有限扩展 Su-Schrieffer-Heeger 系统中边缘态的淬火动力学

A. Ghosh,[1,2] A. M. Martin,[3] 和 S. Majumder[1]

[1] *Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur 721302, West Bengal, India*

[2] *School of Physics, University of Melbourne, Melbourne, 3010, Australia*

[3] *School of Physics, University of Melbourne, Melbourne 3010, Australia*(日期：2023年3月2日)

我们考察了包含长程跃迁的扩展 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型的淬火动力学，该模型可具有多个拓扑相。通过绕数图从几何角度刻画系统的拓扑相，我们发现，在两个拓扑相之间进行淬火时，可能存在多条绕数跃迁路径。我们从费米子边缘模的存活概率和淬火后输运两方面研究淬火动力学的依赖性。对于连接两个拓扑区间的两条淬火路径，若其初态和末态拓扑相相同，则边缘态的存活概率会强烈依赖于绕数跃迁路径。我们利用与这些路径对应的能带图解释了这种依赖性。随后，我们研究了绕数跃迁路径对输运的影响。我们发现，最大输运通道的速度会沿绕数跃迁路径发生变化。这种变化取决于所选路径，即变化方向可能随路径而增大或减小。对最终淬火哈密顿量的系数图、能谱以及边缘态空间结构进行分析，有助于理解这种依赖路径的速度变化现象。

arXiv:2303.00269v1 [quant-ph] 1 Mar 2023

I. 引言

淬火动力学是拓扑系统研究中一个备受关注的领域 [1–8]。人们已经开展了诸多研究，包括识别动力学量子相变的拓扑特征 [3, 4], 、理解如何在非平衡情形下刻画平衡态拓扑量子相 [5]，以及探究淬火后信息如何在多体系统中传播 [2,5]。例如，研究表明，当系统从深处的莫特绝缘相淬火至超流相边界时，准粒子关联会发生传播 [9, 10], ；而对 XXZ 海森堡链的研究则增进了人们对相互作用多粒子系统中关联传播方式的认识 [11]。

近年来的主要研究方向之一，是探究各种拓扑体系中边缘态在淬火后的演化，揭示了一些引人入胜的非平衡物理现象。例如，一维拓扑体系可能包含孤立的马约拉纳模和费米子模，它们的存活概率呈现出迷人的行为 [1]。研究还发现，马约拉纳模在淬火后的动力学行为也能表征体系中存在的拓扑相 [2]。淬火至量子临界点时，p 波边缘模的存活概率会随体系构型而振荡 [6–8]。相关淬火动力学研究已在具有 p 波配对的 Kitaev 一维超导体 [12] 以及一维二聚化 Kitaev 超导体 [13] 中开展。二聚化 Kitaev 模型可支持多个拓扑相，其中费米子模出现在 Su-Schrieffer-Heeger （ SSH ）型哈密顿量中；该哈密顿量是二聚化 Kitaev 模型的一个特例。SSH系统作为最简单的拓扑体系[14, 15], ，在大多数此类淬火研究中发挥着重要作用；此外，也有若干关于其有趣研究实验实现方面的研究 [16–19]。考虑到 SSH 系统可根据长程相互作用支持多个高阶拓扑态，因此有必要了解这些态之间淬火的动力学。

在本文中，我们研究存在长程跃迁时的 SSH 哈密顿量。对于这类系统，我们从几何角度证明其可以承载多个拓扑相。根据长程跃迁的具体形式，相应的拓扑态由绕数刻画。具体而言，随着跃迁范围的增加，系统所能承载的最大绕数也相应增大。随后，我们通过与拓扑相对应的费米子边缘模的存活概率，研究系统的淬火动力学。我们考察系统淬火至另一拓扑态时，处于某一拓扑态中的边缘模的存活概率。令人惊讶的是，如果系统从一个定义明确的边缘态出发，并沿两条不同路径淬火至某个最终拓扑态，那么即使系统在淬火前后的拓扑性质相同，存活概率也可能不同。在此基础上，我们考察概率密度随时间在各个格点上的传播，并通过“光锥”图观察淬火的动力学行为。光锥中某一通道的斜率给出了该通道的速度。此外，我们还解释了最大输运速度如何沿淬火路径变化，以及这种变化如何取决于所选择的路径。

本文组织如下。在第二节中，我们介绍最多包含四阶近邻隧穿的扩展 SSH 哈密顿量，从而实现绕数最大为四的可能性。在本节中，我们采用几何方法标记拓扑态，引入绕数跃迁路径的概念，并展示对于同一组初始与最终淬火拓扑态，可能存在多条绕数跃迁路径

。第三节研究在对应于同一组初始与最终淬火拓扑态的不同绕数跃迁路径下，费米子边缘模的淬火动力学依赖性，并通过与淬火路径对应的能带图解释所得结果。随后，我们展示沿这些路径进行淬火时输运光锥的变化。通过使用基态的系数图、最终哈密顿量的能谱以及最终哈密顿量边缘态的空间结构，我们进一步解释输运速度变化对路径的依赖性。最后，在第四节中，我们回顾研究结果，并探讨未来可能的研究方向。

II. 扩展 SSH系统

本文考虑一个无量纲的扩展 SSH 哈密顿量，即包含长程跃迁的 SSH系统:

$$\begin{aligned}\hat{H} = & v\sum_{m=1}^{N}|m,A\rangle\langle m,B| + w\sum_{m=1}^{N-1}|m+1,A\rangle\langle m,B| \\ & + \nu\sum_{m=1}^{N-2}|m+2,A\rangle\langle m,B| + \mu\sum_{m=1}^{N-3}|m+3,A\rangle\langle m,B| \\ & + \gamma\sum_{m=1}^{N-4}|m+4,A\rangle\langle m,B| + \text{h.c},\end{aligned} \tag{1}$$

其中， v 是无量纲胞内跃迁项，而 w、 ν、 μ 和 γ 是无量纲的胞间第一、第二、第三和第四近邻跃迁项。这些跃迁项满足手性对称性，即它们表示两个不同子晶格之间的跃迁（本例中为A 和 B ）。该系统可以支持多个拓扑相。我们采用绕数图来追踪拓扑相，方式与 [20, 21] 中的研究类似。为了绘制该系统的绕数图，我们用体动量基表示 H ：

$$\hat{H}(k) = \langle k|\hat{H}|k\rangle = \sum_{\alpha,\beta\in\{A,B\}}\langle k,\alpha|\,\hat{H}\,|k,\beta\rangle\,|\alpha\rangle\,\langle\beta|\,, \tag{2}$$

其中，平面波基 $|k\rangle$ 由 [14]给出

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=1}^{N}e^{imk}|m\rangle \tag{3}$$

and

$$\hat{H}(k) = \begin{bmatrix}0 & a(k)\\ a^{\dagger}(k) & 0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中， $a(k) = v+we^{ik}+\nu e^{i2k}+\mu e^{i3k}+\gamma e^{i4k}$。矩阵$\hat{}H(k)$ 可用泡利矩阵表示为

$$\hat{H}(k) = d_0\hat{\sigma}_0 + d_x\hat{\sigma}_x + d_y\hat{\sigma}_y + d_z\hat{\sigma}_z, \tag{5}$$

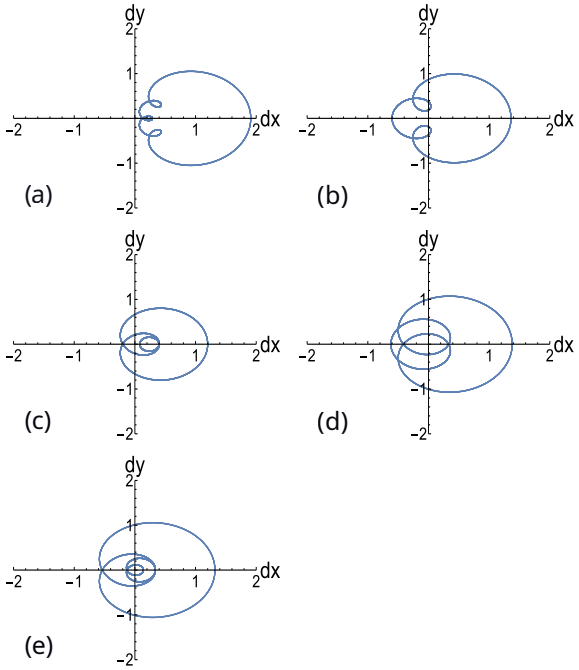

图1. $d_x - d_y$ 平面中的绕数表示。(a)、(b)、(c)、(d)和(e)分别表示系统的一些可能拓扑态，其绕数依次为0、1、2、3和4。(a)中的跳跃参数为 $v = 0.52$、 $w = 0.54$、$\nu = 0.34$、 $\mu = 0.27$和 $\gamma = 0.24$ ；(b)中为 $v = 0.1$、 $w = 0.6$、$\nu = 0.28$、 $\mu = 0.38$和 $\gamma = 0$；(c)中为 $v = 0.28$、$w = 0.2$、$\nu = 0.36$、 $\mu = 0.36$和 $\gamma = 0$；(d)中为 $v = 0.1$、$w = 0.4$、$\nu = 0.28$、 $\mu = 0.6$和 $\gamma = 0$ ；(e)中为 $v = 0.1$、$w = 0.17$、
$\nu = 0.25$ $\mu = 0.42$ $\gamma = 0.38$ 、，以及。

其中，$\hat{}\sigma_0$、$\hat{}\sigma_x$、$\hat{}\sigma_y$ 和$\hat{}\sigma_z$ 为泡利矩阵，且

$$d_x = v + w\cos(k) + \nu\cos(2k) + \mu\cos(3k) + \gamma\cos(4k), \tag{6}$$

$$d_y = w\sin(k) + \nu\sin(2k) + \mu\sin(3k) + \gamma\sin(4k), \tag{7}$$

$$d_0 = d_z = 0. \tag{8}$$

系统的绕数定义为：当 k 从 0 变化到 2π 时，$\mathbf{d}$ 向量的端点在 (d_x, d_y) 空间中环绕原点的次数。

图 1 展示了系统在参数 v、 w、 ν、 μ 和 γ 取不同组合时可能出现的拓扑相所对应的绕数图。需要注意的是，这些图并非其所表示的绕数的唯一表示方式 [14]。然而，拓扑相的一个重要特征是，在有限系统中，它们会支持零能边缘态，或在此情形下支持费米子边缘模。在没有任何畴的理想 SSH 系统中，边缘态的数量是绕数（一个拓扑不变量）的两倍。

A. 绕数跃迁的路径

在我们的研究中，系统被制备于一个初态，该初态对应于具有特定拓扑相的初始淬火构型，其特征由绕数 C_i 表示。随后，系统被淬火至最终

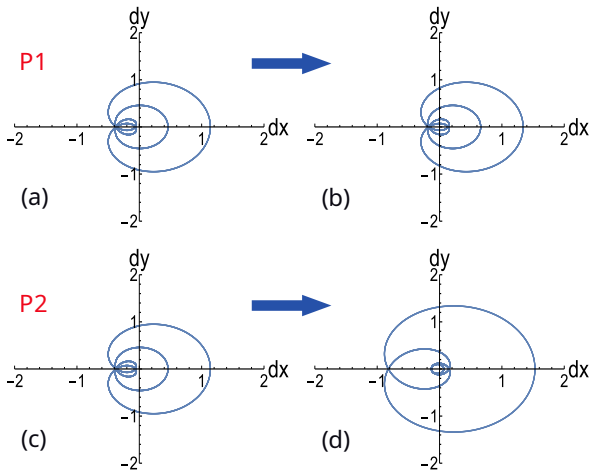

图 2. 从绕数 2 到绕数 4 的跃迁的两条可能路径。 $P1$ 对应于参数 v 从 0.2 变为 0，同时保持 w、 ν、 μ 和 γ 分别固定为 0.17、0.43、0.17 和 0.37。 $P2$ 对应于参数 μ 从 0.17 变为 0.56，同时将其他参数 v、 w、 ν 和 γ 分别固定为 0、0.17、0.43 和 0.37。

淬火构型，具有拓扑相 C_f。

改变某个参数可能会改变系统的绕数，即绕数可能会从一个值（例如 C_i）变为另一个值（例如 C_f）。通过改变其他参数，也可能实现同样的绕数跃迁（C_i 至 C_f）。实现同一绕数跃迁的这些方式构成了<style id='5'>绕数跃迁路径。在图 2 中，我们通过展示从绕数 $C_i = 2$ 到 $C_f = 4$ 的拓扑相跃迁的两条可能路径，给出了这种多路径的一个示例。第一条路径（$P1$）对应于将参数 v 从 0 改变为 0.2，同时将其他参数 w、 ν、 μ 和 γ 分别固定为 0.17、0.43、0.17 和 0.37。第二条路径（$P2$）对应于将参数 μ 从 0.17 改变为 0.56，同时将其他参数 v、 w、 ν 和 γ 分别固定为 0、 0.17、 0.43 和 0.37。在每种情况下，初态和末态的拓扑分别相同。本质上，我们希望在第三节提出并回答的问题如下：假设系统初始处于与某种特定拓扑相关的边缘态，随后被淬火至另一种拓扑态。绕数跃迁路径是否会影响淬火动力学，具体表现为淬火后输运以及边缘态的存活概率？换言之，对于图 2 所示的路径 $P1$ 和 $P2$，边缘态的淬火动力学是否不同？如果不同，在两个拓扑态之间进行淬火时，是什么决定了边缘态存活概率的性质以及系统中的淬火后输运（“光锥”）？

由于我们正在研究沿着各种路径进行淬火的动力学，因此有必要考察系统在淬火过程中及淬火之后所经历的拓扑相。例如，图3展示了系统在图 2 所示的两条路径 $P1$ 和$P2$上及其延长线上所经历的拓扑相。对于第一条路径，沿途的拓扑相为 2、4；但如果 v 继续越过 0.4，系统最终会处于拓扑态 0（$2-4-0$）。对于第二条路径，沿途的拓扑相为 2、4 和 3（$2-4-3$）；当 μ 继续越过 0.6 时，系统最终会处于拓扑态 3。我们将在第三节看到，对路径（$2-4$）进行这种刻画时，最关键的方面之一是：如果沿着绕数跃迁路径继续前进，淬火所对应的拓扑相将走向何方：对于 $P1$，它将走向 0；对于 $P2$，它将走向 3。

B. 单粒子态的存活概率

在比较不同的绕数跃迁路径之前，我们先引入初态的存活概率概念。为此，考虑一个由哈密顿量 H定义的单粒子系统，该哈密顿量是在 $t < 0$ 处参数 χ_1 的函数。此时的单粒子态由薛定谔方程给出，

$$H(\chi_1)\,|\psi_i(\chi_1)\rangle = E_i(\chi_1)\,|\psi_i(\chi_1)\rangle\,. \tag{9}$$

在 $t = 0$ 处进行淬火，即参数 $\chi_1 \to \chi_2$发生瞬时变化。根据薛定谔方程定义与新哈密顿量及参数χ_2 相对应的本征态 $|\psi_f\rangle$，

$$\hat{H}(\chi_2)\,|\psi_f(\chi_2)\rangle = E_f(\chi_2)\,|\psi_f(\chi_2)\rangle\,. \tag{10}$$

淬火后单粒子态 $|\psi_i(\chi_1)\rangle$的时间演化为

$$|\psi_i(t)\rangle = \sum_{f=1}^{N} e^{-iE_f(\chi_2)t}\,|\psi_f(\chi_2)\rangle\,\langle\psi_f(\chi_2)|\psi_i(\chi_1)\rangle\,, \tag{11}$$

其中，求和遍及与 $\hat{}H(\chi_2)$ 相关的本征态。在任意时刻 $t > 0$回到初态的可能性，也称为初态的存活概率，其表达式为：

$$P^i(t) = |\langle\psi_i(\chi_1)|\psi_i(t)\rangle|^2\,. \tag{12}$$

在第三节第一部分中，我们将重点研究这一量，以刻画淬火的性质。具体而言，我们将从一个定义明确的边缘态出发，该态由淬火前系统的拓扑特征决定，并计算淬火后的 $P^i(t)$。

III. 结果与讨论

A. 存活概率对路径的依赖

我们知道，边缘态受到拓扑保护，边缘态的数量由系统的绕数决定。正如我们在前文所讨论的，系统可以支持多个拓扑相，并且同一组绕数之间可能存在多条不同的转变路径，见图 2。

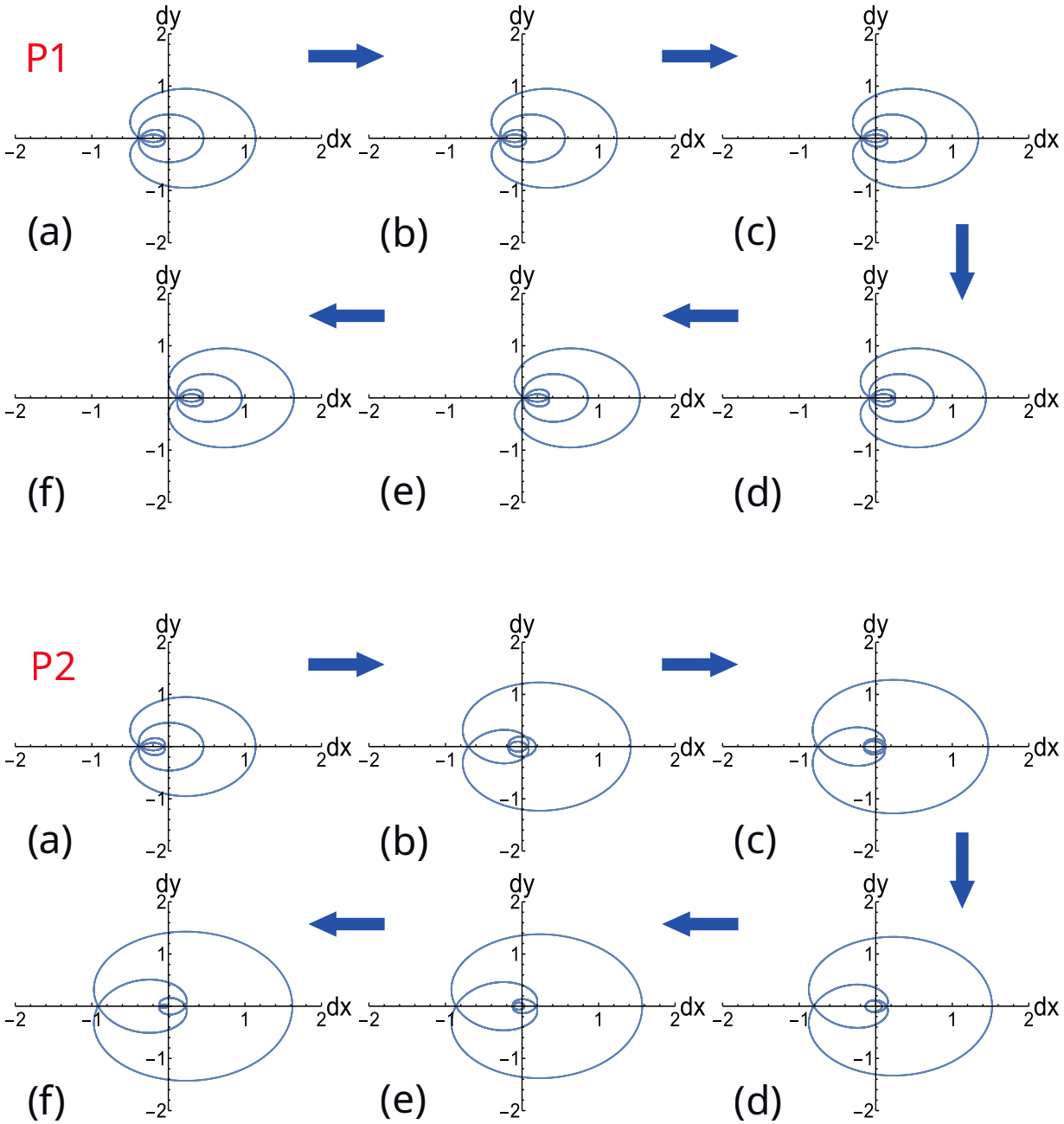

图3. 系统沿着两条绕数跃迁路径所经历的拓扑相；这两条路径对应相同的初始绕数跃迁，即从2到4。在路径 $P1$中，参数 v从0逐渐变化到0.5，同时将其他参数 w、 ν、 μ和 γ分别固定为0.17、0.43、0.17和0.37。 $P1$中的(a)、(b)、(c)、(d)、(e)和(f)分别对应 v取值为0.0、0.1、0.2、0.3、0.4和0.5。在P1中，拓扑相流为2-4-0。在 $P2$中，参数 μ从0.17增加到0.65，同时将其他参数 v、 w、 ν和 γ分别设为0、0.17、0.43和0.37。对于 $P2$，(a)、(b)、(c)、(d)、(e)和(f)分别对应参数 μ取值为0.17、0.45、0.5、0.55、0.6和0.65。在P2中，拓扑相流为2-4-3。

下面我们研究沿不同路径进行淬火时边缘态的存活概率。作为示例，我们首先考虑带有$\nu = \mu = \gamma = 0$的标准SSH模型，以及由 $v_i < w_i$定义的初始系统，具体为 $v_i = 0.2$ 和 $w_i = 0.5$，其中 $C_i = 1$。随后将系统淬火至 $v_f > w_f$，具体为 $v_f = 0.6$ 和$w_f = 0.5$，其中 $C_f = 0$。对于这种情形，我们考虑一个含有 $N = 400$ 个格点的系统，初始本征态局限于边缘，见图 4(a)，其无量纲本征能量为 0。淬火后，我们看到初态的存活概率急剧下降 [1, 6], 见图 4(b)。这种存活概率快速衰减的原因很明显：我们从一个支持边缘态的系统淬火到一个不支持边缘态的系统$C_i = 1$ $C_f = 0$。

下面我们提出这样一个问题：如果淬火后的系统

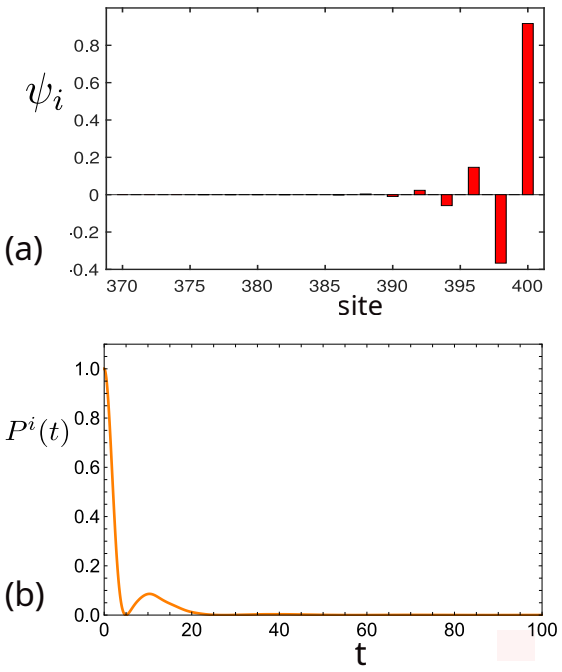

图 4. (a) 一个具有 $v_i = 0.2$ 和 $w_i = 0.5$ 的 $N = 400$ 格点系统中的边缘态波函数。(b) 对于 $v_i = 0.2$、$w_i = 0.5$、$v_f = 0.6$ 和 $w_f = 0.5$，存活概率 $P^i(t)$；初态如 (a) 所示。

支持边缘态，$C_f > 0$，初始边缘态的存活概率将受到怎样的影响，淬火路径又将如何影响它？如图 4 所示，我们考虑一个具有 $N = 400$ 个格点的系统。所考虑的初始本征态如图 5(a) 所示，其中 $v_i = 0$、$w_i = 0.17$、$\nu_i = 0.43$、$\mu_i = 0.17$和 $\gamma_i = 0.37$，且 $C_i = 2$。图 5(b) 绘出了沿图 2 所示两条淬火路径演化时该初态的存活概率，具体而言，$v_f = 0.2$ （橙色曲线）和 $\mu_f = 0.56$ （蓝色曲线）；需要注意的是，在每种情况下，$C_f = 4$。

从图 5(b) 可以看出，淬火至支持边缘态的状态会提高淬火前边缘态的存活率。然而，我们注意到，对于淬火至 $v_f = 0.2$，与初态的重叠在长期内仅略高于 0.4。这与淬火至 $\mu_f = 0.56$ 的情况形成对比，后者的长期存活概率略高于 0.8。为更仔细地考察这一点，我们考虑淬火 $v_f = 0.3$ （橙色曲线）和 $\mu_f = 0.6$（蓝色曲线），见图 5(c)。这里的淬火对应于更靠近 $C_f = 4$ 边界的情形。如图 3 所示，如果进一步大幅增大 v_f，C_f 最终将变为 0；而如果进一步大幅增大 μ_f，C_f 将变为 3。从图 5(b) 和 (c) 可以看出，淬火至 v 的长期存活概率显著低于淬火至 μ 的情况。

其他淬火也显示出类似的结果，即边缘态的存活概率不仅取决于其淬火进入的系统拓扑，还取决于淬火所趋向的方向。在这两个例子中，我们必须考虑到，这些路径可标记为 $2-4-0$ （淬火 v）和 $2-4-3$ （淬火μ）。将路径标签以更一般的形式写为

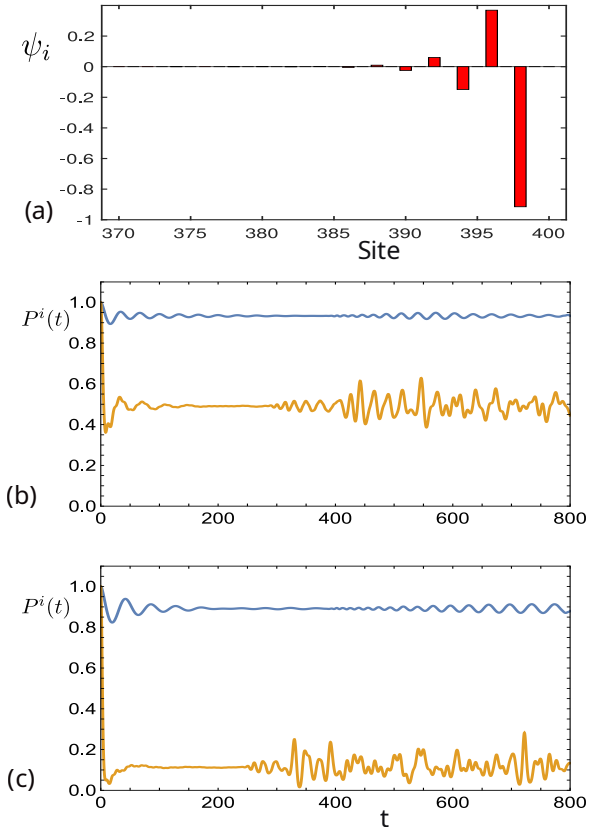

图 5. (a) $N = 400$ 格点系统中的边缘态波函数，其中 $v_i = 0$、$w_i = 0.17$、$\nu_i = 0.43$、$\mu_i = 0.17$ 和 $\gamma_i = 0.37$，且 $C_i = 2$。(b) $v_f = 0.2$（橙色曲线）和 $\mu_f = 0.56$（蓝色曲线）的重叠概率 $P^i(t)$。(c) $v_f = 0.3$（橙色曲线）和 $\mu_f = 0.6$（蓝色曲线）的重叠概率 $P^i(t)$。在 (b) 和 (c) 中，所考虑的初态如 (a) 所示。

$C_i - C_f - C_h$，我们可以通过考察与这些路径对应的能带图（图 6 和图 7）来表征淬火的性质。

图 6 展示了路径 $2-4-0$ 上随 v 增大时的本征能量。如图 6(b) 所示，随着参数 v 增大，零能量态在首次拓扑相变（$2-4$）之后便不再保持零能量特征。这种变化会导致淬火 $2-4-0$ 的存活概率降低，即使 $C_f = 4$。然而，在整个路径 $P2\,(2-4-3)$ 上，边缘态始终保持其特征，见图 7。因此，淬火后边缘态的存活概率仍然相对较高。

从这些结果可以清楚地看出，即使系统的最终拓扑 C_f 相同，某些边缘态的淬火动力学也取决于拓扑相变所选取的路径。对于所考察的例子，我们看到，淬火可以被描述为$2-4-0$ 或 $2-4-3$，而后一条路径具有更高的存活概率。从图 6 和图 7 可以看出，本征能谱的细节有助于理解存活概率。更一般地，我们还考察了其他淬火路径，并发现，对于由 $C_i - C_f - C_h$ 描述的路径，如果考虑两个淬火

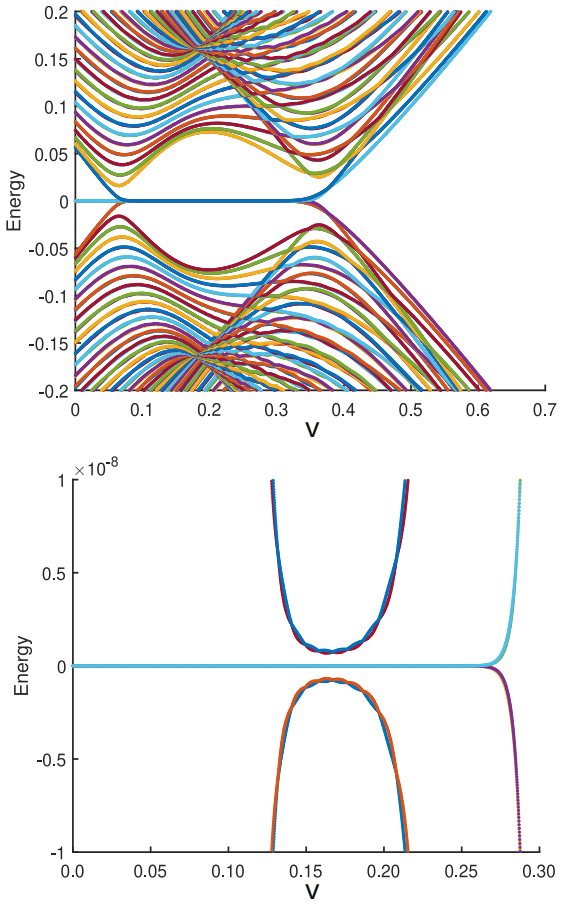

图 6. (a) 对于 $w = 0.17$、 $\nu = 0.43$、 $\mu = 0.17$ 和 $\gamma = 0.37$， $N = 400$ 格点系统的本征能量随 v 的变化。(b) (a) 的局部放大图，聚焦于接近零的能量。

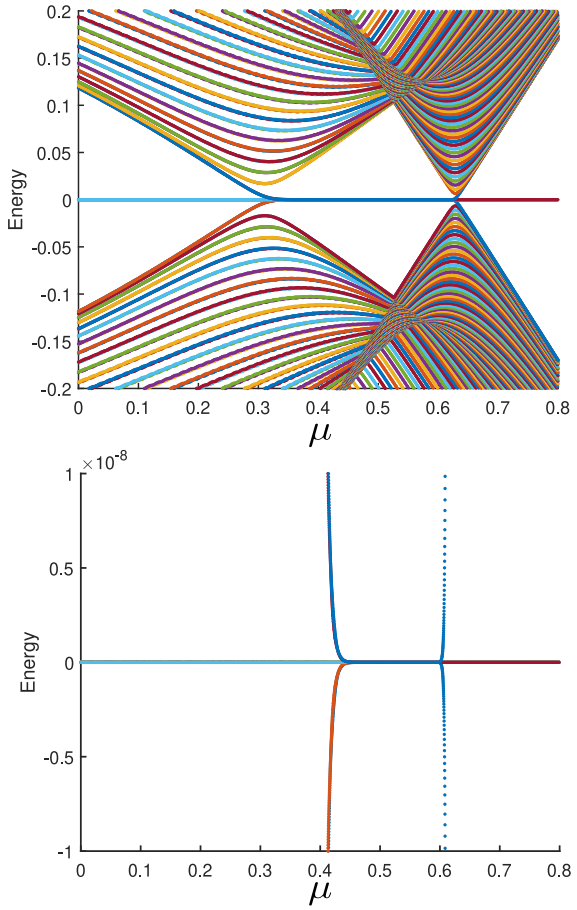

图 7。（a） $N = 400$ 格点系统的本征能量随 μ变化的关系，其中$v = 0$、$w = 0.17$、 $\nu = 0.43$ 和 $\gamma = 0.37$ 。（b）图（a）的局部放大图，聚焦于接近零的能量。

它们从相同的初态出发且具有相同的C_f ，那么与 $C_h < C_i$的情况相比，若 $C_h \geq C_i$ ，存活概率会更高。

在图 5 中，可以观察到存活概率呈现出一种与干涉有关的模式。具体而言，在所有情况下，存活概率在短时间尺度上都会出现一个凹陷。随后进入存活概率保持恒定的阶段，接着出现波纹。我们发现，波纹出现的时间尺度随系统尺寸变化。考虑概率密度的输运可以解释这一现象：波纹源于边缘处的概率密度波与来自另一边缘的反射波之间的干涉。这种干涉开始出现的时间尺度随系统尺寸线性增加。两条路径对应的存活概率中，波纹到达的时间不同；此外，路径对应的图 5(b) 和 (c) 中，这一时间也略有不同。其背后的物理机制与这些路径所对应的边缘态的非平衡输运有关，我们将在下文详细讨论。

B. 输运速度随路径类型的变化

上一小节的讨论表明，淬火后动力学与边缘态在整个系统中的输运有关。下面我们利用光锥图将这种输运可视化，即绘制各格点上的概率密度（$n_i(t) = \langle\psi_i(t)|\psi_i(t)\rangle$）随时间的变化图。图 8 描述了沿 $P1$进行淬火时边缘态的输运，其中 (a) 和 (b) 分别对应 $v_f = 0.1$ 和 $v_f = 0.3$ 的取值，且 $v_i = 0$。而图 8 (c) 和 (d) 描述了沿 $P2$ 进行淬火时边缘态的输运，分别对应$\mu_f = 0.39$ 和 $\mu_f = 0.59$ 的取值，且 $\mu_i = 0.17$。比较图 8 (a) 与 (b)，以及 (c) 与 (d)，可以观察到，随着最终淬火构型分别沿$P1$ 和 $P2$ 移动，输运量最大的通道速度发生了变化。两条淬火路径上的速度变化在定量上有所不同。比较图 8 (a) 与 (b)，可以看出，对于 $P1$，最大输运的速度有所增加。更一般地，我们发现，对于表征边缘态存活概率衰减的路径，最大输运通道的速度会增加

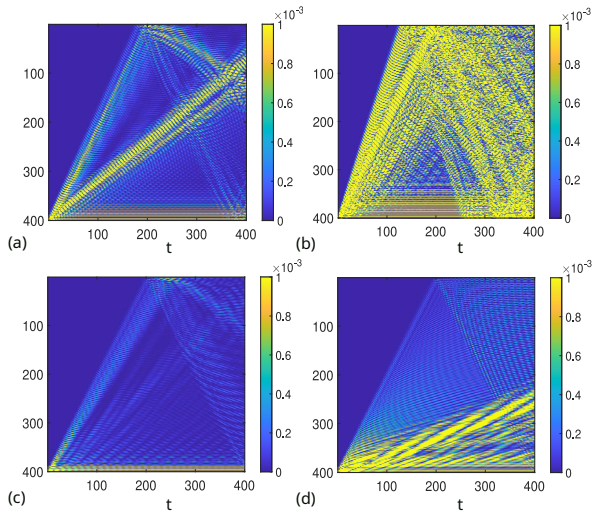

图 8. 四幅光锥图，展示了将 v 从 $v_i = 0$ 淬火至 (a) $v_f = 0.1$ 和 (b) $v_f = 0.3$ 的情形，其中 w、 ν、 μ 和 γ 分别固定为 0.17、0.43、0.17 和 0.37；以及将 μ 从 $\mu_i = 0.17$ 淬火至 (c) $\mu_f = 0.39$ 和 (b) $\mu_f = 0.59$ 的情形，其中 v w、 ν 和 γ 分别固定为 0、0.17、0.43 和 0.37。每幅光锥图均绘出了各格点 i 上的概率密度（$n_i(t) == \langle\psi_i(t)|\psi_i(t)\rangle$ ）随时间的变化（横轴为时间，纵轴为格点）。

边缘态的存活概率。对于不表征边缘态存活概率衰减的路径（$P2$），随着沿淬火路径移动，最大输运通道的速度则由高变低，这一点可通过比较图 8 (c) 与 (d) 看出。仔细观察图 8(a) 可发现，输运主要通过两个通道进行。其中一个通道的速度相对较高（强度较低），另一个通道的速度则较低（强度较高）。随着最终淬火构型沿路径 $P1$移动，两个通道对应的速度都在增加。此外，沿路径 $P1$变化时，两者的速度大小趋于接近，且速度较快的通道强度略有增加。另一方面，图 8 (c) 显示总输运量非常低。随着最终淬火构型沿路径 $P2$移动，输运有所增加，但主要通过一个速度远低于前一构型的通道进行。

为了解释速度变化现象，我们探究了式（11）中的各项与图8所示光锥之间的对应关系。图9展示了沿路径移动时，式（11）中演化态表达式的基矢系数 $a_f = \langle\psi_f(\chi_2)|\psi_i(\chi_1)\rangle$的变化，以及边缘态的空间结构变化，即边缘态的局域化与离域。系数 a_f 取决于最终哈密顿量本征态的空间结构。由于式（11）对最终哈密顿量的所有本征态求和，因此边缘态和体态都会对输运产生贡献。求和中各项的系数决定其权重，因而对应于通道的强度。态的能量与时间一起作为相位因子出现在表达式中，因此会影响输运速度。图9(a-d)分别对应路径 $P1$ 上的 $v_f = 0.1$、$v_f = 0.3$ 以及路径 $P2$ 上的 $\mu_f = 0.39$、 $\mu_f = 0.59$的系数。图9(a-d)中第197至204个系数对应边缘态，其余对应体态。这些图中央区域的峰值源于初始边缘态与淬火后哈密顿量中的边缘态之间的强重叠。在图9(a-d)中，最高峰对应能量最低阶的边缘态（分别如图9(e)、(f)、(i)和(j)所示，对应 $v_f = 0.1$ 和 $v_f = 0.3(P1)$、$\mu_f = 0.39$ 和 $\mu_f = 0.59$ $(P2)$），这些边缘态形成了光锥图底部的静止水平线。可以观察到，图8(b)中的水平线比图8(a)中的向导线中心延伸得更远，这可能是因为从 $v = 0.1$ 移动到$v = 0.3$时，边缘态发生了离域。比较图9(e)、(g)与图9(f)、(h)（分别对应 $P1$ 中的 $v = 0.1$ 和 $v = 0.3$ ）可以清楚地看到这种离域。所有情况下，次高的贡献都来自能量接近零、但比静止边缘态高出数个数量级的边缘态；它们对应于图8光锥中的低速通道。沿路径移动时，这些态的能量增加，导致较慢速度通道的速度提高。在图8(a)和(b)中这一结果更为明显，因为该路径上的对应系数 $P1$高于 $P2$。沿路径 $P2$移动时（图8(c)和(d)），表面上看，输运最强的通道速度似乎降低了；但这只是因为低速通道的系数起初很低，随后沿路径逐渐增加，使得低速通道中的输运显著增强，进而成为强度最高的通道。需要注意的是，沿路径P2，低速通道对应的系数因边缘态的局域化而增加。局域化使边缘附近的振幅增大，从而使系数增加。与图9(a)中的系数相比，图9(b)中体态对应的系数要高得多。因此，前者中高速通道的强度远高于后者。沿路径移动时，高速通道的速度也会提高，这是因为体态能量增加。沿路径 $P2$移动时，体态能量同样增加，但边缘态发生局域化，对输运的贡献减小，因此高速通道的速度和强度都不会显著增加。

IV. 总结与结论

通过利用绕数图分析扩展 SSH 模型的拓扑相，我们

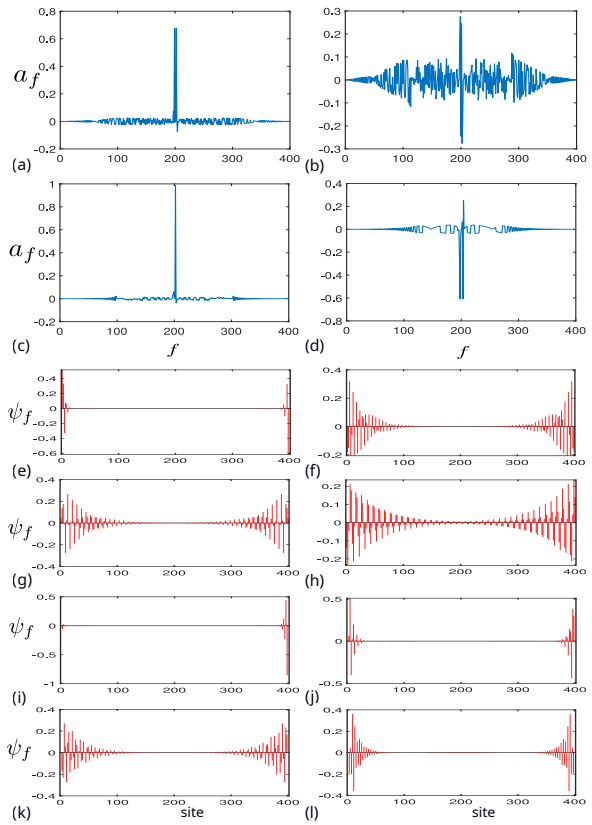

图 9. 在本图中，(a)、(b)、(c) 和 (d) 分别为系数 $a_f = \langle\psi_f(\chi_2)|\psi_i(\chi_1)\rangle$ 随指标 f 的变化图，其中 f 分别对应于 P1 的 $v_f = 0.1$、$v_f = 0.3$ 以及 P 的 $\mu_f = 0.39$、$\mu_f = 0.59$ 2 。(e)、(g) 和 (f)、(h) 分别对应于沿 P1 的 $v_f = 0.1$ 和 $v_f = 0.3$ 的边缘态，其中 (e)、(f) 的能量阶数最低，而 (g)、(h) 的能量阶数在各自的哈密顿量中相对较高。(i)、(k) 和 (j)、(l) 分别对应于沿 P2 的 $\mu_f = 0.39$ 和 $\mu_f = 0.59$ 的边缘态，其中 (i)、(j) 的能量阶数最低，而 (k)、(l) 的能量阶数在各自的哈密顿量中相对较高。系数图中 197 至 204 的中心峰对应于与最终哈密顿量的某些边缘态具有较高重叠的部分。比较 (e)、(g) 与 (f)、(h) 可清楚看出沿 P1 的边缘态发生了离域。同样地，比较 (k) 与 (l) 可明显看出对 P2 输运有贡献的边缘态具有局域化特征。

表明，在两个拓扑相之间进行淬火时，绕数跃迁可能存在多条路径。通过根据费米子边缘态的存活概率研究淬火动力学的路径依赖性，我们发现，可以用三个一般参数对存活概率进行分类：（i）淬火前绕数（C_i）；（ii）淬火后绕数（C_f）；以及（iii）淬火所趋向的绕数（C_h）。一般而言，对于由 $Ci - C_f - C_h$ 表征的系统，如果考虑两次具有相同 C_i 和 C_f 的淬火，那么对于某些费米子边缘态，与 $C_h < C_i$ 的情况相比，$C_h \geq C_i$ 的淬火所对应的存活概率会更高。在两个拓扑区间之间淬火时，边缘态稳健性的这一分类目前仅在该模型中经过检验；要更广泛地验证这一概念，还需开展进一步研究。随后，我们利用与概率密度相关的光锥图研究淬火后动力学。聚焦于所考察的示例路径，我们发现，大部分输运通道的速度会随绕数跃迁路径而变化。这种变化取决于所选路径：对于表征存活概率衰减（稳定）的路径，输运最显著部分所对应的速度会沿路径增大（减小）。通过分析系数图、最终哈密顿量的能谱以及最终哈密顿量中边缘态的空间结构，可以解释这一速度变化现象。

致谢

我们谨向墨尔本大学和印度理工学院卡拉格普尔分校的所有课题组成员致以诚挚谢意，感谢他们在本研究工作的规划与开展过程中提出宝贵且建设性的建议。我们十分感谢他们积极参与讨论会议的热忱。本项目得到印度理工学院卡拉格普尔分校、印度政府提供的学院奖学金，以及澳大利亚墨尔本大学N.D. Goldsworthy奖学金的资助。我们衷心感谢他们对本项目的支持。

[1] PD Sacramento。淬火拓扑导线的边缘模动力学。*Physical Review E*，93(6):062117，2016年。[2] Yucheng Wang。通过边缘马约拉纳费米子的存活概率探测拓扑相。*Physical Review E* 98 4 042128, 2018 ，( ): 。

[3] Jan Carl Budich 和 Markus Heyl。远离平衡态的动态拓扑序参量。*B* 93 8 085416, 2016 *Physical Review* ，( ): 。[4] Chao Yang 、 Linhu Li 和 Shu Chen。量子淬火后的动态拓扑不变量。*B* 97 6 060304, 2018 *Physical Review* ，( ): 。[5] Lin Zhang、Long Zhang、Sen Niu 和 Xiong-Jun Liu。拓扑量子相的动态分类。*Science Bulletin*，63(21):1385–1391，2018年。[6] Atanu Rajak 和 Amit Dutta。突然淬火参数作用下，一维 p 波超导链中边缘马约拉纳费米子的存活概率。*Physical Review E*，89(4):042125，2014年。[7] Atanu Rajak 和 Tanay Nag。含杂质的淬火马约拉纳链中的存活概率。*Physical Review E* 96 2 022136, 2017 *Physical Review* ，( ): 。

[8] PD Sacramento。量子淬火后马约拉纳费米子和陈数的命运。*Physical Review E*，90 (3):032138，2014年。[9] Marc Cheneau、Peter Barmettler、Dario Poletti、Manuel Endres、Peter Schauß、Takeshi Fukuhara、Christian

Gross、Immanuel Bloch、Corinna Kollath和Stefan Kuhr。量子多体系统中关联的类光锥传播。 *Nature* 481 7382 484 487, , ( ): – 。[10] Jean-S´ebastien Bernier、Ryan Tan、Lars Bonnes、Chu Guo、Dario Poletti和Corinna Kollath。多体耗散系统中关联的光锥传播和扩散传播。 *Physical Review Letters* 120 2 020401, , ( ): 。2012 2018

[11] Lars Bonnes、Fabian HL Essler和Andreas M L¨auchli。自旋链中量子淬火后的"光锥"动力学。 *Physical Review Letters*, 113(18): 187203, 2014年。[12] A Yu Kitaev。量子线中的未配对马约拉纳费米子。 *Physics-uspekhi*, 44(10S): 131, 2001年。[13] Ryohei Wakatsuki、Motohiko Ezawa、Yukio Tanaka和Naoto Nagaosa。二聚化基塔耶夫超导体中向马约拉纳费米子的费米子分数化。 *Physical Review B* 90 1 014505, 2014 , ( ): 。[14] J´anos K Asb´oth、L´aszl´o Oroszl´any和Andr´as P´alyi。拓扑绝缘体简明教程。*physics* 919 166, 2016 *Lecture notes in* , : 。

[15] W P Su、JR Schrieffer和Ao J Heeger。聚乙炔中的孤子。 *Physical Review Letters*, 42(25): 1698, 1979年。

[16]Mitchell Kiczynski、Samuel Gorman、Helen Geng、Matthew Donnelly、Yousun Chung、Yu He、Joris Keizer 和 Michelle Simmons。原子基半导体量子点中的拓扑态工程。 *Bulletin of the American Physical Society* 2022 , .

[17] Eric J Meier、Fangzhao Alex An 和 Bryce Gadway。su– schrieffer–heeger 模型中拓扑孤子态的观测。 *Nature Communications*, 7(1): 1–6, 2016年。[18] Siyuan Liu、Huabing Yin、David J Singh 和 Peng-Fei Liu。Ta 4 site 4：一种可能的一维拓扑绝缘体。 *Physical Review B*, 105(19):195419, 2022年。[19] NR Cooper、J Dalibard 和 IB Spielman。超冷原子的拓扑能带。 *Reviews of Modern Physics*, 91 1 015005, 2019 ( ): .[20] G Zhang 和 Z Song。扩展量子伊辛模型的拓扑表征。 *Physical Review Letters*, 115 17 177204, 2015 ( ): .[21] Chuanhao Yin、Hui Jiang、Linhu Li、Rong L¨u 和 Shu Chen。一维手性非厄米系统中绕数的几何意义及其对拓扑相的表征。 *Physical Review A*, 97(5): 052115, 2018年。