$

其中 $X=X_1$ 和 $Y=Y_1$。根据命题 6.2，该表达式等于

$$\frac{(X^{\overline{\varepsilon}_1}X^{\overline{\varepsilon}_2}Y^{\overline{\varepsilon}_1}Y^{\overline{\varepsilon}_2};q)_\infty}{(X^{\overline{\varepsilon}_1}Y^{\overline{\varepsilon}_1};q)_\infty(X^{\overline{\varepsilon}_1}Y^{\overline{\varepsilon}_2};q)_\infty(X^{\overline{\varepsilon}_2}Y^{\overline{\varepsilon}_2};q)_\infty(qX^{\overline{\varepsilon}_2}Y^{\overline{\varepsilon}_1};q)_\infty}.$$

非对称 q-柯西恒等式 (3.5) 的右端包含因子 $a_\lambda(q)$、$E_\lambda(X;\,q,0)$ 和 $E_\lambda(Y;\,q^{-1},\infty)$，其中 $\lambda\in P$。在我们的情形下$\lambda\in\mathbb{Z}$，于是有

$$a_\lambda(q)=\begin{cases}1/(q)_{-\lambda}, & \lambda\le 0,\\ 1/(q)_{\lambda-1}, & \lambda>0\end{cases},$$

$$E_\lambda(X;q,0)=\begin{cases}r_{-\lambda}(X,q), & \lambda\le 0,\\ Xq^{\lambda-1}r_{\lambda-1}(Xq^{-1},q), & \lambda>0\end{cases},$$

$$E_\lambda(Y;q^{-1},\infty)=\begin{cases}q^\lambda r_{-\lambda}(qY,q), & \lambda\le 0,\\ Yr_{\lambda-1}(Y,q), & \lambda>0\end{cases},$$

其中 $r_\lambda(X,q)=\sum_{a=0}^{\lambda}X^{\lambda-2a}\frac{(q;\,q)_\lambda}{(q;\,q)_a\,(q;\,q)_{\lambda-a}}$ 是 Rogers–Szegˊo 多项式（见 [M2]）。

最后，我们写出模 $\mathbb{D}_\lambda$ 和 $\mathbb{U}_\lambda^0$的定义关系，它们的分次特征分别为 $E_\lambda(X;q,0)$ 和 $E_\lambda(Y;q^{-1},\infty)$。令 e,h,f 为 $\mathfrak{sl}_2$的标准基。

对于 $\lambda\le 0$，模 $\mathbb{D}_\lambda$ 包含循环向量 d_λ，其定义关系为

$$(h\otimes 1).d_\lambda=\lambda(h)d_\lambda,\ e^{-\lambda+1}.d_\lambda=0,\ (f\otimes z^k).d_\lambda=0\ (k>0)$$

而 $\mathbb{U}_\lambda$ 是 $\mathbb{D}_\lambda$ 关于单个关系 $e^{-\lambda}d_\lambda=0$的商。对于 $\lambda>0$，模 $\mathbb{U}_\lambda$ 包含循环向量 u_λ，其定义关系为

$$(h\otimes 1).u_\lambda=\lambda(h)u_\lambda,\ (f\otimes z)^{\lambda+1}.u_\lambda=0,\ (e\otimes z^k).d_\lambda=0\ (k\ge 0)$$

而 $\mathbb{D}_\lambda$ 是 $\mathbb{D}_\lambda$ 关于单个关系（$f\otimes z$）$^\lambda.u_\lambda=0$的商。

References

[BF] A. Braverman, M. Finkelberg, *Weyl modules and q-Whittaker functions*, Math- ematische Annalen, 第 359 卷（1），2014 年，第 45–59 页。2 A. Borodin, I. Corwin, *Macdonald processes*,

[BC] Probability Theory and Related Fields, 158(1–2):225–400, 2014 年，1 A. Borodin, L. Petrov, *Integrable probability: From representation theory to Mac- donald processes* 11 1 58, 2014 1 , Probability

[BP] Surveys, :–。

[BW] D. Betea, M. Wheeler, *Refined Cauchy and Littlewood identities, plane partitions and symmetry classes of alternating sign matrices*, 组合数学理论杂志, A 辑, 137 126 165, 2016 1 : – January 。 CI V. Chari, B. Ion, , Compositio [ ] *BGG reciprocity for current algebras* Mathematica 151 2015 1265 1287 4 ( ), 第 – 页。 Ch I. Cheredniк, [1] *Nonsymmetric Macdonald polynomials*, IMRN 10 (1995), 483–515。15[Ch2] I. Cheredniк, *Double affine Hecke algebras*, 伦敦数学学会讲义系列, 319, 2006 7, 8, 15 剑桥 [ ] *A categorical approach to Weyl modules* 大学出版社, Cambridge, 。 CFK V. Chari, G. Fourier, and T. Khandai, , Transform. Groups, 15 3 517 549, 2010 3 ( ): – 。 CG V. Chari and J. Greenstein, , [ ] *Current algebras highest weight categories and quivers* 216 2007 811 840 , Adv. Math. ( ), – 。 4 [1] CO I. Cheredniк, D. Orr, *Nonsymmetric difference Whittaker functions*, Math. Z. 279 2015 3 4, 879 938 2 ( ), no. – – 。 CO I. [2] Cheredniк, D. Orr, *One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions*, Transformation Groups 18 1 2013 23 59 2 : ( ), – 。 CK S.-I. Choi and J.-H. Kwon, [ ] *Lakshmibai-Seshadri paths and non-symmetric Cauchy identity* 21 2018 6, 1381 1394 , Algebr. Represent. Theory ( ), no. - 。 2 [ ] *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*Eis D. Eisenbud, , Springer Graduate Texts in Mathematics, no. 150 31 . Et P. Etingof, [ ] *Whittaker functions on quantum groups and q-deformed Toda operators* 2, 194 9 26, , Translations of the American 1999 2 Mathematical Society, Series : – 。[FL] G. Fourier, P. Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crys-tals, fusion products and limit constructions*, Advances in Mathematics 211 (2007 2, 566 593 15), no. – 。 FeMa E. Feigin, I. Makedonskyi, [ ] *Generalized Weyl modules alcove paths and Macdonald polynomials* , , Selecta Mathematica, 第 2017, 23, 4, 2863 2897 13, 14, 15 *Generalized Weyl modules alcove paths and Macdonald polynomials* 卷第 [ ] 期第 *Representation theoretic realization of symmetric Macdonald polynomials at infinity* 2017, 23, 4, 2863 2897 764 2020 – 页。 181 216 2, 3, 15, 16, 17 FKM E. Feigin, S. Kato, I. Makedonskyi, [ ] *Duality theorems for current groups* 248, 441 479 2022 , J. Reine Angew. Math. ( ), 23, 25 [ ] – 。 FKhM E. Feigin, A. Khoroshkin, *Generalized Weyl modules and nonsymmetric* and Ie. Makedonskyi, *q-Whittaker functions* 330 2018 997 1033 , Israel 3, 15 Journal of Mathematics, 第 – 卷 () 。[ ] F MO E. Feigin, I. Makedonskyi, D. Orr, *On q-deformed* $\mathfrak{gl}_{t+1}$*-Whittaker functions I II III* 294 97 119, 121 143, 2010 , Adv. Math. ( ), – 。 2 [ ] GLO A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin, *A combinatorial formula for nonsymmetric Macdonald polynomials* 130 2 2008 359 383 7, 8, , , , Comm. Math. Phys., : – – 。[HHL M. Haiman, and J. Haglund, and N. Loehr,] , Amer. J. Math. : ( ), – 。 9, 10 *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*I 116 2 2003 299 318 3, 15 B. Ion, 1985, 389 419 15 , Duke Mathematical [ ] *On the Demazure character formula* [ ] Journal *Longest weight vectors and excellent filtrations.* : ( ), – 。 J A. Joseph, , Annales Scientifique de l'E.N.S., 1989 1, 19 31 2, 4 – 。 vdK W. van der Kallen, [ ] *Highest weight categories and Macdonald polynomials*Math. Z. 201 (), no. - 。 Kh A. Khoroshkin,] , arXiv:1312.7053。4 *Double crystal graphs*L¨A. Lascoux, , In Studies in Memory of Issai Schur. Birkhauser Boston, 2003。2

[M1] I. G. Macdonald, 《 *Symmetric functions and Hall polynomials*》, 第二版, 牛津大学出版社, 1995 1 。M I. G. Macdonald, 《 *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*》, 剑 [2] 桥数学论丛, 157 2003 36 。剑桥大学出版社, [ ] *Construction du groupe de Kac-Moody et applications* 剑桥, 。Ma O. Mathieu, 《》, 《巴黎科学院学报》, 第 306, 1988, 227 330 15 – 卷。MN K. *A [reproducing kernel for nonsymmetric Macdonald* Mimachi 和 M. Noumi, 《*polynomials* 91 1998 3, 621 634 》, 《杜克 2, 7, 8, 9 数学杂志》 ( ), 第 期, -。[ ] NS S. Naito、D. *Level-zero van der Kallen modules and specialization of* Sagaki, 《*nonsymmetric Macdonald polynomials at t = ∞* 26 2021 》, 《Transform. Groups》 ( ), 第 3, 1077 1111 3 – 期。NNS S. Naito、F. Nomoto、D. Sagaki, 《 [1] *Specialization of nonsymmetric Macdonald poly- Chichnik. OPI's recursion formula and Demazure submodules of level-zero extremal weight mod-*nomials at t = ∞ and Demazure submodules of level-zero extremal weight mod- *ules* 370 2018 4, 2739 2783 》, 《美国数学学会汇刊》 ( ), 第 期, –。 3 [2] NNS S. Naito、F. Nomoto、D. Sagaki, 《 *Representation-theoretic interpretation of* *donald polynomials at t = ∞* 24 2019 1, 155 191 》, 《Transform. Groups》 ( ), 第 期, –。3[Ok] A. Okounkov, 《 *Infinite wedge and random partitions*》, 《Selecta Math.》 (新系列), 7 1 57 81, 2001 1 ( ) : –。OR A. Okounkov、N. Reshetikhin, 《 [ ] *Correlation function of Schur process with appli-* *cation to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram* 》, 《美国数学学会杂志》, 16 3 581 603 2003 1 ( ) : – (电子版), 。OS D. Orr、M. Shimozono, 《 [ ] *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder* *polynomials* 47 2018 1, 91 127 》, 《代数组合学杂志》 ( ), 第 期, –。 3, 15 [ ] *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*RY A. Ram、M. Yip, 《》, 《数学进展》, 第 226 1 2011, 309 331 3, 15 卷 ( ), 第 – 页。PW F. Peter、H. Weyl, 《 [ ] *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer* *geschlossenen kontinuierlichen Gruppe* 97 737 755, 1927 》, 《数学年刊》, : –。 1 [ ] Sa Y. Sanderson, 《 *On the Connection Between Macdonald Polynomials and De-* *mazure Characters* 11 2000 269 275 》, 《代数组合学杂志》, ( ), –。 3, 15 [ ] *Enumerative Combinatorics: Volume 2* St Richard P. Stanley, 《》, 剑 桥大学出版社, 第一版, 2001 1 。TY P. Tauvel、R. W. T. Yu, 《 [ ] *Lie algebras and algebraic groups*》, Springer, 2009 年。1

Evgeny Feigin:
Department of Mathematics, HSE University, Usacheva str. 6, 119048, Moscow, Russia
Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, POB 26, Rehovot 76100, Israel
Email address: evgfeig@gmail.com

Ievgen Makedonskyi:
Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences And Applications, 11th Building, Yanqi Island, Huairou District, Beijing 101408
Email address: makedonskii e@mail.ru

Daniel Orr:
Department of Mathematics (MC 0123), 460 McBryde Hall, Virginia Tech, 225 Stanger St., Blacksburg, VA 24061 USA / Max Planck Institut fur Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: dorr@vt.edu