arXiv:2303.00267v1 [math.RA] 1 Mar 2023

若干类子半模空间

by

A. GOSWAMI

摘要。——本文旨在研究赋予子基闭集拓扑的若干类子半模的拓扑性质。我们证明这些空间是T_0。当半模有限生成时，这些空间也具有紧致性。我们刻画了这样一些子半模空间：其中每个非空不可约闭集都有唯一的泛点。我们给出了子半模空间连通的一个充分条件，并利用强不连通性的概念确定了紧致不连通子半模空间。最后，我们讨论了子半模空间之间的连续映射。

1. 引言

自半环于 [18], 中被引入以来，将环中的结果与半环中的结果进行比较并加以推广便成为顺理成章之事。人们或许会认为半环总能扩张为环，但[19] 给出了无法嵌入环中的半环实例。此外，半环中缺少加法逆元，使得半环理论与环论大不相同。

正如模在环的研究中自然出现一样，半模的概念对于理解半环的结构也不可或缺。文献 [10, 1, 16, 6, 11] 对半环上的半模结构进行了深入研究。相比之下，对半模的各类子半模进行拓扑研究的工作则较少。文献 [2] 研究了非常强乘法半模的素 k-子半模上的扎里斯基拓扑。对于乘法且有限生成的半模，文献 [13]（另见

2020 数学主题分类. — 16Y60; 13C13; 16D80; 54F65 .关键词和短语. — 半环、半模、可消去的-、特殊的-、素的-、本原子半模-、强不可约子半模、闭子基拓扑、泛点、连通性。

[14]）证明了赋予扎里斯基拓扑的素子半模类是一个谱空间。

本文旨在实现两个目标。一方面，我们的工作将 [2, 13, 14] 中的拓扑学结果推广到各种子半模空间；另一方面，我们将 [7] 中关于理想空间（（即，赋予闭子基拓扑的交换环的一个理想类）的某些结果拓展到半模的情形。

2. 预备知识

下面回顾半模的一些基本定义和事实。关于半环上的半模的详细研究，请读者参阅 [10]。半环是一个系统 $(R,+,0,\cdot,1)$，满足 $(R,+,0)$ 是交换幺半群，$(R,\cdot,1)$ 是幺半群，$0r=0=r0$ 对所有 $r\in R$ 都成立，并且 $\cdot$ 对 $+$ 的左乘和右乘都满足分配律。本文中假设所有半环都是交换的，即 $(R,\cdot,1)$ 是交换幺半群。若 R 是半环，则一个（左）R-半模是一个加法交换幺半群 M，并配备一个映射（称为标量乘法）$R\times M\to M$，记作 $(r,m)\mapsto rm$，满足 (i) $(r+r')m=rm+r'm$，(ii) $r(m+m')=rm+rm'$，(iii) $(rr')m=r(r'm)$，(iv) $1m=m$，以及 (v) $r0=0=0m$ 对所有 r、$r'\in R$ 和 m、$m'\in M$ 都成立。请注意，我们用 0 同时表示半环 R 的加法单位元和幺半群 M 的单位元。

N 左 R-半模 M 的一个非空子集称为 M 的子半模，如果N 在加法和标量乘法下封闭。现在，我们定义半模 M的若干特征类子半模。其中一些子半模类已广为人知，我们提供了相关参考文献；而据我们所知，其他一些子半模类则是首次在此提出。

若子半模 N 满足 $x+y\in N$ 且$x\in N$ 蕴含 $y\in N$，则称其为可消去的或 k-子半模 [10]；若 $x+y\in$ 蕴含 x，$y\in N$ 对所有x、$y\in M$均成立，则称其为强子半模 [10]。真子半模 N 满足 $N\neq M$。若不存在包含 N的其他真子半模，则称真子半模 N为极大子半模 [20]。若 $rm\in N$ 满足：对于$r\in R$和 $m\in M$，有 $m\in N$或 $r\in(N\colon M)=\{r\in R\mid rM\subseteq N\}$（对于某个 $n\in\mathbb{N}$，有 $r^n\in(N\colon M)=\{r\in R\mid rM\subseteq N\}$），则称真子半模 N为素子半模 [20, 21]（主子半模）[3, 17]。若对于某个 $r\in R$和 $m\in M$，只要 $0\neq rm\in N$，就有 $m\in N$或 $rM\subseteq N$，则称真子半模 N 为弱素子半模 [4]。若元素 r 属于 R，且对于 $r\in R$ 和 $m\in M$，有 $m\in N$，则称其与 N 互素。用 $\mathrm{Prm}(N)$ 表示 R 中所有与 N 互素的元素组成的集合。若 $R\setminus\mathrm{Prm}(N)$ 是 R的一个理想，则称真子半模 N 为本原子半模 [4]。半素子半模 N 是 M 中若干素半模的交集。关于半素半模的另一种定义，见 [17]。子半模 N 的根 [3] $\sqrt{N}$ 是包含 N的 M 中所有素子半模的交集。素子半模 N 称为

非凡的 [13] 若任意半素子半模 L 和 K 属于 M，$L\cap K\subseteq N$ 蕴含 $L\subseteq N$ 或 $K\subseteq N$。

若对任意两个 M 的子半模 L 和 K，$L\cap K\subseteq N$ 蕴含 $L\subseteq N$ 或 $K\subseteq N$。，则称子半模 N 为强不可约。若子半模 N 不是 M 中两个（任意多个）且都真包含 N 的子半模的交集，则称其为不可约（完全不可约）。若子半模 N 由 M 的单个元素（有限个元素）生成，则称 N 为循环（有限生成）。若非零子半模 N 满足 N 不含 M 的其他非零子半模，则称其为极小子半模。若子半模 N 既是极小子半模又是素子半模，则称其为极小素子半模。为表示 M 的上述任一特殊类子半模，我们使用记号 Dis_M，并假设 $M\notin\mathrm{Dis}_M$；而 Sub_M 表示 M 的所有子半模的集合。

3. 子半模空间

设 M 是一个 R-半模。对于 M 的任意子集 S 以及任意 Dis_M，定义

$$\mathcal{V}(S)=\{L\in\mathrm{Dis}_M\mid S\subseteq L\}. \tag{1}$$

引理 ***3.1***。——对于给定的 R-半模 M，由 Dis_M 中的子集确定的 $\mathcal{V}$ 具有以下性质。

(1) 对于 M 的任意两个非空子集 S 和 S'，若 $S\subseteq S'$，则 $V(S)\supseteq V(S')$。*(2)* 对于 M 的任意非空子集 S，有 $V(S)=V(hSi)$。*(3)* $V(0)=Dis_M$ 且 $V(M)=\emptyset$。*(4)* 对所有 $N_\lambda\in Sub_M$ 及所有 $\lambda\in\Lambda$，有 $\tilde{N}_{\lambda\in\Lambda}V(N_\lambda)=V(\acute{I}_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda)$。*(5)* 对所有 N, $N'\in Sub_M$，有 $V(N)\cup V(N')\subseteq V(N\cap N')$。*(6)* 对于 M 的任意子半模 N，有 $V(N)\supseteq V(\sqrt{N})$。*(7)* 设 N 是 M 的子半模。定义 $N^\omega:=\tilde{N}\{L\mid L\in V(N)\}$。则 $N\subseteq N^\omega$。*(8)* 当 $N\in Dis_M$ 时，$N=N^\omega$。*(9)* 对 M 的所有子半模 N，有 $V(N)=V(N^\omega)$。*(10)* 对于 M 的任意两个子半模 N_1 和 N_2，$V(N_1)\subseteq V(N_2)$ 当且仅当 $N_2^\omega\subseteq N_1^\omega$。

证明。——显然。 □

注意到，当 Dis_M 是素子半模、极小素子半模或极大子半模的类时，引理 3.1(6) 中的等式成立。我们的目标是在 Dis_M 上利用形如 $\{\mathcal{V}(S)\}$ 的子集构造一个拓扑；此外，得益于引理 3.1(2)，现在只需考虑子集

$$\mathcal{V}(N)=\{L\in\mathrm{Dis}_M\mid N\subseteq L\}\qquad(N\in\mathrm{Sub}_M). \tag{2}$$

由引理 3.1(3) 可得

$$\bigcap_{N\in \mathrm{Sub}_M} \mathcal{V}(N) = \emptyset,$$

并且根据 [**5**, 定理 15 A.13., 第 254], 页，这意味着集合 $\{\mathrm{V}(N)\}_{N\in \mathrm{Sub}_M}$ 作为闭子基，在 Dis_M 上生成唯一的拓扑。我们将此拓扑记为 τ_{Dis_M}。

通常，集合 $\mathcal{V}(N)$ 并非闭集，而只是子基闭集。这是因为对于任意的 Dis_M，引理 3.1(5) (即，集合 $\mathcal{V}(N)$ 并未对有限并封闭）。文献 [**13**, 引理 3.2] 证明了，当且仅当 M 是拓半模时，引理 3.1(5) 中的等式成立；在这种情况下，我们的闭子基拓扑与赋予任意 Dis_M上的扎里斯基拓扑一致。略去符号上的区别，我们直接用 Dis_M表示拓扑空间 $(\mathrm{Dis}_M, \tau_{\mathrm{Dis}_M})$。

要使子半模空间 Dis_M 紧致，我们要求满足以下性质：

$$\mathcal{V}(N) = \emptyset \implies N = M. \tag{3}$$

一般来说，(3) 对任意子半模类并不成立。不过，如果 M 是有限生成的，那么 (3) 对任意 Dis_M都成立。对于任意半模，以下结果给出了子半模类具有性质 (3) 的必要条件。

引理 ***3.2***. — 若子半模空间 Dis_M 具有性质 (3)，则 Dis_M 包含 M的所有极大子半模。

证明. — 设 Dis_M 具有性质 (3)。设 N 是 M 的一个极大子半模，且 $N \notin \mathrm{Dis}_M$。这意味着 $\mathcal{V}(N) = \emptyset$，因此 $N = M$，矛盾。 □

如果 M 是有限生成的，那么上述引理3.2 的逆命题也成立。由于我们的拓扑由子基闭集生成，在以下定理的证明中，我们需要借助亚历山大子基定理。

定理 ***3.3***. — 若 M 是有限生成的 R-半模，则任意子半模空间Dis_M 都是紧致的。

证明。— 设 $\tilde{\mathrm{N}}_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \emptyset$ 是子半模空间 Dis_M 的一族子基闭集 $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$。根据亚历山大子基定理，只需证明对 Λ 的某个有限子集 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，有 $\tilde{\mathrm{N}}_{i=1}^{n} K_{\lambda_i} = \emptyset$。设 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 M 的一类子半模，使得对所有 $\lambda \in \Lambda$，$K_\lambda = \mathrm{V}(N_\lambda)$。根据引理 3.1(4), $\mathrm{V}(\acute{\mathrm{I}}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = \emptyset$；由性质 (3)，这意味着 $\acute{\mathrm{I}}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = M$。由于 M 是有限生成的，我们便得到了所需的 Λ 的有限子集。 □

根据 [**15**])，拓扑空间 X 是 T_0 当且仅当 X 的特化序是偏序，这意味着

命题 ***3.4***. — 每个 Dis_M 都是一个 T_0-空间。

推论 ***3.5***. — [13, 定理 3.1]。若 M 是一个拓扑 R-半模，那么 M 的素子半模谱赋予扎里斯基拓扑后是一个 T_0-空间。

我们回顾一些接下来要用到的拓扑学概念。若 X 是一个拓扑空间，则称闭子集 S 不可约，如果 S 不能表示为两个真包含于它的较小闭子集 S_1、$S_2 \subsetneq S$ 的并。闭子集 S 中的点 x 称为 S 的泛点，如果 $S = \mathrm{C}(\{x\})$，即 $\{x\}$ 的闭包。若 R-半模 M 的每个子半模升链最终都稳定，则称其为诺特 的。若拓扑空间 X 的闭子集满足降链条件，则称 X 为诺特空间。

设 M 是一个拓扑 R-半模，且 Dis_M 是M 的素子半模类，并赋予扎里斯基拓扑。根据[13, 定理 3，3],非空子集 Y 属于 Dis_M 不可约，当且仅当属于 Y 的所有素子半模的交集本身是 M的一个素子半模。对于 R-半模 M 以及任意子半模空间，我们没有类似的刻画。不过，在引理3.6 中，我们确定了一类不可约闭子集，这类集合足以刻画T_1 子半模空间。此外，该引理将有助于研究子半模空间的连通性。

引理 ***3.6***.— 半模空间中形如 $\{\mathcal{V}(N) \mid N \in \mathcal{V}(N)\}$ 的子基闭集是不可约的。

证明. — 令 $\mathrm{C}(N)$ 为子半模 N 的闭包。只需证明，对于每个 $N \in \mathrm{V}(N)$，都有 $\mathrm{V}(N) = \mathrm{C}(N)$。由 $\mathrm{C}(N)$ 的定义，显然有 $\mathrm{C}(N) \subseteq \mathrm{V}(N)$。为证明另一个包含关系，考虑这种情况：$\mathrm{C}(N) = \mathrm{Dis}_M$。于是由 $\mathrm{Dis}_M = \mathrm{C}(N) \subseteq \mathrm{V}(N) \subseteq \mathrm{Dis}_M$,可得 $\mathrm{V}(N) = \mathrm{C}(N)$。

令 $\mathrm{C}(N) \neq \mathrm{Dis}_M$。由于 $\mathrm{C}(N)$ 是闭集，因此存在一个 Λ，使得对于每个 $\lambda \in \Lambda$，都存在正整数 n_λ及子半模 $N_{\lambda 1}, \ldots, N_{\lambda n_\lambda}$，它们属于 M，满足

$$C(N) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{V}(N_{\lambda i}) \right).$$

由于 $\mathrm{C}(N) \neq \mathrm{Dis}_M$，对每个 λ，$Ð_{i=1}^{n_\lambda} \mathrm{V}(N_{\lambda i}) \neq \emptyset$。因此，对每个 λ，$N \in Ð_{i=1}^{n_\lambda} \mathrm{V}(N_{\lambda i})$，这就意味着

$$\mathcal{V}(N) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{V}(N_{\lambda i}),$$

这就证明了该包含关系。 □

推论 ***3.7***. — 真子半模空间的所有非空子基闭子集都是不可约的。

已在 [13, 定理 3.2] 中证明，对于拓半模，赋予扎里斯基拓扑的素子半模类是一个 T_1-空间，当且仅当每个素子半模在素子半模类中都是极大子半模。定理 3.8 将这一结果推广到了所有 Dis_M 空间。

定理 ***3.8***。——当且仅当 A 离$_M$ 是 T_1-空间时，它属于极大子半模空间这一类。

证明。——若 $L \in$离$_M$，则显然 $L \in \mathcal{V}(L)$，因此由引理 3.6，$C(L) = \mathcal{V}(L)$。设 N 是 M 的一个极大子半模，且 $L \subseteq N$。若 Dis_M 是一个 T_1-空间，则

$$N \in \mathcal{V}(L) = C(L) = \{L\}.$$

因此， $N = L$。反之，$\mathcal{V}(N) = \{N\}$ 对每个极大子半模 N（属于 M，使得 $N \in \mathcal{V}(N)$，因而由引理 3.6，$C(N) = \{N\}$。这证明了 M 的极大子半模类是一个 T_1-空间。□

推论 ***3.9***。——若 M 是诺特半模，且离$_M$ 是离散空间，则M 是阿廷的。

确定拓扑空间的每个非空不可约闭集是否具有唯一的泛点，是拓扑学中的一个基本问题。已有证明表明，在扎里斯基拓扑下赋予拓扑的拓半模的素子半模类具有这一性质，见 [13,推论 3。1] 在定理 3.10 中，我们刻画了此类子半模空间。

定理 ***3.10***。——设 Dis_M 是一个子半模空间。那么，Dis_M 的每个非空不可约子基闭集 $\mathcal{V}(N)$ 具有唯一的泛点，当且仅当$\mathcal{V}(N)$ 包含N^ω。

证明。——设 V(N) 是子半模空间 Dis_M 中的一个非空不可约子基闭子集，且 V(N) 具有唯一的泛点，这意味着

$$\mathcal{V}(N) = C(L) = \mathcal{V}(L).$$

那么，根据引理 3.1(8) 可得 $L = N^\omega \in \mathrm{Dis}_M$。逆向部分的证明较为复杂。假设每个非空不可约子基闭集 $\mathcal{V}(N)$ 包含N^ω，并令 K 是 Dis 中的一个不可约闭子集$_M$。根据定义，

$$K = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{\alpha=1}^{n_i} \mathcal{V}(N_{i\alpha}) \right),$$

对于某些子半模 N_{ij}，它们属于 M。由于 K 不可约，对于每个 $i \in I$，都存在 N_i 的一个子半模 M，使得 $K \subseteq \mathrm{V}(N_i) \subseteq \text{Ð}_{\alpha=1}^{n_i} \mathrm{V}(N_{i\alpha})$，因此我们有

$$K = \bigcap_{i\in I} \mathcal{V}(N_i) = \mathcal{V}\left(\sum_{i\in I} N_i\right) = \mathcal{V}\left(\sum_{i\in I} N_i\right)^{\omega}.$$

由于 $(\text{Í}_{i\in I} N_i)^{\omega} \in \mathrm{Dis}_M$，因此我们有 $K = \text{Ĉ}(\text{Í}_{i\in I} N_i)^{\omega}$。□

推论 ***3.11***。—每个适当的素子半模空间和极小素子半模空间的非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

推论 ***3.12***。—设 M *bea top* R-半模。那么，素子半模空间和极小素子半模空间中每个非空不可约闭子集（关于扎里斯基拓扑）都有唯一的泛点。

注 ***3.13***。—回顾一下，若拓扑空间 X 称为素性，则它的每个非空不可约闭子集 X 都有唯一的泛点。素性是介于 T_0 与 T_2 之间（且独立于 T_1）的一个分离公理。定理3.10 实际上刻画了素的子半模空间。

命题 ***3.14***. — 强不可约子半模空间的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

证明. — 由于 Des_M 是一个乘法格，其乘积为交集，因此每个强不可约子半模都成为该格的一个素元，故由 [**9**, 引理 2.6], 可得所需结论。□

通常的连通性概念无法直接用子基闭集来表述。因此，我们引入子半模空间的一种不同的连通性概念（以子基闭集来表述），它与传统的连通性概念相关。若拓扑空间的一个闭子基 S 满足存在两个非空子集 A，$B \in \mathrm{S}$，使得 $X = A \cup B$ 且 $A \cap B = \emptyset$，则称该闭子基 X 强烈地使其不连通X。

由上述定义可知，若某个闭子基强烈地使一个空间不连通，则该空间是不连通的。此外，若一个空间是不连通的，则存在某个闭子基强烈地使其不连通。但这并不意味着每个闭子基都会强烈地使该空间不连通。不过，我们有以下来自[**7**]的结果。

引理 ***3.15***。— 如果一个紧空间是不连通的，那么每个对有限交封闭的闭基都会将该空间强子半模不连通。此外，对于任意子半模空间 Dis_M，该闭基对二元交封闭。

基于上述引理3.15，我们立即得到以下结果。

定理 ***3.16***。— 设Dis_M 是一个紧空间。当且仅当闭基强子半模Dis_M时，Dis_M 是不连通的。

引理 3.6 的一个推论是，子半模空间连通的以下充分条件。

定理 ***3.17***。——如果 $0 \in \mathrm{Dis}_M$，则子半模空间 Dis_M 是连通的。

证明。——由于根据引理 3.1(3)，$\mathrm{Dis}_M = \mathcal{V}(0)$，且不可约性蕴含连通性，因此由引理 3.6即可得到该结论。 □

推论 ***3.18***。——真有限生成循环子半模空间是连通的。

设 $M \to M'$ 是一个 R-半模同态。类似于环的情形，自然可以预期存在一个连续映射 $\phi\colon \mathrm{Dis}_{M'} \to \mathrm{Dis}_M$，其定义域和值域为同类型的子半模空间。事实确实如此，我们将在下一个命题中讨论这一点。这里唯一的问题是，某一特定类型的子半模的逆像可能不属于同一类型。因此，我们只需考虑那些具有这种保持性质的 R-半模同态。我们称之为收缩性质。此外，由于我们的拓扑的性质，在证明过程中，我们将要求使用子基闭集，而不是闭集。

命题 ***3.19***. — 设 Dis_M 是一个子半模空间，且 $\phi\colon M \to M'$ 是一个相对于Dis_M具有收缩性质的 R- 半模同态。令$N' \in \mathrm{Dis}_{M'}$。定义映射 $\phi^*\colon \mathrm{Dis}_{M'} \to \mathrm{Dis}_M$，使得 $\phi^*(N) = \phi^{-1}(N)$。则

(1) 映射 ϕ^* 是连续的。(2) 若 ϕ 是满射，则子半模空间 $\mathrm{Dis}_{M'}$ 同胚于子半模空间 Dis_M的闭子空间 $\mathcal{V}(\ker\phi)$。(3) 像 $\phi^*(\mathrm{Dis}_{M'})$ 在Dis_M 中稠密，当且仅当

$$\ker\phi \subseteq \bigcap_{L \in \mathrm{Dis}_M} L;$$

证明. — 证明（1）时，令 $\mathcal{V}(N)$ 为子半模空间 Dis_M中的一个子基闭集。注意到

$$(\phi^*)^{-1}(\mathcal{V}(N)) = \{N' \in \mathrm{Dis}_{M'} \mid \phi(N) \subseteq N'\} = \mathcal{V}(\langle\phi(N)\rangle),$$

因此映射 ϕ^* 连续。对于（2）中的同胚，注意到 $\ker\phi \subseteq \phi^{-1}(N')$，换言之，$\phi^*(N') \in \mathcal{V}(\ker\phi)$。这意味着 $\mathrm{im}\ \phi^* = \mathcal{V}(\ker\phi)$。由于对所有 $N' \in \mathrm{Dis}_{M'}$,

$$\phi(\phi^*(N')) = N' \cap \mathrm{im}\,\phi = N',$$

映射 ϕ^* 是单射。为证明 ϕ^* 是闭映射，首先注意，对于 $\mathrm{Dis}_{M'}$ 的任意子基闭子集 $\mathrm{V}(N)$，有

$$\phi^*(\mathcal{V}(N)) = \phi^{-1}\{L' \in \mathrm{Dis}_{M'} \mid N \subseteq L'\} = \mathcal{V}(\phi^{-1}(N)).$$

现在，若 K 是 $\mathrm{Dis}_{M'}$ 的闭子集，且

$$K = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha}\mathcal{V}(N_{i\alpha})\right),$$

then

$$\phi^*(K) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha}\mathcal{V}(N_{i\alpha})\right)\right) = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\bigcup_{i=1}^{n_\alpha}\mathcal{V}(\phi^{-1}(N_{i\alpha})),$$

是 Dis_M 的闭子集。由于 ϕ^* 连续，证明得证。为证明 (3)，我们先证明对所有子半模 $N' \in \mathrm{Sub}_{M'}$，都有 $\mathrm{C}(\phi^*(\mathrm{V}(N'))) = \mathrm{V}(\phi^{-1}(N'))$。为此，令 $L \in \phi^*(\mathrm{V}(N'))$。这意味着 $\phi(L) \in \mathrm{V}(N')$，也就是说 $N' \subseteq \phi(L)$。换言之，$L \in \mathrm{V}(\phi^{-1}(N'))$。另一边的包含关系由以下事实可得：$\phi^{-1}(\mathrm{V}(N')) = \mathrm{V}(\phi^{-1}(N'))$。由于

$$C(\phi^*(\mathrm{Dis}_{M'})) = \mathcal{V}(\phi^{-1}(\mathfrak{o})) = \mathcal{V}(\ker\phi),$$

闭子空间 $\mathrm{V}(\ker\phi)$ 等于 Dis_M 当且仅当 $\ker\phi \subseteq \cap_{L\in\mathrm{Dis}_M} L$。 □

推论 ***3.20***. — 子半模空间 $\mathrm{Dis}^{M/N}$ 与 Dis_M 的闭子空间 $\mathcal{V}(N)$ 同胚。

文献 [13] 已证明，有限生成拓扑半模的素子半模类在文献 [12] 的意义下是谱空间。文献 [8] 曾尝试对交换环的理想空间中的谱空间进行分类。找出哪些子半模空间是谱空间将会很有意义。显然，不能只是照搬文献 [8] 中的论证来确定这一点。这可能需要一些额外的方法。

参考文献

[1] R. E. Atani 和 S. E. Atani，《关于半模的子半模》，*Bull. Acad. Stiinte. Repub.MoldMat.*，63（2010），20–30。[2] S. E. Atani、R. E. Atani 和 U. Tekir，《交换半环上的有限生成乘法半模札记》，*Eur. J. PureAppl.Math.*，4(3)（2011），251–265。[3] E. Atani 和 A. Kohan，《关于交换半环上的有限生成乘法半模的注记》，*Int. J.Algebra*，4(5-8)（2010），389–396。[4] M.Bataineh 和 R.Malas，《原始子半模与弱原始子半模》，*Amer. Int. J. Contem.Research*，4(1)（2014），131–135。[5] E. Čech，《拓扑空间》，Int. Publ. John Wiley & Sons.，1966。

[6] I. Chajdaa 和 H. Länger，《交换半环上的半模与幺交换环上的模》，*Linearmultilinear algebra*，70(7)（2022），1329–1344。[7] T. Dube 和 A. Goswami，《理想空间：环的结构空间的扩展》，J. Alg. Appl.（在线发表）。[8] C. A. Finocchiaro、A. Goswami 和 D. Spirito，《理想空间的特征类及其拓扑性质》，*Comm.Alg*，2022（在线发表）。[9] A. Facchini、C. A. Finocchiaro 和 G. Janelidze，《抽象构造的素谱》，*AlgebraUnivers.*，83(8)（2022），1–38。[10] J. S. Golan，《半环及其应用》，Springer，1999。[11] S. C. Han，《半环上半模中的极大子半模和素 k-子半模》，*J.AlgebraAppl.*，16(7)（2017）1750130。[12] M. Hochster，《交换环中的素理想结构》，*Trans. Am.Math. Soc.*，142（1969），43–60。[13] C-H Han、W-S Pae 和 J-N Ho，《半模素谱的拓扑性质》，*J.Algebra*，566（2021）205–221。[14] C-HHan、J-N Ho 和 W-S Pae，《半模可减素谱的性质》，Hacet. J. Math. Stat. XX(x)（2022），1–14。[15] H. A. Priestley，《内在谱拓扑》，关于一般拓扑与应用的论文，（纽约州弗拉兴，1992），78–95，Ann. New York Acad. Sci.，728，New York Acad. Sci.，纽约，1994。[16] M. Takahashi，《半模的结构》。*Kobe J Math.*，4（1987），79–101。[17] H. A. Tavallaee 和 M. Zolfaghari，《关于半素子半模及相关结果》，*J.Indones. Math. Soc.*，19(1)（2013），49–59。[18] H. S. Vandiver，《关于一种加法不满足消去律的简单代数类型的注记》，*Bull. Am.Math. Soc.*，40(12)（1934），914–920。[19] ———，《关于若干简单类型的半环》，*Am.Math. Monthly*，46(1)（1939），22–26。[20] G. Yešilot，《关于半模的素 k-子半模和极大 k-子半模》，*Hacet. J. Math. Stat.*，39(3)（2010）305–312。[21] G. Yešilot、K. Orel 和 U. Tekir，《关于素子半模》，*Int. J. Algebra*，4（2010）53–60。

A. Goswami，[1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，邮政信箱 524，奥克兰公园 2006，南非。[2] 国家理论与计算科学研究所（NITheCS），南非。• 电子邮箱：agoswami@uj.ac.za