S谱理论的精细结构：五维中的谱

FABRIZI O COLOMBO、ANTONINO DE MARTINO、STEFANO PINTON 和 IRENE SABADIN I

arXiv:2303.00253v1 [math.SP] 1 Mar 2023

ABSTRACT. 全纯函数在算子理论中发挥着至关重要的作用，而柯西公式是定义算子函数的重要工具。Fueter-Sce-Qian 延拓定理通过两个步骤将全纯函数延拓到超全纯环境。第一步得到切片超全纯函数类；其柯西公式使得能够基于 S谱为非交换算子定义所谓的 S函数演算。第二步中，这一延拓过程生成单生成函数；相关的单生成泛函演算基于单值谱，并将Weyl泛函演算作为特例包含在内。本文表明，从切片超全纯函数到单生成函数的延拓算子存在多种可能的分解方式，由此产生不同的函数空间。这些空间中的积分表示使得能够定义基于 S谱的相应函数演算。函数空间及其相应的函数演算构成所谓的*fine structure of the spectral theories on the S-spectrum*。在可能的精细结构中，有调和函数和多重调和函数，以及相应的调和泛函演算和多重调和泛函演算。精细结构的研究取决于所考察的维数；本文详细研究五维情形，并对这些结构一一加以描述。五维情形至关重要，因为它有助于确定几乎所有函数空间；这些函数空间也会出现在高于五维的情形中，但其阶数有所不同。

美国数学学会分类 47A10, 47A60.
关键词： S-谱上的谱理论、调和精细结构、调和泛函演算、狄拉克精细结构、Fueter-Sce-Qian 延拓定理。

CONTENTS

1. 引言 2 2. Fueter-Sce 映射定理生成的函数空间 7 3. 五维轴型函数空间 10 4. 五维中的精细结构 12 5. 轴型精细结构空间的微分方程组 14 6. 精细结构空间中函数的积分表示 18 6.1. 精细结构空间的核及其正则性的结构 20 6.2. 精细结构函数空间的积分表示 26 7. 精细结构空间的核的级数展开 27 8. 关于 SC-函数演算和 F-函数演算的预备知识 38 9. 精细结构的函数演算 40 10. F-函数演算的乘积法则 51 11. 附录：五维中所有可能精细结构的可视化 52 参考文献 54

1. Introduction

过去15年来，关于四元数算子的 S-谱的谱理论得到了广泛发展，其动机源于对四元数量子力学的精确表述（见 [8, 32]）；近来还发现了其他应用，其中包括对分数阶扩散问题有用的向量算子的分数次幂，见 [15, 16, 18]。关于 S-谱上的四元数谱理论，主要参考文献是著作 [3, 4, 19, 20, 33] 及其中的参考文献。关于克利福德代数框架下 S-谱的谱理论，见[25], ，它与四元数谱理论并行起步，但在过去几年中出现了新的、出乎意料的发展。事实上，尽管人们预期并在 [2] 中证明了 S-谱上的四元数谱定理的一个精确版本（关于扰动结果，另见 [11]），但直到最近才证明了完全克利福德算子的谱定理，见 [22]。此外， S-函数演算的有效性被扩展到了克利福德代数框架之外，见 [21]„ 并且在 [23] 中被用于定义克利福德变量的切片单值函数。

本文属于一个与 Fueter-Sce-Qian映射定理相关的新研究方向。为说明我们的结果，我们简要回顾这一映射定理。粗略地说，它是一个两步过程，将单个复变量的全纯函数推广到超复数框架。第一步生成切片超全纯函数，第二步生成单生成函数，即狄拉克算子的核中的函数。更准确地说，令 $\mathcal{O}(D)$ 表示 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上全纯函数的集合，并令 $\Omega_D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 表示由 D 诱导的集合（见第2节）。将第一个 Fueter-Sce-Qian 映射 T_{FS1} 应用于 $\mathcal{O}(D)$，可生成 Ω_D 上的切片单值函数集合 $\mathcal{SH}(\Omega_D)$（这些函数后来证明是内蕴的）；将第二个 Fueter-Sce-Qian 映射 T_{FS2} 应用于 $\mathcal{SH}(\Omega_D)$，则可生成 Ω_D 上的轴向单生成函数。我们用 $\mathcal{AM}(\Omega_D)$ 表示这类第二步得到的函数。该延拓过程如图所示:

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{T_{FS2}=\Delta^{(n-1)/2}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

其中， $T_{FS2} = \Delta^{(n-1)/2}$和 Δ是 $n+1$维数中的拉普拉斯算子（有时我们会写作$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}$ 以指定维数）。Fueter-Sce-Qian映射定理根据其生成的两类超全纯函数，导出了两种谱理论：利用切片超全纯函数的柯西公式，可以定义基于 S-谱的 S函数演算；而利用单生成函数的柯西公式，则可以得到基于单值谱的单生成泛函演算。这一函数演算由A. McIntosh及其合作者引入（参见 [36]），用于定义巴拿赫空间上非交换算子的函数；正如书籍 [35, 40]中所讨论的，它有多种应用。

Fueter-Sce 映射定理（当 n 为奇数时）提供了定义单生成泛函演算的另一种方式。其主要思想是将 Fueter-Sce算子 T_{FS2} 作用于切片超全纯柯西核，并以积分形式表述 Fueter-Sce 映射定理。利用这一积分表述，我们可以定义所谓的 F-泛函演算；它是一种单生成泛函演算，但其基础是 S-谱。用图表示为:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH}(\Omega_D) & & \mathcal{AM}(\Omega_D) \\ \downarrow & & \\ \text{切片柯西公式} & \xrightarrow{T_{FS2}=\Delta^{(n-1)/2}} & \text{Fueter} - \text{Sce定理的积分形式} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S\text{–函数演算} & & F\text{–函数演算} \end{array}$$

请注意，在上图中，从轴向单生成函数空间 $\mathcal{AM}(\Omega_D)$ 出发的箭头缺失了，因为 F-泛函演算是由切片超全纯柯西公式推导出来的。

现在，我们可以利用以下观察结果来定义 S-谱上谱理论的精细结构。设 $h := \frac{n-1}{2}$ 为所谓的 Sce 指数， Δ 为维数 $n+1$中的拉普拉斯算子：算子 $T_{FS2} := \Delta^h$将切片超全纯函数 $f(x)$映射为如下给出的单生成函数 $\breve{f}(x)$

$$\breve{f}(x) = \Delta^h f(x), \quad x \in \Omega_D.$$

若以 e_ℓ, $\ell = 1,\ldots,n$ 表示克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 的单位元，则狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 及其共轭 $\overline{\mathcal{D}}$ 定义如下

$$\mathcal{D} := \partial_{x_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_{x_i}, \quad \overline{\mathcal{D}} = \partial_{x_0} - \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_{x_i}.$$

拉普拉斯算子 Δ^h 的幂可以用狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 及其共轭 $\overline{\mathcal{D}}$ 进行因式分解，因为

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \Delta.$$

因此，可以对切片超全纯函数 $f(x)$反复作用狄拉克算子及其共轭，直至达到拉普拉斯算子的最高次幂，即 Sce 指数。这意味着可以构造出不同的函数集，它们介于切片超全纯函数集与轴向单生成函数集之间。

我们将 S-谱上的谱理论精细结构称为由 T_{FS2} 在 Fueter-Sce 延拓定理中的因式分解所诱导的函数空间及其相关函数演算的集合。

最重要的因式分解之一导出了所谓的狄拉克精细结构，它对应于由 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 交替组成的序列，共 h 次，例如

$$T_{FS2} = \Delta^h_{\mathbb{R}^{n+1}} = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} \ldots \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}.$$

Fueter-Sce-Qian 延拓定理也有相应的精细结构，即当 n 为偶数时；不过，这种结构涉及拉普拉斯算子的分数次幂，将在未来的论文中讨论。

S-谱上的谱理论精细结构以统一的方式生成了若干类函数，其中一些已经在文献中有所研究。我们可以通过定义阶数为 (k,ℓ) 的多解析全纯克利福德函数来概括这些函数，其定义如下。

设 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 U 为一个开集。若函数 $f\colon U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于 $\mathcal{C}^{2k+\ell}(U)$ 类，则称其为阶数为 (k,ℓ) 的（左）多解析全纯克利福德函数，若

$$\Delta^k \mathcal{D}^\ell f(x) = 0 \quad \forall x \in U,$$

其中 $0 \le k \le \frac{n-1}{2}$ 和 $\ell \ge 0$。

显然，次数为 k 的多调和函数是多解析全纯克利福德函数的一个特例。事实上，若函数 $f\colon U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于 $\mathcal{C}^{2k}(U)$ 类，则称其在开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 中为次数 k 的多调和函数，当且仅当

$$\Delta^k f(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

类似地，阶数为 m 的多解析函数包含于多解析全纯克利福德函数类中，因为它们是在开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上定义、取值于 $\mathbb{R}_n$ 且属于 $\mathcal{C}^m(U)$ 类的函数 f，满足

$$\mathcal{D}^m f(x) = 0, \qquad \forall x \in U.$$

在 [12] 中，我们研究了 $n = 3$时的狄拉克精细结构，即四元数情形。特别地，我们研究了与以下分解相关的精细结构：

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{1.1}$$

其中，$\mathcal{AH}(\Omega_D)$ 是轴向调和函数的集合，它们的积分表示导出了 S-谱上的调和泛函演算。这一结构还使我们能够得到 F-泛函演算的乘积公式，见 [12, 定理 9.3]。

然而，由于 $\Delta = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$，我们可以交换算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 的次序。这就导出了以下分解:(1.1).

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D). \tag{1.2}$$

其中，$\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$ 是一个多解析函数空间。这一结构及其函数演算在 [29] 中进行了研究。

显然，随着克利福德代数的维数增加，可能性也会增多。我们用 $\mathcal{FS}(\Omega_D)$ 表示与精细结构相关的函数空间集合。这些函数空间介于切片超全纯函数集合与轴向单生成函数集合之间；在五维中，恰有七个这样的空间，即： $\mathcal{ABH}(\Omega_D)$，轴向双调和函数； $\mathcal{ACH}_1(\Omega)$，一阶轴向克利福德全纯函数（这是 (1, 1) 阶的简写）； $\mathcal{AH}(\Omega_D)$，轴向调和函数； $\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$，二阶轴向多解析函数； $\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$，一阶轴向反克利福德函数； $\mathcal{ACP}_{(1,2)}$ ，(1, 2) 阶轴向多解析克利福德函数； $\mathcal{AP}_3(\Omega_D)$，三阶轴向多解析函数。它们将在下文中给出精确定义。

需要特别指出的是，这些函数空间在文献中出现在不同的语境下，彼此之间似乎并无关联。本文将证明，它们都作为 Fueter-Sce 构造中的精细结构出现。在五维以上，还会有另一个函数空间未列入上述列表；加入该函数空间后，所有精细结构都可以利用这些不同阶的函数空间加以描述。

在五维中，存在不同的狄拉克型精细结构。为了表示精细结构的类型，我们将定义特定精细结构的狄拉克 $\mathcal{D}$ 和共轭狄拉克 $\overline{\mathcal{D}}$ 算子排列成一个数组。例如，类型为 $(\mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}})$ 的狄拉克精细结构表示为：

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AHC}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{1.3}$$

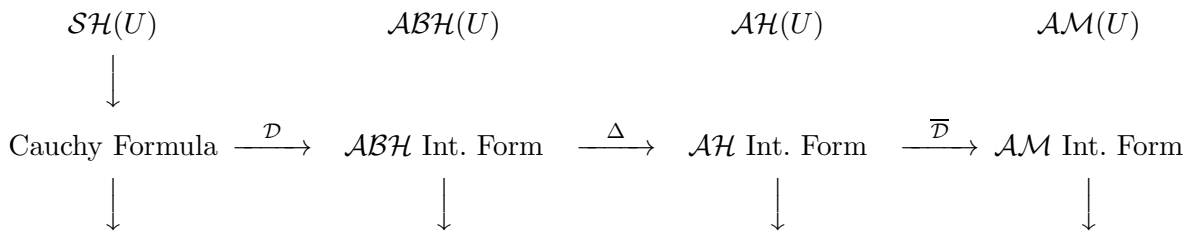
其中的空间将在下文中予以精确定义。类型为 $(\mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}})$ 的狄拉克精细结构对于证明 F-函数演算的乘积法则至关重要（见定理 10.3）。然而，通过重新排列 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 的顺序，可以得到其他结构，其中会涉及其他函数集。

另一种有趣的精细结构是调和结构，其中只出现调和 $\mathcal{AH}(\Omega_D)$和双调和 $\mathcal{ABH}(\Omega_D)$函数集：

$$\mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D).$$

通过依次应用上述序列中的算子于切片超全纯函数的柯西核，可以得到 $\mathcal{AH}(\Omega_D)$ 和 $\mathcal{ABH}(\Omega_D)$ 中函数的积分表示。

由这些积分公式，我们在 S-谱上定义相关的函数演算，如下图所示:



其中，这种精细结构的函数演算包括双调和 $\mathcal{ABH}$-函数演算和调和 $\mathcal{AH}$-函数演算，二者都基于 S-谱。请注意，轴向单生成函数 $\mathcal{AM}$ 的积分表示已由积分形式的 Fueter-Sce 映射定理给出，其函数演算为 F-函数演算，参见 [27]。

更确切地说，考虑 $\mathbb{S}$，即模为 1 的纯虚副向量球面。注意，给定一个元素 $x = x_0 + \underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$，若 $\underline{x} \neq 0$，我们可以令 $J_x = \underline{x}/|\underline{x}|$；给定一个元素 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$，集合

$$[x] := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ y = x_0 + J|\underline{x}|, \ J \in \mathbb{S}\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个 $(n-1)$ 维球面。为了初步了解调和函数和双调和函数的积分表示，我们回顾一下，对于 s、 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 且 $x \notin [s]$，函数

$$\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} := (s^2 - 2\mathrm{Re}(x)s + |x|^2)^{-1},$$

以及由下式定义的左切片超全纯柯西核 $S_L^{-1}(s,x)$

$$S_L^{-1}(s,x) := (s - \overline{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}.$$

设 $n = 5$，并考虑满足 $x \notin [s]$ 的 $s, x \in \mathbb{R}^6$ 所对应的函数

$$S_{\mathcal{D},L}^{-1}(s,x) := -4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}, \tag{1.4}$$

and

$$S_{\Delta\mathcal{D},L}^{-1}(s,x) := \Delta\mathcal{D}\left(S_L^{-1}(s,x)\right) = 16\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}. \tag{1.5}$$

分别称为左切片 $\mathcal{D}$-核和左切片 $\Delta\mathcal{D}$-核。设 $W \subset \mathbb{R}^6$ 为开集合，且 U 为满足 $U \subset W$ 的切片柯西域。那么对于 $J \in \mathbb{S}$ 和 $ds_J = ds(-J)$，对于$f \in \mathcal{SH}_L(W)$，函数 $\tilde{f}_\ell(x) := \Delta^{1-\ell}\mathcal{D}f(x)$，$0 \leq \ell \leq 1$是 $\ell+1$-调和的，并且有如下积分表示

$$\tilde{f}_\ell(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}^{-1}(s,x)ds_J f(s),$$

成立，其中积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 J。如果 $f \in \mathcal{SH}_R(W)$，则有类似的积分表示。

现在，我们从算子理论的角度阐述调和精细结构的函数演算。记 $\mathcal{B}(V)$ 为所有有界 $\mathbb{R}$-线性算子组成的空间， $\mathcal{B}(V_n)$ 为 $V_n = \mathbb{R}_n \otimes V$ 上所有有界 $\mathbb{R}_n$-线性算子组成的空间。 S-谱定义为

$$\sigma_S(T) = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ T^2 - 2s_0T + |s|^2\mathcal{I} \ \text{ is not invertible in } \ \mathcal{B}(V_n)\}.$$

该谱的定义用于具有不可交换分量的 $\mathcal{B}(V_n)$ 中的算子。为了研究 $\mathcal{B}(V_n)$ 中 S-谱的精细结构，我们将考虑有界抛物向量算子 $T = e_0T_0 + e_1T_1 + ... + e_nT_n$，其分量 $T_\ell \in \mathcal{B}(V)$ 可交换,

$\ell = 0$、1、.....、 n，并将该集合记为 $\mathcal{BC}^{0,\,1}(V_n)$。在这种情况下， S-谱最恰当的定义是其交换版本（也称为 F-谱），即:

$$\sigma_F(T) = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad s^2\mathcal{I} - (T + \overline{T})s + T\overline{T} \quad \text{is not invertible in } \mathcal{B}(V_n)\}$$

其中，算子 $\overline{T}$ 定义为

$$\overline{T} = T_0 - T_1 e_1 - \cdots - T_n e_n.$$

注意，已证明

$$\sigma_F(T) = \sigma_S(T) \quad \text{for all} \quad T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_n).$$

令 $T \in \mathcal{BC}^{0,\,1}(V_n)$，并回顾一下， S-预解集定义为

$$\rho_S(T) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \sigma_S(T).$$

那么，交换伪 SC-预解算子为:

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} := (s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T})^{-1} \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T)$$

而左 SC-预解算子为:

$$S_L^{-1}(s,T) := (s\mathcal{I} - \overline{T})(s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T})^{-1} \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T),$$

类似地，我们有右 SC-预解算子。

在维数为 $n = 5$ 的情形下，我们取 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_5)$，并令 $ds_J = ds(-J)$，其中 $J \in \mathbb{S}$。设 f 是 $\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 中的一个函数（对 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 也类似）。设 U 是一个有界切片柯西域，满足 $\sigma_S(T) \subset U$ 且 $\overline{U} \subset \mathrm{dom}(f)$。对于 $\ell = 0$，我们有如下 $\ell + 1$-调和泛函演算的定义，1：对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 的函数 $\tilde{f}_\ell = \Delta^{1-\ell}\mathcal{D}f$，定义

$$\tilde{f}_\ell(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}(s,T) ds_J f(s), \tag{1.6}$$

其中:

(I) 左 $\mathcal{D}$-预解算子 $S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T) := -4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T), \tag{1.7}$$

(II) 左 $\Delta\mathcal{D}$-预解算子 $S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T) := 16\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}, \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T). \tag{1.8}$$

我们指出，右情形也有类似的公式。

论文结构。除本引言外，全文共分为10节。

在第2节中，我们介绍一些由二阶Fueter-Sce算子 T_{FS2}的因式分解自然引出的函数空间。这些定义适用于任意维数 n。

第3节包含维数 $n = 5$ 下Fueter-Sce算子 T_{FS2} 的因式分解；特别地，我们定义了轴型函数空间。

在第4节中，我们引入与函数空间及相关函数演算相联系的 S-谱谱理论精细结构的概念。对于 $n = 5$，我们可以完整地描述这些精细结构，并在附录中提供配有图示的描述。

在第5节中，我们研究轴型精细结构空间的微分方程组。具体而言，类比于轴向单生成函数所满足的韦库亚型微分方程组，我们明确给出了维数为 $n = 5$ 时精细结构空间的所有微分方程组。

在第6节中，我们给出精细结构空间中函数的积分表示。具体来说，我们回顾切片超全纯柯西公式，并将与精细结构相关的算子作用于切片超全纯柯西核，从而推导出这些积分表示。

在第 7 节中，我们证明一些技术引理，以写出精细结构空间之核的显式级数展开。这些结果对算子理论至关重要，因为它们使我们能够定义精细结构的预解算子的级数展开。

接着，在第 8 节汇集了关于 SC-函数演算和 F-函数演算的一些预备结果之后，我们在第 9 节定义精细结构的函数演算。为此，我们利用第 7 节中的结果，定义这些函数演算的预解算子的级数展开。请注意，与精细结构相关的所有预解算子都涉及 S-谱。

最后，我们将该理论应用于 F-函数演算：在第 10 节中，我们利用类型为（$\mathcal{D}$，$\overline{\mathcal{D}}$，$\mathcal{D}$，$\overline{\mathcal{D}}$）的狄拉克精细结构，证明 F-函数演算的乘积法则。

2. Function spaces generated by the Fueter-Sce mapping theorem

本节介绍一些克利福德代数值函数的函数空间，以及关于 S-谱的谱理论中的一些概念。我们首先固定一些记号。令 $\mathbb{R}_n$ 为由 n 个虚单位 e_1，.....，e_n 生成且满足关系 $e_\ell e_m + e_m e_\ell = 0$、$\ell \neq m$、$e_\ell^2 = -1$. 的实克利福德代数。克利福德代数中的一个元素记作 $\sum_A e_A x_A$，其中 $A = \{\ell_1 \dots \ell_r\} \in \mathcal{P}\{1, 2, \dots, n\}$，$\ell_1 < \dots < \ell_r$为多重指标，且 $e_A = e_{\ell_1} e_{\ell_2} \dots e_{\ell_r}$、$e_\emptyset = 1$。点（$x_0$，$x_1$，.....，$x_n$）$\in \mathbb{R}^{n+1}$将与元素 $x = x_0 + \underline{x} = x_0 + \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}_n$相对应，称为副向量；其 x 的实部 x_0 也记作 Re（x）。x 的向量部定义为 $\underline{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$。$x$ 的共轭记作 $\overline{x} = x_0 - \underline{x}$，其欧几里得模由 $|x| = (x_0^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$给出。模为 1 的纯虚抛物向量球面定义为

$$\mathbb{S} := \{\underline{x} = e_1 x_1 + \dots + e_n e_n \,|\, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

注意，若 $J \in \mathbb{S}$，则 $J^2 = -1$。因此，J 是一个虚单位，我们将其记作

$$\mathbb{C}_J = \{u + Jv \,|\, u, v \in \mathbb{R}\},$$

复数的一个同构副本。

为了给出切片超全纯函数的定义，我们需要定义这些函数所在的自然定义域。

定义 2.1。设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$。

- 我们称 U为轴对称的，若对每个 $u + Iv \in U$，所有满足 $u + Jv$且$J \in \mathbb{S}$ 的元素都属于 U。
- 我们称 U 为切片域，若 $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ 且对每个$J \in \mathbb{S}$，$U \cap \mathbb{C}_J$ 都是 $\mathbb{C}_J$ 中的一个区域。

定义 2.2. 若轴对称开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 满足：对于每个 $J \in \mathbb{S}$，$U \cap \mathbb{C}_J$ 在 $\mathbb{C}_J$ 中是一个柯西域，则称其为切片柯西域。更确切地说，若对于每个 $J \in \mathbb{S}$，$U \cap \mathbb{C}_J$ 的边界在 $\mathbb{C}_J$ 中是有限条互不相交的分段连续可微的若尔当曲线之并，则 U 是一个切片柯西域。

在轴对称开集上，我们定义切片超全纯函数类；在克利福德代数值函数的情形下，它们通常称为切片单值函数。

定义 2.3（切片超全纯函数（或切片单值函数））。设 $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个轴对称开集，且 $\mathcal{U}:=\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+Jv \in U \quad \forall J \in \mathbb{S}\}$。我们称函数 $f: U \to \mathbb{R}_n$ 具有如下形式

$$f(x)=\alpha(u,v)+J\beta(u,v) \tag{2.1}$$

其中，对于任意 $J \in \mathbb{S}$，若 α 和 β 是取值于 $\mathbb{R}_n$ 的可微函数，并且满足

$$\alpha(u,v)=\alpha(u,-v), \quad \beta(u,v)=-\beta(u,-v) \ \text{ for all } (u,v) \in \mathcal{U}, \tag{2.2}$$

且若 α 和 β 满足柯西-黎曼方程组

$$\partial_u \alpha(u,v)-\partial_v \beta(u,v)=0, \quad \partial_v \alpha(u,v)+\partial_u \beta(u,v)=0.$$

我们回顾一下，右切片超全纯函数具有如下形式

$$f(x)=\alpha(u,v)+\beta(u,v)J,$$

其中，α、β 满足上述条件。

定义 2.4。定义在 U 上的左（分别为右）切片超全纯函数集合记作 $\mathcal{SH}_L(U)$（分别为 $\mathcal{SH}_R(U)$）。内在函数构成的子集由满足 α、β 为实值函数的切片超全纯函数组成，记作 $\mathcal{N}(U)$。

我们引入单生成函数。

定义 2.5（单生成函数）。设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个开集。实可微函数$f: U \to \mathbb{R}_n$ 称为左单生成函数，如果

$$\mathcal{D}f(x):=\big(\partial_{x_0}+\sum_{i=1}^{n} e_i \partial_{x_i}\big) f(x)=0.$$

类似地，我们定义右单生成函数。

切片超全纯性有几种可能的定义，这些定义并不完全等价；不过，对于算子理论而言，定义 2.3 中切片超全纯函数的定义最为恰当。该定义源自 Fueter 映射定理从四元数情形向 Clifford 代数和实交错代数情形的推广（见 [31], [34], [38], [39]；论文 [39] 的英文译文见 [26]）。本文的讨论需要用到 Sce定理，下面我们将回顾该定理。

定理 2.6（Sce定理，见 [39]）。设 $n \geq 3$ 为奇数。设 $f(z)=\alpha(u,v)+i\beta(u,v)$ 是定义在复上半平面中的一个区域（开且连通） D 上的全纯函数，并设

$$\Omega_D:=\{x=x_0+\underline{x} \mid (x_0,|\underline{x}|) \in D\},$$

是由 D 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中诱导的开集。算子 T_{FS1} 定义为

$$T_{FS1}(f)=\alpha(x_0,|\underline{x}|)+\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\beta(x_0,|\underline{x}|) \tag{2.3}$$

将全纯函数 $f(z)$ 映射到内在切片超全纯函数集合中。于是函数

$$\breve{f}(x):=\Delta^{\frac{n-1}{2}}\left(\alpha(x_0,|\underline{x}|)+\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\beta(x_0,|\underline{x}|)\right)$$

属于狄拉克算子的核，即，

$$\mathcal{D}\breve{f}(x)=0, \qquad on \qquad \Omega_D.$$

注 2.7. 若假设满足（2.2）中的奇偶条件，则可去掉函数 $f(z) = \alpha(u,v)+i\beta(u,v)$ 在复上半平面的区域 D 中为全纯函数这一假设。

注记 2.8。由于拉普拉斯算子的因式分解

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \Delta$$

我们定义了一些与 Fueter-Sce 定理密切相关的函数类。在接下来的章节中我们将看到，这些函数空间对我们的理论至关重要。

定义 2.9（阶数为 k 的全纯克利福德函数）。设 U 为一个开集。若函数 $f : U \subset\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于 $\mathcal{C}^{2k+1}(U)$ 类，则称其为阶数为 k 的（左）全纯克利福德函数，若

$$\Delta^k\mathcal{D}f(x) = 0 \quad \forall x \in U,$$

其中 $0 \le k \le \frac{n-1}{2}$。

注记 2.10。对于定义 2.9 中的 $k:= \frac{n-1}{2}$，我们得到 [30 中所研究的函数类].

注 2.11. 每个 k 阶全纯克利福德函数都是 $k+1$ 阶全纯克利福德函数。如果 $k = 0$，则由定义 2.9 得到（左）单生成函数的集合。

定义 2.12（ k 阶反全纯克利福德函数）。设 U 为一个开集。若函数 $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于类 $\mathcal{C}^{2k+1}(U)$，则称其为 k 阶（左）反全纯克利福德函数，当且仅当

$$\Delta^k\overline{\mathcal{D}}f(x) = 0 \quad \forall x \in U,$$

其中 $0 \le k \le \frac{n-1}{2}$。

定义 2.13（ k 次多调和函数）。设 $k \ge 1$。若函数 $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于类 $\mathcal{C}^{2k}(U)$，则称其在开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上为 k 次多调和函数，当且仅当

$$\Delta^k f(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

当 $p = 1$ 时，该函数称为调和函数；当 $p = 2$ 时，该函数称为双调和函数。多调和函数的研究见 [6]。

定义 2.14（ m 阶多重解析）。设 $m \ge 1$。设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个开集，且 $f : U \to \mathbb{R}_n$ 为一个 $\mathcal{C}^m(U)$ 类函数。若满足以下条件，则称 f 在 U 上是（左） m 阶多重解析的

$$\mathcal{D}^m f(x) = 0, \qquad \forall x \in U.$$

以下结果给出了 m 阶多重解析函数的一个刻画，参见 [9]。

命题 2.15（多重解析分解）。设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个开集。函数 $f : U \to\mathbb{R}_n$ 是 m 阶多重解析的，当且仅当它可以分解为若干唯一的单生成函数 $g_0, \dots, g_{m-1}$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x_0^k g_k(x).$$

关于多解析函数的更多信息，请参见 [9, 10, 41] 。

定义 2.16（(k,ℓ) 阶多重解析全纯克利福德函数）。设 U 为一个开集。若函数 $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$ 属于 $\mathcal{C}^{2k+\ell}(U)$ 类，则称其为（左）(k,ℓ) 阶多重解析全纯克利福德函数，当且仅当

$$\Delta^k\mathcal{D}^\ell f(x) = 0 \quad \forall x \in U,$$

其中 $0 \le k \le \frac{n-1}{2}$ 和 $\ell \ge 0$。我们将这些函数组成的集合记为 $\mathcal{PCH}_{(k,\ell)}(U)$。

注 2.17。同样，也可以定义阶数为 k 的全纯克利福德函数、阶数为 k 的反全纯克利福德函数以及阶数为 m 的多重解析函数的右函数集合。

备注 2.18. 若在定义 2.16 中令 $\ell = 1$，则得到定义 2.9；若令 $\ell = 0$，则得到定义 2.13；若考虑 $k = 0$，则得到定义 2.14。

备注 2.19. 在定理 2.6 中， n 为奇数的情形归功于 M. Sce，算子 T_{FS2} 是微分算子； n 为偶数的情形归功于 T. Qian，在这种情况下，算子 T_{FS2} 是分数阶算子。

备注 2.20. 尽管上述函数类是针对适当的正则函数f定义的，使得我们可以根据 Fueter-Sce 映射定理应用形式为 $\Delta^k\mathcal{D}^\ell$ 或 $\Delta^k\overline{\mathcal{D}}^\ell$ 的算子，但我们必须假设函数 f 是形式为 (2.1) 的切片函数。

对精细结构的研究相当复杂，并且取决于维数n。在接下来的章节中，我们将专注于维数 $n = 5$。在一篇正在撰写的论文中，我们计划研究任意 n 为奇数时的精细结构。

3. Function spaces of axial type in dimension five

在含有五个虚单位的克利福德代数中，即 $n = 5$，第二个 Fueter-Sce 映射为 Δ^2，其中拉普拉斯算子 Δ 是在 6 维空间中定义的。

我们回顾一下， Δ^2 可以通过狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 及其共轭 $\overline{\mathcal{D}}$，按照对 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 采用不同乘积组合的方式进行不同的因式分解。

五维情形不同于四元数情形（见 [12, 29]）：在四元数情形中，Fueter 映射只能分解为 $\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$；而在这里，我们得到了更丰富的结构。

在切片超全纯函数的设定中，形如 (2.1) 的函数连同奇偶条件称为切片函数。在单生成设定中，此类函数通常只在上半空间中考虑，称为轴型函数。我们将根据所处设定使用这两种术语。现在，我们假设形如以下形式的轴向函数（或切片函数）

$$f(x) = \alpha(x_0, |\underline{x}|) + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\beta(x_0, |\underline{x}|)$$

属于 $\mathcal{C}^5(\Omega_D)$ 类，其中 Ω_D 如 Fueter-Sce 映射定理中所述。我们将考虑取值于克利福德代数 $\mathbb{R}_n$ 的函数f： $\Omega_D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n$，其中考虑情形 $n = 5$。

定义 3.1（$\mathcal{ABH}(\Omega_D)$ 轴向双调和函数）。设 f： $\Omega_D \subseteq \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}_5$ 为轴型且属于 $\mathcal{C}^5(\Omega_D)$ 类。则函数

$$\tilde{f}_1(x) := \mathcal{D}f(x) \qquad \text{on} \quad \Omega_D$$

称为轴向双调和函数，因为根据 Fueter-Sce 映射定理，它满足

$$\Delta^2\tilde{f}_1(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们用 $\mathcal{ABH}(\Omega_D)$ 表示这一函数集合。

定义 3.2（$\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$ 一阶轴向 Clifford 函数）。考虑函数 $\overline{\mathcal{D}}\tilde{f}_1(x)$: $= \mathcal{D}f(x) \in \mathcal{ABH}(\Omega_D)$，并将共轭狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 作用于 $\tilde{f}_1(x)$。于是得到

$$f^\circ(x) := \overline{\mathcal{D}}\tilde{f}_1(x) = \Delta f(x) \qquad \text{on} \quad \Omega_D, \tag{3.1}$$

根据 Fueter-Sce 映射定理，它是一阶轴向 Clifford 函数（一阶轴向 Clifford 函数是阶数为 (1,1) 的简称），即

$$\Delta\mathcal{D}f^\circ(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们将这组函数记为 $\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$。

定义 3.3（$\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$ 轴向反克利福德一阶函数）。考虑函数 $\tilde{}f_1(x)$ $:= \mathcal{D}f(x) \in \mathcal{ABH}(\Omega_D)$，并将狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 作用于 $f_1(x)$，得到

$$f_\circ(x) = \mathcal{D}\tilde{f}_1(x) = \mathcal{D}^2 f(x), \qquad \text{on} \quad \Omega_D,$$

它是轴向 一阶反克利福德函数，由 Fueter-Sce 映射定理可知，即 .,

$$\Delta\overline{\mathcal{D}}\,(f_\circ(x)) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们用 $\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$ 表示这类函数的集合。

˜定义 3.4（$\mathcal{AH}(\Omega_D)$ 轴向调和函数）。考虑函数 $f^\circ(x) := \overline{\mathcal{D}}f_1(x) = \Delta f(x) \in \mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$，并将狄拉克算子 $\mathcal{D}$作用于 $f^\circ(x)$。得到:

$$\tilde{f}_0(x) = \mathcal{D}f^\circ(x) = \Delta\mathcal{D}f(x),$$

根据 Fueter-Sce 映射定理，该函数是轴向调和函数，即:

$$\Delta\tilde{f}_0(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们用 $\mathcal{AH}(\Omega_D)$ 表示这类函数的集合。

定义 3.5（$\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$ 二阶轴向多解析函数）。若将算子$\tilde{}\overline{\mathcal{D}}$作用于 $f^\circ(x) := \overline{\mathcal{D}}f_1(x) = \Delta f(x)$ $\in \mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$，则得到

$$\breve{f}_1^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}f^\circ(x) = \Delta\overline{\mathcal{D}}f(x),$$

根据 Fueter-Sce 映射定理，这是一个二阶轴向多解析函数，即

$$\mathcal{D}^2\breve{f}_1^\circ(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们将这类函数的集合记为 $\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$。

定义 3.6（$\mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D)$ (1, 2) 阶轴向克利福德型多解析函数）。设 $f : \Omega_D \subseteq \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}_5$ 为轴型且属于 $\mathcal{C}^5(\Omega_D)$ 类。对式 (2.3) 作用狄拉克算子的共轭。在这种情况下，我们得到

$$\breve{f}^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}f(x) \qquad \text{on} \quad \Omega_D, \tag{3.2}$$

根据 Fueter-Sce 映射定理，这是一个 (1, 2) 阶轴向克利福德型多解析函数，即

$$\Delta\mathcal{D}^2\breve{f}^\circ(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们将这类函数记为 $\mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D)$。

˘定义 3.7（$\mathcal{AP}_3(\Omega_D)$ 三阶轴向多解析函数）。设 $f^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}f(x) \in \mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D)$。将共轭狄拉克算子 $\overline{\mathcal{D}}$ 作用于 $\breve{f}^\circ(x)$，得到

$$\breve{f}_0^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}^2 f(x) \qquad \text{on} \quad \Omega_D,$$

这是一个三阶轴向多解析函数，即

$$\mathcal{D}^3\breve{f}_0^\circ(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

我们将这类函数记为 $\mathcal{AP}_3(\Omega_D)$。

注 3.8. 注意上述记号，我们有

$$\breve{f}(x) = \Delta\overline{\mathcal{D}}\tilde{f}_0(x) = \mathcal{D}\breve{f}_1^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}^2 f_\circ(x) = \Delta f^\circ(x) = \overline{\mathcal{D}}\tilde{f}_1(x),$$

˘其中 f 是轴向单生成的，并且

$$\breve{f}(x) = \mathcal{D}^2\breve{f}_0^\circ(x) = \Delta\mathcal{D}\breve{f}^\circ(x) \qquad \text{on} \quad \Omega_D.$$

注 3.9。在一般情形下，会出现相同类别的函数，但阶数不同。

利用本节定义的轴向函数函数空间，我们现在可以定义与克利福德代数 $\mathbb{R}_5$ 中出现的这些空间相关的精细结构。

4. The fine structures in dimension five

将 Fueter-Sce 映射 $T_{FS2} := \Delta^h_{\mathbb{R}^{n+1}}$（其中 $h := \frac{n-1}{2}$ 是 Sce 指数）应用于切片超全纯函数 $f(x)$，可得到单生成函数 $\breve{f}(x) = \Delta^h_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x)$。
由于拉普拉斯算子可以用 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 进行因式分解，因此可以多次将这两个算子作用于切片超全纯函数 $f(x)$，直至达到拉普拉斯算子的最高次幂，即 Sce 指数。

这意味着可以在切片超全纯函数集合与轴向单生成函数集合之间构造不同的函数集（参见上一节）。这一事实引出了切片超全纯谱理论精细结构的定义。

定义 4.1（切片超全纯谱理论的精细结构）。切片超全纯谱理论的一种精细结构，是函数空间及其相关函数演算的集合，它们由 Fueter-Sce 延拓定理中算子 T_{FS2}的因式分解所诱导。

因式分解 $T_{FS2} = \Delta^h_{\mathbb{R}^{n+1}} = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}...\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}$ 尤其值得关注。

定义 4.2（狄拉克精细结构）。狄拉克精细结构对应于狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 及其共轭 $\overline{\mathcal{D}}$ 的乘积所构成的交替$_{n-1}$序列，直至得到 $\Delta^{\overline{2}}_{\mathbb{R}^{n+1}}$。

在 [12] 中，我们研究了狄拉克精细结构，其中 $n = 3$ 这也属于四元数情形。具体而言，我们研究了以下图示所表示的序列：

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D). \tag{4.1}$$

(4.1) 中的精细结构使我们能够为 F-函数演算建立乘积法则，参见 [12,定理 9.3]。

然而，由于 $\Delta = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$，我们可以在 (4.1) 中交换算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 的角色。由此得到以下图示所表示的序列：

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{4.2}$$

该序列在 [29]中进行了研究。尽管图示 (4.1) 和 (4.2) 源自 Fueter 映射定理以及 Fueter算子 $T_{F2} = \Delta$ 的因式分解，但我们得到的是两种不同的精细结构。

在上述每一种精细结构中，以及在下文讨论的所有精细结构中，最终得到的函数空间始终是轴向单生成函数的集合。

在Clifford情形中，第二Fueter-Sce映射的分解更为复杂，这是因为我们处理的是拉普拉斯算子的整数次幂。此外，当 n 为偶数时，拉普拉斯算子具有分数次幂，因此我们必须借助傅里叶乘子在分布空间中进行研究，见 [38]。

由于对于 $n = 5$，我们处理的是算子 Δ^2，因此会得到更多种狄拉克精细结构，它们彼此不同，同时也都很重要。为了标记所有精细结构，我们将用所应用算子的有序序列来表示每一种精细结构。例如，在四元数情形中，我们将(4.1)称为类型为($\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$)的狄拉克精细结构，将(4.2)称为类型为($\overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D}$)的狄拉克精细结构。同样，在 $n = 5$ 的情形中，我们有一种结构，其中交替应用算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$，直至达到第二Fueter-Sce映射。

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AHC}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D). \tag{4.3}$$

我们将 (4.3) 称为类型为 ($\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$) 的狄拉克精细结构。

注 4.3。即使在 $n = 5$ 的情况下，狄拉克精细结构 (4.3) 对于得到 F-函数演算的乘积公式也至关重要（参见定理 10.3）。

注 4.4. 为避免在空间序列末端出现轴向反单生成函数集，我们施加如下条件：空间之间所有作用于克利福德值函数的算子的复合，必须等于 Fueter-Sce 映射定理中的算子 $T_{FS2} = \Delta^{(n-1)/2}$。

然而，通过重新排列 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 的顺序，可以得到其他精细结构，其中涉及其他函数集。因此，我们有 Dirac细结构（$\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$）

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AHC}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

以及 Dirac细结构（$\mathcal{D}$,$\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\overline{\mathcal{D}}$）

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \overline{\mathcal{AHC}_1(\Omega_D)} \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D).$$

此前所有 Dirac细结构均由首先应用狄拉克算子得到。然而，也可以先应用算子 $\overline{\mathcal{D}}$。在这种情况下，会出现另外三种 Dirac细结构。我们有如下类型的 Dirac细结构（$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$）

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AHC}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

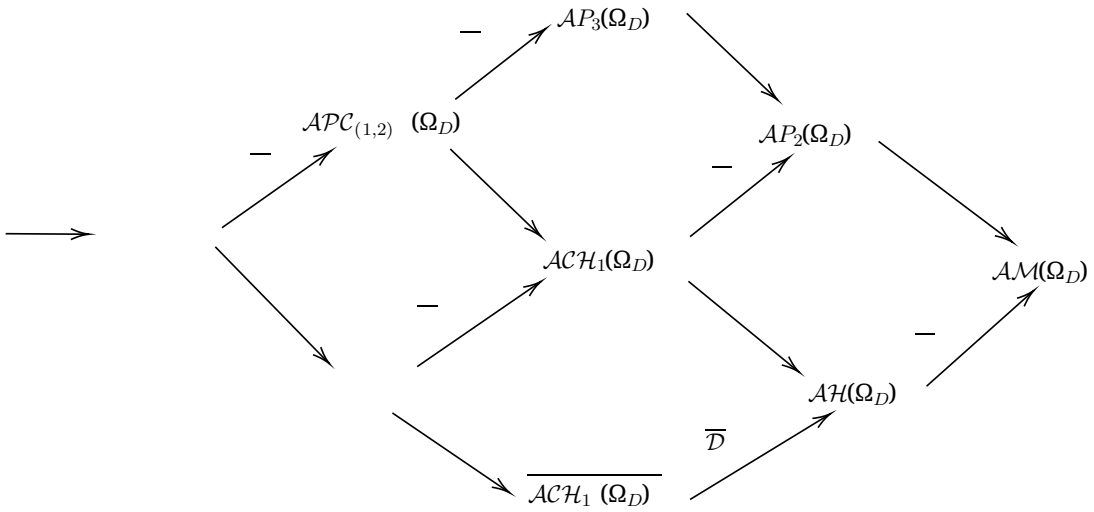
狄拉克精细结构（$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{D}$,$\overline{\mathcal{D}}$）

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AHC}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

以及狄拉克精细结构（$\overline{\mathcal{D}}$,$\overline{\mathcal{D}}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{D}$）

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{APC}_{(1,2)}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_3(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D).$$

以下　　下图总结了所有狄拉克精细结构及其函数空间　　：



备注 4.5。在此前所有的狄拉克精细结构中，都可以将狄拉克算子与其共轭算子结合起来。这样我们便得到一种比此前结构“更弱”的精细结构，也就是说，我们略去了某些函数类。我们将这类精细结构称为较粗的精细结构。迄今为止，我们只提到了其中一些；在附录中，我们将展示五维精细结构的完整图景。

拉普拉斯精细结构属于（Δ, Δ）这一类型，相对于狄拉克精细结构而言是一种较粗精细结构，其表示为

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS_1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{ACH}_1(\Omega_D) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{AM}(\Omega_D).$$

其他有趣的较粗精细结构是调和型的，其中仅出现调和函数集和双调和函数集

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS_1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{ABH}(\Omega_D) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

以及多解析型的，其中仅出现三阶和二阶多解析函数

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{FS_1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}^2} \mathcal{AP}_3(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D).$$

我们注意到，在四元数情形下不可能存在较粗精细结构。这是因为我们处理的是一次幂的拉普拉斯算子。

5. Systems of differential equations for fine structure spaces of axial type

类比于轴向单生成函数的 Vekua型微分方程组，本节给出五维中精细结构空间的所有微分方程组。设 D 是复上半平面中的一个区域。设 Ω_D 是 $\mathbb{R}^6$ 中的轴对称开集，且 $x = x_0 + \underline{x} = x_0 + r\underline{\omega} \in \Omega_D$。若存在两个函数 $A = A(x_0, r)$ 和 $B = B(x_0, r)$，它们与 $\underline{\omega} \in \mathbb{S}$ 无关，且取值于 $\mathbb{R}_5$，使得函数 $f : \Omega_D \to \mathbb{R}_5$ 为轴型函数，则

$$f(x) = A(x_0, r) + \underline{\omega} B(x_0, r), \quad \text{where} \quad r > 0.$$

因此，我们刻画了介于切片超全纯函数集合与轴向单生成函数集合之间的一类函数，并将其称为轴向函数。根据 [37]，我们回顾如下：若 $f(x) = A(x_0, r) + \underline{\omega} B(x_0, r)$，则

$$\mathcal{D}f = \left(\partial_{x_0} A(x_0, r) - \partial_r B(x_0, r) - \frac{4}{r} B(x_0, r)\right) + \underline{\omega} \left(\partial_{x_0} B(x_0, r) + \partial_r A(x_0, r)\right), \tag{5.1}$$

$$\overline{\mathcal{D}}f = \left(\partial_{x_0} A(x_0, r) + \partial_r B(x_0, r) + \frac{4}{r} B(x_0, r)\right) + \underline{\omega} \left(\partial_{x_0} B(x_0, r) - \partial_r A(x_0, r)\right). \tag{5.2}$$

定理 5.1. 设 $D \subseteq \mathbb{C}_\circ$。设 Ω_D 是 $\mathbb{R}^6$ 中的一个轴对称开集，且 $f_\circ(x) = A(x_0, r) + \underline{\omega} B(x_0, r)$ 是一个一阶轴向反克利福德全纯函数。那么 $A(x_0, r)$ 和 $B(x_0, r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases} \partial_{x_0}^3 A + \partial_{x_0} \partial_r^2 A + \frac{4}{r} \partial_{x_0} \partial_r A + \partial_r \partial_{x_0}^2 B + \partial_r^3 B + 8\frac{\partial_r^2 B}{r} + 8\frac{\partial_r B}{r^2} - 8\frac{B}{r^3} + \frac{4}{r} \partial_{x_0}^2 B = 0 \\ \partial_{x_0}^3 B + \partial_{x_0} \partial_r^2 B - 4\partial_r \left(\frac{\partial_{x_0} B}{r}\right) - \partial_r \partial_{x_0}^2 A - \partial_r^3 A - 4\partial_r \left(\frac{\partial_r A_1}{r}\right) = 0 \end{cases}$$

证明。考虑 $f_\circ(x) = A + \underline{\omega} B_\circ$。通过对 [12, 定理 3.5] 所作的类似计算，我们得到

$$\Delta(f_\circ(x)) = \left(\partial_{x_0}^2 A + \partial_r^2 A + \frac{4}{r} \partial_r A\right) + \underline{\omega} \left(\partial_{x_0}^2 B + \partial_r^2 B + 4\partial_r \left(\frac{B}{r}\right)\right). \tag{5.3}$$

现在，我们设

$$A' := \partial_{x_0}^2 A + \partial_r^2 A + \frac{4}{r} \partial_r A \quad \text{and} \quad B' := \partial_{x_0}^2 B + \partial_r^2 B + 4\frac{\partial_r}{r} B - \frac{4}{r^2} B.$$

由公式 (5.2) 可得

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\mathcal{D}}(f_\circ(x)) &= \overline{\mathcal{D}}(A'+\underline{\omega}B') = (\partial_{x_0}A'+\partial_r B'+\frac{4}{r}B')+\underline{\omega}(\partial_{x_0}A'-\partial_r B')\\ &= \partial^3_{x_0}A+\partial_{x_0}\partial^2_r A+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r A+\partial^3_r B+\frac{4}{r}\partial^2_r B-\frac{4}{r^2}\partial_r B\\ &+ \frac{8}{r^3}B-\frac{4}{r^2}\partial_r B+\partial_r\partial^2_{x_0}B+\frac{4}{r}\partial^2_r B+\frac{16}{r^2}\partial_r B-\frac{16}{r^3}B+\frac{4}{r}\partial^2_{x_0}B\\ &+ \underline{\omega}(\partial_{x_0}\partial^2_r B+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r B-\frac{4}{r^2}\partial_{x_0}B+\partial^3_{x_0}B-\partial_r\partial^2_{x_0}A-\partial^3_r A\\ &+ \frac{4}{r^2}\partial_r A-\frac{4}{r}\partial^2_r A) \qquad (5.4)\end{aligned}$$

因此，我们最终得到

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\mathcal{D}}(f_\circ(x)) &= \partial^3_{x_0}A+\partial_{x_0}\partial^2_r A+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r A+\partial^3_r B+\frac{8}{r}\partial^2_r B+\frac{8}{r^2}\partial_r B-\frac{8}{r^3}B\\ &+ \partial_r\partial^2_{x_0}B+\frac{4}{r}\partial^2_{x_0}B+\underline{\omega}(\partial_{x_0}\partial^2_r B+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r B-\frac{4}{r^2}\partial_{x_0}B\\ &+ \partial^3_{x_0}B-\partial_r\partial^2_{x_0}A-\partial^3_r A+\frac{4}{r^2}\partial_r A-\frac{4}{r}\partial^2_r A). \qquad (5.5)\end{aligned}$$

由于 $(^\circ f(x))$ 是一阶反克利福德全纯函数，因此有 $\Delta\overline{\mathcal{D}}(f_\circ(x)) = 0$。 □

定理 5.2. 设 $D \subseteq \mathbb{C}_\circ$ 设 Ω_D 是 $\mathbb{R}^6$ 中的轴对称开集，且 $\tilde{f}_1(x) = A(x_0,r)+\underline{\omega}B(x_0,r)$ 是一个轴向双调和函数。那么 $A(x_0,r)$ 和 $B(x_0,r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases}\partial^4_{x_0}A+2\partial^2_{x_0}\partial^2_r A+\partial^4_r A-\frac{8}{r^3}\partial_r A+\frac{8}{r^2}\partial^2_r A+\frac{8}{r}\partial^3_r A+\frac{4}{r}\partial_r\partial^2_{x_0}A=0\\ \partial^4_r B+\frac{8}{r}\partial^3_r B-\frac{2}{4}r^3\partial_r B+\frac{24}{r^4}B+2\partial^2_r\partial^2_{x_0}B-\frac{8}{r^2}\partial^2_{x_0}B+\frac{8}{r}\partial^2_{x_0}\partial_r B+\partial^4_{x_0}B=0.\end{cases}$$

证明。由公式 (5.5) 可得

$$C := \partial^3_{x_0}A+\partial_{x_0}\partial^2_r A+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r A+\partial^3_r B+\frac{8}{r}\partial^2_r B+\frac{8}{r^2}\partial_r B-\frac{8}{r^3}B+\partial_r\partial^2_{x_0}B+\frac{4}{r}\partial^2_{x_0}B$$

and

$$D := \partial_{x_0}\partial^2_r B+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r B-\frac{4}{r^2}\partial_{x_0}B+\partial^3_{x_0}B-\partial_r\partial^2_{x_0}A-\partial^3_r A+\frac{4}{r^2}\partial_r A-\frac{4}{r}\partial^2_r A,$$

因此，由公式 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\Delta^2(f(x)) = \mathcal{D}(\overline{\mathcal{D}}\Delta f(x)) = (\partial_{x_0}C - \partial_r D - \frac{4}{r}D) + \underline{\omega}(\partial_{x_0}D + \partial_r C)\\
&= \partial_{x_0}^4 A + \partial_{x_0}^2\partial_r^2 A + \frac{4}{r}\partial_{x_0}^2\partial_r A + \partial_{x_0}\partial_r^3 B + \frac{8}{r}\partial_{x_0}\partial_r^2 B + \frac{8}{r^2}\partial_{x_0}\partial_r B - \frac{8}{r^3}\partial_{x_0}B + \partial_r\partial_{x_0}^3 B + \frac{4}{r}\partial_{x_0}^3 B\\
&- \partial_{x_0}\partial_r^3 B - \frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r^2 B + \frac{8}{r^2}\partial_{x_0}\partial_r B - \frac{8}{r^3}\partial_{x_0}B - \partial_r\partial_{x_0}^3 B + \partial_r^2\partial_{x_0}^2 A + \partial_r^4 A + \frac{8}{r^3}\partial_r A - \frac{4}{r^2}\partial_r^2 A\\
&+ \frac{4}{r}\partial_r^3 A - \frac{4}{r^2}\partial_r^2 A - \frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r^2 B - \frac{16}{r^2}\partial_{x_0}\partial_r B + \frac{16}{r^3}\partial_{x_0}B - \frac{4}{r}\partial_{x_0}^3 B + \frac{4}{r}\partial_r\partial_{x_0}^2 A + \frac{4}{r}\partial_r^3 A - \frac{16}{r^3}\partial_r A\\
&+ \frac{16}{r^2}\partial_r^2 A + \underline{\omega}(\partial_r\partial_{x_0}^3 A + \partial_{x_0}\partial_r^3 A + \frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r^2 A + \partial_r^4 B - \frac{8}{r^2}\partial_r^2 B + \frac{8}{r}\partial_r^3 B - \frac{16}{r^3}\partial_r B + \frac{8}{r^2}\partial_r^2 B + \frac{24}{r^4}B\\
&- \frac{4}{r^2}\partial_{x_0}\partial_r A - \frac{8}{r^3}\partial_r B + \partial_r^2\partial_{x_0}^2 B - \frac{4}{r^2}\partial_{x_0}^2 B + \frac{4}{r}\partial_r\partial_{x_0}^2 B + \partial_{x_0}^2\partial_r^2 B + \frac{4}{r}\partial_{x_0}^2\partial_r B - \frac{4}{r^2}\partial_{x_0}^2 B + \partial_{x_0}^4 B\\
&- \partial_r\partial_{x_0}^3 A - \partial_r^3\partial_{x_0} A + \frac{4}{r^2}\partial_{x_0}\partial_r A - \frac{4}{r}\partial_r^2\partial_{x_0} A)\\
&= \partial_{x_0}^4 A + 2\partial_{x_0}^2\partial_r^2 A + \partial_r^4 A - \frac{8}{r^3}\partial_r A + \frac{8}{r^2}\partial_r^2 A + \frac{8}{r}\partial_r^3 A + \frac{4}{r}\partial_r\partial_{x_0}^2 A + \underline{\omega}(\partial_r^4 B + \frac{8}{r}\partial_r^3 B - \frac{2}{4}r^3\partial_r B\\
&+ \frac{24}{r^4}B + 2\partial_r^2\partial_{x_0}^2 B - \frac{8}{r^2}\partial_{x_0}^2 B + \frac{8}{r}\partial_{x_0}^2\partial_r B + \partial_{x_0}^4 B).
\end{aligned}$$

由于函数 $\tilde{f}_1(x)$ 是双调和的，即 $\Delta^2\tilde{f}_1(x) = 0$，故得证。 □

定理 5.3. 设 $D \subseteq \mathbb{C}$。设 Ω_D 是 $\mathbb{R}^6$ 中的一个轴对称开集，并设 $\breve{f}_0^{\circ}(x) = A(x_0, r) + \underline{\omega}B(x_0, r)$ 是一个三阶轴向多解析函数。则 $A := A(x_0, r)$ 和 $B := B(x_0, r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases}
\partial_{x_0}^3 A + \partial_r^3 B - 3\partial_{x_0}^2\partial_r B - 3\partial_{x_0}\partial_r^2 A - \frac{12}{r}\partial_{x_0}^2 B - \frac{12}{r}\partial_{x_0}\partial_r A + 8\frac{\partial_r^2 B}{r} + 8\frac{\partial_r B}{r^2} - 8\frac{B}{r^3} = 0\\
\partial_{x_0}^3 B - \partial_r^3 A + 3\partial_{x_0}^2\partial_r A - 3\partial_{x_0}\partial_r^2 B - 12\frac{\partial_{x_0}\partial_r B}{r} + 12\frac{\partial_{x_0}B}{r^2} - 4\frac{\partial_r^2 A}{r} + \frac{4}{r^2}\partial_r A = 0.
\end{cases}$$

证明。首先，我们从计算 $\mathcal{D}^2\breve{f}_0^{\circ}(x)$ 开始。

$$\mathcal{D}^2\breve{f}_0^{\circ}(x) = \mathcal{D}(\mathcal{D}\breve{f}_0^{\circ}(x)) = \mathcal{D}(A' + \underline{\omega}B'),$$

其中

$$A' := \partial_{x_0}A - \partial_r B - \frac{4}{r}B \quad \text{and} \quad B' := \partial_{x_0}B + \partial_r A.$$

由公式 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^2\breve{f}_0^{\circ}(x) &= \left(\partial_{x_0}A'(x_0, r) - \partial_r B'(x_0, r) - \frac{4}{r}B'(x_0, r)\right) + \underline{\omega}\left(\partial_{x_0}B'(x_0, r) + \partial_r A'(x_0, r)\right)\\
&= \left(\partial_{x_0}^2 A - 2\partial_{x_0}\partial_r B - \frac{8}{r}\partial_{x_0}B - \partial_r^2 A - \frac{4}{r}\partial_r A\right) + \underline{\omega}\Big(\partial_{x_0}^2 B + 2\partial_{x_0}\partial A - \partial_r^2 B +\\
&\quad -4\partial_r\frac{\partial_r B}{r} + 4\frac{B}{r^2}\Big) \qquad (5.6)\\
&= A'' + \underline{\omega}B''.
\end{aligned}$$

其中

$$A'' := \partial_{x_0}^2 A - 2\partial_{x_0}\partial_r B - \frac{8}{r}\partial_{x_0}B - \partial_r^2 A - \frac{4}{r}\partial_r A$$

and

$$B'' := \partial_{x_0}^2 B + 2\partial_{x_0}\partial A - \partial_r^2 B - 4\partial_r\frac{\partial_r B}{r} + 4\frac{B}{r^2}.$$

最后，再次应用公式 (5.1)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^3\breve{f}_0^{\circ}(x) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}^2\breve{f}_0^{\circ}(x)) = \mathcal{D}(A''+\underline{\omega}B'')\\ &= \left(\partial_{x_0}A''-\partial_r B''-\frac{4}{r}B''\right)+\underline{\omega}(\partial_{x_0}B''+\partial_r A'')\\ &= \left(\partial_{x_0}^3A+\partial_r^3B-3\partial_{x_0}^2\partial_r B-3\partial_{x_0}\partial_r^2A-\frac{12}{r}\partial_{x_0}^2B-\frac{12}{r}\partial_{x_0}\partial_r A+8\frac{\partial_r^2B}{r}+8\frac{\partial_r B}{r^2}-8\frac{B}{r^3}\right)\\ &\quad+\underline{\omega}\left(\partial_{x_0}^3B-\partial_r^3A+3\partial_{x_0}^2\partial_r A-3\partial_{x_0}\partial_r^2B-12\frac{\partial_{x_0}\partial_r B}{r}+12\frac{\partial_{x_0}B}{r^2}-4\frac{\partial_r^2A}{r}+\frac{4}{r^2}\partial_r A\right).\end{aligned}$$

我们由函数 $f_0^{\circ}(x)$ 是三阶多重解析的这一事实，得到结论：$\mathcal{D}^3\breve{f}_0^{\circ}(x)=0$.

□

Th定理 5.4. 设 $D\subseteq\mathbb{C}$。设 Ω_D 是 $\mathbb{R}^6$ 中的一个轴对称开集。则

- $f^{\circ}(x)=A(x_0,r)+\underline{\omega}B(x_0,r)$ 是一阶轴向克利福德型，当且仅当 $A:=A(x_0,r)$ 和 $B:=B(x_0,r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases}\partial_{x_0}A+\partial_{x_0}\partial_r^2A+\frac{4}{r}\partial_{x_0}\partial_r A-\partial_r\partial_{x_0}^2B-\partial_r^3B-8\frac{\partial_r B}{r^2}+8\frac{B}{r^3}-4\frac{\partial_{x_0}^2B}{r}=0\\ \partial_{x_0}^3B+\partial_{x_0}\partial_r^2B+4\partial_r\left(\frac{\partial_{x_0}B}{r}\right)+\partial_r\partial_{x_0}^2A+\partial_r^3A+4\partial_r^2\left(\frac{A}{r}\right)=0.\end{cases}$$

- $\tilde{f}_0(x)=A(x_0,r)+\underline{\omega}B(x_0,r)$ 是轴向调和的，当且仅当 $A:=A(x_0,r)$ 和 $B:=B(x_0,r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases}\partial_{x_0}^2A+\partial_r^2A+\frac{4}{r}\partial_r A=0\\ \partial_{x_0}^2B+\partial_r^2B+4\partial_r\left(\frac{B}{r}\right)=0.\end{cases}$$

- $\breve{f}_1^{\circ}(x)=A(x_0,r)+\underline{\omega}B(x_0,r)$ 是二阶轴向多解析的，当且仅当 $A:=A(x_0,r)$ 和 $B:=B(x_0,r)$ 满足以下方程组

$$\begin{cases}\partial_{x_0}^2A-2\partial_{x_0}\partial_r B-\frac{8}{r}\partial_{x_0}B-\partial_r^2A-\frac{4}{r}\partial_r A=0\\ \partial_{x_0}^2B+2\partial_{x_0}\partial_r A-\partial_r^2B-4\partial_r\left(\frac{B}{r}\right)=0.\end{cases}$$

- $\breve{f}^{\circ}(x)=A(x_0,r)+\underline{\omega}B(x_0,r)$ 是阶数为 (1, 2) 的轴向克利福德型多解析的，当且仅当$A:=A(x_0,r)$ 和 $B:=B(x_0,r)$ 满足以下系统

$$\begin{cases}\partial_{x_0}^4A-2\partial_r\partial_{x_0}^3B-2\partial_{x_0}\partial_r^3B-8\frac{\partial_{x_0}^3B}{r}-8\frac{\partial_{x_0}\partial_r^2B}{r}-\partial_r^4A-8\frac{\partial_r^3A}{r}-8\frac{\partial_r A}{r^3}-4\frac{\partial_r^2A}{r^2}-8\frac{A}{r^4}-16\frac{\partial_{x_0}\partial_r B}{r^2}=0\\ \partial_{x_0}^4B+2\partial_r\partial_{x_0}^3A+2\partial_{x_0}\partial_r^3A+8\frac{\partial_r^2\partial_{x_0}A}{r}-12\frac{\partial_r\partial_{x_0}A}{r^2}-4\frac{\partial_r\partial_{x_0}B}{r^2}-\partial_r^4B+8\frac{\partial_{x_0}A}{r^3}-8\frac{\partial_r^2B}{r^2}+24\frac{\partial_r B}{r^3}\\ -24\frac{B}{r^4}+4\frac{\partial_{x_0}^2B}{r^2}=0.\end{cases}$$

证明。由于证明涉及繁琐的计算，我们不详述所有细节，仅指出：第一个方程组可通过对 (5.3) 作用狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 得出。计算与定理 5.1 中的计算类似。第二个方程组可由公式 (5.3) 得出。第三个方程组可由公式 (5.6) 得出。第四个方程组可通过对 $\Delta\mathcal{D}f^{\circ}(x)$ 作用算子 $\mathcal{D}$ 得出，而该公式可由本定理的第一点得到。□

下一节我们将给出属于与精细结构相关的函数空间的函数的积分表示。为简便起见，这些空间称为精细结构空间。

6. Integral representation of the functions of the fine structure spaces

现在我们回顾切片超全纯柯西公式，它们是超全纯谱理论的基础。

定理6.1. 设 $s, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $|x| < |s|$，则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n s^{-n-1} = -(x^2 - 2\mathrm{Re}(s)x + |s|^2)^{-1}(x - \overline{s})$$

and

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s^{-n-1} x^n = -(x - \overline{s})(x^2 - 2\mathrm{Re}(s)x + |s|^2)^{-1}.$$

此外，对于任意满足 $x \notin [s]$ 的 $s, x \in \mathbb{R}^{n+1}$，我们有

$$-(x^2 - 2\mathrm{Re}(s)x + |s|^2)^{-1}(x - \overline{s}) = (s - \overline{x})(s^2 - 2\mathrm{Re}(x)s + |x|^2)^{-1}$$

and

$$-(x - \overline{s})(x^2 - 2\mathrm{Re}(s)x + |s|^2)^{-1} = (s^2 - 2\mathrm{Re}(x)s + |x|^2)^{-1}(s - \overline{x}).$$

根据定理6.1，左切片超全纯函数的柯西核有两种可能的表示形式，右切片超全纯函数的柯西核也有两种。

定义6.2. 设 $s, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $x \notin [s]$，则我们定义两个函数

$$\mathcal{Q}_s(x)^{-1} := (x^2 - 2\mathrm{Re}(s)x + |s|^2)^{-1}, \quad \mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} := (s^2 - 2\mathrm{Re}(x)s + |x|^2)^{-1},$$

分别称为伪柯西核和交换伪柯西核。

定义6.3. 设 $s, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $x \notin [s]$，则

- 我们称左切片超全纯柯西核 $S_L^{-1}(s, x)$ 写成形式 I，当且仅当

$$S_L^{-1}(s, x) := \mathcal{Q}_s(x)^{-1}(\overline{s} - x).$$

- 我们称右切片超全纯柯西核 $S_R^{-1}(s, x)$ 写成形式 I，当且仅当

$$S_R^{-1}(s, x) := (\overline{s} - x)\mathcal{Q}_s(x)^{-1}.$$

- 我们称左切片超全纯柯西核 $S_L^{-1}(s, x)$ 写成形式 II，当且仅当

$$S_L^{-1}(s, x) := (s - \overline{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}.$$

- 我们称右切片超全纯柯西核 $S_R^{-1}(s, x)$ 写成形式 II，当且仅当

$$S_R^{-1}(s, x) := \mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}(s - \overline{x}).$$

本文中，除非另有说明，我们将 $S_L^{-1}(s, x)$ 和 $S_R^{-1}(s, x)$ 称为形式 II。对于（左、右）切片超全纯柯西核，我们有如下正则性。

引理 6.4. 设 $s \notin [x]$。左切片超全纯柯西核 $S_L^{-1}(s, x)$ 关于 x 是左切片超全纯的，而关于 s是右切片超全纯的。右切片超全纯柯西核 $S_R^{-1}(s, x)$ 关于 s 是左切片超全纯的，而关于 x是右切片超全纯的。

定理 6.5（切片超全纯函数的柯西公式）。设 $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个有界切片柯西域，令 $J \in \mathbb{S}$，并设 $ds_J = ds(-J)$。若 f 是在包含 $\overline{U}$ 的集合上的（左）切片超全纯函数，则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,x)\, ds_J\, f(s), \qquad for\ any \quad x \in U. \tag{6.1}$$

若 f 是定义在包含 $\overline{U}$ 的集合上的右切片超全纯函数，则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s)\, ds_J\, S_R^{-1}(s,x), \qquad for\ any \quad x \in U. \tag{6.2}$$

这些积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$。

现在，我们回顾一下将算子 $T_{SF2} := \Delta^{\frac{n-1}{2}}$ 作用于切片超全纯柯西核时的情形（见 [27]）。

命题 6.6. 设 x、 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $x \notin [s]$。则：

- 函数 $\Delta^{\frac{n-1}{2}} S_L^{-1}(s,x)$ 关于变量 x 是左单元函数，并且关于 s 是右切片超全纯函数。
- 函数 $\Delta^{\frac{n-1}{2}} S_R^{-1}(s,x)$ 关于变量 x 是右单生成函数，并且关于 s 是左切片超全纯函数。

定义 6.7（F_n-核）。设 n 为奇数，且设 x、 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$。对于 $s \notin [x]$，我们将 F_n^L-核和 F_n^R-核定义为

$$F_n^L(s,x) := \Delta^{\frac{n-1}{2}} S_L^{-1}(s,x), \qquad F_n^R(s,x) := \Delta^{\frac{n-1}{2}} S_R^{-1}(s,x),$$

分别。

可以显式计算 F_n-核，特别是对于 $s \notin [x]$，我们有

$$F_n^L(s,x) = \gamma_n (s - \bar{x}) Q_{c,s}(x)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{6.3}$$

and

$$F_n^R(s,x) = \gamma_n Q_{c,s}(x)^{-\frac{n+1}{2}} (s - \bar{x}), \tag{6.4}$$

其中

$$\gamma_n := (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} [(\frac{1}{2}(n-1))!]^2.$$

注 6.8. 公式 (6.3) 和 (6.4) 在 n 为偶数时也成立，见 [13]。

此外，对于 $s \notin [x]$， F_n-核满足以下方程

$$F_n^L(s,x)s - xF_n^L(s,x) = \gamma_n \mathcal{Q}_{c,s}^{-\frac{n-1}{2}}(x) \tag{6.5}$$

and

$$sF_n^R(s,x) - F_n^R(s,x)x = \gamma_n \mathcal{Q}_{c,s}^{-\frac{n-1}{2}}(x). \tag{6.6}$$

以下结果发挥着关键作用（见 [27]）。

定理 6.9（Fueter-Sce 映射定理的积分形式）。设 n 为奇数。设$U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为切片柯西域，设 $J \in \mathbb{S}$ 并令 $ds_J = ds$（$-J$）。

- 若 f 是集合 W上的（左）切片超全纯函数，且满足 $\overline{U} \subset W$，则左单元函数 $\breve{f}(x) = \Delta^{\frac{n-1}{2}} f(x)$具有如下积分表示

$$\breve{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} F_n^L(s,x) ds_J f(s). \tag{6.7}$$

• 若 f 是集合 W上的右切片超全纯函数，且满足 $\overline{U} \subset W$，则右单生成函数 $\breve{f}(x) = \Delta^{\frac{n-1}{2}} f(x)$ 具有如下积分表示

$$\breve{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J F_n^R(s, x). \tag{6.8}$$

这些积分既不依赖于 U ，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$。

6.1. 精细结构空间的核结构及其正则性。本小节中，我们构造与精细结构空间相关联的核。其策略遵循 Fueter-Sce 映射定理积分形式的构造。具体而言，我们对左（及右）切片超全纯柯西核施加适当的算子，以定义所需的核。这些新核将用于为这些函数给出适当的积分表示。在以下定理的证明中，我们只考虑左超全纯柯西核，因为右超全纯柯西核的计算与之类似。

定理 6.10（切片 $\mathcal{D}$-核$S_{\mathcal{D}}^{-1}$，$_L$ 和$S_{\mathcal{D}}^{-1}$，$_R$的结构）。设 $s, x \in \mathbb{R}^6$ 满足 $x \notin [s]$，则

$$S_{\mathcal{D},L}^{-1}(s, x) := \mathcal{D}\left(S_L^{-1}(s, x)\right) = -4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}, \tag{6.9}$$

and

$$S_{\mathcal{D},R}^{-1}(s, x) := \left(S_R^{-1}(s, x)\right)\mathcal{D} = -4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}. \tag{6.10}$$

我们将$S_{\mathcal{D}}^{-1}$，$_L$ 和$S_{\mathcal{D}}^{-1}$，$_R$ 分别称为左、右切片 $\mathcal{D}$-核。

证明。我们计算以下导数

$$\frac{\partial}{\partial x_0} S_L^{-1}(s, x) = -\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} + 2(s - \bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s - x_0), \tag{6.11}$$

并且，对于 $1 \leq i \leq 5$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S_L^{-1}(s, x) = e_i \mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} - 2x_i(s - \bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}. \tag{6.12}$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\left(S_L^{-1}(s, x)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_0} S_L^{-1}(s, x) + \sum_{i=1}^{5} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_L^{-1}(s, x) \\
&= -\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} - 2x_0(s - \bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 2(s - \bar{x})s\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + \\
&\quad -5\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} - 2\underline{x}(s - \bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\
&= -6\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} - 2x(s - \bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 2(s - \bar{x})s\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\
&= -6\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} + 2(s^2 - \bar{x}s - xs + |x|^2)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\
&= -4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

现在，我们应用 $\mathbb{R}^6$ 的拉普拉斯算子，即

$$\Delta := \sum_{i=0}^{5} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

关于切片超全纯柯西核

定理 6.11（切片 Δ-核 S_{Δ}^{-1}，$_L$ 以及 S_{Δ}^{-1}，$_R$的结构）。设 s、$x \in \mathbb{R}^6$ 满足 $x \notin [s]$，则

$$S_{\Delta,L}^{-1}(s,x) := \Delta S_L^{-1}(s,x) = -8S_L^{-1}(s,x)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}, \tag{6.13}$$

and

$$S_{\Delta,R}^{-1}(s,x) := \Delta S_R^{-1}(s,x) = -8\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}S_R^{-1}(s,x). \tag{6.14}$$

我们用 S_{Δ}^{-1}，$_L$ 和 S_{Δ}^{-1}，$_R$ 表示左切片 Δ-核和右切片核。

证明。由公式（6.11）可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}S_L^{-1}(s,x) &= (-2s+2x_0)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + (2x_0-2s)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + \\ &\quad +8(s-\bar{x})(x_0-s)^2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}.\end{aligned}$$

由公式（6.12），对于 $1 \le i \le 5$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i^2}S_L^{-1}(s,x) &= -2x_ie_i\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 2x_ie_i\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\ &\quad -2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 8(s-\bar{x})x_i^2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}.\end{aligned}$$

最后，可得

$$\begin{aligned}\Delta S_L^{-1}(s,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}S_L^{-1}(s,x) + \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}S_L^{-1}(s,x) \\ &= 4(x_0-s)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 8(s-\bar{x})(x_0-s)^2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\ &\quad -4\underline{x}\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 10(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 8|\underline{x}|^2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\ &= -4(s-x_0+\underline{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 12(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + \\ &\quad +8(s-\bar{x})[(x_0-s)^2+|\underline{x}|^2]\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\ &= -16(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 8(s-\bar{x})(x_0^2+s^2-2x_0s+|\underline{x}|^2)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\ &= -8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\ &= -8S_L^{-1}(s,x)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}.\end{aligned}$$

□

定理 6.12（切片 $\Delta\mathcal{D}$-核 $S_{\Delta\mathcal{D}}^{-1}$，$_L$ 和 $S_{\Delta\mathcal{D}}^{-1}$，$_R$ 的结构）。设 x, $s \in \mathbb{R}^6$ 满足$x \notin [s]$，则

$$S_{\Delta\mathcal{D},L}^{-1}(s,x) := \Delta\mathcal{D}\left(S_L^{-1}(s,x)\right) = 16\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}, \tag{6.15}$$

and

$$S_{\Delta\mathcal{D},R}^{-1}(s,x) := \left(S_R^{-1}(s,x)\right)\mathcal{D}\Delta = 16\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}. \tag{6.16}$$

我们用$S_{\Delta\mathcal{D}}^{-1}$，$_L$ 和 $S_{\Delta\mathcal{D}}^{-1}$，$_R$ 表示左切片 $\Delta\mathcal{D}$-核和右切片核。

证明。为了证明公式（6.15），只需对（6.13）应用狄拉克算子。因此，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\Delta S_L^{-1}(s,x)\right) = -8[-\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(2x_0-2s)].$$

对于 $1 \le i \le 5$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta S_L^{-1}(s,x)\right) = -8[e_i\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}x_i].$$

最后，由公式（6.5），结合 $n=5$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\Delta S_L^{-1}(s,x) &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\Delta S_L^{-1}(s,x)\right)+\sum_{i=1}^{5} e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta S_L^{-1}(s,x)\right)\\ &= -8[-6\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}+\frac{4}{\gamma_5}F_L^5(s,x)(s-x_0)-\frac{4}{\gamma_5}\underline{x}F_L^5(s,x)]\\ &= -8\left[-6\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}+\frac{4}{\gamma_5}\left(F_L^5(s,x)s-xF_L^5(s,x)\right)\right]\\ &= -8\left(-6\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}+4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\right)\\ &= 16\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}.\end{aligned}$$

公式 (6.16) 通过类似的推理即可得到。

□

定理 6.13（切片 $\overline{\mathcal{D}}$-核 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}$ 和 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}$的结构）。设 x、 $s\in\mathbb{R}^6$ 满足 $x\notin[s]$，则

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x):=\overline{\mathcal{D}}(S_L^{-1}(s,x))=4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s-x_0)+2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} \tag{6.17}$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,x):=(S_R^{-1}(s,x))\overline{\mathcal{D}}=4(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s-\bar{x})+2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}. \tag{6.18}$$

我们将 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}$ 和 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}$ 分别记为左切片 $\overline{\mathcal{D}}$-核和右切片 $\overline{\mathcal{D}}$-核。

证明。由关系式 (6.11) 和 (6.12)，并利用 $2x_0=x+\bar{x}$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}(S_L^{-1}(s,x)) &= \frac{\partial}{\partial x_0}(S_L^{-1}(s,x))-\sum_{i=1}^{5}e_i\frac{\partial}{\partial x_i}(S_L^{-1}(s,x))\\ &= -\mathcal{Q}_{c,s}(x)(x)^{-1}+5\mathcal{Q}_{c,s}(x)(x)^{-1}+2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s-x_0)+2\underline{x}(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= 4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}+2((s-\bar{x})s-\bar{x}(s-\bar{x}))\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= 4\mathcal{Q}_{c,s}(x)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}+2((s-\bar{x})s-\bar{x}(s-\bar{x}))\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= (6s^2-8sx_0+4|x|^2-4\bar{x}s+2\bar{x}^2)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= (6s^2-4\bar{x}s-4xs+4|x|^2-4\bar{x}s+2\bar{x}^2)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= [4(s^2-\bar{x}s)-2(\bar{x}s+xs-|x|^2-\bar{x}^2)+2(s^2-\bar{x}s+|x|^2-xs)]\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= 4(s-\bar{x})s\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}-4x_0(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}+2((s-\bar{x})s+x(\bar{x}-s))\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}\\ &= 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s-x_0)+2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}.\end{aligned}$$

□

定理 6.14（切片 $\overline{\mathcal{D}}^2$-核 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}$ 和 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}$的结构）。设 x、 $s\in\mathbb{R}^6$ 满足$x\notin[s]$，则

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,x):=\overline{\mathcal{D}}^2(S_L^{-1}(s,x))=32(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-x_0)^2 \tag{6.19}$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,x):=(S_R^{-1}(s,x))\overline{\mathcal{D}}^2=32(s-x_0)^2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-\bar{x}). \tag{6.20}$$

我们将左切片$\overline{\mathcal{D}}^2$-核记为$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}$，将右切片$\overline{\mathcal{D}}^2$-核记为 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}$。

证明。计算 $\overline{\mathcal{D}}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,\ s}(x)^{-2})$ 很有用。由以下关系可得:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) = -\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 2(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(-2s+2x_0)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x_i}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) = e_i\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} - 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(x_i),$$

我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) &= \frac{\partial}{\partial_{x_0}}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) - \sum_{i=1}^{5} e_i\frac{\partial}{\partial_{x_i}}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) \\
&= 4\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 4((s-\bar{x})s - \bar{x}(s-\bar{x}))\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\
&= 4\mathcal{Q}_{c,s}(x)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} + 4((s-\bar{x})s - \bar{x}(s-\bar{x}))\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\
&= (8s^2 - 8sx_0 + 4|x|^2 - 8\bar{x}s + 4\bar{x}^2)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\
&= (8s^2 - 8\bar{x}s)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} - (8x_0s - 8x_0\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3} \\
&= 8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-x_0),
\end{aligned} \tag{6.21}$$

其中，在第四个等式中我们使用了 $|x|^2 + \bar{x}^2 = 2x_0\bar{x}$。现在，利用公式(6.17)以及关于$\overline{\mathcal{D}}$的莱布尼茨公式，我们可以计算 $\overline{\mathcal{D}}^2(S_L^{-1}(s,x))$:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{D}}^2(S_L^{-1}(s,x)) = \overline{\mathcal{D}}[4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}(s-x_0) + 2\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}] \\
&= 4\overline{\mathcal{D}}[(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}](s-x_0) - 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 2\overline{\mathcal{D}}[\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}] \\
&= 4(8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}s - 8(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}x_0)(s-x_0) - 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} + 4(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} \\
&= 32(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-x_0)^2.
\end{aligned}$$

□

定理 6.15（切片 $\mathcal{D}^2$-核$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\ L}$ 和$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\ R}$的结构）。设 $x, s \in \mathbb{R}^6$ 满足$x \notin [s]$，则

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,x) := \mathcal{D}^2(S_L^{-1}(s,x)) = 8S_L^{-1}(s,\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1} \tag{6.22}$$

and

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,x) := (S_R^{-1}(s,x))\mathcal{D}^2 = 8\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}S_R^{-1}(s,\bar{x}). \tag{6.23}$$

我们将$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\ L}$ 和$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\ R}$ 分别记为左切片 $\mathcal{D}^2$-核和右切片 $\mathcal{D}^2$-核。

证明。由(6.9)和关系式(6.11)、(6.12)，我们有

$$\mathcal{D}^2(S_L^{-1}(s,x)) = -4\mathcal{D}(\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}) = -4(2s - 2x_0 - 2\sum_{i=1}^{5} e_ix_i)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2} = 8(x-s)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}.$$

□

定理 6.16（切片$\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},\ L}$ 和$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},\ R}$的结构）。设 $x, s \in \mathbb{R}^6$ 满足$x \notin [s]$，则

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,x) := \Delta\overline{\mathcal{D}}(S_L^{-1}(s,x)) = -64(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-x_0) \tag{6.24}$$

and

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,x) := (S_R^{-1}(s,x))\Delta\overline{\mathcal{D}} = -64(s-x_0)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-\bar{x}). \tag{6.25}$$

我们将左切片 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核记为$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}$，将右切片 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核记为$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}$。

证明。我们仅证明公式 (6.24)，因为使用类似的论证可以证明公式 (6.25)。由公式 (6.13) 和 (6.21)，可得

$$\Delta\overline{\mathcal{D}}(S_L^{-1}(s,x)) = -8\overline{\mathcal{D}}((s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}) = -64(s-\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-3}(s-x_0).$$

□

现在，我们研究前述核的正则性。

命题 6.17. 设 $x, s \in \mathbb{R}^6$ 满足 $x \notin [s]$。我们有

(1) $S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}(s,x)$（分别地，$S^{-1}_{\Delta^{2-\ell}\mathcal{D},R}(s,x)$）在 s 中是切片右（分别地，左）超全纯的，并且在 x 中对 $0 \le \ell \le 1$ 是 $\ell+1$-调和的；

(2) $S^{-1}_{\Delta,L}(s,x)$（分别地，$S^{-1}_{\Delta,R}(s,x)$）在 s 中是切片右（分别地，左）超全纯的，并且在 x 中是阶数为 1 的左（分别地，右）全纯克利福德函数；

(3) $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)$（分别地，$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,x)$）在 s 中是切片右（分别地，左）超全纯的，并且在 x 中是阶数为 (1, 2) 的左（分别地，右）Clifford 多解析函数；

(4) $S^{-1}_{\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-l},\,L}(s,x)$（分别为 $S^{-1}_{\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-l},\,R}(s,x)$）在 s 中是右（分别为左）切片超全纯的，并且当 $0 \le \ell \le 1$ 时，它在 x 中是 $3-\ell$ 阶左（分别为右）多重解析的；

(5) $S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\,L}(s,x)$（分别为 $S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\,R}(s,x)$）在 s 中是右（分别为左）切片超全纯的，并且它在 x中是 1 阶左（分别为右）反全纯克利福德函数。

证明。我们证明左核的正则性，因为右核的论证类似。左核在 s 中的右切片超全纯性源于以下事实：每个核都可以写成 s中内在切片超全纯函数的左组合：$\mathcal{Q}_{c,\,s}(x)^{-m}$，$s\mathcal{Q}_{c,\,s}(x)^{-m}$，$s^2\mathcal{Q}_{c,\,s}(x)^{-m}$ 以及 $s^3\mathcal{Q}_{c,\,s}(x)^{-m}$，其中 $1 \le m \le 3$（参见定理 6.10 至 6.16）。

由于算子 $\mathcal{D}$、$\overline{\mathcal{D}}$ 和 Δ 可以交换，我们有：

(1) $\Delta^{\ell+1}(S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D}}(s,x)) = \Delta^{\ell+1}(\Delta^{1-\ell}\mathcal{D}(S_L^{-1}(s,x))) = \mathcal{D}\Delta^2(S_L^{-1}(s,x)) = \mathcal{D}F_L^5(s,x) = 0$，这意味着 $S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},\,L}(s,x)$ 在 x 中是 $\ell+1$-调和的，其中 $0 \le \ell \le 1$；

(2) $\Delta\mathcal{D}(S^{-1}_{\Delta,\,L}(s,x)) = \Delta\mathcal{D}(\Delta(S_L^{-1}(s,x))) = \mathcal{D}\Delta^2(S_L^{-1}(s,x)) = \mathcal{D}F_L^5(s,x) = 0$，这意味着 $S^{-1}_{\Delta\,L,}(s,x)$ 在 x 中是 1 阶全纯克利福德函数；

(3) $\Delta\mathcal{D}^2(S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)) = \Delta\mathcal{D}^2(\overline{\mathcal{D}}(S_L^{-1}(s,x))) = \mathcal{D}\Delta^2(S_L^{-1}(s,x)) = \mathcal{D}F_L^5(s,x) = 0$，这意味着 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)$ 在 x 中是阶数为 (1,2) 的 Clifford 多解析；

(4) $\mathcal{D}^{3-\ell}(S^{-1}_{\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-l},L}(s,x)) = \mathcal{D}^{3-\ell}(\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-l}(S_L^{-1}(s,x))) = \mathcal{D}\Delta^2(S_L^{-1}(s,x)) = \mathcal{D}F_L^5(s,x) = 0$，这意味着 $S^{-1}_{\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-l},L}(s,x)$ 对 $0 \le \ell \le 1$ 而言在 x 中是阶数为 $3-\ell$ 的多重解析；

(5) $\Delta\overline{\mathcal{D}}(S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\,L}(s,x)) = \Delta\overline{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^2(S_L^{-1}(s,x))) = \mathcal{D}\Delta^2(S_L^{-1}(s,x)) = \mathcal{D}F_L^5(s,x) = 0$，这意味着 $S^{-1}_{\mathcal{D}^2,\,L}(s,x)$ 在 x中是1阶反全纯克利福德函数。

□

注记 6.18。我们可以借助 F_n-核来表述定理 6.10 至定理 6.16 中左切片核和右切片核的公式。利用公式 (6.3) 和 (6.4)，我们有

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,x) &= -\frac{1}{16}\left[F^L_5(s,x)s^3-(x+2x_0)F^L_5(s,x)s^2+(2x_0x+|x|^2)F^L_5(s,x)s-x|x|^2F^L_5(s,x)\right],\\
S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,x) &= -\frac{1}{16}\left[s^3F^R_5(s,x)-s^2F^R_5(s,x)(x+2x_0)+sF^R_5(s,x)(2x_0x+|x|^2)-F^R_5(s,x)x|x|^2\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta,L}(s,x) &= -\frac{1}{8}\left[F^L_5(s,x)s^2-2x_0F^L_5(s,x)s+|x|^2F^L_5(s,x)\right],\\
S^{-1}_{\Delta,R}(s,x) &= -\frac{1}{8}\left[s^2F^R_5(s,x)-2sF^R_5(s,x)x_0+F^R_5(s,x)|x|^2\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,x) &= \frac{1}{4}\left[F^L_5(s,x)s-xF^L_5(s,x)\right],\\
S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,x) &= \frac{1}{4}\left[sF^R_5(s,x)-F^R_5(s,x)x\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x) &= \frac{1}{32}\left[3F^L_5(s,x)s^3-(8x_0+x)F^L_5(s,x)s^2+(4x_0^2+2x_0x+3|x|^2)F^L_5(s,x)s\right.\\
&\quad\left.-(x|x|^2+2x_0|x|^2)F^L_5(s,x)\right],\\
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,x) &= \frac{1}{32}\left[3s^3F^R_5(s,x)-s^2F^R_5(s,x)(8x_0+x)+sF^R_5(s,x)(4x_0^2+2x_0x+3|x|^2)\right.\\
&\quad\left.-F^R_5(s,x)(x|x|^2+2x_0|x|^2)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,x) &= -\frac{1}{8}\left[F^L_5(s,x)s^2-2xF^L_5(s,x)s+x^2F^L_5(s,x)\right],\\
S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,x) &= -\frac{1}{8}\left[s^2F^R_5(s,x)-2sF^R_5(s,x)x+F^R_5(s,x)x^2\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,x) &= \frac{1}{2}[F^L_5(s,x)s^2-2x_0F^L_5(s,x)s+x_0^2F^L_5(s,x)],\\
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,x) &= \frac{1}{2}[s^2F^R_5(s,x)-2sF^R_5(s,x)x_0+F^R_5(s,x)x_0^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,x) &= -F^L_5(s,x)s+x_0F^L_5(s,x),\\
S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,x) &= -sF^R_5(s,x)+F^R_5(s,x)x_0.
\end{aligned}$$

核 $S^{-1}_{\Delta^\ell\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,x)$ 和 $S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)$ 以及相应的右侧对应项，均用其多重解析分解表示，参见命题 2.15。

6.2. 精细结构函数空间的积分表示。现在，我们可以给出精细结构空间中函数的积分表示。

定理 6.19. 设 $W \subset \mathbb{R}^6$ 为一个开集。设 U 为一个切片柯西域，使得 $\bar{U} \subset W$。那么对于 $J \in \mathbb{S}$ 和 $ds_J = ds$ （$-J$），我们有如下积分表示。

- （ℓ-调和函数的积分表示，$0 \leq \ell \leq 1$）若 $f \in SH_L$（W），函数 $\tilde{f}_\ell$（x）：$= \Delta^{1-\ell}\mathcal{D}f$（$x$）对于 $0 \leq \ell \leq 1$ 是 $\ell + 1$-调和的，并且它有如下积分表示

$$\tilde{f}_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}(s,x) ds_J f(s).$$

若 $f \in SH_R$（W），函数 $\tilde{f}_\ell$（x）：$= f$（x）$\Delta^{1-\ell}\mathcal{D}$对于 $0 \leq \ell \leq 1$ 是 $\ell + 1$-调和的，并且它有如下积分表示

$$\tilde{f}_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},R}(s,x).$$

- （1 阶全纯克利福德函数的积分表示）若 $f \in SH_L$（W），函数 f°（x）：$= \Delta f$（x）是 1 阶左全纯克利福德函数，并且它有如下积分表示

$$f^\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta,L}(s,x) ds_J f(s).$$

若 $f \in SH_R(W)$，函数 $f^\circ(x) := \Delta f(x)$ 是一阶右全纯克利福德函数，并具有如下积分表示

$$f^\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\Delta,R}(s,x).$$

- （(1,2) 阶多解析克利福德函数的积分表示）若$f \in SH_L(W)$，函数 $\breve{f}^\circ(x) := \overline{\mathcal{D}} f(x)$ 是 (1, 2) 阶左多解析克利福德函数，并具有如下积分表示

$$\breve{f}^\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x) ds_J f(s).$$

若 $f \in SH_R(W)$，函数 $f^\circ(x) := \Delta f(x)$ 是 (1, 2) 阶右多解析克利福德函数，并具有如下积分表示

$$\breve{f}^\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,x).$$

- （ $3 - \ell$, $0 \leq \ell \leq 1$ 阶多解析函数的积分表示）若 $f \in SH_L(W)$，函数 $\breve{f}_\ell(x) := \Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell} f(x)$ 是 $3 - \ell$ 阶左多解析函数，适用于 $0 \leq \ell \leq 1$，并具有如下积分表示

$$\breve{f}_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell},L}(s,x) ds_J f(s).$$

若 $f \in SH_R(W)$，函数 $\breve{f}_\ell(x) := f(x)\Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell}$是关于$0 \leq \ell \leq 1$ 的 $3 - \ell$阶右多重解析函数，并且具有如下积分表示

$$\breve{f}_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell},R}(s,x).$$

• (1 阶反全纯克利福德函数的积分表示) 若$f \in SH_L(W)$，函数 $f_0(x) := \mathcal{D}^2 f(x)$ 是 1 阶左反全纯克利福德函数，并且具有如下积分表示

$$f_\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,x) ds_J f(s).$$

若 $f \in SH_R(W)$，函数 $f_0(x) := f(x)\mathcal{D}^2$ 是阶数为 1 的右反全纯克利福德函数，并且具有以下积分表示

$$f_\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,x).$$

此外，这些积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$。

证明。我们从左切片超全纯函数出发，证明 $\ell+1$-调和函数的积分表示，因为其他情形可以用类似的论证证明。我们首先使用柯西公式。由定理 6.10 和定理 6.12，对于 $0 \le \ell \le 1$，有

$$\tilde{f}_\ell(x) = \Delta^{1-\ell}\mathcal{D} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} \Delta^{1-\ell}\mathcal{D} S^{-1}_L(s,x) ds_I f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}(s,x) ds_I f(s).$$

˜由命题 6.6，函数 $f_\ell(x)$ 是 $\ell+1$-调和的。 □

7. Series expansion of the kernels of the fine structures spaces

本节旨在将前述积分定理中的核表示为由 x 和 $\bar{x}$ 构成的收敛级数。为此，我们需要考察算子 $\mathcal{D}$、Δ、 $\Delta\mathcal{D}$、 $\overline{\mathcal{D}}$、 $\overline{\mathcal{D}}^2$、 $\mathcal{D}^2$ 和 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$ 作用于单项式 x^m 的结果，其中 $m \in \mathbb{N}$。我们已经知道:

引理 7.1. [7, 引理 1] 对于 $m \ge 1$，我们有

$$\mathcal{D}(x^m) = (x^m)\mathcal{D} = -4 \sum_{k=0}^{m-1} \overline{x}^{m-k-1} x^k = -4 \sum_{k=1}^{m} x^{m-k} \overline{x}^{k-1}. \tag{7.1}$$

我们将使用以下众所周知的等式

$$\Delta(xf(x)) = x\Delta f(x) + 2\mathcal{D} f(x), \tag{7.2}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^6$ 以及任意 $\mathcal{C}^2$ 函数 $f_\circ$

命题 7.2. 设 $x \in \mathbb{R}^6$ 和 $m \ge 2$。那么我们有

$$\Delta x^m = -8 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) x^{m-k-1} \overline{x}^{k-1} = -8 \sum_{k=1}^{m-1} k x^{k-1} \bar{x}^{m-k-1}. \tag{7.3}$$

证明。该证明采用关于 m 的归纳法。对于 $m = 2$ 和 $x = x_0 + \sum_{i=1}^5 e_i x_i = x_0 + \underline{x}$，我们有

$$\Delta x^2 = \Delta(x_0^2 + 2x_0\underline{x} - |\underline{x}|^2) = -8.$$

设　　已知该命题对 m 成立，我们要证明它对 $m+1$ 成立。于是，我们有

$$\begin{aligned}\Delta x^{m+1} &= \Delta(x^m x) = 2\mathcal{D}(x^m) + x\Delta x^m \\ &= -8\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\overline{x}^{k-1} - 8\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)x^{m-k}\overline{x}^{k-1} \\ &= -8\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\overline{x}^{k-1} - 8\sum_{k=1}^{m}(m-k)x^{m-k}\overline{x}^{k-1} \\ &= -8\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)x^{m-k}\overline{x}^{k-1},\end{aligned}$$

其中，第一个等式由公式（7.2）得到，第二个等式则由归纳假设和公式（7.1）得出。第二个等式是通过重新排列指标得到的。□

命题 7.3. 设 $x \in \mathbb{R}^6$，对于 $m \geq 2$，我们有

$$\mathcal{D}^2(x^m) = (x^m)\mathcal{D}^2 = -8\sum_{k=1}^{m-1} k x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}.$$

证明. 我们对 m 使用归纳法证明该结论。对于 $m=2$，由公式（7.1）可得

$$\mathcal{D}^2(x^2) = \mathcal{D}^2(x_0^2 + 2x_0\underline{x} - |\underline{x}|^2) = -8\mathcal{D}(x_0) = -8.$$

假设　　该命题对 m 成立，并证明其对 $m+1$ 也成立。首先我们注意到

$$x^{m+1} = x^m(\overline{x} + x) - x^{m-1}|x|^2.$$

因此，根据狄拉克算子的莱布尼茨公式以及 $\mathcal{D}|x|^2 = 2x$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x^{m+1}) &= \mathcal{D}(x^m(\overline{x}+x)) - \mathcal{D}(x^{m-1}|x|^2) \\ &= \mathcal{D}(x^m)(\overline{x}+x) + 2x^m - \mathcal{D}(x^{m-1})|x|^2 - 2x^m \\ &= \mathcal{D}(x^m)(\overline{x}+x) - \mathcal{D}(x^{m-1})|x|^2.\end{aligned}$$

再次使用莱布尼茨公式和归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}^2(x^{m+1}) = \mathcal{D}\left(\mathcal{D}(x^m)(\overline{x}+x) - \mathcal{D}(x^{m-1})|x|^2\right) \\ &= (\mathcal{D}^2 x^m)(x+\overline{x}) + 2\mathcal{D}x^m - \mathcal{D}^2(x^{m-1})|x|^2 - 2x\mathcal{D}(x^{m-1}) \\ &= -8\sum_{k=1}^{m-1} k x^{m-k}\overline{x}^{k-1} - 8\sum_{k=1}^{m-1} k x^{m-k-1}\overline{x}^{k} - 8\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\overline{x}^{k-1} + 8\sum_{k=1}^{m-2} k x^{m-k-1}\overline{x}^{k} + 8\sum_{k=1}^{m-1} x^{m-k}\overline{x}^{k-1} \\ &= -8\sum_{k=1}^{m-1} k x^{m-k}\overline{x}^{k-1} - 8(m-1)\bar{x}^{n-1} - 8\bar{x}^{m-1} \\ &= -8\sum_{k=1}^{m} k x^{m-k}\overline{x}^{k-1}.\end{aligned}$$

最后，由于 $\mathcal{D}(x^m) = (x^m)\mathcal{D}$，我们得到

$$(x^m)\mathcal{D}^2 = ((x^m)\mathcal{D})\,\mathcal{D} = \mathcal{D}(x^m)\mathcal{D} = \mathcal{D}^2(x^m).$$

□

现在，我们需要一些预备知识中的结果来得到 $\Delta\mathcal{D}x^m$ 的公式。

引理 7.4. 设 $f:\ \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}_n$ 则

$$\overline{\Delta f(x)}=\Delta\overline{f}(x).$$

证明。我们知道可以将 $f(x)$ 写成 $=\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}e_Af_A$，因此有

$$\overline{\Delta f(x)}=\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}e_A\Delta f_A(x_A)=\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}\overline{e}_A\Delta f_A(x_A)=\Delta\left(\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}\overline{e}_Af_A(x_A)\right)=\Delta\overline{f}(x).$$

□

推论 7.5. 设 $m\geq 2$。那么对于 $x\in\mathbb{R}^6$，有

$$\overline{\Delta x^m}=\Delta\overline{x}^m. \tag{7.4}$$

证明。若在引理 7.4 中考虑 $n=5$ 和 $f(x)=x^m$，即可得到该结论。 □

推论 7.6. 设 $m\geq 2$。那么对于任意 $x\in\mathbb{R}^6$，有

$$\Delta\bar{x}^m=-8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}.$$

证明。由推论 7.5 和命题 7.2 可得。 □

引理 7.7. 设 $m\geq 3$，对于任意 $x\in\mathbb{R}^6$，有

$$\sum_{k=1}^{m}\Delta(x^{m-k}\overline{x}^{k-1})=-4\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-2}\overline{x}^{k-1}.$$

证明。我们将对 m 使用归纳法来证明这个公式。对于 $m=3$，有

$$\Delta(x^2+x\overline{x}+\overline{x}^2)=\Delta(3x_0^2-|\underline{x}|^2)=-4.$$

假设该命题对 m 成立，我们要证明它对 $m+1$ 也成立。现在，由公式（7.2）和推论 7.6 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\Delta(x^{m+1-k}\overline{x}^{k-1})&=\sum_{k=1}^{m}\Delta(x^{m+1-k}\overline{x}^{k-1})+\Delta\overline{x}^m\\&=2\sum_{k=1}^{m}\mathcal{D}(x^{m-k}\overline{x}^{k-1})+x\sum_{k=1}^{m}\Delta(x^{m-k}\overline{x}^{k-1})-8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}.\end{aligned}$$

最后，由公式（7.1）、归纳假设和引理 7.3，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\Delta(x^{m+1-k}\overline{x}^{k-1})&=-\frac{1}{2}\mathcal{D}^2x^m+x\sum_{k=1}^{m}\Delta(x^{m-k}\overline{x}^{k-1})-8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}\\&=-\frac{1}{2}\mathcal{D}^2x^m-4\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}-8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}\\&=4\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}-4\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}-8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}\\&=-4\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)kx^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}.\end{aligned}$$

□

命题 7.8。设 $m \geq 3$，对于任意 $x \in \mathbb{R}^6$，我们有

$$\Delta \mathcal{D} x^m = 16 \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) k x^{m-k-2} \overline{x}^{k-1}.$$

证明。由公式（7.1）和引理 7.7 可得。 □

我们回顾以下事实

$$\mathcal{D}_{\underline{x}}(\underline{x}^m) = \begin{cases} -m\underline{x}^{m-1} & m \quad \text{even}, \\ -(m+4)\underline{x}^{m-1} & m \quad \text{odd}, \end{cases} \tag{7.5}$$

其中 $\mathcal{D}_{\underline{x}} = \sum_{j=1}^{5} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}$。

命题 7.9。设 $m \geq 1$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^6$，如果 $\underline{x} \neq 0$，则有

$$\overline{\mathcal{D}} x^m = 2 \left[m x^{m-1} + 2 \sum_{k=1}^{m} x^{m-k} \bar{x}^{k-1} \right]. \tag{7.6}$$

另一方面，如果 $\underline{x} = 0$，则有

$$\overline{\mathcal{D}} x^m = 6 m x^{m-1}.$$

此外，

$$\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}.$$

证明。我们将进　行直接计算。根据二项式定理和公式 (7.5)，我们得到 t

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}(x^m) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathcal{D}_{\underline{x}} \right) (x_0 + \underline{x})^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathcal{D}_{\underline{x}} \right) \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (m-k) x_0^{m-k-1} \underline{x}^k - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \mathcal{D}_{\underline{x}}(\underline{x}^k) \\ &= m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!} x_0^{m-k-1} \underline{x}^k + m \sum_{k=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} x_0^{m-k} \underline{x}^{k-1} + \\ &\quad + 4 \sum_{k=1, k \text{ odd}}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^{k-1}. \end{aligned}$$

通过重新排列　求和指标，并再次使用二项式定理，我们得到

$$\overline{\mathcal{D}}(x^m) = 2 m x^{m-1} + 4 \sum_{k=1, k \text{ odd}}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^{k-1}. \tag{7.7}$$

若 $\underline{x} = 0$，我们得到

$$\overline{D} x^m = 6 m x^{m-1}.$$

另一方面，如果 $\underline{x} \neq 0$ 根据二项式定理，我们有

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1, k \text{ odd}}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^{k-1} &= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^{k-1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} (-\underline{x})^{k-1} \\ &= (\underline{x})^{-1} \left[\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} \underline{x}^k - \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} (-\underline{x})^k \right] \\ &= (\underline{x})^{-1} (x^m - \bar{x}^m). \end{aligned}$$

现在，由于 $x^m - \bar{x}^m = 2\underline{x}\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\bar{x}^{k-1}$ 我们得到

$$2\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x_0^{m-k}\underline{x}^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}. \tag{7.8}$$

将公式（7.8）代入（7.7），即可得到公式（7.6）。
最后，　由于 $\mathcal{D}_{\underline{x}}(\underline{x}^m) = (\underline{x}^m)\mathcal{D}_{\underline{x}}$，我们可以重复前面的计算，从而得到

$$\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}.$$

□

为了计算 $\overline{\mathcal{D}}^2 x^m$，我们需要以下结果。

引理 7.10. 设 $m \geq 2$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^6$，有

$$\mathcal{D}_{\underline{x}}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{m-1}(2k-m)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}.$$

证明。由命题 7.3 和公式（7.1）可得

$$\begin{aligned} -8\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1} &= \mathcal{D}(\mathcal{D}x^m) = -4\mathcal{D}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) \\ &= -4\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) + \mathcal{D}_{\underline{x}}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.9}$$

现在，由于 $\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1} = (2\underline{x})^{-1}(x^m - \bar{x}^n)$，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left[(2\underline{x})^{-1}(x^m - \bar{x}^m)\right] \\ &= (2\underline{x})^{-1}m(x^{m-1} - \overline{x}^{m-1}) \\ &= m\sum_{k=1}^{m-1}x^{m-1-k}\bar{x}^{k-1}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

因此，由公式 (7.9) 和公式 (7.10) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\underline{x}}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) &= 2\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1} - \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1} - m\sum_{k=1}^{m-1}x^{m-1-k}\bar{x}^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1}(2k-m)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}. \end{aligned}$$

□

命题 7.11. 设 $m \geq 2$。那么对于任意 $x \in \mathbb{R}^6$，我们有

$$\overline{\mathcal{D}}^2(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}^2 = 4\left[m(m-1)x^{m-2} + 2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right]. \tag{7.11}$$

证明。两次应用命题 7.9 以及事实 $\overline{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathcal{D}_{\underline{x}}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}^2(x^m) &= \overline{\mathcal{D}}(\overline{\mathcal{D}}x^m) \\
&= 2m\overline{\mathcal{D}}(x^{m-1}) + 4\overline{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) \\
&= 2m\left(2(m-1)x^{m-2} + 4\sum_{k=1}^{m-1} x^{m-1-k}\bar{x}^{k-1}\right) + \\
&\quad +4\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right) - \mathcal{D}_{\underline{x}}\left(\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

由公式 (7.10) 和引理 7.10 可得

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}^2 x^m &= 4\Bigg[m(m-1)x^{m-2} + 2m\sum_{k=1}^{m-1} x^{m-1-k}\bar{x}^{k-1} + \\
&\quad +m\sum_{k=1}^{m-1} x^{m-1-k}\bar{x}^{k-1} - \sum_{k=1}^{m-1}(2k-m)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\Bigg] \\
&= 4\left[m(m-1)x^{m-2} + 2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right].
\end{aligned}$$

最后，由于 $\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}$，可得

$$\overline{\mathcal{D}}^2(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}^2.$$

□

命题 7.12. 设 $m \geq 3$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^6$，有

$$\Delta\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\Delta\overline{\mathcal{D}} = -16\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)x^{m-k-2}\bar{x}^{k-1}. \tag{7.12}$$

证明. 将算子 Δ 作用于公式 (7.10)，可得

$$\Delta\overline{\mathcal{D}}x^m = 2m\Delta(x^{m-1}) + 4\sum_{k=1}^{m}\Delta(x^{m-k}\bar{x}^{k-1}).$$

因此，由命题 7.2 和引理 7.7 可得

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\mathcal{D}}(x^m) &= -16m\sum_{k=1}^{m-2}(m-1-k)x^{m-2-k}\bar{x}^{k-1} + \\
&\quad -16\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-2}\bar{x}^{k-1} \\
&= -16\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)x^{m-2-k}\bar{x}^{k-1}.
\end{aligned}$$

最后，由于拉普拉斯算子是一个实算子，且 $\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\overline{\mathcal{D}}$，我们得到

$$\Delta\overline{\mathcal{D}}(x^m) = (x^m)\Delta\overline{\mathcal{D}}.$$

□

注记 7.13。在 (7.11) 和 (7.12) 中得到的多项式分别是 2 阶和 3 阶多重解析的。然而，这些多项式与 [28], 中找到的多项式并不一致；在该文中，作者通过应用 Fueter 多重解析映射得到了多重解析多项式，见 [5]。

定义 7.14（左核级数与右核级数）。设 $s, x \in \mathbb{R}^6$，则定义

- 左 $\mathcal{D}$-核级数为

$$-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m}, \tag{7.13}$$

右 $\mathcal{D}$-核级数为

$$-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} s^{-1-m}x^{m-k}\overline{x}^{k-1},$$

- 左 Δ-核级数为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m}, \tag{7.14}$$

右 Δ-核级数为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-1}(m-k)s^{-1-m}x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1},$$

- 左 $\Delta\mathcal{D}$-核级数为

$$16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-2}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m}, \tag{7.15}$$

右侧 $\Delta\mathcal{D}$-核级数为

$$16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=3}^{m-2}(m-k-1)ks^{-1-m}x^{m-k-2}\overline{x}^{k-1},$$

- 左侧 $\mathcal{D}^2$-核级数为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}s^{-1-m}, \tag{7.16}$$

右侧 $\mathcal{D}^2$-核级数为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}ks^{-1-m}x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1},$$

- 左侧 $\overline{\mathcal{D}}$-核级数为

$$2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(mx^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right]s^{-1-m}, \tag{7.17}$$

右侧的 $\overline{\mathcal{D}}$-核级数为

$$2\left[\sum_{m=1}^{\infty}s^{-1-m}\left(mx^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right],$$

- 左侧的 $\overline{\mathcal{D}}^2$-核级数为

$$4\left[\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)x^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right], \tag{7.18}$$

右侧 $\overline{\mathcal{D}}^2$-核级数为

$$4\left[\sum_{m=2}^{\infty}s^{-1-m}\left(m(m-1)x^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right)\right],$$

- 左侧 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核级数为

$$-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)x^{m-k-2}\bar{x}^{k-1}s^{-1-m}. \tag{7.19}$$

右侧 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核级数为

$$-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)s^{-1-m}x^{m-k-2}\bar{x}^{k-1}.$$

注记 7.15. 左侧和右侧的 $\mathcal{D}$-核级数在收敛处相等， $\Delta\mathcal{D}$-核级数的左侧和右侧也相等。

我们汇总了一些技术引理，这些引理已用于以下部分结果的证明中。

引理 7.16. 对于 $m\geq 3$，我们有

$$\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)k=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}.$$

证明。我们知道 $\sum_{k=1}^{m-2}k=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$，且 $\sum_{k=1}^{m-2}k^2=\frac{(m-2)(m-1)(2m-3)}{6}$。因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)k &= (m-1)\sum_{k=1}^{m-2}k-\sum_{k=1}^{m-2}k^2\\ &= \frac{(m-1)^2(m-2)}{2}-\frac{(m-2)(m-1)(2m-3)}{6}\\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{2}\left((m-1)-\frac{(2m-3)}{3}\right)\\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{6}.\end{aligned}$$

□

引理 7.17. 对于 $m\geq 3$，我们有

$$\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)=\frac{2m(m-1)(m-2)}{3}.$$

证明。由于 $\sum_{k=1}^{m-2}k=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned}m\sum_{k=1}^{m-2}(m-1-k) &= m^2(m-2)-m(m-2)-\frac{m(m-1)(m-2)}{2}\\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{2}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

最后，由公式 (7.20) 和引理 7.16 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k) &= \sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)k + m\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)\\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}\\ &= \frac{2m(m-1)(m-2)}{3}.\end{aligned}$$

□

命题 7.18. 对于 $s,x \in \mathbb{R}^6$，其中 $|x| < |s|$，所有左核级数均收敛。

证明。为了证明级数收敛，只需证明模的级数收敛。

- 为了证明左 $\mathcal{D}$-核级数收敛，只需证明以下级数收敛

$$\sum_{m=1}^{\infty} m|x|^{m-1}|s|^{-1-m}. \tag{7.21}$$

由比值判别法可知，此级数收敛。事实上，由于 $|x| < |s|$，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)|x|^m|s|^{-2-m}}{m|x|^{m-1}|s|^{-1-m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{m}|x||s|^{-1} < 1.$$

- 为了证明 Δ-核级数收敛，我们需要证明以下级数收敛

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\right)|x|^{m-2}|s|^{-1-m}. \tag{7.22}$$

由于 $\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) = \frac{m(m-1)}{2}$，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)m|x|^{m-1}|s|^{-2-m}}{m(m-1)|x|^{m-2}|s|^{-1-m}} = |x||s|^{-1} < 1. \tag{7.23}$$

因此，由比值判别法可知该级数收敛。

- 为了证明 $\Delta\mathcal{D}$-核级数的收敛性，我们必须证明下列级数的收敛性性如下级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)k\right)|x|^{m-3}|s|^{-1-m}. \tag{7.24}$$

现在，由于 $\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)k = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$（见引理 7.16），应用比值判别法可得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m(m+1)(m-1)|x|^{m-2}|s|^{-2-m}}{m(m-1)(m-2)|x|^{m-3}|s|^{-1-m}} = |x||s|^{-1} < 1.$$

因此该级数是收敛的。

- 为了证明 $\mathcal{D}^2$- 核级数的收敛性，我们需要证明下面级数的收敛性

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1}k\right)|x|^{m-2}|s|^{-1-m}.$$

由于 $\sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{(m-1)_2}{2}^m$，应用比值判别法可再次得到与 (7.23) 相同的极限，因此该级数收敛

- 为了证明 $\overline{\mathcal{D}}$-核级数的收敛性，我们对 (7.17) 中的级数取模，经过一些变换后得到

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(mx^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right||s|^{-1-m}\leq\sum_{m=1}^{\infty}3m|x|^{m-1}|s|^{-1-m}.$$

级数 $\sum_{m=1}^{\infty}3m|x|^{m-1}|s|^{-1-m}$ 的收敛性可通过类似于证明 (7.21) 中级数收敛性的论证得到。

- 与前一点的做法相同，我们对级数 (7.18) 取模，经过一些计算后得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)x^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right)\right||s|^{-1-m}\\&\leq\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)+\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)\right)|x|^{m-2}|s|^{-1-m}\\&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{5m(m-1)}{2}|x|^{m-2}|s|^{-1-m}.\end{aligned}$$

级数 $\sum_{m=2}^{\infty}\frac{5m(m-1)}{2}|x|^{m-2}|s|^{-1-m}$ 的收敛性可用类似于 (7.22) 中级数的方式证明。

- 最后，为了证明左侧 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$ 的收敛性，只需证明下列级数收敛

$$\sum_{m=3}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)\right)|x|^{m-3}|s|^{-1-m}.$$

由于 $\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)=\frac{2m_{(m-1)(m-2)}}{3}$（见引理 7.17），收敛性可用类似于证明 (7.24) 中级数的方式得到。

□

注 7.19。同样，所有右核级数都收敛。

现在，我们可以将上一节中计算出的左核和右核展开为级数 n.

引理 7.20。对于满足 $|x|<|s|$ 的 s、$x\in\mathbb{R}^6$，我们可以展开

- 左切片 $\mathcal{D}$-核如下

$$S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,x)=-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

右切片 $\mathcal{D}$-核如下

$$S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,x)=-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}s^{-1-m}x^{m-k}\overline{x}^{k-1},$$

- 左切片 Δ-核为

$$S^{-1}_{\Delta,L}(s,x)=-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

右切片 Δ-核为

$$S^{-1}_{\Delta,R}(s,x)=-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)s^{-1-m}x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1},$$

- 左切片 $\Delta\mathcal{D}$-核为

$$S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,x)=16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-2}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

右切片 $\Delta\mathcal{D}$-核为

$$S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,x)=16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)ks^{-1-m}x^{m-k-2}\overline{x}^{k-1},$$

- 我们可以将左切片 $\mathcal{D}^2$-核展开为

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,x)=-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

右切片 $\mathcal{D}^2$-核为

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,x)=-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}ks^{-1-m}x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1},$$

- 左切片 $\overline{\mathcal{D}}$-核为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)=2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(mx^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right]s^{-1-m},$$

右切片 $\overline{\mathcal{D}}$-核为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,x)=2\left[\sum_{m=1}^{\infty}s^{-1-m}\left(mx^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\bar{x}^{k-1}\right)\right],$$

将左切片 $\mathcal{D}^2$-核定义为•

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,x)=4\left[\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)x^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right],$$

并将右切片 $\overline{\mathcal{D}}^2$-核定义为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,x)=4\left[\sum_{m=2}^{\infty}s^{-1-m}\left(m(m-1)x^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)x^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}\right)\right],$$

将左切片 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核定义为•

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,x)=-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)x^{m-k-2}\bar{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

以及右切片 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核为

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,x)=-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)s^{-1-m}x^{m-k-2}\bar{x}^{k-1}.$$

证明。我们知道，可以按以下方式展开左柯西核 y

$$S_L^{-1}(s,x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m s^{-1-m}. \tag{7.25}$$

为了得到所有展开式，只需将算子 $\mathcal{D}$、 Δ、$\Delta\mathcal{D}$、 $\mathcal{D}^2$、 $\overline{\mathcal{D}}$、 $\overline{D}^2$ 和 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$ 作用于公式（7.25）。根据命题 7.18，我们可以交换算子与求和的次序。最后，为了得到用 x 和 $\bar{x}$ 表示的展开式，我们应用公式（7.1）、命题 7.2、命题 7.8、命题 7.3、命题 7.9、命题 7.11 和命题 7.12。通过类似的论证，右核也有相应结果。□

备注 7.21. 由引理 7.20 以及定理 6.10、定理 6.11、定理 6.12 和定理 6.15，我们可推出以下等式

$$\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-2}=\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kx^{m-k-2}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m}=\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)ks^{-1-m}x^{m-k-2}\overline{x}^{k-1},$$

$$S_L^{-1}(s,x)\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)x^{m-k-1}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m},$$

$$Q_{c,s}(x)^{-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}x^{m-k}\overline{x}^{k-1}s^{-1-m}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}s^{-1-m}x^{m-k}\overline{x}^{k-1},$$

$$S_L^{-1}(s,\bar{x})\mathcal{Q}_{c,s}(x)^{-1}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}kx^{m-k-1}\bar{x}^{k-1}s^{-1-m}.$$

也可以得到关于右核的类似等式。

8. Preliminaries on the SC-functional calculus and the F-functional calculus

现在回顾一下 SC-函数演算的一些基本事实，参见 [24]。该函数演算是 S-函数演算的交换版本（见 [20]）。用 V 表示一个定义在 $\mathbb{R}$ 上、赋范为 $\|\cdot\|$ 的实巴拿赫空间。可以在 V 上定义与 $\mathbb{R}_n$ 中元素相乘的运算，从而使其成为 $\mathbb{R}_n$ 上的双边模。我们用 V_n 表示双边巴拿赫模 $V\otimes\mathbb{R}_n$。V_n 中的元素具有 $\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}e_Av_A$ 的形式，其中 $v_A\in V$，且 $e_\emptyset=1$ 和 $e_A=e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ 对于 $A=\{i_1,\dots,i_r\}$（其中 $i_1<\cdots<i_r$）成立。元素 $v\in V_n$ 与标量 $a\in\mathbb{R}_n$ 的（右、左）乘法定义为

$$va=\sum_A v_A\otimes(e_Aa)\quad\text{and}\quad av=\sum_A v_A\otimes(ae_A).$$

简言之，我们将用 $\sum_A v_Ae_A$ 代替 $\sum_A v_A\otimes e_A$。此外，我们定义

$$\|v\|_{V_n}=\sum_A\|v_A\|_V.$$

设 $\mathcal{B}(V)$ 为巴拿赫空间 V 到自身的有界 $\mathbb{R}$-同态空间，并赋予其由 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(V)}$ 表示的自然范数。

若 $T_A\in\mathcal{B}(V)$，我们可以定义算子 $T=\sum_A T_Ae_A$ 及其作用于

$$v=\sum_B v_Be_B$$

as

$$T(v)=\sum_{A,B}T_A(v_B)e_Ae_B.$$

Th所有此类有界算子构成的集合记作 $\mathcal{B}(V_n)$。范数定义为 b y

$$\|T\|_{\mathcal{B}(V_n)} = \sum_A \|T_A\|_{\mathcal{B}(V)}.$$

下文中，我们只考虑形如 $T = T_0 + \sum_{j=1}^n e_j T_j$ 的算子，其中$T_j \in \mathcal{B}(V)$ 对于 $j = 0, 1, \ldots, n$ 成立，并回顾共轭的定义如下:

$$\overline{T} = T_0 - \sum_{j=1}^n e_j T_j.$$

这类算子在 $\mathcal{B}(V_n)$ 中构成的集合记作 $\mathcal{B}^{0,\ 1}(V_n)$。本节中，我们始终考虑由有界可交换算子组成的 n 元组，且这些算子采用副向量形式；这类算子构成的集合记作 $\mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_n)$。

定义 8.1（ S-谱与 S-预解集）。设 $T \in \mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_n)$。我们将$S$-谱 $\sigma_S(T)$ 定义为 T :

$$\sigma_S(T) = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} : \ s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T} \quad \text{is not invertible}\}.$$

S-预解集 $\rho_S(T)$ 定义为:

$$\rho_S(T) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \sigma_S(T).$$

对于 $s \in \rho_S(T)$，算子

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} := (s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T})^{-1} \tag{8.1}$$

称为 T 在 s 处的交换伪 SC-预解算子。

定理 8.2. 设 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_n)$ 且 $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足 $\|T\| < |s|$。则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n s^{-n-1} = -(s\mathcal{I} - \overline{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1},$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{-n-1} T^n = -\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}(s\mathcal{I} - \overline{T}).$$

根据左切片超全纯性或右切片超全纯性，存在两种不同的预解算子。

定义 8.3（SC-预解算子）。设 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_n)$ 且 $s \in \rho_S(T)$。定义左SC-预解算子为

$$S_L^{-1}(s, T) := (s\mathcal{I} - \overline{T})(s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T})^{-1},$$

右 SC-预解算子定义为

$$S_R^{-1}(s, T) := (s^2\mathcal{I} - s(T + \overline{T}) + T\overline{T})^{-1}(s\mathcal{I} - \overline{T}).$$

同时涉及两种 SC-预解算子的方程称为 SC-预解方程（见 [1]）。为了定义 SC-函数演算，我们需要以下函数类。

定义 8.4. 设 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(X)$。我们用 $\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$、 $\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 和 $N(\sigma_S(T))$ 表示所有左、右和内在切片超全纯函数的集合 f，其满足 $\sigma_S(T) \subset dom(f)$。

定义 8.5（SC-函数演算）。设 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_n)(X)$。设 U 是一个包含 $\sigma_S(T)$ 的切片柯西域，且 $\overline{U}$ 包含于 f 的定义域中。令 $ds_J = -ds J$。我们定义

$$f(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,T)\, ds_J\, f(s), \quad for\ every \quad f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T)). \tag{8.2}$$

我们定义

$$f(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s)\, ds_J\, S_R^{-1}(s,T), \quad for\ every \quad f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T)). \tag{8.3}$$

可以证明，SC-函数演算是适定的，因为 (8.2) 和 (8.3) 中的积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$。

现在我们要介绍 F-函数演算（关于这一主题的更完整介绍，请参见 [17]）。F_n-预解算子的定义由积分形式的 Fueter-Sce 映射定理所启发。

定义 8.6（F_n-预解算子）。设 n 为奇数，且 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_n)$。对于 $s \in \rho_F(T)$，我们将左 F-预解算子定义为

$$F_n^L(s,T) = \gamma_n(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad s \in \rho_S(T),$$

右 F-预解算子定义为

$$F_n^R(s,T) = \gamma_n \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-\frac{n+1}{2}}(s\mathcal{I} - \bar{T}), \qquad s \in \rho_S(T).$$

根据上述　　根据已有的定义和定理 6.9，我们可以回顾 F-函数演算　　s.

定理 8.7（有界算子的 F-函数演算）。设 n 为奇数，令 $T \in \mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_n)$，并设 $ds_J = ds/J$。那么，对于任意 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$，我们定义

$$\breve{f}(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} F_n^L(s,T)\, ds_J\, f(s), \tag{8.4}$$

并且，对于任意 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$，我们定义

$$\breve{f}(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s)\, ds_J\, F_n^R(s,T). \tag{8.5}$$

前述积分既不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$，也不依赖于集合 U。

9. The functional calculi of the fine structures

利用以 x 和 $\bar{x}$ 表示的核表达式以及精细 Fueter-Sce 积分定理，我们可以定义精细 Fueter-Sce 泛函演算。

De定义 9.1。设 $T = T_0 + \sum_{i=1}^5 e_i T_i \in \mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_5)$，　$s \in \mathbb{R}^6$。我们形式化地定义

- 左侧和右侧的 $\mathcal{D}$-核算子级数作为

$$-4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} T^{m-k} \bar{T}^{k-1} s^{-1-m},$$

and

$$-4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} s^{-1-m} T^{m-k} \bar{T}^{k-1};$$

- 左侧和右侧的 Δ-核算子级数作为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)s^{-1-m}T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1};$$

- 左侧和右侧的 $\Delta\mathcal{D}$-核算子级数为

$$16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kT^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)ks^{-1-m}T^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}.$$

- 左侧和右侧的 $\mathcal{D}^2$-核算子级数为

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}kT^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$-8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}ks^{-1-m}T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1};$$

- 左侧和右侧的 $\overline{\mathcal{D}}$-核算子级数为

$$2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(mT^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\bar{T}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right],$$

and

$$2\left[\sum_{m=1}^{\infty}s^{-1-m}\left(mT^{m-1}+2\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\bar{T}^{k-1}\right)\right];$$

- 左侧和右侧的 $\overline{\mathcal{D}}^2$-核算子级数为

$$4\left[\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)T^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right],$$

and

$$4\left[\sum_{m=2}^{\infty}s^{-1-m}\left(m(m-1)T^{m-2}+2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}\right)\right];$$

- 左、右 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-核算子级数为

$$-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)T^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)s^{-1-m}T^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}.$$

命题 9.2. 考虑 $T \in \mathcal{BC}^0,\ _1(V_5)$、 $s \in \mathbb{R}^6$ 和 $\|T\| < |s|$，则先前定义的级数收敛，特别地，我们可以展开

- 左、右 $\mathcal{D}$-预解算子为

$$\begin{aligned} S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T) &= S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,T) = -4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} T^{m-k}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m} \\ &= -4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} s^{-1-m}T^{m-k}\bar{T}^{k-1}; \end{aligned}$$

- 左、右 Δ-预解算子为

$$S^{-1}_{\Delta,L}(s,T) = -8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$S^{-1}_{\Delta,R}(s,T) = -8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)s^{-1-m}T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1};$$

- 左、右 $\Delta\mathcal{D}$-预解算子为

$$\begin{aligned} S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T) &= S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,T) = 16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)kT^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m} \\ &= 16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)ks^{-1-m}T^{m-k-2}\bar{T}^{k-1}; \end{aligned}$$

- 左、右 $\mathcal{D}^2$-预解算子为

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,T) = -8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}kT^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,T) = -8\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-1}ks^{-1-m}T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1};$$

- 左、右 $\overline{\mathcal{D}}$-预解算子为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,T) = 2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(mT^{m-1} + 2\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\bar{T}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right],$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,T) = 2\left[\sum_{m=1}^{\infty}s^{-1-m}\left(mT^{m-1} + 2\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\bar{T}^{k-1}\right)\right];$$

- 左侧和右侧的 $\overline{\mathcal{D}}^2$-预解算子为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,T) = 4\left[\sum_{m=2}^{\infty}\left(m(m-1)T^{m-2} + 2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}\right)s^{-1-m}\right],$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,T) = 4\left[\sum_{m=2}^{\infty}s^{-1-m}\left(m(m-1)T^{m-2} + 2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}\right)\right];$$

- 左侧和右侧的 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-预解算子为

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,T)=-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}s^{-1-m},$$

and

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,T)=-16\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(m-k-1)(m+k)s^{-1-m}T^{m-k-1}\bar{T}^{k-1}.$$

证明。通过考察 $\|T\|<|s|$ 的算子范数级数，并按照命题 7.18中的推理，可以证明这些级数的收敛性。我们只证明核与级数之间的第一个等式，因为其他等式可通过类似论证得到。由于

$$S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T)=S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,T)=-4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1},$$

只需证明

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)=\mathcal{I}. \tag{9.1}$$

(9.1)中的第一个等式是以下事实的推论：对于任意正整数 m，和式$\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}$是 T各分量的一个实系数算子，因此与 s的任意次幂交换； T 的各分量彼此交换，并且算子$\mathcal{Q}_{c,s}(T)$可以写成以下形式： $s^2\mathcal{I}-2sT_0+\sum_{i=0}^{5}T_i^2$。现在我们要证明(9.1)中的第二个等式。首先注意到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)(s^2-s(T+\overline{T})+T\overline{T})\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{1-m}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m+1-k}\overline{T}^{k-1}s^{-m}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k}s^{-m}\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k+1}\bar{T}^{k}s^{-1-m}.\end{aligned}$$

在第二组级数和第四组级数中作指标变换 $m'=1+m$，可得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)=\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{1-m}-\sum_{m'=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m'-1}T^{m'-k}\overline{T}^{k-1}s^{1-m'}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k}s^{-m}\\&\quad+\sum_{m'=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m'-1}T^{m'-k}\overline{T}^{k}s^{-m'}\\&=\mathcal{I}+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{1-m}-\sum_{m'=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m'-1}T^{m'-k}\overline{T}^{k-1}s^{1-m'}+\\&\quad-\bar{T}s^{-1}-\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k}s^{-m}+\sum_{m'=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{m'-1}T^{m'-k}\overline{T}^{k}s^{-m'}.\end{aligned}$$

化简第一组级数与第二组级数、以及第三组级数与第四组级数中的相反项，最终得到

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}T^{m-k}\overline{T}^{k-1}s^{-1-m}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)=\mathcal{I}+\sum_{m=2}^{\infty}\overline{T}^{m-1}s^{1-m}-\sum_{m=2}^{\infty}\overline{T}^{m-1}s^{1-m}=\mathcal{I}.$$

□

现在我们可以定义精细结构的预解算子，并研究其正则性。基于前述级数展开以及函数空间核的结构，我们现在可以定义与精细结构空间相关的预解算子。利用这些与 S-谱相关的预解算子，我们将定义与相应函数空间相关的函数演算。

定义 9.3（与精细结构相关的预解算子）。设 $T\in\mathcal{BC}^{0,1}(V_5)$ 和 $s\in\rho_S(T)$，回顾一下

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}:=(s^2\mathcal{I}-s(T+\overline{T})+T\overline{T})^{-1}.$$

- 左侧和右侧的 $\mathcal{D}$-预解算子 $S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T):=-4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1},\tag{9.2}$$

and

$$S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,T):=-4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}.\tag{9.3}$$

- 左侧和右侧的 Δ-预解算子 $S^{-1}_{\Delta,L}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{\Delta,R}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\Delta,L}(s,T):=-8S^{-1}_{L}(s,T)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1},\tag{9.4}$$

and

$$S^{-1}_{\Delta,R}(s,T):=-8\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}S^{-1}_{R}(s,T).\tag{9.5}$$

- 左侧和右侧的 $\Delta\mathcal{D}$-预解算子 $S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T):=16\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2},\tag{9.6}$$

and

$$S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,T):=16\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}.\tag{9.7}$$

- 左 以及右侧的 $\overline{\mathcal{D}}$-预解算子 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,T)$ 定义为 a s

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,T):=4(s-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}(s-T_0)+2\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\tag{9.8}$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,T):=4(s-T_0)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}(s-\bar{T})+2\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}.\tag{9.9}$$

- 左侧和右侧的 $\overline{\mathcal{D}}^2$-预解算子 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,T)$ 和 $S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,T)$ 定义为

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,T):=32(s-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-3}(s-T_0)^2\tag{9.10}$$

and

$$S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,T):=32(s-T_0)^2\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-3}(s-\bar{T}).\tag{9.11}$$

- 左和右 $\mathcal{D}^2$-预解算子$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,T)$和$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,T)$定义为

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,T):=8S^{-1}_{L}(s,\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\tag{9.12}$$

and

$$S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,T):=8\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}S^{-1}_{R}(s,\bar{T}).\tag{9.13}$$

- 左和右 $\Delta\overline{\mathcal{D}}$-预解算子$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},\ L}(s,T)$和$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},\ R}(s,T)$定义为

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,T) := -64(s-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-3}(s-T_0) \tag{9.14}$$

and

$$S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,x) := -64(s-T_0)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-3}(s-\bar{T}). \tag{9.15}$$

现在，我们研究前面这些核的正则性。

命题 9.4. 设 $T \in \mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_5)$。则与定义 9.3 中的精细结构相关联的预解算子，是以 和 $s \in \rho_S(T)$ 为取值的切片超全纯算子值函数。

证明. 通过直接计算即可得出；对于 S-预解算子或F-预解算子的情形亦然。□

现在，我们可以定义与精细结构相关联的函数演算。

定义 9.5（五维精细结构的函数演算）。设 $T \in \mathcal{BC}^{0,\ 1}(V_5)$，并令 $ds_J = ds(-J)$，其中 $J \in \mathbb{S}$。设 f是属于 $\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 或属于$\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 的函数。设 U是一个有界切片柯西域，满足 $\sigma_S(T) \subset U$且$\overline{U} \subset \mathrm{dom}(f)$。

牢记定义 9.3 中与精细结构相关的预解算子，我们定义与精细结构相关的函数演算如下：

- （ $0 \le \ell \le 1$的 ℓ+1调和泛函演算）对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$且 $0 \le \ell \le 1$的函数 $\tilde{f}_\ell = \Delta^{1-\ell}\mathcal{D}f$，定义

$$\tilde{f}_\ell(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},L}(s,T)ds_J f(s), \tag{9.16}$$

并且，对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$的函数 $\tilde{f}_\ell = f\Delta^{1-\ell}\mathcal{D}$，定义

$$\tilde{f}_\ell(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S^{-1}_{\Delta^{1-\ell}\mathcal{D},R}(s,T). \tag{9.17}$$

- （一阶全纯克利福德函数演算）对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$的函数$f^\circ = \Delta f$，定义

$$f^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta,L}(s,T)ds_J f(s), \tag{9.18}$$

并且，对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$的函数 $f^\circ = \Delta f$，定义

$$f^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S^{-1}_{\Delta,R}(s,T). \tag{9.19}$$

- （(1,2)阶多解析克利福德函数演算）对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$的函数$f^\circ = \overline{\mathcal{D}}f$，定义

$$\breve{f}^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,T)ds_J f(s), \tag{9.20}$$

并且，对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 的函数 $f^\circ = f\overline{\mathcal{D}}$，我们定义

$$\breve{f}^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,T). \tag{9.21}$$

- （ $0 \leq \ell \leq 1$的 $3-\ell$阶多解析函数演算）对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 的函数 $\breve{f}_\ell = \Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell} f$，我们定义

$$\breve{f}_\ell(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell},L}(s,T) ds_J f(s), \tag{9.22}$$

并且，对于每个满足 $f_\ell = f\overline{\mathcal{D}}$（ $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S)$）的函数 T，我们定义

$$\breve{f}^\circ(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\Delta^\ell \overline{\mathcal{D}}^{2-\ell},R}(s,T). \tag{9.23}$$

- （一阶反全纯克利福德函数演算）对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 的函数$f_0 = \mathcal{D}^2 f$，我们定义

$$f_0(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,T) ds_J f(s), \tag{9.24}$$

并且，对于每个满足 $f_0 = f\mathcal{D}^2$（ $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S)$）的函数 T，我们定义

$$f_0(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,T). \tag{9.25}$$

定理 9.6. 前述函数演算是良定义的，也就是说，定义 9.5 中的积分既不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$，也不依赖于切片柯西域 U。

证明。我们证明使用左切片超全纯函数定义的函数演算的结果，因为右侧对应的情形可以通过类似的计算证明。证明该定理时，我们唯一用到的核的性质是：它们关于变量 s 都是右切片超全纯的（见命题 6.17）。因此，在下文中，我们可以用符号 $K_L(s,T)$ 表示命题 9.2 中描述的任意一个左核。

由于 $K_L(s,T)$ 是 s 中的右切片超全纯函数，且 f 是左切片超全纯的，因此根据柯西积分公式（见定理 6.5），可知其与集合 U 无关。

现在，我们要证明其与虚单位无关。考虑两个虚单位 J、 $I \in \mathbb{S}$，满足 $J \neq I$；以及两个有界切片柯西域 U_x、 U_s，满足 $\sigma_S(T) \subset U_x$、$\overline{U}_x \subset U_s$和 $\overline{U}_s \subset dom(f)$。那么，每个 $s \in \partial(U_s \cap \mathbb{C}_J)$ 都属于无界切片柯西域 $\mathbb{R}^6 \setminus U_x$。

由于 $\lim_{x \to +\infty} K_L(x,T) = 0$，切片超全纯柯西公式推出

$$\begin{aligned} K_L(s,T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(\mathbb{R}^6 \setminus (U_x \cap \mathbb{C}_I))} K_L(x,T) dx_I S_R^{-1}(x,s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U_x \cap \mathbb{C}_I)} K_L(x,T) dx_I S_L^{-1}(s,x). \end{aligned} \tag{9.26}$$

最后一个等式是基于以下事实： $\partial(\mathbb{R}^6 \setminus (U_x \cap \mathbb{C}_I)) = -\partial(U_x \cap \mathbb{C}_I)$，且 $S_R^{-1}(x,s) = -S_L^{-1}(s,x)$。因此，由公式 (9.26) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}(T) &= \int_{\partial(U_s \cap \mathbb{C}_J)} K_L(s,T) ds_J f(s) \\ &= \int_{\partial(U_s \cap \mathbb{C}_J)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U_x \cap \mathbb{C}_I)} K_L(x,T) dx_I S_L^{-1}(s,x) \right) ds_J f(s). \end{aligned}$$

由 Fubini定理可知，我们可以交换积分次序；再由柯西公式可得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T) &= \int_{\partial(U_x\cap\mathbb{C}_I)} K_L(x,T)dx_I \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U_s\cap\mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,x)ds_J f(s)\right)\\ &= \int_{\partial(U_x\cap\mathbb{C}_I)} K_L(x,T)dx_I f(x).\end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

下文中 我们用 P 表示以下算子之一： $\Delta^{1-\ell}\mathcal{D}$, Δ, $\overline{\mathcal{D}}$, $\Delta^{\ell}\overline{\mathcal{D}}^{2-\ell}$ 和 $\mathcal{D}^2$，对应于 $\ell = 0, 1$.

问题 9.7. 设 Ω 是一个切片柯西域。可能出现这样的情况： $f, g \in \mathcal{SH}_L(\Omega)$（分别为$f, g \in \mathcal{SH}_R(\Omega)$）以及 P $f = \mathrm{P}g$（分别为 $f\mathrm{P} = g\mathrm{P}$）。能否证明，对于任意 $T \in \mathcal{BC}^0$, $_1(V_5)$，若 $\sigma_S(T) \subset \Omega$，则有 $(\mathrm{P}f)(T) = (\mathrm{P}g)(T)$（分别有 $(f\mathrm{P})(T) = (g\mathrm{P})(T)$）？

为了解决这个问题，我们需要一个辅助结果。首先注意到，根据假设，我们有 $\mathrm{P}(f-g) = 0$（分别有 $(f-g)\mathrm{P} = 0$）。因此，有必要研究集合

$$(\text{核 }\mathrm{P})_{\mathcal{SH}_L(\Omega)} := \{f \in \mathcal{SH}_L(\Omega) : \mathrm{P}(f) = 0\} \quad \text{resp. } (\ker \mathrm{P})_{\mathcal{SH}_R(\Omega)} := \{f \in \mathcal{SH}_R(\Omega) : (f)\mathrm{P} = 0\}.$$

定理 9.8。设 Ω 是 $\mathbb{R}^6$ 的连通切片柯西域，则

$$\begin{aligned}(\ker \mathrm{P})_{\mathcal{SH}_L(\Omega)} &= \{f \in \mathcal{SH}_L(\Omega) : f \equiv \alpha_0 + \cdots + x^t\alpha_t \quad \textit{for some } \alpha_0, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}_n\}\\ &= \{f \in \mathcal{SH}_R(\Omega) : f \equiv \alpha_0 + \cdots + \alpha_t x^t \quad \textit{for some } \alpha_0, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}_n\} = (\ker \mathrm{P})_{\mathcal{SH}_R(\Omega)}\end{aligned}$$

其中 t 等于 P 的次数减 1。

证明。我们在 $f \in \mathcal{SH}_L(\Omega)$ 的情形下证明该结论，因为 $f \in \mathcal{SH}_R(\Omega)$ 的情形可用类似论证得出。我们采用双重包含法。显然，

$$(\ker \mathrm{P})_{\mathcal{SH}_L(\Omega)} \supseteq \{f \in \mathcal{SH}_L(\Omega) : f \equiv \alpha_0 + \cdots + x^t\alpha_t \quad \text{for some } \alpha_0, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}_n\}$$

是显然的。另一包含关系可通过观察得出：若 $f \in (\ker\mathrm{P})_{\mathcal{SH}_L(\Omega)}$，则在必要时作变量替换后，存在 $r > 0$，使函数 f 在原点处可展开为收敛级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\alpha_k \quad \text{for } (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}_n \text{ and for any } x \in B_r(0)$$

其中 $B_r(0)$ 是以 0 为中心、半径为 r 的球。我们有

$$0 = \mathrm{P}f(x) \equiv \sum_{k=\deg(\mathrm{P})}^{\infty} \mathrm{P}(x^k)\alpha_k, \quad \forall x \in B_r(0).$$

根据引理 7.1、命题 7.2、命题 7.3、命题 7.8、命题 7.9、命题 7.11 和命题 7.12，我们可以显式计算表达式 $\mathrm{P}(x^k)$；当它们限制在实轴上零点的某个邻域内时，它们与 $x^{k-\deg(\mathrm{P})}$ 仅相差一个常数。由于该幂级数恒等于零，因此对于任意 $k \geq \deg(\mathrm{P})$，其系数 α_k 都必须为零。这就得到 $f(x) \equiv \alpha_0 + \cdots + x^t\alpha_t$ 在 $B_r(0)$ 中；又由于 Ω 是连通的，对于任意 $x \in \Omega$，我们也有 $f(x) \equiv \alpha_0 + \cdots + x^t\alpha_t$。 □

我们在 Ω 连通的情形下解决问题 9.7。

命题 9.9。设 $T \in \mathcal{BC}^0$, $_1(V_5)$，并设 U为一个连通切片柯西域，且 $\sigma_S(T) \subset U$。若 f， $g \in \mathcal{SH}_L(U)$（分别地， f， $g \in \mathcal{SH}_R(U)$）满足性质 $\mathrm{P}f = \mathrm{P}g$（分别地， $f\mathrm{P} = g\mathrm{P}$），则 $(\mathrm{P}f)(T) = (\mathrm{P}g)(T)$（分别地，$(f\mathrm{P})(T) = (g\mathrm{P})(T)$）。

证明。我们证明 f， $g \in \mathcal{SH}_L(\Omega)$ 的情形，因为 f， $g \in \mathcal{SH}_R(\Omega)$ 的情形可由类似论证得出。根据定义 9.5，我们有

$$(\mathsf{P}f)(T) - (\mathsf{P}g)(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathsf{P},L}(s,T) ds_J (f(s) - g(s)).$$

由于 $S^{-1}{}_{\mathsf{P}\ L}(s,T)$ 关于变量 s 是切片超全纯的（由命题 9.4 可知），我们可以将积分域改为 $B_r(0) \cap \mathbb{C}_J$，其中 $r > 0$ 满足 $\|T\| < r$。此外，根据假设，我们有 $f(s) - g(s) \in (\ker \mathsf{P})_{\mathcal{SH}_L(\Omega)}$，因此由定理 9.8 和命题 9.2 可得

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{P}f)(T) - (\mathsf{P}g)(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(B_r(0) \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathsf{P},L}(s,T) ds_J (f(s) - g(s)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(B_r(0) \cap \mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathsf{P},L}(s,T) ds_J (\alpha_0 + \cdots + s^t \alpha_t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=\deg(\mathsf{P})}^{\infty} \left(g_{\mathsf{P},m}(T, \bar{T}) \right) \int_{\partial(B_r(0) \cap \mathbb{C}_J)} s^{-1-m} ds_J (\alpha_0 + \cdots + s^t \alpha_t) = 0.
\end{aligned}$$

其中 $g_{\mathsf{P},m}(T,T)$ 是关于 T 的多项式，且 T（见命题 9.2），并且 $t := \deg(\mathsf{P}) - 1$。 □

现在，我们用 F_n-预解算子来表示与精细结构相关的预解算子。

命题 9.10. 设 $T \in \mathcal{BC}^0,\ _1(V_5)$ 和 $s \in \rho_S(T)$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\mathcal{D},L}(s,T) &= -\frac{1}{16} \left[F^L_5(s,T)s^3 - (T + 2T_0)F^L_5(s,T)s^2 + (2T_0 x + |x|^2)F^L_5(s,T)s - T|T|^2 F^L_5(s,T) \right], \\
S^{-1}_{\mathcal{D},R}(s,T) &= -\frac{1}{16} \left[s^3 F^R_5(s,T) - s^2 F^R_5(s,T)(T + 2T_0) + sF^R_5(s,T)(2T_0 T + |T|^2) - F^R_5(s,T)T|T|^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta,L}(s,T) &= -\frac{1}{8} \left[F^L_5(s,T)s^2 - 2T_0 F^L_5(s,T)s + |T|^2 F^L_5(s,x) \right], \\
S^{-1}_{\Delta,R}(s,T) &= -\frac{1}{8} \left[F^R_5(s,T)T^2 - 2sF^R_5(s,T)T_0 + F^R_5(s,x)|T|^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},L}(s,T) &= \frac{1}{4} \left[F^L_5(s,T)s - TF^L_5(s,T) \right], \\
S^{-1}_{\Delta\mathcal{D},R}(s,T) &= \frac{1}{4} \left[sF^R_5(s,T) - F^R_5(s,T)T \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},L}(s,T) &= \frac{1}{32} \left[3F^L_5(s,T)s^3 - (8T_0 + T)F^L_5(s,T)s^2 + (4T_0^2 + 2T_0 T + 3|T|^2)F^L_5(s,T)s \right. \\
&\quad \left. -(T|T|^2 + 2T_0|T|^2)F^L_5(s,T) \right], \\
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}},R}(s,T) &= \frac{1}{32} \left[3s^3 F^R_5(s,T) - s^2 F^R_5(s,T)(8T_0 + T) + sF^R_5(s,T)(4T_0^2 + 2T_0 T + 3|T|^2) \right. \\
&\quad \left. -F^R_5(s,x)(T|T|^2 + 2T_0|T|^2) \right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}_{\mathcal{D}^2,L}(s,T) &= -\frac{1}{8}\left[F_5^L(s,T)s^2 - 2TF_5^L(s,T)s + T^2F_5^L(s,T)\right], \\
S^{-1}_{\mathcal{D}^2,R}(s,T) &= -\frac{1}{8}\left[s^2F_5^R(s,T) - 2sF_5^R(s,T)T + F_5^R(s,T)T^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,L}(s,T) &= \frac{1}{2}[F_5^L(s,T)s^2 - 2T_0F_5^L(s,T)s + x_0^2F_5^L(s,T)], \\
S^{-1}_{\overline{\mathcal{D}}^2,R}(s,T) &= \frac{1}{2}[s^2F_5^R(s,T) - 2sF_5^R(s,T)T_0 + F_5^R(s,T)T_0^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},L}(s,T) &= -F_5^L(s,x)s + T_0F_5^L(s,T), \\
S^{-1}_{\Delta\overline{\mathcal{D}},R}(s,T) &= -sF_5^R(s,T) + F_5^R(s,T)T_0.
\end{aligned}
$$

证明。将注记 6.18 中的变量 x 形式上替换为抛物向量算子T即可得出。□

为了解决问题 9.7，在 Ω 不连通的情况下，我们需要以下引理，该引理基于 [35, 36] 中发展的单生成泛函演算。我们选择消去算子 T 的最后一个分量，即 $T_4 = 0$。在单生成泛函演算中，McIntosh 及其合作者将第一个分量 $T_0 = 0$ 置为零。然而，在我们的情形中，由于多解析预解算子的结构，这一点会带来不利影响，见命题 9.10。

引理 9.11. 设 $T \in \mathcal{BC}^0,\ _1(V_5)$ 满足 $T = T_0e_0 + T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3$，并假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱为实数。设 G 为一个有界切片柯西域，使得 $(\partial G) \cap \sigma_S(T) = \emptyset$。对每个 $J \in \mathbb{S}$，我们有

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} S^{-1}_{\mathsf{P},L}(s,T)ds_J(\alpha_0 + \cdots + s^t\alpha_t) = 0, \tag{9.27}
$$

and

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} (\alpha_0 + \cdots + s^t\alpha_t)ds_JS^{-1}_{\mathsf{P},R}(s,T) = 0, \tag{9.28}
$$

其中 $t = \deg(\mathsf{P}) - 1$ 且 $\alpha_j \in \mathbb{R}_n$ 对任意 $0 \le j \le t$。

证明。由于 $\Delta^2(1) = 0$, $\Delta^2(x) = 0$, $\Delta^2(x^2) = 0$ 且 $\Delta^2(x^3) = 0$，根据定理 6.9，我们还有

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_5^L(s,x)ds_J = \Delta^2(1) = 0, \tag{9.29}
$$

and

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_5^L(s,x)ds_Js = \Delta^2(x) = 0, \tag{9.30}
$$

and

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_5^L(s,x)ds_Js^2 = \Delta^2(x^2) = 0, \tag{9.31}
$$

and

$$
\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_5^L(s,x)ds_Js^3 = \Delta^2(x^3) = 0 \tag{9.32}
$$

f对所有 $x \notin \partial G$ 和 $J \in \mathbb{S}$均成立。由单生成泛函演算，我们有 [35, 36] e

$$F_5^L(s,T) = \int_{\partial\Omega} G(\omega,T)\mathbf{D}\omega F_5^L(s,\omega),$$

其中，Dω是一个适当的微分形式，开集 Ω 包含 T 的左谱，而 $G(\omega,T)$ 是 Fueter预解算子。根据命题 9.10，我们可以写成

$$S_{\mathsf{P},L}^{-1}(s,T) = \sum_{\ell=0}^{4-\deg(\mathsf{P})} g_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})F_5^L(s,T)s^\ell,$$

因此我们有

$$S_{\mathsf{P},L}^{-1}(s,T)(\alpha_0 + \cdots + s^t\alpha_t) = \sum_{\ell=0}^{3} g'_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})F_5^L(s,T)s^\ell\beta_\ell$$

对于 $T, \bar{T}$ 中的适当多项式：$g'_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})$，以及 $\beta_\ell \in \mathbb{R}_n$。注意到对任意 $\ell = 0$，1、2、3，我们都有以下结论，从而可以完成该定理的证明：

$$g_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_5^L(s,T)ds_J s^\ell\beta_\ell = -\left(g_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)}\int_{\partial\Omega} G(\omega,T)\mathbf{D}\omega F_L(s,\omega)s^\ell\, ds_J\right)\beta_\ell$$
$$= \left(g_{\mathsf{P},\ell}(T,\bar{T})\int_{\partial\Omega} G(\omega,T)\mathbf{D}\omega\left(\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} F_L(s,\omega)ds_J s^\ell\right)\right)\beta_\ell = 0$$

其中，第二个等式是 Fubini定理 的推论，最后一个等式则由公式 (9.29)-(9.32) 得出。因此，我们得到

$$\int_{\partial(G\cap\mathbb{C}_J)} S_{\mathsf{P},L}^{-1}(s,T)ds_J(\alpha_0 + \cdots + s^t\alpha_t) = 0.$$

通过类似的计算，可以证明 (9.28)。 □

最后，在下面的结果中，我们将回答问题 9.7 中提出的问题。

命题 9.12. 设 $T \in \mathcal{BC}^{0,1}(V_5)$ 满足 $T = T_0e_0 + T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3$，并假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱。设 U 是一个满足$\sigma_S(T) \subset U$的切片柯西域。如果 $f, g \in \mathcal{SH}_L(U)$（分别地， $f, g \in \mathcal{SH}_R(U)$）满足性质 $\mathsf{P}f = \mathsf{P}g$（分别地， $f\mathsf{P} = g\mathsf{P}$），那么 $(\mathsf{P}f)(T) = (\mathsf{P}g)(T)$（分别地，$(f\mathsf{P})(T) = (g\mathsf{P})(T)$).

证明。如果 U 是连通的，我们可以使用命题 9.9。如果 U 不连通，那么 $U = \cup_{\ell=1}^m U_\ell$，其中 U_ℓ 是 U的连通分支。因此，存在常数 $\alpha_{\ell,i} \in \mathbb{R}_n$，对应于 $\ell = 1, \ldots, m$ 和 $i = 0, 1, 2, 3$，使得 $f(s) - g(s) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{i=0}^t \chi_{U_\ell}(s)s^i\alpha_{\ell,i}$，其中 $t = \deg(\mathsf{P}) - 1$。于是我们可以写成

$$(\mathsf{P}f)(T) - (\mathsf{P}g)(T) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U_\ell\cap\mathbb{C}_J)} S_{\mathsf{P},L}^{-1}(s,T)ds_J(\alpha_{\ell,0} + \cdots + s^t\alpha_{\ell,t}).$$

根据引理 9.11，最后一个求和为零。 □

注记 9.13。可以证明这些函数演算的其他一些重要性质，这将在即将发表的工作中进行研究。

10. The product rule for the F-functional calculus

为了在五维中获得 F-函数演算的乘积法则，$(\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}},\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}})$ 类型的狄拉克精细结构至关重要，见（4.3）。

引理 10.1。设 $B\in\mathcal{B}^0,\ _1(V_n)$。设 G 为有界切片柯西域，且 f 为一个内在切片单值函数，其定义域包含 G。则对于 $p\in G$，以及任意 $I\in\mathbb{S}$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_I(\bar{s}B-Bp)(p^2-2s_0p+|s|^2)^{-1}=Bf(p).$$

为了证明 F-函数演算的乘积法则，我们需要以下结果，参见[14, 引理 4.1]。

引理 10.2（$n=5$的 F-预解方程）。设 $T\in\mathcal{BC}^0,\ _1(V_5)$。则对于 $p,\ s\in\rho_S(T)$，以下方程成立

$$\begin{aligned}&F_5^R(s,T)S_L^{-1}(s,T)+S_R^{-1}(s,T)F_5^L(p,T)+2^6\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}S_R^{-1}(s,T)S_L^{-1}(p,T)\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-1}+\\&+2^6[\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-1}+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-2}]=\{[F_5^R(s,T)-F_5^L(p,T)]p+\\&-\bar{s}[F_5(s,T)^R-F_5^L(p,T)]\}\mathcal{Q}_s(p)^{-1},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{Q}_s(p)=p^2-2s_0p+|s|^2$。

定理 10.3（$n=5$的 F-函数演算的乘积法则）。设 $T\in\mathcal{BC}(V_5)$。假设 $f\in\mathcal{N}(\sigma_S(T))$ 且 $g\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$，则有

$$\begin{aligned}\Delta^2(fg)(T)=\Delta^2(f)(T)g(T)+f(T)\Delta^2(g)(T)+\Delta(f)(T)\Delta(g)(T)\\-\mathcal{D}\Delta(f)(T)\mathcal{D}(g)(T)-\mathcal{D}(f)(T)\Delta\mathcal{D}(g)(T).\end{aligned}$$

证明。设 G_1 和 G_2 是两个有界切片柯西域，分别包含 $\sigma_S(T)$ 和 $G_1\subset G_2$，且满足 $G_2\subset dom(f)\cap dom(g)$。我们选取 $p\in\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)$ 和 $s\in\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)$。
对于每个 $I\in\mathbb{S}$，根据 F 函数演算、SC 函数演算、一阶全纯克利福德函数演算以及 $\ell+1$ 调和泛函演算（$0\le\ell\le1$）的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta^2(f)(T)g(T)+f(T)\Delta^2(g)(T)+\Delta(f)(T)\Delta(g)(T)-\mathcal{D}\Delta(f)(T)\mathcal{D}(g)(T)-\mathcal{D}(f)(T)\Delta\mathcal{D}(g)(T)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_IF_5^R(s,T)\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}S_L^{-1}(p,T)dp_Ig(p)\\&+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_IS_R^{-1}(s,T)\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}F_5^L(p,T)dp_Ig(p)\\&+\frac{16}{\pi^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}S_R^{-1}(s,T)\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}S_L^{-1}(p,T)\mathcal{Q}_{p,T}(T)^{-1}dp_Ig(p)\\&+\frac{16}{\pi^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-1}dp_Ig(p)\\&+\frac{16}{\pi^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-2}dp_Ig(p)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\{F_5^R(s,T)S_L^{-1}(s,T)+S_R^{-1}(s,T)F_5^L(p,T)+\\&+2^6[\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}S_R^{-1}(s,T)S_L^{-1}(p,T)\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-1}+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-1}+\\&+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\mathcal{Q}_{c,p}(T)^{-2}]\}dp_Ig(p)\end{aligned}$$

由引理 10.2，我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta^2(f)(T)g(T)+f(T)\Delta^2(g)(T)+\Delta(f)(T)\Delta(g)(T)-\mathcal{D}\Delta(f)(T)\mathcal{D}(g)(T)-\mathcal{D}(g)(T)\Delta\mathcal{D}g(T)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}f(s))ds_I\{[F_5^R(s,T)-F_5^L(p,T)]p-\bar{s}[F_5^R(s,T)-F_5^L(p,T)]\}\times\\&\qquad\qquad\times\mathcal{Q}_s(p)^{-1}\}dp_Ig(p)。\end{aligned}$$

现在，由于函数 $p\mapsto p\mathcal{Q}_s(p)^{-1}$、 $p\mapsto\mathcal{Q}_s(p)^{-1}$ 在 $\bar{G}_1$ 上是内在切片超全纯函数，根据柯西积分公式，我们有

$$\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}F_5^R(s,T)p\mathcal{Q}_s(p)^{-1}dp_Ig(p)=0,$$

$$\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}\bar{s}F_5^R(s,T)\mathcal{Q}_s(p)^{-1}dp_Ig(p)=0.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta^2(f)(T)g(T)+f(T)\Delta^2(g)(T)+\Delta(f)(T)\Delta(g)(T)-\mathcal{D}\Delta(f)(T)\mathcal{D}(g)(T)-\mathcal{D}(f)(T)\Delta\mathcal{D}(g)(T)\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial(G_2\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_I\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}[\bar{s}F_5(p,T)^L-F_5^L(p,T)p]\mathcal{Q}_s(p)^{-1}dp_Ig(p).\end{aligned}$$

由引理 10.1 结合 $B:=F_5^L(p,T)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta^2(f)(T)g(T)+f(T)\Delta^2(g)(T)+\Delta(f)(T)\Delta(g)(T)-\mathcal{D}\Delta(f)(T)\mathcal{D}(g)(T)-\mathcal{D}(f)(T)\Delta\mathcal{D}(g)(T)\\&=\frac{1}{(2\pi)}\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}F_5^L(p,T)dp_If(p)g(p)\\&=\frac{1}{(2\pi)}\int_{\partial(G_1\cap\mathbb{C}_J)}F_5^L(p,T)dp_I(fg)(p)\\&=\Delta^2(fg)(T).\end{aligned}$$

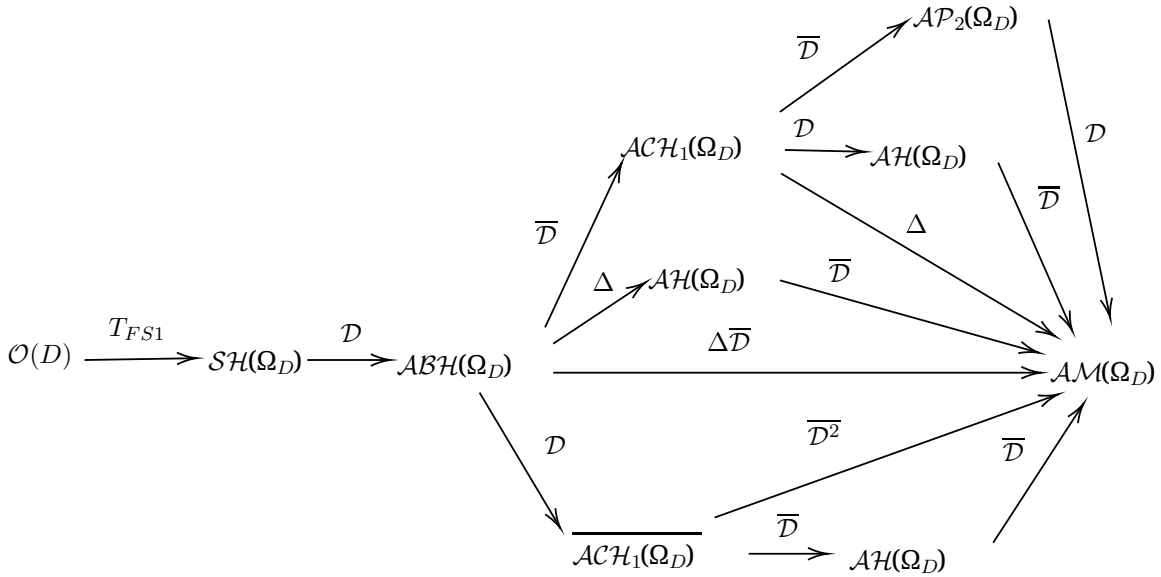
□

11. Appendix: visualization of all possible fine structures in dimension five

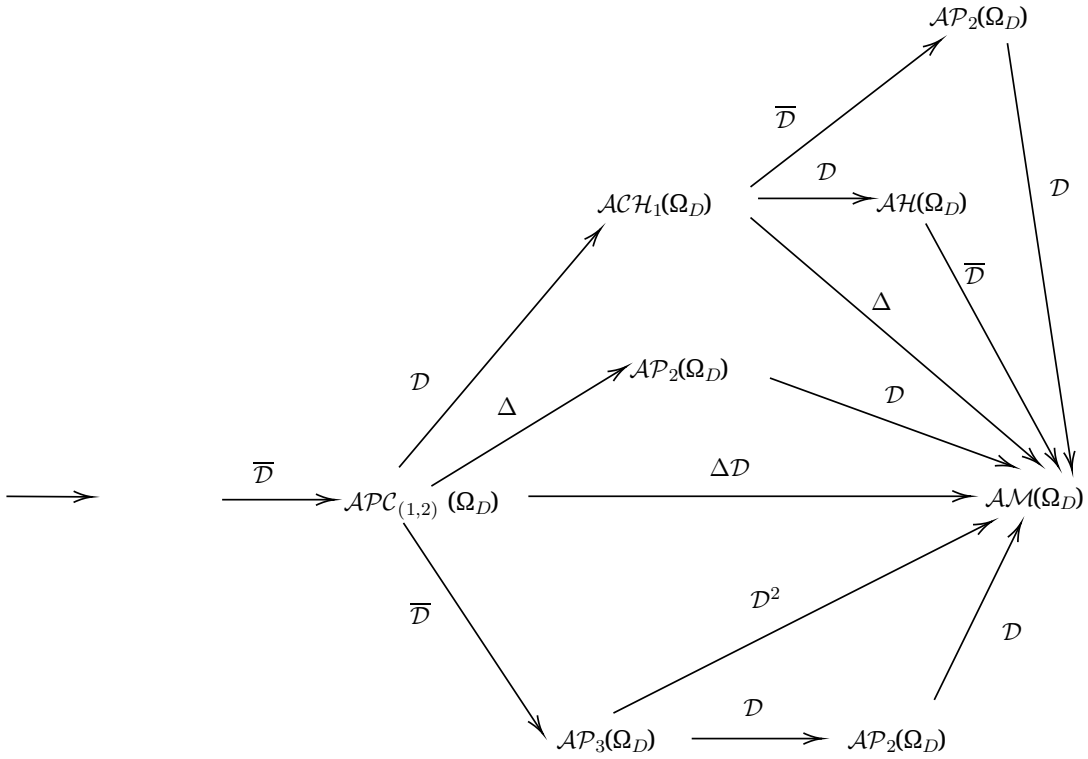
在本附录中，我们展示五维中的所有可能精细结构。首先，我们回顾所涉及函数类的符号

$\mathcal{ABH}(\Omega_D)$：轴向双调和函数，$\mathcal{ACH}_1(\Omega)$：一阶轴向克利福德全纯函数$\mathcal{AH}(\Omega_D)$：轴向调和函数，$\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$：二阶轴向多解析函数，$\mathcal{ACH}_1(\Omega_D)$：一阶轴向反克利福德函数，$\mathcal{ACP}_{(1,2)}$：(1, 2) 阶轴向多解析克利福德函数，$\mathcal{AP}_3(\Omega_D)$：三阶轴向多解析函数。

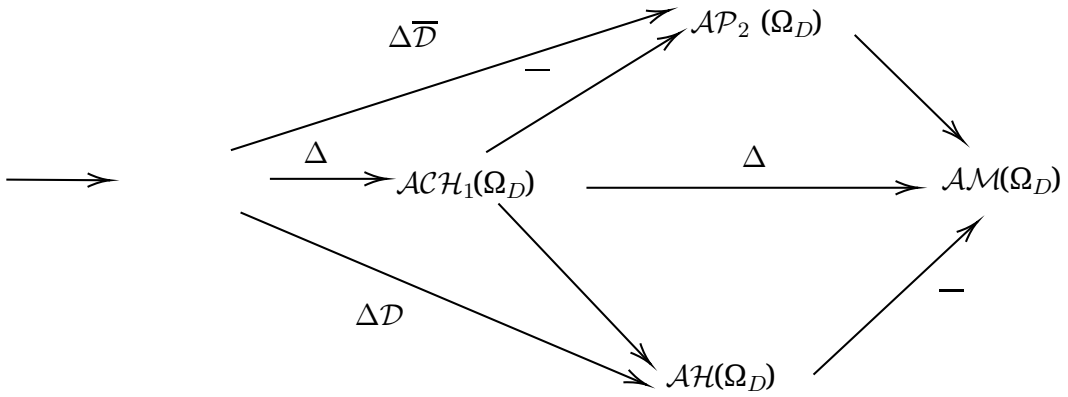
如果我们首先应用狄拉克算子，则得到如下图表



如果我们先应用狄拉克算子的共轭，则得到



最后，所有其他可能的精细结构都由下图给出：53



References

[1] D. Alpay, F. Colombo, J. Gantner, I. Sabadini, *A new resolvent equation for the S-functional calculus*,《几何分析杂志》25（2015），第3期，1939–1968。[2] D. Alpay, F. Colombo, D.P. Kimsey, *The spectral theorem for quaternionic unbounded normal operators based on the S-spectrum* **57** 2016 2, 023503, 27 ,《数学物理杂志》，（），第期，页码。[3] D. Alpay, F. Colombo, I. Sabadini, *Quaternionic de Branges spaces and characteristic operator function*,施普林格数学简明丛书，施普林格，沙姆，2020/21。[4] D. Alpay, F. Colombo, I. Sabadini, *Slice Hyperholomorphic Schur Analysis*, 算子理论：进展与应用，256。Birkh¨auser/施普林格，沙姆，2016。xii+362 页。[5] D. Alpay, K. Diki, I. Sabadini, *On the global operator and Fueter mapping theorem for slice polyanalytic functions*,《分析与应用》（新加坡），19（2021），第6期，941–964。[6] N. Aronszain, T.M. Creese, L.J. Lipkin, *Polyharmonic functions*,克拉伦登出版社（1983）。[7] H. Begeher, *Iterated integral opererators in Clifford analysis*,《分析与应用杂志》18，361–377（1999）。[8] G. Birkhoff, J. von Neumann, *The logic of quantum mechanics*,《数学年刊》37（1936），823–843。[9] F. Brackx, *On (k)-monogenic functions of a quaternion variable*,《微分方程中的函数论方法》，22–44。数学研究札记8，皮特曼，伦敦（1976）。[10] F. Brackx, R. Delanghe, *Hypercomplex Function Theory and Hilbert Modules with Reproducing Kernel*,《伦敦数学会会刊》s3-37，545–576。（1978）。[11] P. Cerejeiras, F. Colombo, U. K¨ahler, I. Sabadini, *Perturbation of normal quaternionic operators*,《美国数学会汇刊》372（2019），第5期，3257–3281。[12] F. Colombo, A. De Martino, S. Pinton, I. Sabadini, *Axially harmonic functions and the harmonic functional calculus on the S-specturm* 2205 08162 ,（arXiv: .）（已投稿）。[13] F. Colombo, A. De Martino, T. Qian, I. Sabadini, *The Poisson kernel and the Fourier transform of the slice monogenic Cauchy kernels* **512** 2022 1, 126115 ,《数学分析与应用杂志》，（），论文编号。[14] F. Colombo, A. De Martino, I. Sabadini, *The J -resolvent equation and Riesz projectors for the $\mathcal{F}$-functional calculus* 2112 04830 ,arXiv . .[15] F. Colombo, D. Deniz-Gonzales, S. Pinton, *Fractional powers of vector operators with first order boundary conditions* **151** 2020 103618, 18 ,《几何物理学杂志》，（），页码。[16] F. Colombo, D. Deniz-Gonzales, S. Pinton, *Non commutative fractional Fourier law in bounded and unbounded domains* **15** 2021 7, 114, 27 ,《复分析与算子理论》，（），论文编号，页码。[17] F. Colombo, J. Gantner, *Formulations of the $\mathcal{F}$- functional calculus and some consequences*,《爱丁堡皇家学会会刊》146 A（2016），509–545。[18] F. Colombo and J. Gantner, *Fractional powers of vector operators and fractional Fourier's law in a Hilbert space*,《物理学杂志 A》51（2018），305201（25页）。[19] F. Colombo, J. Gantner, *Quaternionic closed operators, fractional powers and fractional diffusion processes*,算子理论：进展与应用，274。Birkh¨auser/施普林格，沙姆，2019。viii+322。[20] F. Colombo, J. Gantner, D.P. Kimsey, *Spectral theory on the S-spectrum for quaternionic operators*,算子理论：进展与应用，270。Birkh¨auser/施普林格，沙姆，2018。ix+356 页。[21] F. Colombo, J. Gantner, D.P. Kimsey, I. Sabadini, *Universality property of the S-functional calculus, noncommuting matrix variables and Clifford operators* 2112 05204 ,arXiv: . .[22] F. Colombo, D.P. Kimsey, *The spectral theorem for normal operators on a Clifford module*,《数学物理分析》12（2022），第1期，论文编号25。

[23] F. Colombo, D.P. Kimsey, S. Pinton, I. Sabadini, *Slice monogenic functions of a Clifford variable*,美国数学会会刊 B 辑8（2021），281–296。[24] F. Colombo, I.Sabadini, *The $\mathcal{F}$-spectrum and the $\mathcal{SC}$-functional calculus.*,爱丁堡皇家学会会刊 A 辑142（2012），479–500。[25] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa, *Noncommutative functional calculus. Theory and applications of slice hyperholomorphic functions*,数学进展，。289 ¨ 2011 +221 Birkhauser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，。vi页。[26] F. Colombo, I.Sabadini, D.C. Struppa, *Michele Sce's Works in Hypercomplex Analysis. A Translation with Commentaries*, ¨ 2020 Birkhauser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，。[27] F. Colombo, I. Sabadini, F. Sommen, *The Fueter mapping theorem in integral form and the F-functional calculus*,数学方法与应用科学，33（2010），第17期，2050–2066。[28] A. De Martino, K. Diki, *Generalized Appell polynomials and Fueter-Bargmann transforms in the quaternionic setting* 2112 15116 ,（arXiv .）（已投稿）[29] A. De Martino, S. Pinton, *Axially polyanalytic functions of order 2 and their functional calculus on the S-specturm* 2022 ,预印本 .

[30] G. Laville, I.Ramadanoff, *Holomorphic Cliffordian functions*,《克利福德代数进展与应用》8(2)（1998），323–340。[31] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*,《瑞士数学通讯》7（1934），307–330。[32] J. Gantner, *On the equivalence of complex and quaternionic quantum mechanics*,量子研究：数学基础，5（2018），第2期，357–390。[33] J. Gantner, *Operator Theory on One-Sided Quaternionic Linear Spaces: Intrinsic S-Functional Calculus and Spectral Operators* **267** 2020 1297, +101 ,《美国数学会回忆录》，（），第iii页。[34] R. Ghiloni, A. Perotti, *Slice regular functions on real alternative algebras*,《数学进展》226（2011），1662–1691。[35] B. Jefferies, *Spectral properties of noncommuting operators*,数学讲义1843，施普林格出版社，柏林，2004。[36] B. Jefferies, A. McIntosh, J. Picton-Warlow, *The monogenic functional calculus*,数学研究136（1999），99–119。[37] D. Pena-Pena, *Cauchy Kowalevski extensions Fueter's theorems and boundary values of special systems in Clifford analysis*,博士论文，2008 根特，。[38] T. Qian, *Generalization of Fueters result to $\mathbb{R}^{n+1}$*,林琴科学院数学报告9（1997），111–117。[39] M. Sce, *Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici*,林琴国家科学院学报。报告，物理、数学与自然科学类23（1957），220–225。[40] T. Qian, P. Li, *Singular integrals and Fourier theory on Lipschitz boundaries*,北京科学出版社，北京；施普林格，新加坡，2019。xv+306 页。[41] N. Th´eodoresco, *La dérivée aréolaire et ses applications a' la physique mathématique*,巴黎，1931。
(FC) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi,9, 20133 Milano, Italy*Email address*: fabrizio.colombo@polimi.it(ADM) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi,9, 20133 Milano, Italy*Email address*: antonino.demartino@polimi.it(SP) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi,9, 20133 Milano, Italy*Email address*: stefano.pinton@polimi.it(IS) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi,9, 20133 Milano, Italy*Email address*: irene.sabadini@polimi.it