arXiv:2303.00247v2 [math.NA] 9 Mar 2023

关于随机向量与$O(n)$-不变量的一些评述

Alexander Kushkuley
kushkuley@gmail.com

2023年3月13日

摘要

涉及不变随机向量的计算与不变量理论直接相关（参见例如 [1]）。本文介绍了这方面的一些简单观察。我们特别指出， $O(n)$-不变量标准基元素的和，等于随机韦罗内张量的期望乘以一个已知的标量乘子。

1 引言

我们先简要概述一下将要讨论的对象（类似情形已在 [5] 中介绍）。设紧李群 G 作用于实向量空间 V。我们始终假设， V 上的标准欧几里得内积 $<,>$ 是 G-不变的（例如参见 [6]）。

设 $\mathcal{U} \subset V$ 是一个 G-不变子集。定义在 $\mathcal{U}$ 上的概率测度 μ 称为 G-不变的，如果对于任意可测的 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 以及任意$g \in G$ ，都有 $\mu(g\mathcal{U}') = \mu(\mathcal{U}')$（例如参见 [7], [8]）。如果存在这样的测度，则称 $\mathcal{U}$ 是 V 的不变概率子空间。

按照不变测度 μ 分布于 $\mathcal{U}$ 上的随机向量 x 称为 G-不变随机向量，或简称不变随机向量。

定义在概率空间 $\mathcal{U} \subset V$ 上的随机向量 x 的期望记作 $\mathbb{E}_\mu(x)$，或简记为 $\mathbb{E}(x)$。根据定义显然，对于不变随机向量 $\mathbb{E}(gx) = \mathbb{E}(x)$。

设 χ 是 G 上的归一化哈尔测度（例如参见 [6]-[8]）。于是，投影到 V 中 G 不动点子空间上的不变投影算子 $P^G\colon V \to V^G$ 可写为

$$P^G(v) = \int_G gv d\chi(g)$$

对于任意 $v \in V$（例如参见 [6]）。

以下众所周知的论述是本讨论的出发点（例如参见 [1] 或 [5]）

引理 1. 若 x 是定义在实表示 V 的任意不变概率子空间上的随机向量，而该实表示属于紧（李）群 G，则

$$\mathbb{E}(x) = \mathbb{E}(P^G(x))$$

1.1 张量与不变量

设 G 是一个紧李群，V是维数为 n的实 G-表示（的线性空间）。设 $V^{\otimes,m}$ 是 V上的 m-张量空间。向量空间 $V^{\otimes,m}$具有一个自然的 G-不变点积，其定义规则如下:

$$< x_1 \otimes \cdots \otimes x_m,\ y_1 \otimes \cdots \otimes y_m > = < x_1, y_1 > \cdots < x_m, y_m >$$

其中 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$、 $y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$是 $V^{\otimes,m}$中的任意两个可分解张量。我们固定一个标准正交基 e_1、e_2、$\cdots e_n$，它属于 V。

定义 1. 设 $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \cdots, J_k\}$ 是指标集 $J = \{1, 2, \cdots, m\}$ 的一个划分。对于 v_1，$\cdots v_k \in V$ 表示

$$v_1(J_1) \otimes \cdots \otimes v_k(J_k) \tag{1}$$

一个可分解张量，其中 $V^{\otimes,\ m}$ 在由 J_1 枚举的指标处取向量 v_1，在由 J_2 枚举的位置处取向量 v_2，依此类推。

例如，若 $m = 5$、$J_1 = \{1, 3, 5\}$ 和 $J_2 = \{2, 4\}$，则 $u(J_1) \otimes v(J_2)$ 表示张量 $u \otimes v \otimes u \otimes v \otimes u$。

注 1. 表达式 (1) 不应理解为张量积，它仅用于记号表示。描述这类张量的更标准方法可以采用杨表和置换群，但上文给出的定义已足以满足我们的需要。无论如何，为表达式 (1)赋予含义超出了本文的范围

我们始终假设划分 $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \cdots, J_k\}$的所有部分均非平凡（$|J_i| \neq 0$, $j = 1, \cdots k$），并用记号 $k = |\mathcal{P}|$表示划分 $\mathcal{P}$的部分数。如果 $m = 2k$ 且所有部分大小$|J_i|$, $i = 1, \cdots, k$ 都相等，则称划分 $\mathcal{P}$为配对（参见例如 [1]-[4]）。当 $m = 2$ 时，只有一个配对 $J_0 = (1, 2)$ $e_i(J_0) = e_i \otimes e_i$, $i = 1, \cdots, n$，并且存在一个 G-不变张量

$$I(J_0) = \sum_{i=1}^{n} e_i(J_0) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \ \in V \otimes V$$

一般来说，对于 $J_{m=2k}$ 上的配对 $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \cdots, J_k\}$，存在一个相应的 G-不变张量

$$I(\mathcal{P}) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_k = 1}^{n} e_{i_1}(J_1) \otimes e_{i_2}(J_2) \otimes \cdots e_{i_k}(J_k)$$

令 Π_m 表示集合 J 上所有配对构成的集合。对于全正交群 $O(V) = O(n)$, 经典的不变量理论第一基本定理（FFT）（例如参见 [2] ）实际上指出：

定理（正交群的第一基本定理）。若 m 为奇数，则 $V^{\otimes, m}$ 中不存在非平凡的 $O(V)$ 不变量；若 $m = 2k$，则不变量 $I(\mathcal{P})$ $\mathcal{P} \in \Pi_m$ 张成 $V^{\otimes, m}$ 中 $O(V)$ 不变量所构成的线性空间 $\mathcal{I}_m$。

大小为 $m = 2k$ 的集合上有 $(2k-1)!!$ 个 $\equiv 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$ 配对。取任意一个配对，例如 $\mathcal{P}_0 = (1, 2)(3, 4) \cdots (m-1 = 2k-1, m = 2k)$。指标集 J_m 上的置换群 S_m 自然地作用于配对集合 Π_m，显然 Π_m 是 $\mathcal{P}_0$ 的一个轨道 S_m。同样显然的是：

引理 2. 给定两个配对 $\mathcal{P}_1$

$$< I(\sigma\mathcal{P}_1), I(\mathcal{P}_2) > = < I(\mathcal{P}_1), I(\sigma^{-1}\mathcal{P}_2) >$$

对于任意 $\sigma \in S_m$。

设 $S_k \approx \mathfrak{S}_k \subset S_{m=2k}$ 是偶数编号指标的置换的一个（子）群。不难看出，如果 $k > n$，那么

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sign}(\sigma)\ I(\sigma\mathcal{P}_0) = 0 \tag{2}$$

其中 $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ 是置换的符号。关于$O(V)$不变量的所有线性关系均由经典的第二基本定理（SFT）描述（例如，参见 [2]中的简明阐述）

定理（正交群的标准基本定理）。当 $k \leq n$时，集合 $\{I(\mathcal{P})\ \ \mathcal{P} \in \Pi_{m=2k}\}$ 中的不变量元素线性无关。对于 $k > n$，该集合中元素之间的所有线性关系都是上述形式（2）的恒等式的线性组合。

定义 2. 将 $O(n)$-不变量的生成集 $I(\mathcal{P})\ \mathcal{P} \in \Pi_{m=2k}$称为_ 空间 $\mathcal{I}_m$ 的 $O(V)$ 不变量的标准集（若 $n \geq k$，则称为基）。该集合的元素称为标准不变量

1.2 随机张量与 Veronese 曲面

对于单位球面 $S(V) \subset V$，存在一个等变 Veronese 映射

$$S(V) \ni x \xrightarrow{\nu} x^{\otimes,m} = x \otimes \cdots \otimes x \in S(V^{\otimes,m})$$

映射 ν 的像 $\mathfrak{V}_m$ 称为 Veronese 曲面（例如参见 [11]）。若$\mathcal{U} \subset S(V)$ 是 $S(V)$ 中的一个 G-不变概率子空间，则 $\nu(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{V}_m$ 是 Veronese 曲面中的一个不变概率子空间（例如参见 [5]）；对于一个不变随机单位向量 $x \in \mathcal{U}$，存在与之对应的不变随机 Veronese 张量 $x^{\otimes,\ m} \in \mathcal{U}^{\otimes,\ m} \subset \mathfrak{V}_m$。如 [5] 所示，我们有

引理 3. 对于定义在任意不变概率子空间 $\mathcal{U} \subset S(V)$ 上的独立不变随机向量 x、y

$$\mathbb{E}(< x, y >^m) \ = \ \mathbb{E}(\| \ P^G(x^{\otimes,m}) \ \|^2) \tag{3}$$

证明. 根据引理 1 以及 x 和 y 的独立性

$$\mathbb{E}(< x, y >^m) = \mathbb{E}(< x^{\otimes,m},\ y^{\otimes,m} >) \ = < \mathbb{E}(x^{\otimes,m}),\ \mathbb{E}(y^{\otimes,m}) > = \ \mathbb{E}(\| \ P^G(x^{\otimes,m}) \ \|^2)$$

由引理 1（详情见 [5] ），我们还有

引理 4. 若 G 在 V 中的表示不可约，则对于定义在任意不变概率子空间 $\mathcal{U} \subset S(V)$ 上的随机向量 x

$$\mathbb{E}(x \otimes x) = \frac{1}{n} I(J_0) \ \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$$

此外，根据定义 1（参见 (1)），对于指标集 $J = \{1, 2, \cdots, m\}$ 的任意划分 $\mathcal{P}$ =$\{J_1, J_2, \cdots, J_l\}$ 以及任意不变概率子空间 $\mathcal{U} \subset S(V)$，存在一个广义 Veronese 曲面，它定义为如下映射的像

$$\mathcal{U}^{\times,l} \ni (x_1, x_2, \cdots, x_l) \to x_1(J_1) \otimes \cdots \otimes x_l(J_l) \tag{4}$$

并应用引理 1 和引理 4，我们得到

引理 5. 对于任意一组独立随机向量 $(x_1, x_2, \cdots x_l)$， $\in \mathcal{U}$定义在任意不变概率子空间 $\mathcal{U} \subset S(V)$ 上，并且对于任意配对$\mathcal{P} \in \Pi_{2l}$，令 $x(\mathcal{P})$ 为由 (4) 右端定义的随机 Veronese 张量。如果 G 在 V 中的表示是不可约的，那么

$$\mathbb{E}(x(\mathcal{P})) = \frac{1}{n^l} I(\mathcal{P})$$

2 期望与不变量

从现在起，除非另有明确说明，我们假设群G 是全正交群 $O(V) \approx O(n)$。显然，以上所述在这一特殊情形下仍然成立。注意， $S(V)$是 $O(V)$的一个轨道，因此单位球面 $S(V)$ 上的 $O(V)$-不变概率测度唯一地由 $O(n)$上的哈尔测度诱导（例如参见[8]）。通过直接计算（例如参见 [9], [10]），可得

引理 6. 对于定义在 $S(V)$上的独立不变随机向量 x, y

$$\mu_{k,n} \equiv \mathbb{E}(< x, y >^{2k}) = \frac{(2k-1)!!}{(n+2k-2)(n+2k-4)\cdots n} \tag{5}$$

令 $m = 2k$。回顾一下，空间 $\mathcal{I}_{m=2k}$ 由标准不变量集 $\mathcal{V} = \{I(\mathcal{P}) \ \mathcal{P} \in \Pi_m\}$张成。令

$$A_m = \frac{1}{(m-1)!!} \sum_{\mathcal{P} \in \Pi_m} I(\mathcal{P}_m) \in \mathcal{I}_m$$

为 $\mathcal{I}_m$中标准不变量集的平均值。将式 (5) 右侧的分母记为 $P(n, k)$，并令 $\mathcal{G}$ 表示有序标准不变量集 $\mathcal{V}$的格拉姆矩阵。

定理 1. ($m = 2k$)

(i) Veronese 曲面 $\mathfrak{V}_m$ 在 $\mathcal{I}_m$ 上的正交投影只有一个点$\mu_{k,\ n} A_m$。

(ii) $\mathcal{G}$ 任意一行元素的和等于 $P(n, k)$，而 $\mathcal{G}$ 元素的平均值等于 $\frac{1}{\mu_{k\ ,\ n}}$

(iii) 因此，随机韦罗内张量 $x^{\otimes,\ 2k}$ 的期望等于 $O(V)$-不变量标准基元素的平均值除以 $\mathcal{G}$矩阵元素的平均值，换言之

$$\mathbb{E}(x^{\otimes, m=2k}) = \frac{1}{P(n,k)} \sum_{\mathcal{P} \in \Pi_m} I(\mathcal{P}) \ = \ \frac{(2k-1)!!}{P(n,k)} A_m \ \equiv \ \mu_{k,n} A_m$$

证明。由于 $\mathfrak{V}_m$ 是 $S(V)$的一个轨道，它在 $\mathcal{I}_m$ 上的（等变）正交投影仅由一个点构成。为求出这个点，令

$$P = \sum_{\mathcal{P}\in\Pi} \alpha_{\mathcal{P}} I(\mathcal{P}_m) \in \mathcal{I}_m$$

是 Veronese 张量 $a^{\otimes,\ m}$, $a \in S(V)$ 在 $\mathcal{I}_m$ 上的投影，其中 $\alpha_{\mathcal{P}}, \mathcal{P} \in \Pi_m$ 是必须满足“正规”方程的实数

$$< P - a^{\otimes,m},\ I(\mathcal{P}) >=\ 0,\ \text{for all}\ \mathcal{P} \in \Pi_m$$

显然，对于所有 $\mathcal{P} \in \Pi_m$，$< a^{\otimes,\ m}, I(\mathcal{P}) >= 1$。利用配对集合上的适当次序，可将这一线性方程组改写为

$$\mathcal{G}\alpha = 1_L \tag{6}$$

其中 $L = (2k-1)!!$ α 是一个未知向量，其坐标为 $\alpha_{\mathcal{P}}, \mathcal{P} \in \Pi_m$，而 1_L 是各分量均为 1 的 L 维向量。由于 $\mathcal{V}$ 是一个 S_m-轨道，根据引理 2，$\mathcal{G}$ 的各行和彼此相等。将 $\mathcal{G}$ 的唯一行和记为 N，我们看到向量 $(1/N)1_L$ 是方程组 (6) 的一个解。通过比较 (3) 和 (5)，可以很容易地求出 N 的值。事实上，由引理 3（其中 $m = 2k$）以及 (5)、(6) 可得

$$L/N = \frac{1}{N^2} < \sum_{\mathcal{P}\in\Pi_m} I(\mathcal{P}),\ \sum_{\mathcal{P}\in\Pi_m} I(\mathcal{P}) >=\ L/P(n,k) \equiv \mu_{k,n}$$

由此可得 $N = P(n,k)$，并且数值 $1/\mu_{k,\ n}$ 是格拉姆矩阵 $\mathcal{G}$中元素的平均值。这就证明了 (i) 和 (ii)，而根据引理 1，(iii) 等价于 (i)。

现在只需通过直接验证即可得出以下推论

定理 2. 设 $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \cdots, J_l\}$ 是指标集合$J = \{1, 2, \cdots, m\}$的一个划分，设 $x_1, x_2, \cdots x_l \in S(V)$ 是相互独立的 $O(V)$-不变随机向量，并设 $X = x_1(J_1) \otimes \cdots \otimes x_l(J_l)$ 是如 (4) 中所述的广义随机 Veronese 张量

(i) 若集合 J_i，$i = 1, \cdots l$ 中至少有一个的基数为奇数，则$\mathbb{E}(X) = 0$

(ii) 若 $|J_i| = 2k_i$、$i = 1$、$\cdots l$，令 $\Pi(J_i)$ 为集合 J_i、$i = 1$、$\cdots l$ 上所有 $(2k_i - 1)!!$ 配对的集合，并令 $\Pi = \Pi(J_1) \times \cdots \times \Pi(J_l)$。则采用定义 1 的记号（参见注 1）

$$\mathbb{E}(X) = \left(\prod_{i=1}^{l} \frac{(2k_i-1)!!}{P(n,k_i)}\right) \frac{1}{|\Pi|} \sum_{(\mathcal{P}_1,\ \cdots,\mathcal{P}_l)\in\Pi} I(\mathcal{P}_1) \otimes \cdots \otimes I(\mathcal{P}_l)$$

推论 1. 设 $\mathcal{V}_0 = \{I(\mathcal{P}_i)\ \mathcal{P}_i \in \Pi' \subset \Pi_m\}$、$i = 1$、$\cdots$、$m_0 \leq m$ 是 $\mathcal{I}_{m=2k}$ 的一个有序基，且 $\mathcal{G}_0$ 是 $\mathcal{V}_0$ 对应的格拉姆矩阵。令 s_i、$i = 1$、$\cdots$、m_0 为 $\mathcal{G}_0^{-1}$ 的第 i 行元素之和。则下列恒等式成立

$$\sum_{i=1}^{m_0} s_i I(\mathcal{P}_i) \ = \ \mu_{k,n} A_m$$

证明。遵循定理的证明，并注意：(a) Veronese 曲面在 $\mathcal{I}_m$ 上的投影属于 $\mathcal{V}_0$ 的线性张成空间；以及 (b)，$(s_1, \cdots, s_{m_0})^T = \mathcal{G}_0^{-1} 1_{m_0}$

注释 2。在 $n < k$ 的情形下求出 s_i 的显式取值，可能是一个非平凡问题。从标准不变量集中选取一组基的方法可见于 *[3]*

2.1 标准不变量集的格拉姆矩阵

对于任意两个划分 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$，以 $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ 表示它们的最小上界。以下这个有用的论断是众所周知的（参见例如 [1] 和 [4]）。

引理 7。设 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ 和 $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_k\}$ 是指标集 $J = \{1, 2, \cdots, m = 2k\}$ 的两个配对，令 $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \cdots, R_l\} = \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$，并设 $l = |\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}|$。则

$$< I(\mathcal{P}), I(\mathcal{Q}) > = \ n^l \tag{7}$$

不难为这一陈述给出组合证明。不过，我们更倾向于通过计算期望来验证这一事实。根据引理 5，存在广义随机 Veronese 张量 $x(\mathcal{P}) = x_1(P_1) \otimes \cdots \otimes x_k(P_k)$ 和 $y(\mathcal{Q}) = y_1(Q_1) \otimes \cdots \otimes y_k(Q_k)$，使得

$$\mathbb{E}(x(\mathcal{P})) = \frac{1}{n^k} I(\mathcal{P}) \text{ and } \mathbb{E}(y(\mathcal{Q})) = \frac{1}{n^k} I(\mathcal{Q}) \tag{8}$$

进一步可以假设随机单位向量 x_i、y_i、$i = 1$、$\cdots$、k 两两独立。通过分离变量，我们有

$$\mathbb{E}(< x(\mathcal{P}), y(\mathcal{Q} >) = \prod_{i=1}^{l} \int_{S(V)^{|\Theta_i|}} \prod_{x_a, y_b \in \Theta_i} < x_a, y_b > d\mu_i \tag{9}$$

其中，变量集合 Θ_i 两两不相交，$|\Theta_i| = |R_i|, i = 1, \cdots, l$，且在每个对乘积 Θ_i 积分的积分中，每个变量恰好出现两次

单位球面 $|\Theta_i|$ 的乘积（记作 $S(V)^{|\Theta_i|}$）。在向量坐标中，第 i 个积分可拆分为若干单项式的积分。在这些单项式中，恰好有 n 个是由 $|R_i|$ 个平方组成的乘积，其余单项式都至少含有一个形如 $x_i x_j, i \neq j$ 的独立倍数（同一向量的两个不同坐标）。显然（参见引理 4 和 [5]），平方项各自的贡献为 $n^{-|R_i|}$，而其他所有项的贡献均为零。因此，(9) 的右侧等于 $n^{-(2k-l)}$，由 (8) 可得

$$\frac{1}{n^{2k-l}} = \mathbb{E}(< x(\mathcal{P}), y(\mathcal{P}) >) = \frac{1}{n^{2k}} < I(\mathcal{P}), I(\mathcal{Q}) >$$

这与（7）相同。

根据引理 7，格拉姆矩阵 $\mathcal{G}$ 的每个元素都是 n 的幂；根据定理 1（ii），$\mathcal{G}$ 每一行元素的和等于 $P(n,k) = n^k + c_1 n^{k-1} + \cdots c_k n$，这是关于 n 的多项式在固定整数系数下的一个值（这些系数不依赖于 n）。因此，$\mathcal{G}$ 的每一行恰好有一个元素等于 n^k，有 c_1 个元素等于 n^{k-1}，依此类推。因此，很容易看出，以下陈述成立

推论 2. 对于 $t = 1$、3、5、 $\cdots$、 $2k-1$，设 M_t 是一个 $t \times t$ 矩阵，其所有对角元素均等于 n，所有非对角元素均等于 1。设 M 为矩阵 M_t、 $t = 1$、3、 $\cdots$、 $2k-1$ 的克罗内克积。那么， $\mathcal{G}$ 和 M 的各行仅相差一个（依赖于行的）置换。

由引理 1、5 和 7 的另一个直接应用可得

推论 3. 设 G 是一个紧李群，且 V是一个实 G-表示。对于任意一组 $2k$ 个相互独立的随机 G-不变向量

$$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\},\ y = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\} \in \mathcal{U}$$

定义在任意 G-不变概率子空间 $\mathcal{U} \subset S(V)$ 上，并且对于任意配对 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q} \in \Pi_{2k}$，令 $x(\mathcal{P})$ $y(\mathcal{P})$ 表示相应的广义随机 Veronese 张量，它们属于 $\mathcal{U}^{\otimes,\ m}$ 并按式 (4) 定义。若 G 在 V 中的表示不可约，则

$$\mathbb{E}(< x(\mathcal{P}), y(\mathcal{Q} >) = \frac{1}{n^{2k - |\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}|}}$$

2.2 魏因加滕演算

设 X 是 $O(V) \approx O(n)$ 中的 Haar 分布矩阵。魏因加滕演算所处理的标准问题之一（例如参见 [1] 及其中的参考文献）是计算矩 $\mathbb{E}(x_{i_1,\ j_1} \cdots x_{i_m,\ j_m})$，其中 $x_{i,\ j}$

是 X 的 (i, j) 项。为在此情形下应用定理 2，回顾 $x_{i,\ j} = < Xe_i、\ e_j >$，从而（例如参见 [1]）

$$\mathcal{E} \equiv \mathbb{E}(x_{i_1,j_1} \cdots x_{i_m,j_m}) = \mathbb{E}(< Xe_{i_1}, e_{j_1} > \cdots < Xe_{i_m}, e_{j_m}) > \tag{10}$$

令 $\{i'_1, \cdots i'_l\}$ 为式 (10) 中所有不同第一指标的集合。假设 i'_t 在序列 $i_1 \cdots i_m$中出现 r_t 次，$\sum_{t=1}^{l} r_t = m$。令 $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \cdots, J_l\}$ 为指标集合 $J = \{1, 2, \cdots, m\}$ 的一个划分，使得 J_1 由 J的前 r_1 个元素组成，J_2 由 J 接下来的 r_2 个元素组成，依此类推。按照划分 $\mathcal{P}$ 重新排列等式 (10) 右边的第一指标，会使点积项中对应的第二指标序列发生置换。将置换后的第二指标序列记为 $\sigma = (j'_1, \cdots j'_m)$。将序列 σ拆分为 σ_1、σ_2、$\cdots$、σ_l 个子序列，使得 σ_1 包含 σ的前 r_1 个元素，σ_2 包含 σ 接下来的 r_2 个元素，依此类推。此外，对于 $\sigma_i = (a_1, a_2, \cdots, a_{r_i})$，令 $e(\sigma_i) = e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_{r_i}}$，$i = 1, \cdots, l$。下一步是构造一个随机的 $O(n)$-不变 Veronese 张量（参见式 (4)）

$$\mathcal{X} = (Xe_{i'_1})(J_1) \otimes \cdots \otimes (Xe_{i'_l})(J_l) \tag{11}$$

矩阵 X 的列 $Xe_{i'_t}$、$t = 1$、$\cdots l$ 作为随机向量并非相互独立。然而，这些列两两正交，因此，对于 J 上任何不是划分 $\mathcal{P}$ 的细化的配对 $\mathcal{Q}$，都有 $< I(\mathcal{Q})\ \mathcal{X} >= 0$。因此，将引理 1 中的等变投影算子 $P^{O(V)}$: $V^{\otimes, m} \to \mathcal{I}_m$ 应用于广义随机 Veronese 张量 (11)，并仿照定理 1 的证明进行推导，可得

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = P^{O(V)}(\mathcal{X}) = P_1^{O(V)}((Xe_{i'_1})(J_1)) \otimes \cdots \otimes P_l^{O(V)}((Xe_{i'_l})(J_l)) \tag{12}$$

其中 $P^{O}{}_{(V)\,t}$ 是等变投影算子 $P^{O(V)}{}_{)\,t}$: $V^{\otimes, k_t} \to \mathcal{I}_{k_t}$，根据引理 1，(12) 右侧等于

$$\mathbb{E}((Xe_{i'_1})(J_1)) \otimes \cdots \otimes \mathbb{E}((Xe_{i'_l})(J_l))$$

采用已引入的记号，我们有一个计算方法。

定理3。（参见定理 2）。(10) 中的期望 $\mathcal{E}$ 可按如下方式计算：

(i) 如果 J_i、$i = 1$、$\cdots l$ 中至少一个集合的 $|J_i|$ 为奇数，则 $\mathcal{E} = 0$

(ii) 如果 $r_i = |J_i| = 2k_i$、$i = 1$、$\cdots l$，令 A_i 为由集合 J_i、$i =$1、$\cdots l$ 的 $(2k_i - 1)$!! 种配对所定义的标准 $2k_i$ $O(V)$-不变量的平均值。那么

$$\mathcal{E} = \left(\prod_{i=1}^{l} \frac{(2k_i - 1)!!}{P(n, k_i)} \right) < A_1, e(\sigma_1) >< A_2, e(\sigma_2) > \cdots < A_l, e(\sigma_l) >$$

推论 4. 如果指标 i_1、$\cdots i_l$ 两两不同，那么

$$\mathbb{E}(x_{i_1,j_1}^{2k_1}\cdots x_{i_l,j_l}^{2k_l})=\prod_{i=1}^{l}\frac{(2k_i-1)!!}{P(n,k_i)}$$

参考文献

[1] Benoˆıt Collins、Sho Matsumoto、Jonathan Novak, 《Weingarten 演算》, arXiv:2109.14890v1, 2021[2]GUSTAV LEHRER AND RUIBIN ZHANG, 《正交群不变量理论的第二基本定理》, arXiv:1102.3221v1, 2011[3]Jinho Bike、Eric M. Rains, 《递增子序列的代数方面》, Duke Math. J., 109, 1:1-65, 2001[4]JAMES A. MINGO AND MIHAI POPA, 《实二阶自由性与 Haar 正交矩阵》, arXiv:1210.6097v3, 2013[5] Alexander Kushkuley, 《关于随机向量与不可约表示的一个注记》, arXiv:2110.15504v2, 2022[6] J. Frank Adams, 《李群讲义》, 纽约, W.A. Benjamin, 1969[7]Herbert Federer, 《几何测度论》, 数学科学基础丛书, 153, 施普林格出版社, 1969[8] Serge Leng, $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley, 1975[9] Gerald B. Folland, 《如何在球面上对多项式积分》, 《美国数学月刊》, 第108卷, 第5期, （2001年5月）[10] Elizabeth Meckes, 《经典紧群的随机矩阵理论》, 剑桥大学出版社, 2019

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Veronese_surface