arXiv:2303.00270v1 [math.DG] 1 Mar 2023

杨–米尔斯–希格斯对的稳定性与能量恒等式

韩晓丽[1], 金西深[2],文扬[3*]

[1]清华大学数学系，北京，100084，中国

hanxiaoli@mail.tsinghua.edu.cn[2]中国人民大学数学学院，北京，100872，中国
jinxishen@ruc.edu.cn[3*]中国科学院数学与系统科学研究院，北京，100190，中国
wenyang19@mails.ucas.ac.cn

*通讯作者。

摘要：本文研究杨-米尔斯-希格斯泛函临界点的性质，这些临界点称为杨-米尔斯-希格斯对。我们首先考察向量丛上弱稳定杨-米尔斯-希格斯对的性质，其中向量丛定义在 S^n （$n \geq 4$）上。当 $n \geq 4$时，我们证明其希格斯场的范数为 1，且其联络实际上是杨-米尔斯联络。更准确地说，当 $n \geq 5$时，其曲率消失。我们还利用泡颈分解，证明了能量一致有界的 4–维紧流形上杨–米尔斯–希格斯对序列的能量恒等式。我们证明存在一个子列，在除去有限多个带有杨-米尔斯联络的 4–维球面后，该子列在规范变换意义下光滑收敛到一个杨–米尔斯–希格斯对。

关键词：杨–米尔斯–希格斯对

1 引言

设 (M, g) 是一个 n 维闭黎曼流形，且 E 是其上的一个秩为 r 、结构群为 G 的向量丛，其中 G 是一个紧李群。设 $\mathfrak{g}_E$ 是 E 的伴随丛。定义在 E 的联络空间上的经典杨–米尔斯泛函为

$$YM(\nabla) = \int_M |R^\nabla|^2 dV$$

其中 ∇ 是 E 上的一个联络， R^∇ 表示其曲率， dV 是 g 的体积形式。记 d^∇ 为由 ∇ 诱导的外微分，记 δ^∇ 为 d^∇ 的形式伴随。杨–米尔斯泛函的临界点称为杨-米尔斯联络，它们满足

$$\delta^\nabla R^\nabla = 0.$$

我们关注的是使杨–米尔斯泛函在局部达到极小值的杨-米尔斯联络。在这样的联络 ∇ 处，杨–米尔斯泛函的二阶变分应当非负，即

$$\frac{d^2}{dt^2} YM\left(\nabla^t\right)\Big|_{t=0} \geq 0$$

其中， ∇^t 是满足 $\nabla^0 = \nabla$的联络曲线。这类联络称为稳定联络。考虑由特殊向量场生成的变形下杨–米尔斯泛函的二阶变分

这是于2023年1月7日提交的修订版本

场，J. Simons 宣布，如果 $n > 4$，则 S^n 上的每个稳定杨-米尔斯联络都是平坦的；这一宣布于1977年9月在东京进行。Bourguignon-Lawson [1] 对这一结果给出了详细证明。

金兹　堡-朗道方程是金兹堡-朗道泛函的欧拉-拉格朗日方程 al

$$E_\varepsilon(u) = \int_M \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{\left(1 - |u|^2\right)^2}{4\varepsilon^2} \right) dV$$

其中 u 是定义在 M上的复值函数。在[2], Cheng 证明，对于 $n \geq 2$，定义在 S^n 上的金兹堡-朗道方程的每个稳定解都是绝对值为 1 的常数。

本文考虑以下带自相互作用参数$\lambda \geq 0$ 的杨-米尔斯-希格斯泛函，它由杨–米尔斯泛函和金兹堡-朗道泛函组合而成

$$\mathscr{A}(\nabla, u) = \frac{1}{2}\int_M |R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |u|^2)^2 dV \tag{1}$$

其中 $u \in \Omega^0(E)$ 是一个希格斯场。结构群为 $SU(2)$ 的 $\mathbb{R}^3$ 上的杨-米尔斯-希格斯泛函最初由 P. Higgs 于 [6] 提出。A. Jaffe-C. Taubes [9] 将杨-米尔斯-希格斯泛函推广到 $\mathbb{R}^n$ 以及一般流形上。它的临界点就是所谓的磁单极子（我们也称之为杨-米尔斯-希格斯对），即满足以下条件的一对 (∇, u)

$$\begin{aligned} \delta^\nabla R^\nabla &= -\frac{1}{2}(d^\nabla u \otimes u^* - u \otimes (d^\nabla u)^*), \\ \delta^\nabla d^\nabla u &= \frac{\lambda}{2}(1 - |u|^2)u, \end{aligned} \tag{2}$$

其中，对于任意的 $u \in \Omega^0(E)$ 和 $\phi \in \Omega^p(E)$，$\frac{1}{2}(u \otimes \phi^* - \phi \otimes u^*) \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$，使得对于任意的 $\varphi \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$，都有 $\langle \frac{1}{2}(u \otimes \phi^* - \phi \otimes u^*)\ \varphi\rangle = -\langle \phi, \varphi u\rangle$。

与稳定的杨-米尔斯联络类似，若杨-米尔斯-希格斯对 (∇, u) 满足：对于任意曲线 (∇^t, u^t)，只要 $\nabla^0 = \nabla$ 且 $u^0 = u$，就有

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t, u^t)\Big|_{t=0} \geq 0. \tag{3}$$

此外，我们可以定义杨-米尔斯-希格斯对的弱稳定性记号（参见定义2.1）。本文旨在将 J. Simons 和 Bourguignon- Lawson 关于 [1] 上弱稳定杨-米尔斯联络的部分结果 S^n 推广到弱稳定杨-米尔斯-希格斯对。我们证明以下定理。

定理 1.1 假设 (∇, u) 是 S^n 上的弱稳定杨–米尔斯–希格斯对，则

1. 若 $n \geq 5$，则 $R^\nabla = 0, d^\nabla u = 0$ 和 $|u| = 1$。
2. 若 $n = 4$，则 $d^\nabla u = 0, |u| = 1$ 和 ∇ 是杨-米尔斯联络（即 $\delta^\nabla R^\nabla = 0$）。

取值于 $\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 的希格斯场有时会受到一些物理研究的关注。相应的杨-米尔斯-希格斯泛函为

$$\mathscr{A}(\nabla, \Phi) = \frac{1}{2}\int_M |R^\nabla|^2 + |d^\nabla \Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 dV,$$

其中 $\Phi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$。$\mathscr{A}$ 的欧拉-拉格朗日方程为

$$\begin{aligned} \delta^\nabla R^\nabla &= [d^\nabla \Phi, \Phi], \\ \delta^\nabla d^\nabla \Phi &= \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)\Phi. \end{aligned} \tag{4}$$

在 S^n 上的稳定杨-米尔斯-希格斯对 (∇, Φ) 具有类似的性质，相关讨论见第4节。

能量恒等式最初是在四维流形上针对反自对偶杨-米尔斯场序列建立的。在 [16], , Tian 证明，黎曼流形 (M,g) 上维数为 n（$n \geq 4$）的杨-米尔斯场序列的缺陷测度集中在 M 中一个 $n-4$-可求长子集 S 上。Rivi´ere [13] 证明，在四维情形下， S 上任意一点处的缺陷测度等于 S^4 上杨-米尔斯场的 L^2 能量之和；在对曲率的 $W^{2,1}$ 范数附加假设下，这一结果适用于任意维数。此外，在 [11], , Nabor-Valtorta 证明，对于能量有界的驻定杨-米尔斯场序列， $W^{2,1}$ 范数自动有界。

在 [14], Song 证明了紧黎曼曲面上、具有弯曲纤维空间的纤维丛上的杨–米尔斯–希格斯对序列的能量恒等式，并且在二维情形下，爆破只发生在希格斯部分。在第5节中，我们假设 M 是一个四维紧黎曼流形，且 $\{(\nabla_i, u_i)\}$ 是定义在 M 上的杨–米尔斯–希格斯对序列，其能量一致有界$\mathscr{A}(\nabla_i, u_i) \leq K$。与二维流形的情形不同，我们将证明，在 4–维流形上，希格斯场不存在能量集中点，且爆破只发生在曲率部分。我们证明以下定理。

定理1.2 假设 $\{(\nabla_i, u_i)\}$ 是满足方程（4）的杨–米尔斯–希格斯对族，且$\mathscr{A}(\nabla_i, u_i) \leq K$。那么存在一个有限子集 $\Sigma = \{x_1, ..., x_l\} \subset M$、定义在 $M \setminus \Sigma$ 上的一个杨–米尔斯–希格斯对 $(\nabla_\infty, u_\infty)$，以及定义在 S^4 上的杨-米尔斯联络 $\{\widetilde{\nabla}_{jk} \mid 1 \leq j \leq l, 1 \leq k \leq K_j\}$，使得 $\{(\nabla_i, u_i)\}$ 的一个子列在规范变换下于 $C^\infty_{loc}(M \setminus \Sigma)$ 中收敛到 $(\nabla_\infty, u_\infty)$，并且

$$\lim_{i\to\infty} \mathscr{A}(\nabla_i, u_i) = \mathscr{A}(\nabla_\infty, u_\infty) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{K_j} YM(\widetilde{\nabla}_{jk}). \tag{5}$$

2 预备知识

设 (M,g) 是一个紧黎曼流形， D 是其列维-奇维塔联络。设 $E \to M$ 是 M 上的秩为 r 的向量丛，其结构群为紧李群 $G \subset SO(r)$。我们还假设 $\langle\ ,\ \rangle$ 是与 G 的作用相容的 E 的黎曼度量。设 $\mathfrak{g}_E$ 是 E 的伴随丛。假设 $\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ 是 E 上与度量 $\langle\ ,\ \rangle$ 相容的联络。在局部坐标下， ∇ 具有如下形式

$$\nabla = d + A$$

其中， $A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 是联络 1-形式。

对于 E 上的任意联络 ∇，曲率 $R^\nabla = \nabla^2 \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ 衡量 ∇ 不满足交换律的程度。在局部坐标下， R^∇ 为

$$R^\nabla = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

其中， $\mathfrak{g}_E$ 值 1-形式 φ 和 ψ 的括号定义为

$$[\varphi \wedge \psi]_{X,Y} = [\varphi_X, \psi_Y] - [\varphi_Y, \psi_X]$$

如 [1] 中所示。

T联络 ∇ 在 E 上诱导出一个自然的联络。事实上，对于 $\phi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，我们定义 e

$$\nabla(\phi) = [\nabla, \phi],$$

即对于 E 的任意截面 σ，有 $\nabla(\phi)(\sigma) = \nabla(\phi(\sigma)) - \phi(\nabla\sigma)$。通过直接计算，对于任意 $X \in T(M)$，我们有

$$\nabla_X(\frac{1}{2}(u \otimes \phi^* - \phi \otimes u^*)) = \frac{1}{2}(\nabla_X u \otimes \phi^* - \phi \otimes (\nabla_X u)^*) + \frac{1}{2}(u \otimes (\nabla_X \phi)^* - \nabla_X \phi \otimes u^*).$$

类似地，该联络在 $\mathfrak{g}_E$ 上的曲率由以下公式给出

$$R^{\nabla}_{X,Y}(\phi) = [R^{\nabla}_{X,Y}, \phi],$$

其中，右侧的 R^{∇} 表示 E的曲率。我们定义外微分 $d^{\nabla} : \Omega^p(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^{p+1}(\mathfrak{g}_E)$ $p \geq 0$ 如下。对于每个实值微分 p-形式 α 和 E的每个截面 σ，令

$$d^{\nabla}(\alpha \otimes \sigma) = (d\alpha) \wedge \sigma + (-1)^p \alpha \otimes \nabla\sigma$$

并通过线性将定义扩展到一般的 $\psi \in \Omega^p(E)$。注意，在 $\Omega^0(E)$ 上的 $d^{\nabla} = \nabla$ 以及 $(d^{\nabla}(d^{\nabla}\sigma))_{X,Y} = R^{\nabla}_{X,Y}(\sigma)$。

由 $\mathfrak{so}(r)$ 上的迹内积度量诱导的 $\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 的内积定义为

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\phi^T \varphi\right), \text{ where } \varphi, \phi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E).$$

那么对于任意 $\phi, \varphi, \rho \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，有

$$\langle [\phi, \varphi], \rho \rangle = \langle \phi, [\varphi, \rho] \rangle.$$

结合黎曼度量 g，$\Omega^p(\mathfrak{g}_E)$ 的内积可定义为

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \langle \phi(e_{i_1}, \ldots e_{i_p}), \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \rangle \tag{6}$$

其中 $\phi, \varphi \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$，且 $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 是 TM的一组正交基。将内积$\langle , \rangle$ 在 M上积分，可得 $\Omega^p(\mathfrak{g}_E)$ 上的全局内积（ , ），即

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle dV, \text{ for any } \varphi, \psi \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E).$$

定义算子 $\delta^{\nabla} : \Omega^{p+1}(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$ $p \geq 0$，使其成为算子 d^{∇} 的形式伴随。在局部坐标下，对于任意 $\phi \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$,

$$(d^{\nabla}\phi)_{X_0, \cdots, X_p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (\nabla_{X_k}\phi)_{X_0, \cdots, \widehat{X_k}, \cdots, X_p},$$

$$(\delta^{\nabla}\phi)_{X_1, \cdots, X_{p-1}} = -\sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_j}\phi)_{e_j, X_1, \cdots, X_{p-1}},$$

其中，$\{e_i\}$ 是 TM的标准正交基。

我们可以定义拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ^{∇} 为

$$\Delta^{\nabla} = d^{\nabla}\delta^{\nabla} + \delta^{\nabla}d^{\nabla}$$

粗拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 定义为

$$\nabla^*\nabla = -\sum_j (\nabla_{e_j}\nabla_{e_j} - \nabla_{D_{e_j}e_j}).$$

对于 $\psi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 和 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$，我们回顾在 [1] 中定义的以下算子 $\mathfrak{R}^{\nabla}$

$$\mathfrak{R}^{\nabla}(\psi)(X) = \sum_j [R^{\nabla}(e_j, X), \psi(e_j)], \tag{7}$$

$$\mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi)(X, Y) = \sum_j [R^{\nabla}(e_j, X), \varphi(e_j, Y)] - [R^{\nabla}(e_j, Y), \varphi(e_j, X)]. \tag{8}$$

于是我们得到以下 Bochner-Weitzenböck 公式，该公式最早由 [1] 引入。

定理2.1 对任意 $\psi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 和 $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$，有

$$\Delta^{\nabla}\psi = \nabla^*\nabla\psi + \psi \circ \mathrm{Ric} + \mathfrak{R}^{\nabla}(\psi), \tag{9}$$

$$\Delta^{\nabla}\varphi = \nabla^*\nabla\varphi + \varphi \circ (\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{Id} + 2R_M) + \mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi), \tag{10}$$

其中

- $\mathrm{Ric}: TM \to TM$是如下定义的Ricci变换

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_j R(X, e_j)e_j,$$

- $\psi \circ \mathrm{Ric} \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 和 $(\psi \circ \mathrm{Ric})_X = \psi_{\mathrm{Ric}(X)} \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$,
- $\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{Id}$ 是Ricci变换Ric到 $\wedge^2 TM$的延拓，定义如下

$$(\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{Id})_{X,Y} = (\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{Id})(X \wedge Y) = \mathrm{Ric}(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}(Y),$$

- R_M是 TM的曲率,
- 对于任意映射 ω：$\wedge^2 TM \to \wedge^2 TM$，复合映射 $\varphi \circ \omega$：$\wedge^2 TM \to \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$定义如下

$$(\varphi \circ \omega)_{X,Y} = (\varphi \circ \omega)(X \wedge Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{e_j, \omega_{X,Y} e_j}.$$

注记2.1 特别地，在标准球面 S^n 上,

$$\mathrm{Ric}(X) = (n-1)X$$

and

$$(R_M)_{X,Y} Z = -(X \wedge Y)(Z) = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

因此，我们有

$$\psi \circ \mathrm{Ric} = (n-1)\psi$$

and

$$\varphi \circ (\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{Id} + 2R_M) = 2(n-2)\varphi.$$

注意，对于任意 $B \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ 和 $w \in \Omega^0(E)$,

$$R^{\nabla + tB} = R^{\nabla} + t d^{\nabla} B + t^2 B \wedge B \tag{11}$$

and

$$d^{\nabla + tB}(u + tw) = d^{\nabla} u + t(B \cdot u + d^{\nabla} w) + t^2 B \cdot w. \tag{12}$$

假设 (∇, u) 是满足方程 (2) 的杨-米尔斯-希格斯对，而 (∇^t, u^t) 是一条位于

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{\nabla}, \tilde{u}) \mid \widetilde{\nabla} \text{ is a connection of } E,\ \tilde{u} \in \Omega^0(E)\}$$

使得 $\nabla^0 = \nabla$ 和 $u^0 = u_\circ$ 若我们假设 $\frac{d}{dt}(\nabla^t, u^t) \mid_{t=0} = (B, w)$，则 $\mathscr{A}$的二阶变分为

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t, u^t) \mid_{t=0} = \int_M \langle \delta^{\nabla} d^{\nabla} B + \mathfrak{R}^{\nabla}(B) + \frac{1}{2}(Bu \otimes u^* - u \otimes (Bu)^*), B\rangle + 2\langle d^{\nabla} u, Bw\rangle \\ + 2\langle d^{\nabla} w, Bu\rangle + \langle \delta^{\nabla} d^{\nabla} w + \lambda\langle u, w\rangle u - \frac{\lambda}{2}(1 - |u|^2)w, w\rangle dV.\end{aligned} \tag{13}$$

对于任意规范变换 $g \in \mathcal{G}$，g 作用于 (∇, u)，使得 $(\nabla^g, u^g) = (g \circ \nabla \circ g^{-1}, gu)$。于是对于任意 $\sigma \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，令 $g_t = \exp(t\sigma)$ 为一族规范变换，则 (∇, u) 沿 σ 的变分为

$$\frac{d}{dt}(\nabla^{g_t}, u^{g_t}) \mid_{t=0} = (-d^\nabla \sigma, \sigma u) \in T_{(\nabla,u)}\tilde{\mathcal{A}} = \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E).$$

此外，杨-米尔斯-希格斯泛函 $\mathscr{A}$ 在规范群的作用下保持不变。因此，考虑相对于 $\Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 上的全局内积、垂直于规范变换方向的变分 (B, w) 是有意义的。定义

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega^0(\mathfrak{g}_E) &\to \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \\ \sigma &\mapsto (-d^\nabla \sigma, \sigma u), \end{aligned}$$

那么 $(B, w) \in \mathrm{Im}(\zeta)^\perp$ 当且仅当对任意 σ，

$$0 = \int_M \langle -d^\nabla \sigma, B\rangle + \langle \sigma u, w\rangle dV = \int_M \langle -\delta^\nabla B + \frac{1}{2}(w \otimes u^* - u \otimes w^*), \sigma\rangle dV.$$

因此，(∇, u) 处的可容许变分空间为

$$\mathcal{C} = T_{(\nabla,u)}\left(\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}\right) = \mathrm{Im}(\zeta)^\perp = \{(B, w) \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E) \mid \delta^\nabla B = \frac{1}{2}(w \otimes u^* - u \otimes w^*)\}. \tag{14}$$

利用 $\delta^\nabla(Bu) = (\delta^\nabla B)u - B\llcorner d^\nabla u$，其中

$$B\llcorner d^\nabla u = \sum_j B(e_j)\nabla_{e_j} u,$$

并且对于 $(B, w) \in \mathcal{C}$，我们有

$$\int_M 2\langle d^\nabla w, Bu\rangle dV = \int_M 2\langle w, \delta^\nabla(Bu)\rangle dV = \int_M \langle (w \otimes u^* - u \otimes w^*), \delta^\nabla B\rangle - 2\langle w, B\llcorner d^\nabla u\rangle dV.$$

对于任意 $x \in M$，令 $\{e_i \mid 1 \le i \le n\}$ 为 $T_x M$ 的正交基。由于 $B(e_i) \in \mathfrak{so}(E_x)$，我们有

$$-2\langle w, B\llcorner d^\nabla u\rangle = \sum_i -2\langle w, B(e_i)\nabla_{e_i} u\rangle = \sum_i 2\langle B(e_i)w, \nabla_{e_i} u\rangle = 2\langle Bw, d^\nabla u\rangle.$$

因此，对于 $(B, w) \in \mathcal{C}$，$\mathscr{A}$ 的二阶变分为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t, u^t) \mid_{t=0} = \int_M &\langle \Delta^\nabla B + \mathfrak{R}^\nabla(B) + \frac{1}{2}(Bu \otimes u^* - u \otimes (Bu)^*) + d^\nabla u \otimes w^* - w \otimes (d^\nabla u)^*, B\rangle \\ &+ \langle \delta^\nabla d^\nabla w + \frac{1}{2}(w \otimes u^* - u \otimes w^*)u - 2B\llcorner d^\nabla u + \lambda\langle u, w\rangle u - \frac{\lambda}{2}(1 - |u|^2)w, w\rangle dV. \end{aligned} \tag{15}$$

定义算子

$$\mathscr{S}^{(\nabla,u)} : \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E), \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_{(\nabla,u)}(B, w) = &(\Delta^\nabla B + \mathfrak{R}^\nabla(B) + (\frac{1}{2}Bu \otimes u^* - u \otimes (Bu)^*) + d^\nabla u \otimes w^* - w \otimes (d^\nabla u)^*, \\ &\delta^\nabla d^\nabla w + \frac{1}{2}(w \otimes u^* - u \otimes w^*)u - 2B\llcorner d^\nabla u + \lambda\langle u, \ w\rangle u - \frac{\lambda}{2}(1 - |u|^2)w)。 \end{aligned}$$

容易看出，$\mathscr{S}^{(\nabla,u)}$ 是 $\Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E)$ 上的自伴算子。此外，我们可以证明，$\mathscr{S}^{(\nabla,u)}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的自伴算子。

引理 2.2 $\mathscr{S}^{(\nabla,u)}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$。

证明 记 $\mathscr{S}_{(\nabla,u)}=(\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2)$。我们只需证明，对于任意的 $(B,w)\in\mathcal{C}$和 $\sigma\in\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，有

$$\int_M\langle\mathscr{S}_1(d^\nabla\sigma,-\sigma u),B\rangle+\langle\mathscr{S}_2(d^\nabla\sigma,-\sigma u),w\rangle dV=0.$$

首先，我们有

$$\Delta^\nabla d^\nabla\sigma=d^\nabla\delta^\nabla d^\nabla\sigma+\delta^\nabla d^\nabla d^\nabla\sigma=d^\nabla\Delta^\nabla\sigma+\delta^\nabla[R^\nabla,\sigma]=d^\nabla\Delta^\nabla\sigma+[\delta^\nabla R^\nabla,\sigma]-\mathfrak{R}^\nabla(d^\nabla\sigma).$$

方程（2）意味着，对于任意 $\phi\in\Omega^1$（$\mathfrak{g}_E$），都有

$$\langle d^\nabla u,\phi u\rangle=\langle\frac{1}{2}(d^\nabla u\otimes u^*-u\otimes(d^\nabla u)^*),\phi\rangle=-\langle\delta^\nabla R^\nabla,\phi\rangle.$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_M\langle\frac{1}{2}((d^\nabla\sigma\cdot u)\otimes u^*-u\otimes(d^\nabla\sigma\cdot u)^*)+\sigma u\otimes(d^\nabla u)^*-d^\nabla u\otimes(\sigma u)^*,B\rangle dV\\
=&\int_M\langle d^\nabla\sigma\cdot u,Bu\rangle-2\langle d^\nabla u,B\sigma u\rangle dV\\
=&\int_M\langle\sigma u,\delta^\nabla(Bu)\rangle-\langle\sigma\cdot d^\nabla u,Bu\rangle-2\langle d^\nabla u,B\sigma u\rangle dV\\
=&\int_M\langle\sigma u,\delta^\nabla B\cdot u\rangle-\langle\sigma u,B\llcorner d^\nabla u\rangle-\langle\sigma\cdot d^\nabla u,Bu\rangle-2\langle d^\nabla u,B\sigma u\rangle dV\\
=&\int_M\langle\sigma u,\delta^\nabla B\cdot u\rangle+\langle d^\nabla u,[\sigma,B]u\rangle dV\\
=&\int_M\langle\sigma u,\delta^\nabla B\cdot u\rangle-\langle\delta^\nabla R^\nabla,[\sigma,B]\rangle dV.
\end{aligned}$$

Thus

$$\int_M\langle\mathscr{S}_1(d^\nabla\sigma,-\sigma u),B\rangle dV=\int_M\langle\delta^\nabla d^\nabla\sigma,\delta^\nabla B\rangle+\langle\sigma u,\delta^\nabla B\cdot u\rangle dV.$$

另一方面， $\sigma\in\Omega^0$（$\mathfrak{g}_E$）意味着 $\langle u,\ \sigma u\rangle=0$。由方程（2）可得

$$-\delta^\nabla d^\nabla(\sigma u)=-\delta^\nabla d^\nabla\sigma\cdot u+2d^\nabla\sigma\llcorner d^\nabla u-\frac{\lambda}{2}(1-|u|^2)\sigma u.$$

因此由（B,w） $\in\mathcal{C}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_M\langle\mathscr{S}_2(d^\nabla\sigma,-\sigma u),w\rangle dV\\
=&\int_M-\langle\delta^\nabla d^\nabla\sigma\cdot u,w\rangle-\langle\sigma u,\frac{1}{2}(w\otimes u^*-u\otimes w^*)u\rangle dV\\
=&\int_M-\langle\delta^\nabla d^\nabla\sigma,\delta^\nabla B\rangle-\langle\sigma u,Bu\rangle dV
\end{aligned}$$

于是我们有 $\int_M\langle\mathscr{S}_{(\nabla,\ u)}(d^\nabla\sigma,-\sigma u)、(B,w)\rangle dV=0$，证明完毕。 □

于是 $\mathscr{S}^{(\nabla,u)}|_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$是一个自伴椭圆算子。 $\mathscr{S}_{(\nabla,u)}$的特征值如下:

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\to+\infty.$$

与 [1], 类似，我们将杨-米尔斯-希格斯泛函在 (∇,u) 处的弱稳定性定义如下。

定义 2.1 假设 $(\nabla,\ u)$ 满足 (2)，若 $\lambda_1\geq0$，则称其为弱稳定；若 $\lambda_1>0$，则称其为稳定。

3 球面 S^n 上杨–米尔斯–希格斯对的稳定性

在本节中，我们证明定理 1.1。现在，我们假设 $(M,\ g)$ 是标准欧几里得球面 S^n。在 [10], 中， S^n 的共形 Killing 向量场在研究稳定变分流形或流不存在性方面发挥着重要作用。类似的方法已被应用于研究 S^n 上的弱稳定杨-米尔斯联络，该研究在 [1]中进行。 S^n 的共形 Killing 向量场是与拉普拉斯算子的第一个非零特征值相对应的特征函数的梯度。下面总结这些向量场的性质。

命题 3.1 对任意 $v=(v^1,...,v^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$，令 $F_v(x):\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R},\ x\mapsto v\cdot x$ 为 v 与 x 的内积。定义 $f_v=F_v\mid_{S^n}$ 为 F_v 在 S^n 上的限制。则

$$V=\operatorname{grad}(f_v)=\sum_{i=1}^{n+1}(v^j-(v\cdot x)x^j)\frac{\partial}{\partial x^j}=v-(v\cdot x)\,x \tag{17}$$

是 S^n 上的共形 Killing 向量场，并满足

(1). $D_XV=-f_vX$,
(2). $D^*DV=V$.

备注 3.1 事实上，上述所有 V 构成的空间 $\mathscr{V}$ 是 S^n 上所有共形向量场空间中 Killing 向量场的正交补，即

$$\mathfrak{conf}\,(S^n)=\mathfrak{isom}\,(S^n)\oplus\mathscr{V}.$$

与 [1], 中类似，我们选择联络变分为 $B_v=i_VR^\nabla$，其中 i_V 是关于 V 的缩并。相应的希格斯场变分 w_v 满足

$$\frac{1}{2}(w_v\otimes u^*-u\otimes w_v^*)=\delta^\nabla i_VR^\nabla=-\delta^\nabla R^\nabla(V)=\frac{1}{2}(\nabla_Vu\otimes u^*-u\otimes(\nabla_Vu)^*).$$

因此， $w_v=\nabla_Vu$ 满足 $(B_v,\ w_v)\in\mathcal{C}$。如果我们通过令 $(\nabla,\ u)$ 在 $\mathcal{C}$ 上定义一个二次型 $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L}^{(\nabla,u)}(B,w)=\int_M\langle\mathscr{S}^{(\nabla,u)}(B,w),(B,w)\rangle dV, \tag{18}$$

那么对于任意 $(B,\ w)\in\mathcal{C}$， $\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}\ (\nabla^t,\ u^t)\Big|_{t=0}=\mathscr{L}_{(\nabla,\ u)}\ (B,\ w)$。 $Q\ (v_1,\ v_2)=\mathscr{L}_{(\nabla,\ u)}\ (B_{v_1},\ w_{v_2})$ 可以视为一个二次型。

引理 3.2 假设 $(\nabla,\ u)$ 是 S^n上的杨-米尔斯-希格斯对。则对于任意 $v\in\mathbb{R}^{n+1}$，我们有

$$\mathscr{L}^{(\nabla,u)}(i_VR^\nabla,\nabla_Vu)=\int_{S^n}(4-n)|i_VR^\nabla|^2+(2-n)|\nabla_Vu|^2-2f_v(\langle i_VR^\nabla,\delta^\nabla R^\nabla\rangle+\langle\delta^\nabla d^\nabla u,\nabla_Vu\rangle)dV.$$

证明 记 $\mathscr{S}_{(\nabla,\ u)}=(\mathscr{S}_1,\ \mathscr{S}_2)$。对于任意 $x\in S^n$，令 $\{e_i\mid 1\le i\le n\}$ 为的局部标准正交标架 x附近 x_0。根据（9），我们有

$$\Delta^\nabla i_VR^\nabla(e_k)=\nabla^*\nabla i_VR^\nabla(e_k)+(n-1)R^\nabla(V,e_k)+\mathfrak{R}^\nabla(i_VR^\nabla)(e_k).$$

由于 $De_k(x)=0$，在 x

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla i_VR^\nabla(e_k)&=-\sum_j\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}i_VR^\nabla(e_k)\\
&=-\sum_j\nabla_{e_j}(\nabla_{e_j}i_VR^\nabla(e_k))\\
&=-\sum_j\nabla_{e_j}(\nabla_{e_j}(R^\nabla(V,e_k))-R^\nabla(V,D_{e_j}e_k))\\
&=-\sum_j\nabla_{e_j}(\nabla_{e_j}R^\nabla(V,e_k)-f_vR^\nabla(e_j,e_k))\\
&=\nabla^*\nabla R^\nabla(V,e_k)-2f_v\delta^\nabla R^\nabla(e_k)+R^\nabla(V,e_k)\\
&=\Delta^\nabla R^\nabla(V,e_k)+(5-2n)R^\nabla(V,e_k)-\mathfrak{R}^\nabla(R^\nabla)(V,e_k)-2f_v\delta^\nabla R^\nabla(e_k),
\end{aligned}$$

w这里我们用到了命题 3.1 的 (1)。由 $2\mathfrak{R}^{\nabla}(i_V R^{\nabla})(e_k) - \mathfrak{R}^{\nabla}(R^{\nabla})(V, e_k) = 0$，可得

$$\Delta^{\nabla} i_V R^{\nabla}(e_k) + \mathfrak{R}^{\nabla}(i_V R^{\nabla})(e_k) = \Delta^{\nabla} R^{\nabla}(V, e_k) + (4-n)R^{\nabla}(V, e_k) - 2f_v \delta^{\nabla} R^{\nabla}(e_k).$$

类似地，根据曲率的定义和 $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$，我们有

$$\begin{aligned}
\delta^{\nabla} d^{\nabla} \nabla_V u =& -\sum_j \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \nabla_V u \\
=& -\sum_j \nabla_{e_j} (R^{\nabla}(e_j, V)u + \nabla_V \nabla_{e_j} u + \nabla_{[e_j, V]} u) \\
=& \delta^{\nabla} R^{\nabla}(V)u - 2\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla} u)(V) \\
& - \sum_j \nabla_V \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} u - 2\nabla_{[e_j, V]} \nabla_{e_j} u - [R^{\nabla}(e_j, [e_j, V]), u] - \nabla_{[e_j, [e_j, V]]} u.
\end{aligned}$$

在 x 处，我们有

$$R^{\nabla}(e_j, [e_j, V]) = 0,$$

$$\begin{aligned}
-\sum_j \nabla_V \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} u &= \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} u - \sum_j \nabla_V \nabla_{D_{e_j} e_j} u \\
&= \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} u - \sum_j \left(R^{\nabla}(V, D_{e_j} e_j)u + \nabla_{D_{e_j} e_j} \nabla_V u + \nabla_{[V, D_{e_j} e_j]} u \right) \\
&= \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} u - \sum_j \nabla_{[V, D_{e_j} e_j]} u \\
&= \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} u - \sum_j \nabla_{D_V D_{e_j} e_j} u,
\end{aligned}$$

$$-2\sum_j \nabla_{[e_j, V]} \nabla_{e_j} u = -2f_v \delta^{\nabla} d^{\nabla} u,$$

and

$$\begin{aligned}
-\sum_j [e_j, [e_j, V]] &= -\sum_j D_{e_j} [e_j, V] \\
&= V + \sum_j D_{e_j} D_V e_j \\
&= V + \sum_j \left(R(e_j, V)e_j + D_V D_{e_j} e_j \right) \\
&= (2-n)V + \sum_j D_V D_{e_j} e_j,
\end{aligned}$$

其中我们在 S^n 上使用了 $\sum_j R(e_j, X)e_j = (1-n)X$。因此

$$\delta^{\nabla} d^{\nabla} \nabla_V u = \delta^{\nabla} R^{\nabla}(V)u - 2\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla} u)(V) + \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} u + (2-n)\nabla_V u - 2f_v \delta^{\nabla} d^{\nabla} u.$$

由方程（2），在 x 处可得

$$\begin{aligned}
& \sum_k \langle \nabla_V (\delta^{\nabla} R^{\nabla}(e_k)), R^{\nabla}(V, e_k) \rangle \\
=& \sum_k \langle \frac{1}{2} \nabla_V (u \otimes (\nabla_{e_k} u)^* - \nabla_{e_k} u \otimes u^*), R^{\nabla}(V, e_k) \rangle \\
=& \sum_k \langle \nabla_V u, R^{\nabla}(V, e_k) \nabla_{e_k} u \rangle + \langle u, R^{\nabla}(V, e_k) \cdot \nabla_V \nabla_{e_k} u \rangle \\
=& -\langle i_V R^{\nabla}, \frac{1}{2} (d^{\nabla} u \otimes (\nabla_V u)^* - \nabla_V u \otimes (d^{\nabla} u)^*) \rangle - \sum_k \langle R^{\nabla}(V, e_k)u, \nabla_V \nabla_{e_k} u \rangle.
\end{aligned}$$

And

$$\sum_k \langle \nabla_{e_k}(\delta^\nabla R^\nabla(V)), R^\nabla(V,e_k)\rangle = \langle i_V R^\nabla, \frac{1}{2}(d^\nabla u \otimes (\nabla_V u)^* - \nabla_V u \otimes (d^\nabla u)^*)\rangle - \sum_k \langle R^\nabla(V,e_k)u, \nabla_{e_k}\nabla_V u\rangle.$$

注意，在 x处，由方程（2）可得

$$\sum_k \langle \nabla_{[V,e_k]}u, R^\nabla(V,e_k)u\rangle = \sum_k f_v \langle u, R^\nabla(e_k,V)\nabla_{e_k}u\rangle = -f_v\langle i_V R^\nabla, \delta^\nabla R^\nabla\rangle.$$

因此，由 $R^\nabla(V,e_k)u = \nabla_V\nabla_{e_k}u - \nabla_{e_k}\nabla_V u - \nabla_{[V,e_k]}u$，可得

$$\begin{aligned}
&\langle i_V \Delta^\nabla R^\nabla, i_V R^\nabla\rangle \\
=&\sum_k \langle \nabla_V(\delta^\nabla R^\nabla(e_k)) - \delta^\nabla R^\nabla(D_V e_k) - \nabla_{e_k}(\delta^\nabla R^\nabla(V)) + \delta^\nabla R^\nabla(D_{e_k}V), R^\nabla(V,e_k)\rangle \\
=&-\langle i_V R^\nabla, (d^\nabla u \otimes (\nabla_V u)^* - \nabla_V u \otimes (d^\nabla u)^*)\rangle - \langle i_V R^\nabla, \frac{1}{2}((i_V R^\nabla \cdot u)\otimes u^* - u \otimes (i_V R^\nabla \cdot u)^*)\rangle.
\end{aligned}$$

因此

$$\langle \mathscr{S}_1(i_V R^\nabla, \nabla_V u), i_V R^\nabla\rangle = (4-n)|i_V R^\nabla|^2 - 2f_v\langle \delta^\nabla R^\nabla, i_V R^\nabla\rangle.$$

另一方面，由方程（2），并注意到 $-2\Re^\nabla(d^\nabla u)(V) - 2i_V R^\nabla \llcorner d^\nabla u = 0$，可得

$$\mathscr{S}_2(i_V R^\nabla, \nabla_V u) = (2-n)\nabla_V u - 2f_v \delta^\nabla d^\nabla u.$$

至此，证明完成。 □

引理 3.3 设 $\{v_i \mid 1 \le i \le n+1\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个正交向量，相应的 Killing 向量场为 V_i。则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathscr{L}^{(\nabla,u)}(i_{V_i}R^\nabla, \nabla_{V_i}u) = 2(4-n)\int_{S^n}|R^\nabla|^2 dx + (2-n)\int_M |d^\nabla u|^2 dV. \tag{19}$$

证明 设 v_i 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的向量，其第 i 个分量为 1，其余分量均为 0，则在 $x=(x^1,...,x^{n+1})$ 处，有 $f_{v_i}(x) = x^i$ 且

$$\sum_i f_{v_i}(x)V_i = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,j}(x^i)^2 x^j \frac{\partial}{\partial x^j} = 0.$$

然后根据引理 3.2,

$$\sum_i \mathscr{L}^{(\nabla,u)}(i_{V_i}R^\nabla, \nabla_{V_i}u) = \sum_i \int_{S^n} q(v_i,v_i)\, dV$$

其中，对于任意 $x \in S^n$， q 是在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义的二次型

$$q(v,w) = (4-n)\langle i_V R^\nabla, i_W R^\nabla\rangle + (2-n)\langle \nabla_V u, \nabla_W u\rangle \tag{20}$$

以及 V， $W \in TS^n$ 关于 v， $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ 其定义见命题 3.1。

现在，我们计算 $x \in S^n$ 处的 $q(v,w)$。由于 q 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的二次型，迹 $\sum_{i=1} q(v_i,v_i)$ 与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的基的选取无关。设 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 是 T_xS^n 的任意标准正交基。那么 $\{e_0 = x, e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准正交基。特别地，在 $x \in S^n$ 处，我们有

$$\sum_{i=1}^{n+1} q(v_i,v_i) = \sum_{j=0}^{n} q(e_j,e_j).$$

由命题　位置 3.1，在 x 处，Killing 向量场 ε_0，ε_1，$\cdots$，ε_n 相对于 e_0，e_1，e_2，$\cdots$，e_n 为

$$\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = e_1, \cdots, \varepsilon_n = e_n.$$

由于 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 构成 T_xS^n 的标准正交基，因此我们有

$$\sum_{j=1}^{n} \left|i_{e_j} R^{\nabla}\right| = 2\left|R^{\nabla}\right|^2.$$

因此，在 x 处，

$$\sum_{i=1}^{n+1} q(v_i, v_i) = \sum_{j=1}^{n} q(e_j, e_j) = (4-n)\sum_{j=1}^{n}\left|i_{e_j} R^{\nabla}\right|^2 + (2-n)\sum_{j=1}^{n}\left|\nabla_{e_j} u\right|^2 = 2(4-n)\left|R^{\nabla}\right|^2 + (2-n)\left|d^{\nabla} u\right|^2$$

由此完成了该引理的证明。 □

由上面的引理，我们可以立即证明定理 1.1关于 $S^n(n \geq 5)$。

定理 3.4 假设 (∇, u) 是 S^n 上关于 $n \geq 5$ 的杨-米尔斯-希格斯对，则 (∇, u) 弱稳定，当且仅当 $R^{\nabla} = 0$、$d^{\nabla} u = 0$ 和 $|u| = 1$。

证明 如果 (∇, u) 满足 $R^{\nabla} = 0$、$d^{\nabla} u = 0$ 和 $|u| = 1$，那么 $\mathscr{A}(\nabla, u) = 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的最小值，并且 (∇, u) 显然是弱稳定的。

另一方面，假设 (∇, u) 是弱稳定的，那么对于任意 $v \in \mathbb{R}^{n+1}$，$\mathscr{L}_{(\nabla,u)}(i_V R^{\nabla}, \nabla_V u) \geq 0$。根据引理 3.3，我们有 $R^{\nabla} = 0$ 和 $d^{\nabla} u = 0$。由方程（2），我们有 $u = 0$ 或 $|u| = 1$。然而，由于 $\mathscr{A}$ 的表达式，$(\nabla, 0)$ 不可能是弱稳定的。事实上，我们选取一个非零截面 $w \in \Omega^0(E)$，使得 $d^{\nabla} w = 0$，并沿着 $(0, w) \in \mathcal{C}$ 对 (∇, u) 进行扰动。于是

$$\mathscr{L}^{(\nabla,0)}(0, w) = -\frac{\lambda}{2}\int_{S^n} |w|^2 dV < 0$$

这与弱稳定条件矛盾。因此 $|u| = 1$。 □

当 $n = 4$ 时，情况与上述证明类似。首先，我们可以得到 $d^{\nabla} u = 0$。然后，根据方程（2），可得杨–米尔斯条件。

4 $\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 的希格斯场

本节中，我们考虑杨-米尔斯-希格斯泛函

$$\mathscr{A}(\nabla, \Phi) = \frac{1}{2}\int_M |R^{\nabla}|^2 + |d^{\nabla}\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 dV, \tag{21}$$

其中 $\Phi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$。设 (∇, Φ) 是满足方程（4）的杨-米尔斯-希格斯对，并且 (∇^t, Φ^t) 是其上的一条曲线

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{\nabla}, \tilde{\Phi}) \mid \tilde{\nabla} \text{ is a connection of } E,\ \tilde{\Phi} \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)\}$$

使得 $\nabla^0 = \nabla$ 和 $\Phi^0 = \Phi$。若假设 $\frac{d}{dt}(\nabla^t, \Phi^t)\ |_{t=0} = (B, \phi)$，则 $\mathscr{A}$ 的二阶变分为

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t, \Phi^t)\Big|_{t=0} = \int_M &\langle \delta^{\nabla} d^{\nabla} B + \mathfrak{R}^{\nabla}(B) - [[B, \Phi], \Phi], B\rangle + 2\langle d^{\nabla}\Phi, [B, \phi]\rangle \\ &+ 2\langle [B, \Phi], d^{\nabla}\phi\rangle + \langle \delta^{\nabla} d^{\nabla}\phi + \lambda\langle \Phi, \phi\rangle\Phi - \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)\phi, \phi\rangle dV.\end{aligned} \tag{22}$$

对于任意规范变换 $g \in \mathcal{G}$，g 作用于 (∇, Φ)，使得

$$g \cdot (\nabla, \Phi) = (\nabla^g, \Phi^g) = (g \circ \nabla \circ g^{-1}, g \circ \Phi \circ g^{-1}).$$

那么对于任意 $\sigma \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，设 $g_t = exp(t\sigma)$ 是一族规范变换。(∇, u) 沿 σ 的变分方向为

$$\frac{d}{dt}(\nabla^{g_t}, \Phi^{g_t}) \mid_{t=0} = (-d^{\nabla}\sigma, [\sigma, \Phi]).$$

与希格斯场取值于 $\Omega^0(E)$ 的情形类似，定义

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega^0(\mathfrak{g}_E) &\to \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E), \\ \sigma &\mapsto (-d^{\nabla}\sigma, [\sigma, \Phi]), \end{aligned}$$

以及 $\mathcal{C} = Im(\zeta)^{\perp}$。通过直接计算，我们得到

$$\mathcal{C} = \{(B, \phi) \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \mid \delta^{\nabla} B = [\Phi, \phi]\}. \tag{23}$$

在 $\mathcal{C}$ 上，我们有

$$\begin{aligned} 2\int_M \langle [B, \Phi], d^{\nabla}\phi \rangle dV &= 2\int_M \langle [\Phi, d^{\nabla}\phi], B \rangle dV = 2\int_M \langle d^{\nabla}[\Phi, \phi] - \left[d^{\nabla}\Phi, \phi\right], B \rangle dV \\ &= 2\int_M \langle \delta^{\nabla} B, [\Phi, \phi] \rangle - \langle B, [d^{\nabla}\Phi, \phi] \rangle dV \\ &= \int_M \langle [[\Phi, \phi], \Phi], \phi \rangle + \langle d^{\nabla}\delta^{\nabla} B, B \rangle - 2\langle B, [d^{\nabla}\Phi, \phi] \rangle dV. \end{aligned}$$

那么，如果 $(B, \phi) \in \mathcal{C}$，$\mathscr{A}$ 的二阶变分公式可写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t, \Phi^t)\Big|_{t=0} = \int_M &\langle \Delta^{\nabla} B + \mathfrak{R}^{\nabla}(B) - [[B, \Phi], \Phi] - 2[d^{\nabla}\Phi, \phi], B \rangle \\ &+ \langle \delta^{\nabla} d^{\nabla}\phi + [[\Phi, \phi], \Phi] + 2d^{\nabla}\Phi \llcorner B + \lambda\langle \Phi, \phi \rangle \Phi - \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)\phi, \phi \rangle dV, \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $d^{\nabla}\Phi \llcorner B = \sum_{i=1}^{n} [\nabla_{e_i}\Phi, B(e_i)]$。因此，我们可以定义一个算子

$$\mathscr{S}^{(\nabla, \Phi)} : \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathscr{S}^{(\nabla, \Phi)}(B, \phi) = (&\Delta^{\nabla} B + \mathfrak{R}^{\nabla}(B) - [[B, \Phi], \Phi] - 2[d^{\nabla}\Phi, \phi], \\ &\delta^{\nabla} d^{\nabla}\phi + [[\Phi, \phi], \Phi] + 2d^{\nabla}\Phi \llcorner B + \lambda\langle \Phi, \phi \rangle \Phi - \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)\phi). \end{aligned} \tag{25}$$

引理 4.1 $\mathscr{S}^{(\nabla, \Phi)}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$。

证明 记 $\mathscr{S}^{(\nabla,\ \Phi)} = (\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2)$。注意到 $\mathscr{S}^{(\nabla,\ \Phi)}$ 在 $\Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 上是自伴的，我们只需证明，对于任意 $(B, \phi) \in \mathcal{C} = \mathrm{Im}^{\perp}(\zeta)$ 和 $\sigma \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$，有

$$\int_M \langle B, \mathscr{S}_1(\zeta(\sigma)) \rangle + \langle \phi, \mathscr{S}_2(\zeta(\sigma)) \rangle dV = 0.$$

由于 $\zeta(\sigma) = \left(-d^{\nabla}\sigma, [\sigma, \Phi]\right)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_1(\zeta(\sigma)) &= -\triangle^{\nabla}\left(d^{\nabla}\sigma\right) - \mathfrak{R}^{\nabla}\left(d^{\nabla}\sigma\right) + \left[\left[d^{\nabla}\sigma, \Phi\right], \Phi\right] - 2\left[d^{\nabla}\Phi, [\sigma, \Phi]\right], \\ \mathscr{S}_2(\zeta(\sigma)) &= \delta^{\nabla} d^{\nabla}[\sigma, \Phi] + [[\Phi, [\sigma, \Phi]], \Phi] - 2\sum_{i=1}^{n} [\nabla_{e_i}\Phi, \nabla_{e_i}\sigma] + \lambda\langle \Phi, [\sigma, \Phi] \rangle \Phi - \frac{\lambda}{2}\left(1 - |\Phi|^2\right)[\sigma, \Phi] \\ &= \delta^{\nabla} d^{\nabla}[\sigma, \Phi] + [[\Phi, [\sigma, \Phi]], \Phi] - 2d^{\nabla}\Phi \llcorner d^{\nabla}\sigma - \frac{\lambda}{2}\left(1 - |\Phi|^2\right)[\sigma, \Phi] \end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们使用了 $\langle\Phi,[\sigma,\Phi]\rangle=0$ 这一事实。注意

$$\delta^{\nabla}d^{\nabla}d^{\nabla}\sigma=\delta^{\nabla}[R^{\nabla},\sigma]=[\delta^{\nabla}R^{\nabla},\sigma]-\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla}\sigma),$$

我们有

$$\Delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla}\sigma)=d^{\nabla}\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[\delta^{\nabla}R^{\nabla},\sigma].$$

对于 $\mathscr{S}_1(\zeta(\sigma))$ 中的第三项，我们有

$$\begin{aligned}[[d^{\nabla}\sigma,\Phi],\Phi]&=[d^{\nabla}[\sigma,\Phi],\Phi]-[[\sigma,d^{\nabla}\Phi],\Phi]\\&=d^{\nabla}[[\sigma,\Phi],\Phi]-[[\sigma,\Phi],d^{\nabla}\Phi]-[[\sigma,d^{\nabla}\Phi],\Phi]\\&=d^{\nabla}[[\sigma,\Phi],\Phi]+2[d^{\nabla}\Phi,[\sigma,\Phi]]+[[d^{\nabla}\Phi,\Phi],\sigma]\\&=d^{\nabla}[[\sigma,\Phi],\Phi]+2[d^{\nabla}\Phi,[\sigma,\Phi]]+[\delta^{\nabla}R^{\nabla},\sigma],\end{aligned}$$

其中，在第三个等式中我们使用了 Jacobi 恒等式来 $\left[[\sigma,d^{\nabla}\Phi],\Phi\right]$，并在最后一个等式中应用了公式（4）。结合上述等式，我们有

$$\mathscr{S}_1(\zeta(\sigma))=d^{\nabla}(-\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\sigma,\Phi],\Phi]).$$

下面我们处理 $\mathscr{S}_2(\zeta(\sigma))$。通过直接计算，我们有

$$\delta^{\nabla}d^{\nabla}[\sigma,\Phi]=[\sigma,\delta^{\nabla}d^{\nabla}\Phi]+2d^{\nabla}\Phi\llcorner d^{\nabla}\sigma+[\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma,\Phi].$$

将其代入 $\mathscr{S}_2$（ζ（σ））并应用公式（4）中的第二个等式，我们得到

$$\mathscr{S}_2(\zeta(\sigma))=[\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\Phi,\sigma],\Phi],\Phi].$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_M\langle B,\mathscr{S}_1(\zeta(\sigma))\rangle+\langle\phi,\mathscr{S}_2(\zeta(\sigma))\rangle dV\\=&\int_M\langle B,d^{\nabla}(-\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\sigma,\Phi],\Phi])\rangle+\langle\phi,[\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\Phi,\sigma],\Phi],\Phi]\rangle dV\\=&\int_M\langle[\Phi,\phi],-\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\sigma,\Phi],\Phi]\rangle+\langle\phi,[\delta^{\nabla}d^{\nabla}\sigma+[[\Phi,\sigma],\Phi],\Phi]\rangle dV=0,\end{aligned}$$

其中我们在第二个等式中使用了条件 $(B,\Phi)\in\mathcal{C}$，即 $\delta^{\nabla}B=[\Phi,\phi]$。 □

因此，$\mathscr{S}^{(\nabla,\Phi)}|_{\mathcal{C}}$：$\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一个椭圆自伴算子。若假设$\mathscr{S}_{(\nabla,u)|_{\mathcal{C}}}$的最小特征值为 λ_1，那么当满足 $\lambda_1\geq 0$时，(∇,u)称为弱稳定；当满足 $\lambda_1>0$时，称为稳定。对于任意的 $(B,\phi)\in\mathcal{C}$，定义

$$\mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(B,\phi)=\int_M\langle\mathscr{S}^{(\nabla,\Phi)}(B,\phi),(B,\phi)\rangle dV,\tag{26}$$

那么 $\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}(\nabla^t,u^t)\ |_{t=0}=\mathscr{L}_{(\nabla,u)}(B,\phi)$。

现在假设 $M=S^n$ 且 (∇,Φ) 是满足 (4) 的杨-米尔斯-希格斯对。对于任意 $v\in\mathbb{R}^{n+1}$，令$f_v(x)=v\cdot x\in C^{\infty}(S^n)$ 和 $V=grad(f_v)$ 为 S^n上的 Killing 向量场 (17)。类似于希格斯场属于 $\Omega^0(E)$ 的情形，假设 $B_v=i_VR^{\nabla}$ 且 $\phi_v=\nabla_V\Phi$。那么 $(B_v,\phi_v)\in\mathcal{C}$。类似地，我们有

引理 4.2 假设 (∇,Φ) 是 S^n 上的杨-米尔斯-希格斯对。那么对于任意 $v\in\mathbb{R}^{n+1}$，我们有

$$\mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(i_VR^{\nabla},\nabla_V\Phi)=\int_{S^n}(4-n)|i_VR^{\nabla}|^2+(2-n)|\nabla_V\Phi|^2-2f_v(\langle\delta^{\nabla}R^{\nabla},i_VR^{\nabla}\rangle+\langle\delta^{\nabla}d^{\nabla}\Phi,\nabla_V\Phi\rangle)dV.\tag{27}$$

证明 与引理 3.2的证明类似，我们有

$$\Delta^{\nabla} i_V R^{\nabla} + \mathfrak{R}^{\nabla}(i_V R^{\nabla}) = i_V \Delta^{\nabla} R^{\nabla} + (4-n) i_V R^{\nabla} - 2 f_v \delta^{\nabla} R^{\nabla}$$

and

$$\delta^{\nabla} d^{\nabla} \nabla_V \Phi = [\delta^{\nabla} R^{\nabla}(V), \Phi] - 2\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla}\Phi)(V) + \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} \Phi + (2-n)\nabla_V \Phi - 2 f_v \delta^{\nabla} d^{\nabla} \Phi.$$

其中 $\mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla}\Phi)(V) = \sum_j [R^{\nabla}(e_j, V)\ \nabla_{e_j}\Phi]$ 并且 $\{e_1, ..., e_n\}$ 是 TS^n的正交基。此外，由方程（4），

$$[\delta^{\nabla} R^{\nabla}(V), \Phi] = [[\nabla_V \Phi, \Phi], \Phi] \text{ and } \nabla_V \delta^{\nabla} d^{\nabla} \Phi = -\lambda \langle \nabla_V \Phi, \Phi \rangle \Phi + \frac{\lambda}{2}(1 - |\Phi|^2)\nabla_V \Phi.$$

还注意到 $d^{\nabla}\Phi \llcorner i_V R^{\nabla} = \mathfrak{R}^{\nabla}(d^{\nabla}\Phi)(V)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(i_V R^{\nabla}, \nabla_V \Phi) = \int_{S^n} \big(&\langle i_V \Delta^{\nabla} R^{\nabla} + (4-n) i_V R^{\nabla} - 2 f_v \delta^{\nabla} R^{\nabla} - [[i_V R^{\nabla}, \Phi], \Phi] - 2[d^{\nabla}\Phi, \nabla_V \Phi], i_V R^{\nabla} \rangle \\ &+ \langle (2-n)\nabla_V \Phi - 2 f_v \delta^{\nabla} d^{\nabla} \Phi, \nabla_V \Phi \rangle \big)\, dV.\end{aligned}$$

由方程（4），在 $x \in S^n$

$$\begin{aligned} i_V \Delta^{\nabla} R^{\nabla}(e_k) =& d^{\nabla}[d^{\nabla}\Phi, \Phi](V, e_k) \\ =& \nabla_V [\nabla_{e_k}\Phi, \Phi] - \nabla_{e_k}[\nabla_V \Phi, \Phi] - \left[\nabla_{[V,e_k]}\Phi, \Phi\right] \\ =& [\nabla_V \nabla_{e_k}\Phi, \Phi] + [\nabla_{e_k}\Phi, \nabla_V \Phi] - [\nabla_{e_k}\nabla_V \Phi, \Phi] - [\nabla_V \Phi, \nabla_{e_k}\Phi] - \left[\nabla_{[V,e_k]}\Phi, \Phi\right] \\ =& [[R^{\nabla}(V, e_k), \Phi], \Phi] + 2[\nabla_{e_k}\Phi, \nabla_V \Phi] \\ =& \left[\left[i_V R^{\nabla}, \Phi\right], \Phi\right](e_k) + 2\left[d^{\nabla}\Phi, \nabla_V \Phi\right](e_k). \end{aligned}$$

因此， $\mathscr{A}$在 (∇, Φ) 处沿着 $\left(i_V R^{\nabla}, \nabla_V \Phi\right)$ 的二阶变分为

$$\mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(i_V R^{\nabla}, \nabla_V \Phi) = \int_{S^n} (4-n)|i_V R^{\nabla}|^2 + (2-n)|\nabla_V \Phi|^2 - 2 f_v(\langle \delta^{\nabla} R^{\nabla}, i_V R^{\nabla} \rangle + \langle \delta^{\nabla} d^{\nabla}\Phi, \nabla_V \Phi \rangle) dV.$$

证明到此结束。 □

对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正交基 $\{v_i \mid 1 \le i \le n+1\}$，我们假设 $\{V_i\}$ 是相应的 Killing 向量场。我们已经证明了 $\sum_i f_{v_i} V_i = 0$。因此，将 $\mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(i_{V_i} R^{\nabla}, \nabla_{V_i}\Phi)$ 加在一起，可以证明以下引理。

引理 4.3 假设 $\{v_i\}$ 和 $\{V_i\}$ 如上定义，则有

$$\sum_i \mathscr{L}^{(\nabla,\Phi)}(i_{V_i} R^{\nabla}, \nabla_{V_i}\Phi) = \int_{S^n} 2(4-n)|R^{\nabla}|^2 + (2-n)|d^{\nabla}\Phi|^2 dV.$$

由上述引理，我们可以立即证明稳定性定理。

定理 4.4 假设 (∇, Φ) 是 S^n 上关于 $n \ge 5$的弱稳定的杨–米尔斯–希格斯对，则 $R^{\nabla} = 0$、$d^{\nabla}\Phi = 0$ 和 $|\Phi| \equiv 1$。
并且如果 $n = 4$，那么 $d^{\nabla}\Phi = 0$、$|\Phi| \equiv 1$ 和 R^{∇} 是一个杨-米尔斯联络。

5 杨–米尔斯–希格斯对序列的能量恒等式

在本节中，我们假设 M 是一个四维紧黎曼流形。令 $\{\nabla_i, u_i\}$ 为满足杨-米尔斯-希格斯方程（2）且能量一致有界的杨–米尔斯–希格斯对序列 $\mathscr{A}\left(\nabla_i,\ u_i\right) \le K$。

5.1 希格斯场不存在能量集中点。

假设（∇， u）满足方程（2）。在本部分中，我们将给出 $\|u\|_{L^\infty}$ 和$\|d^\nabla u\|_{L^2}$的估计。事实上，我们将证明，如果杨-米尔斯-希格斯 $\{$（∇_i， u_i）$\}$ 弱收敛到（∇， u）in$_{W^{1,\,2}}$（$\mathfrak{g}_E$） $\times W^{1,\,2}$（E），那么 u_i将 u光滑收敛。

引理 5.1 假设（∇， u）是一个杨-米尔斯-希格斯对，则 $\|u\|_{L^\infty} \leq 1$。

证明 假设 $|u|^2$ 在 $x_0 \in M$处取得最大值。那么在 x_0处，我们有

$$0 \leq \Delta|u|^2(x_0) = (2\langle \delta^\nabla d^\nabla u, u\rangle - 2|d^\nabla u|^2)(x_0) \leq \lambda(1-|u|^2)|u|^2(x_0).$$

因此 $|u|^2(x_0) \leq 1$，这就证明了该引理。 □

引理 5.2 假设（∇， u）是一个杨-米尔斯-希格斯对，且 $\mathscr{A}(\nabla,\ u) \leq K$。那么对于任意 $B_r = B_r(x_0) \subset M$，我们有

$$\|d^\nabla u\|^2_{L^2(B_r)} \leq C(r + r^4), \tag{28}$$

其中 $C = C(K,\ \lambda)$。

证明 取一个截断函数 η 使得 $\eta\,|_{B_r} \equiv 1$, $supp(\eta) \subset B_{2r}$ 并且 $|d\eta| \leq Cr^{-1}$。那么由方程（2），可得

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |d^\nabla u|^2 dV &\leq \int_{B_{2r}} \langle d^\nabla u, \eta \cdot d^\nabla u\rangle dV \\
&= \int_{B_{2r}} \langle u, \delta^\nabla(\eta \cdot d^\nabla u)\rangle dV \\
&= \int_{B_{2r}} \langle u, \eta \cdot \frac{\lambda}{2}(1-|u|^2)u + d\eta \# d^\nabla u\rangle dV \\
&\leq Cr^4 + C\|d\eta\|_{L^2(B_{2r})}\|d^\nabla u\|_{L^2(B_{2r})} \\
&\leq C(r + r^4).
\end{aligned}$$

□

由上述引理可立即得到以下定理。

定理 5.3 假设 (∇, u) 是一个杨-米尔斯-希格斯对，且 $\mathscr{A}(\nabla, u) \leq K$，那么对任意 $x \in M$，有

$$\int_{B_r(x)} |d^\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|u|^2)^2 dV \leq C(K,\lambda)(r + r^4).$$

特别地，有

$$\lim_{r\to 0} \int_{B_r(x)} |d^\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|u|^2)^2 dV = 0.$$

5.2 ϵ-正则性

ϵ-正则性定理由 Uhlenbeck [17] 针对杨-米尔斯联络、Struwe [15] 针对杨–米尔斯流以及 Hong-Fang [4] 针对杨-米尔斯-希格斯流证明。为完整起见，我们先在此给出杨–米尔斯–希格斯对的 ϵ-正则性证明。设 $i(M)$ 为 M 的单射半径。那么对于任意$r < i(M)$ 和 $x \in M$，存在一个平凡化 $\nabla = d + A$，定义在 $B_r(x)$ 中。

引理 5.4（ϵ-正则性）假设（∇, u）是一个杨-米尔斯-希格斯对。存在 $\epsilon_0 = \epsilon_0(M)$，使得若对某个 $R < i(M)$ 和 $x_0 \in M$，

$$\int_{B_R(x_0)} |R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2 dV \leq \epsilon_0,$$

则对任意 $r_1 < R$，都有

$$\sup_{B_{\frac{r_1}{2}}(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) \le C r_1^{-4} \int_{B_{r_1}(x_0)} |R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2 dV,$$

其中 $C = C(M)$。

证明 存在 $r_0 < r_1$，使得

$$(r_1 - r_0)^4 \sup_{D_{r_0}(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) = \sup_{0 \le r \le r_1} ((r_1 - r)^4 \sup_{D_r(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2))$$

其中 $D_r(x) = \partial B_r(x)$。于是存在 $x_1 \in D_{r_0}(x_0)$，使得

$$(|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2)(x_1) = \sup_{D_{r_0}(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2).$$

定义 $e_0 = |R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2$ x_1 $e_0 \le 16\, r_1 - r_0\ ^{-4}$ $e_0 > ()()$。我们断言 ()。
16
事实上，若假设 $(r_1 - r_0)$，则 $\rho_0 = \overline{e_0^{-\frac{1}{4}}} < {}^{r_1 - r_0}_{2}$。定义

$$\rho : B_1(0) \to B_{\rho_0}(x_1)$$

使得 $\rho(x) = x_1 + \rho_0 x$，并且

$$\tilde{A}(x) = \rho^* A(x) = \rho_0 A(x_1 + \rho_0 x),$$
$$\tilde{u}(x) = \rho^* u(x) = u(x_1 + \rho_0 x).$$

令 $\tilde{\nabla} = d + \tilde{A}$ 为 $B_1(0)$ 上的 $\rho^* E$ 的一个联络，且 $e_{\rho_0} = |R^{\tilde{\nabla}}|^2 + \rho_0^2 |d^{\tilde{\nabla}} \tilde{u}|^2 = \rho_0^4 (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2)$。注意到 $B_{\rho_0}(x_1) \subset B_{\frac{r_0 + r_1}{2}}(x_0)$，我们有

$$\begin{aligned}
1 = e_{\rho_0}(0) &\le \sup_{B_1(0)} e_{\rho_0} \\
&= \rho_0^4 \sup_{B_{\rho_0}(x_1)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) \\
&\le \rho_0^4 \sup_{B_{\frac{r_0 + r_1}{2}}(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) \\
&= \rho_0^4 (\frac{r_1 - r_0}{2})^{-4} (r_1 - \frac{r_0 + r_1}{2})^4 \sup_{B_{\frac{r_0 + r_1}{2}}(x_0)} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) \\
&\le \rho_0^4 (\frac{r_1 - r_0}{2})^{-4} (r_1 - r_0)^4 e_0 \\
&= 16,
\end{aligned}$$

whic $\tilde{}$ $\tilde{}$h 意味着 $|R^\nabla|^2 + \rho_0^2 |d^\nabla \tilde{u}|^2 \le 16$ 在 $B_1(0)$。根据方程（2）和博赫纳公式，我们有 ve

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla R^\nabla &= d^\nabla \delta^\nabla R^\nabla - R^\nabla \circ (Ric \wedge I + 2R_M) + R^\nabla \# R^\nabla \\
&= d^\nabla (d^\nabla u \# u) - R^\nabla \circ (Ric \wedge I + 2R_M) + R^\nabla \# R^\nabla \\
&= R^\nabla \# R^\nabla \# u + d^\nabla u \# d^\nabla u - R^\nabla (Ric \wedge I + 2R_M) + R^\nabla \# R^\nabla,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla d^\nabla u &= d^\nabla \delta^\nabla d^\nabla u + \delta^\nabla d^\nabla d^\nabla u - d^\nabla u \circ Ric + R^\nabla \# d^\nabla u \\
&= d^\nabla (\frac{\lambda}{2}(1 - |u|^2) u) + \delta^\nabla (R^\nabla \cdot u) - d^\nabla u \circ Ric + R^\nabla \# d^\nabla u \\
&= d^\nabla u \# u \# u + R^\nabla \# d^\nabla u - d^\nabla u \circ Ric.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta e_{\rho_0} &= \rho_0^6\Delta(|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2)\\ &= 2\rho_0^6(\langle\nabla^*\nabla R^\nabla, R^\nabla\rangle - |\nabla R^\nabla|^2 + \langle\nabla^*\nabla d^\nabla u, d^\nabla u\rangle - |\nabla d^\nabla u|^2)\\ &\le C\rho_0^6(|R^\nabla|^3+|R^\nabla||d^\nabla u|^2+|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2)\\ &\le C(|R^{\tilde\nabla}|^3+\rho_0^2|R^{\tilde\nabla}||d^{\tilde\nabla}\tilde u|^2+\rho_0^2|R^{\tilde\nabla}|^2+\rho_0^4|d^{\tilde\nabla}\tilde u|^2)\\ &\le Ce_{\rho_0}.\end{aligned}$$

由 Harnack 不等式，并注意到 $B_{\rho_0}(x_1)\subset B_R(x_0)$，可得

$$\begin{aligned}1=e_{\rho_0}(0) &\le C\int_{B_1(0)} e_{\rho_0}dV\\ &= C\int_{B_{\rho_0}(x_1)}|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2dV\\ &\le C\epsilon_0.\end{aligned}$$

若 ϵ_0 足够小，便会产生矛盾，从而证明了这一断言。于是有

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\frac{3r_1}{4}}(x_0)}(|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2) &= (\frac{r_1}{4})^{-4}(r_1-\frac{3r_1}{4})^4\sup_{B_{\frac{3r_1}{4}}(x_0)}(|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2)\\ &\le (\frac{r_1}{4})^{-4}(r_1-r_0)^4e_0\\ &\le Cr_1^{-4},\end{aligned}$$

更精确地说，其中 $C=2^{12}$。对于任意 $x_2\in B_{\frac{r_1}{2}}(x_0)$，定义

$$\begin{aligned}\hat A(x) &= \frac{r_1}{4}A(x_2+\frac{r_1}{4}x),\\ \hat u(x) &= u(x_2+\frac{r_1}{4}x).\end{aligned}$$

类似地，$\hat e=|R^{\hat\nabla}|^2+(\frac{r_1}{4})^2|d^{\hat\nabla}\hat u|^2=(\frac{r_1}{4})^4(|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2)$ 满足 $\hat e\le C$，因此 $\Delta\hat e\le C\hat e$ 在 $B_1(0)$ 中成立。由 Harnack 不等式可得

$$\hat e(0)\le C\int_{B_1(0)}\hat e(x)dV = C'\int_{B_{\frac{r_1}{4}}(x_2)}|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2dV\le C\int_{B_{r_1}(x_0)}|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2dV.$$

接下来证明该引理。 □

为了获得高阶导数的 ϵ-正则性，我们需要以下引理。

引理 5.5（[17], 定理 1.3）设 $\nabla=d+A$ 是 B_1 上的一个联络。存在 κ 和 c，使得若 $\|R^\nabla\|_{L^2(B_1)}\le\kappa$，则存在一个规范 g，使得对任意 $p\ge 2$，存在 $d^*A^g=0$ 和 $\|A^g\|_{W^{1,p}(B_1)}\le c\|R^\nabla\|_{L^p(B_1)}$，其中 κ，且 c 仅由 $dim(M)$ 决定。

注 5.1 令 $p\to\infty$，我们有 $\|A^g\|_{L^\infty(B_1)}\le c\|R^\nabla\|_{L^\infty(B_1)}$。这与 [18] 中的定理 2.7 一致。

引理 5.6（ϵ-高阶导数正则性）设 (∇, u) 是一个杨-米尔斯-希格斯对。存在 $\epsilon_1=\epsilon_1(M)$，使得若对某个 $R<i(M)$ 和 $x_0\in M$，

$$\int_{B_R(x_0)}|R^\nabla|^2+|d^\nabla u|^2dV\le\epsilon_1,$$

那么存在一个规范变换 g，使得对于任意 $r_2<R$ 和 $k\ge 1$，都有

$$\sup_{B_{\frac{r_2}{2}}(x_0)}(|d^kA^g|^2+|d^ku^g|^2)\le C(k,r_2).$$

证明 取 $\epsilon_1 =$ 最小值$\{\epsilon_0, \kappa^2\}$ 和 $R_1 < R_0$。根据引理 5.5，存在一个规范变换 g，使得 $d^*A^g = 0$。为简便起见，我们省略上标 g。那么方程（2）为

$$\begin{aligned} \Delta A + \Phi(A,u) &= 0, \\ \Delta u + \Psi(A,u) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

其中， Δ 是 M 上的协变拉普拉斯算子，且

$$\begin{aligned} \Phi(A,u) &= dA\#A + A\#A\#A + du\#u + A\#u\#u, \\ \Psi(A,u) &= dA\#u + A\#du + A\#A\#u - \frac{\lambda}{2}(1-|u|^2)u. \end{aligned}$$

由引理5.5，可得 $\|A\|_{L^\infty} \le C(R_1)\|R^\nabla\|_{L^\infty}$ 属于$B_{\frac{R_1}{2}}(x_0)$。由引理5.4，可得

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}R_1}} (|R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2) \le C_1.$$

由 L^p估计，对于任意 $R_2 < R_1$和 $p > 1$，有$\|A\|_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}R_2})} + \|u\|_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}R_2})} \le C(R_1, R_2, p)$。由索博列夫嵌入定理，$\|A\|_{C^1(B_{\frac{1}{2}R_2})} + \|u\|_{C^1(B_{\frac{1}{2}R_2})} \le C(R_1, R_2)$。对方程（29）求导并重复上述过程，可证明对于任意 $k \ge 1$和 $R_k < R_{k-1}$，有$\|A\|_{C^k(B_{\frac{1}{2}R_2})} + \|u\|_{C^k(B_{\frac{1}{2}R_2})} \le C(R_1, R_2, ..., R_k, k)$。对于任意 $r_2 < R$，通过选取 $R > R_1 > R_2 > ... > r_2$，引理得证。□

5.3 定理 1.2 的证明

设 $\{(\nabla_i, u_i)\}$ 是一个能量 $\mathscr{A}(\nabla_i, u_i) \le K$ 一致有界的杨–米尔斯–希格斯对序列。定义

$$\Sigma = \{x \in M \mid \lim_{R\to 0} \liminf_{i\to\infty} \int_{B_R(x)} |R^{\nabla_i}|^2 dV > \epsilon_1\}. \tag{30}$$

$\mathscr{A}(\nabla_k, u_k) \le K$ 这意味着 Σ 是有限的，并且 Σ 中的元素个数不超过 $\frac{K}{\epsilon_1}$。(∇_i, u_i) 的一致 $W^{1,2}$ 有界性意味着，$\{(\nabla_i, u_i)\}$ 存在一个子列，其弱收敛到 $\Omega^1(\mathfrak{g}_E) \times \Omega^0(E)$ 中的一个杨–米尔斯–希格斯对 $(\nabla_\infty, u_\infty)$。根据引理 5.6，该收敛在 $M\backslash\Sigma$ 中是光滑的。对于任意 $x_0 \in \Sigma$，选取 $R_0 < i(M)$ 使得 $B_{R_0}(x_0) \cap \Sigma = \{x_0\}$。假设 $\nabla_i = d + A_i$ 在 $B_{R_0}(x_0)$ 上。定义

$$\frac{1}{(r_i^1)^4} = \sup_{B_{R_0}(x_0)} (|R^{\nabla_i}|^2 + |d^{\nabla_i} u_i|^2),$$

于是 $\lim_{i\to\infty} r_i^1 = 0$。假设

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1,i}(x) &= \rho_i^* A_i(x) = r_i^1 A_i(x_0 + r_i^1 x), \\ \tilde{u}_{1,i}(x) &= \rho_i^* u_i(x) = u_i(x_0 + r_i^1 x), \end{aligned}$$

w此处， $\rho_i(x) = x_0 + r_i^1 x$ 将 $B_R(0)$ 映射到 $B_{Rr_i^1}(x_0)$，对任意 $R > 0$ 均成立。这些对 $(\tilde{\nabla}_{1,i}, \tilde{u}_{1,i})$ 满足

$$\begin{aligned} \delta^{\tilde{\nabla}_{1,i}} R^{\tilde{\nabla}_{1,i}} &= -\frac{(r_i^1)^2}{2}(d^{\tilde{\nabla}_{1,i}} \tilde{u}_{1,i} \otimes \tilde{u}_{1,i}^* - \tilde{u}_{1,i} \otimes d^{\tilde{\nabla}_{1,i}} \tilde{u}_{1,i}), \\ \delta^{\tilde{\nabla}_{1,i}} d^{\tilde{\nabla}_{1,i}} \tilde{u}_{1,i} &= \frac{\lambda (r_i^1)^2}{2}(1 - |\tilde{u}_{1,i}|^2)\tilde{u}_{1,i}. \end{aligned}$$

˜对于任意 $\delta < R_0$ 和 $R > 0$， i 足够大使得 $\delta > 4Rr_i^1$。注意，$\|R^{\nabla_{1,i}}\|_{L^\infty(B_R(0))} \le 1$。˜应用定理 5.3、引理 5.4 和引理 5.6，$(A_{1,i}, \tilde{u}_{1,i})$ 存在一个子列，在某些规范变换 g_i 下于 $B_R(0)$ 上光滑收敛到˜$(A_{1,\infty,R}, \tilde{u}_{1,\infty,R})$。为简单起见，我们假设

~该子列本身就是 $(A_{1,i}, \tilde{u}_{1,i})$。通过选择 $R_1 < R_2 < \ldots \to \infty$ 并反复选取子列，我们可以假设 $(\tilde{A}_1^{g_i}{}_{,i}, \tilde{u}_1^{g_i}{}_{,i})$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ 中收敛到 $(\tilde{A}_{1,\infty}, \tilde{u}_{1,\infty})$，满足

$$\delta^{\tilde{\nabla}_{1,\infty}} R^{\tilde{\nabla}_{1,\infty}} = 0,$$
$$\delta^{\tilde{\nabla}_{1,\infty}} d^{\tilde{\nabla}_{1,\infty}} \tilde{u}_{1,\infty} = 0,$$

~这意味着 $\nabla_{1,\infty}$ 是一个杨-米尔斯联络，而 $d^{\nabla_{1,\infty}} \tilde{u}_{1,\infty} = 0$。根据 Uhlenbeck 可去奇点定理（见 [18], 推论 4.3），$\tilde{\nabla}_{1,\infty}$ 在某个规范变换下可以延拓为 S^4 上的非平凡杨-米尔斯联络。定义

$$\mathscr{A}(\nabla, u; \Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega |R^\nabla|^2 + |d^\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|u|^2)^2 dV.$$

下面的引理给出了颈部能量消失的一个充分条件。

引理 5.7 假设 (∇_i, u_i) 是一个杨–米尔斯–希格斯对序列，且 $\lim_{i\to\infty} r_i^1 = 0$。存在 ϵ，使得对于任意 R, $\delta > 0$，如果

$$\liminf_{i\to\infty} \sup_{r\in(\frac{Rr_i^1}{2}, 2\delta)} \mathscr{A}(\nabla_i, u_i; B_{2r}(x_0)\backslash B_r(x_0)) < \epsilon, \tag{31}$$

then

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty} \mathscr{A}(\nabla_i, u_i; B_\delta(x_0)\backslash B_{Rr_i^1}(x_0)) = 0.$$

证明 为简单起见，假设 $x_0 = 0$。对于 $l \geq -1$，定义

$$\mathfrak{U}_l = \{x \mid 2^{-l-1} \leq |x| \leq 2^{-l}\},$$
$$S_l = \{x \mid |x| = 2^{-l}\}.$$

将 A_i 分为径向部分 $A_{i,r}$ 和球面部分 $A_{i,\theta}$，即 $A_i = A_{i,r} + A_{i,\theta}$。回顾 Bochner 公式，由方程（2）以及 $\|u_i\|_{L^\infty} \leq 1$，我们有

$$\Delta|R^{\nabla_i}|^2 \leq C(M)(|R^{\nabla_i}|^2 + |R^{\nabla_i}|^3 + |R^{\nabla_i}||D^{\nabla_i}u_i|^2) - 2|d^{\nabla_i}R^{\nabla_i}|^2.$$

注意到

$$\Delta(|R^{\nabla_i}|^2+h)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(|R^{\nabla_i}|^2+h)^{-\frac{1}{2}}\Delta|R^{\nabla_i}|^2 + \frac{1}{4}\sum_j (|R^{\nabla_i}|^2+h)^{-\frac{3}{2}}(e_j|R^{\nabla_i}|^2)^2$$

并令 h 趋于 0，我们有

$$\Delta|R^{\nabla_i}| \leq C(|R^{\nabla_i}| + |R^{\nabla_i}|^2 + |d^{\nabla_i}u_i|^2).$$

考虑 $\tilde{A}_{i,l}(x) = 2^{-l}A_i(2^{-l}x)$、$\tilde{u}_{i,l}(x) = u_i(2^{-l}x)$，并假设 $\tilde{\nabla}_{i,l} = d + \tilde{A}_{i,l}$。注意到

$$\begin{aligned}\Delta|R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}| &= 2^{-4l}\Delta|R^{\nabla_i}| \\ &\leq 2^{-4l}C(|R^{\nabla_i}| + |R^{\nabla_i}|^2 + |d^{\nabla_i}u_i|^2) \\ &\leq C(2^{-2l}|R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}| + |R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}|^2 + 2^{-2l}|d^{\tilde{\nabla}_{i,l}}\tilde{u}_{i,l}|^2),\end{aligned}$$

由 Harnack 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{U}_l}|R^{\nabla_i}| &= 2^{2l}\sup_{\mathfrak{U}_0}|R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}| \\ &\leq 2^{2l}C\int_{\mathfrak{U}_{-1}\cup\mathfrak{U}_0\cup\mathfrak{U}_1} 2^{-2l}|R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}| + |R^{\tilde{\nabla}_{i,l}}|^2 + 2^{-2l}|d^{\tilde{\nabla}_{i,l}}\tilde{u}_{i,l}|^2 dV \\ &= C\int_{\mathfrak{U}_{l-1}\cup\mathfrak{U}_l\cup\mathfrak{U}_{l+1}} 2^{2l}|R^{\nabla_i}| + |R^{\nabla_i}|^2 + 2^{2l}|d^{\nabla_i}u_i|^2 dV \\ &\leq 2^{2l}C\epsilon\end{aligned}$$

定理 2.8 和推论 2.9 在 [18] 中表明

引理 5.8 设 $\nabla = d + A$ 是 $\mathfrak{U}_0$上的一个联络，则存在 γ，使得若 $\|R^{\nabla}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_0)} \le \gamma$，那么在一次规范变换下，我们有 $\delta^{\nabla} A = 0$ 属于 $\mathfrak{U}_{-1}$，$\delta_\theta^{\nabla} A_\theta = 0$ 在 S_{-1} 上且 S_0，并且对任意 $1 \le r \le 2$，都有 $\int_{|x|=r} A_r dS = 0$。此外，存在 $\|A\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_0)} \le C\|R^{\nabla}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_0)}$ 以及 $\|A\|_{L^2(\mathfrak{U}_0)} \le C\|R^{\nabla}\|_{L^2(\mathfrak{U}_0)}$。

通过将 ϵ 取得足够小，我们可以假设 $|R^{\nabla_{i,\,l}}| \le \gamma$ 在 $\mathfrak{U}_0$ 上成立，因此存在一个规范变换 $g_{i,\,l} \in \mathscr{G}(\mathfrak{U}_l)$。若记 $A_{i,\,l} = A^{g_{i,\,l}}$ 以及 $u_{i,\,l} = u^{g_{i,\,l}}$，则有

$$
\begin{aligned}
&(1)\ d^* A_{i,l} = 0,\\
&(2)\ A_{i,l,\theta}\,|_{S_l} = A_{i,l-1,\theta}\,|_{S_l},\\
&(3)\ d_\theta^* A_{i,l,\theta} = 0 \text{ on } S_l \text{ and } S_{l+1},\\
&(4)\ \int_{S_l} A_{i,l,r} dS = \int_{S_{l+1}} A_{i,l,r} dS = 0.
\end{aligned}
$$

将 ϵ 取得足够小，使得 $\{\nabla_i\}$ 满足引理 5.5 的条件，我们可以假设 $\int_{\mathfrak{U}_l} |A_{i,\,l}|^2 dV \le 2^{-2l} C \int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,\,l}}|^2 dV$。假设

$$
\bigcup_{l=l_1+1}^{l_2-1} \mathfrak{U}_l \subset B_\delta \backslash B_{Rr_i^1} \subset \bigcup_{l=l_1}^{l_2} \mathfrak{U}_l.
$$

由斯托克斯公式，我们有

$$
\int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,l}}|^2 dV = \int_{\mathfrak{U}_l} < \delta^{\nabla_{i,l}} R^{\nabla_{i,l}}, A_{i,l} > + A_{i,l} \# A_{i,l} \# R^{\nabla_{i,l}} dV + \int_{S_l} A_{i,l} \wedge * R^{\nabla_{i,l}} - \int_{S_{l+1}} A_{i,l} \wedge * R^{\nabla_{i,l}}.
$$

令 $\hat{A}_{i,\,l}(x) = 2^{-l} A_{i,\,l}(2^{-l}x)$，并假设 $\|R^{\hat{\nabla}_{i,\,l}}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_0)} = 2^{-2l}\|R^{\nabla_{i,\,l}}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_l)} = 2^{-2l}\|R^{\nabla_i}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_l)} \le \gamma$ 通过将 ϵ 取足够小，其中 γ 是引理 5.8中的常数。于是有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{U}_l} A_{i,l} \# A_{i,l} \# R^{\nabla_{i,l}} dV &\le C\|R^{\nabla_{i,l}}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_l)} \int_{\mathfrak{U}_l} |A_{i,l}|^2 dV\\
&\le C\|R^{\nabla_{i,l}}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_l)} 2^{-2l} \int_{\mathfrak{U}_0} |\hat{A}_{i,l}|^2 dV\\
&\le C 2^{2l} \epsilon \cdot 2^{-2l} \int_{\mathfrak{U}_0} |R^{\hat{\nabla}_{i,l}}|^2 dV\\
&\le C\epsilon \int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,l}}|^2 dV.
\end{aligned}
$$

取 ϵ 足够小，使得 $C\epsilon \le \frac{1}{2}$，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,l}}|^2 dV\\
=&\sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} \left\langle \left(\delta^{\nabla_{i,l}} R^{\nabla_{i,l}}, A_{i,l}\right\rangle + A_{i,l} \# A_{i,l} \# R^{\nabla_{i,l}}\right) dV + \int_{S_l} A_{i,l} \wedge * R^{\nabla_{i,l}} - \int_{S_{l+1}} A_{i,l} \wedge * R^{\nabla_{i,l}}\\
\le& \int_{S_{l_1}} A_{i,l_1} \wedge * R^{\nabla_{i,l_1}} - \int_{S_{l_2+1}} A_{i,l_2} \wedge * R^{\nabla_{i,l_2}} + \sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} \langle \delta^{\nabla_{i,l}} R^{\nabla_{i,l}}, A_{i,l} \rangle dV + \frac{1}{2} \sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,l}}|^2 dV.
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\delta \backslash B_{Rr_i^1}} |R^{\nabla_i}|^2 dV &\le \sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} |R^{\nabla_{i,l}}|^2 dV\\
&\le 2\Big(\int_{S_{l_1}} A_{i,l_1} \wedge * R^{\nabla_{i,l_1}} - \int_{S_{l_2+1}} A_{i,l_2} \wedge * R^{\nabla_{i,l_2}} + \sum_{l=l_1}^{l_2} \int_{\mathfrak{U}_l} \langle \delta^{\nabla_{i,l}} R^{\nabla_{i,l}}, A_{i,l} \rangle dV \Big).
\end{aligned}
$$

由方程（2）及 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{l=l_1}^{l_2}\int_{\mathfrak{U}_l}\langle\delta^{\nabla_{i,l}}R^{\nabla_{i,l}},A_{i,l}\rangle dV &\le \sum_{l=l_1}^{l_2}\|d^{\nabla_{i,l}}u_{i,l}\|_{L^2(\mathfrak{U}_l)}\|u_{i,l}\|_{L^\infty(\mathfrak{U}_l)}\|A_{i,l}\|_{L^2(\mathfrak{U}_l)}\\ &\le C\sum_{l=l_1}^{l_2}2^{-l}\|d^{\nabla_{i,l}}u_{i,l}\|_{L^2(\mathfrak{U}_l)}\|R^{\nabla}_{i,l}\|_{L^2(\mathfrak{U}_l)}\\ &\le 2^{-l_1}C\epsilon,\end{aligned}$$

当 δ 趋于 0 时，该式趋于 0，因为 $2^{-l_1}\le 2\delta$。由法图引理可得

$$\int_0^{R_0}\liminf_{i\to\infty}\int_{|x|=r}|R^{\nabla_i}|^2dSdr\le K,$$

因此

$$\delta\liminf_{\delta\to 0}\int_{|x|=\delta}|R^{\nabla_i}|^2dS=0$$

由于 $\|A_{i,\ l}\|_{L^\infty(S_l)}\ \le 2^{-l}C\|R^{\nabla_i}\|_{L^\infty(S_l)}\ \le 2^lC\epsilon$，我们有

$$\int_{S_{l_1}}A_{i,l_1}\wedge *R^{\nabla_{i,l_1}}\le\|A_{i,l_1}\|_{L^2(S_{l_1})}\|R^{\nabla_{i,l_1}}\|_{L^2(S_{l_1})}\to 0$$

当 $\delta\to 0$ 时。对 S_{l_2} 运用相同的论证，我们得出

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty}\int_{B_\delta\backslash B_{Rr_i^1}}|R^{\nabla_i}|^2dV=0.$$

由于引理 5.1 和引理 5.2 表明希格斯部分 $|d^{\nabla_i}u_i|^2+\frac{\lambda}{4}(1-|u_i|^2)^2$ 没有集中点，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i,B_\delta\backslash B_{Rr_i^1})=0.\qquad\square$$

对任意 δ、$R>0$，定义 $E_i=\{r_i\in(\frac{Rr_i^1}{2},2\delta)\ |\ \mathscr{A}(\nabla_i,u_i;\ B_{2r_i}(x_0)\backslash B_{r_i}(x_0))\ \ge\epsilon\}$。若 $\cup_j\cap_{i>j}E_i\ne\varnothing$，则定义 $\{(r_1,r_2,...)\ |\ r_i\in E_i\}$ 的等价类，使得 $\{r_i\}$ 等于 $\{r_i'\}$ 当且仅当 $\liminf\frac{r_i}{r_i'}>0$ 且 $\limsup\frac{r_i}{r_i'}<\infty$。并定义 $\{r_i\}>\{r_i'\}$ 当且仅当 $\liminf\frac{r_i'}{r_i}=0$。与对 Σ 中元素个数的估计类似，我们可以估计等价类 $L\le\frac{K}{\epsilon}$ 的个数。设这些等价类为 $\{r_i^1\}<\{r_i^2\}<...<\{r_i^L\}$。注意

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_\delta(x_0)\backslash B_{Rr_i^1}(x_0))\\ =&\sum_{j=2}^{L}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{\delta r_i^j}(x_0)\backslash B_{Rr_i^{j-1}}(x_0))+\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{Rr_i^j}(x_0)\backslash B_{\delta r_i^j}(x_0))\\ &+\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_\delta(x_0)\backslash B_{Rr_i^L}(x_0)).\end{aligned}$$

对于 $j=1,...,l$，定义

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{j,i}(x)&=r_i^jA_i(x_0+r_i^jx),\\ \tilde{u}_{j,i}(x)&=u(x_0+r_i^jx).\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;\ B_{\delta r_i^j}(x_0)\backslash B_{Rr_i^{j-1}}(x_0))\ =\mathscr{A}(\widetilde{\nabla}_{j,\ i},\tilde{u}_{j,\ i};\ B_\delta(0)\backslash B_{Rr_i^{j-1}/r_i^j}(0))$，其中 $\lim_{i\to\infty}\frac{r_i^{j-1}}{r_i^j}=0$，且对于任意 $r\in(\frac{Rr_i^{j-1}}{2r_i^j},2\delta)$，我们有

$$\liminf_{i\to\infty}\mathscr{A}(\widetilde{\nabla}_{j,i},\tilde{u}_{j,i};B_{2r}(0)\backslash B_r(0))<\epsilon$$

(否则，在 $\{r_i^{j-1}\}$ 与 $\{r_i^j\}$之间存在一个等价类）。由引理 5.7，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{\delta r_i^j}(x_0)\backslash B_{Rr_i^{j-1}}(x_0))=0.$$

同样，$\{r_i^L\}$是最大的等价式，这意味着 $\{(\nabla_i,\ u_i)\}$通过将31中的 $\{r_i^1\}$替换为 $\{r_i^L\}$，满足（31），从而

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{\delta}(x_0)\backslash B_{Rr_i^{L}}(x_0))=0.$$

$\widetilde{\nabla}_{j,\ i}$的一致 $W^{1,\ 2}$界意味着存在弱极限$\widetilde{\nabla}_{j,\ \infty}$属于 $\mathbb{R}^4-\{0\}$，且可去奇点定理表明，它可以延拓为 S^4上的杨-米尔斯联络。收敛在 S^4中可能不是光滑的，因此我们可以在每个爆破点处重复上述泡颈分解。由一致能量界可知，这一过程经过有限步后必定终止。因此

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{Rr_i^j}(x_0)\backslash B_{\delta r_i^j}(x_0))=YM(\widetilde{\nabla}_{j,\infty})+\sum_{k=1}^{K_j}YM(\widetilde{\nabla}_{j,\infty,k}),$$

其中$\widetilde{\nabla}_{j,\ \infty,\ k}$是$\widetilde{\nabla}_{j,\ \infty}$的气泡。为简便起见，我们假设 $\Sigma=\{x_0\}$。最后，通过选取一个子列，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i)=&\lim_{\delta\to 0}\lim_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;M\backslash B_\delta(x_0))+\lim_{R\to\infty}\lim_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_{Rr_i^1}(x_0))\\&+\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\lim_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,u_i;B_\delta(x_0)\backslash B_{Rr_i^1}(x_0))\\=&\mathscr{A}(\nabla_\infty,u_\infty)+YM(\widetilde{\nabla}_{1,\infty})+\sum_{j=1}^{L}(YM(\widetilde{\nabla}_{j,\infty})+\sum_{k=1}^{K_j}YM(\widetilde{\nabla}_{j,\infty,k})).\end{aligned}$$

于是证明完成。

注 5.2 如果考虑取值于 $\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ 中的希格斯场，我们可以得到类似的能量恒等式。

定理 5.9 设 $\{(\nabla_i,\Phi_i)\}$ 是一族杨–米尔斯–希格斯对，且 $\mathscr{A}(\nabla_i,\Phi_i)\ \le\ K$，其中$\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$。那么存在一个有限子集 $\Sigma=\{x_1,...,x_l\}\subset M$、定义在$M\backslash\Sigma$上的杨–米尔斯–希格斯对 $(\nabla_\infty,\Phi_\infty)$，以及 S^4上的杨-米尔斯联络 $\{\widetilde{\nabla}_{jk}\mid 1\le j\le l,1\le k\le K_j\}$，使得 $\{(\nabla_i,\Phi_i)\}$ 的一个子列在规范变换下于 $C^\infty_{loc}(M\backslash\Sigma)$ 中收敛到 $(\nabla_\infty,\Phi_\infty)$，并且

$$\lim_{i\to\infty}\mathscr{A}(\nabla_i,\Phi_i)=\mathscr{A}(\nabla_\infty,\Phi_\infty)+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{K_j}YM(\widetilde{\nabla}_{jk}).\tag{32}$$

利益冲突

不存在利益冲突。

致谢

所有作者都感谢李嘉禹教授的鼓励和一直以来的帮助。第一作者获得国家重点研发计划项目（2022YFA1005400）和国家自然科学基金项目（编号：12031017）的资助，第二作者获得国家自然科学基金项目（编号：12001532）的资助。

参考文献

[1] Bourguignon, JP. 和 Lawson, H.B., 《杨-米尔斯场的稳定性与孤立现象》, Co mmun.Math. Phys. 79, 189–230 (1981).[2] Cheng, D. R., 《 S^n 和 $\mathbb{CP}^n$上的金兹堡-朗道方程解的不稳定性》, J. Funct. Anal. 279 (2020).[3] Donaldson, S. K. 和 Kronbeimer, P. B, 《四维流形的几何》, Oxford (1990)[4] Fang, Y. 和 Hong, MC., 《杨-米尔斯-希格斯场的热流, 第一部分》, Chin. Ann. of Math., 21B : 4, 453-472 (2000).[5] Gilberg, D. 和 Trudinger, N. S., 《二阶椭圆偏微分方程》, Springer- Verlag Berlin Heidelberg (2001).[6] Higgs Peter, W., 《无质量玻色子下的自发对称性破缺》, Phys. Rev. 145 ,1156-1163 (1966).[7] Hong, MC. 和 Schabrun, L., 《一列杨–米尔斯 α-联络的能量恒等式》, Calc. Var. 58, 83 (2019).[8] Hong, MC. 和 Tian, G., 《杨-米尔斯流的渐近行为与奇异杨-米尔斯联络》, Math. Ann. 330, 441–472 (2004).[9] Jaffe, A. 和 Taubes, C., 《涡旋与磁单极子: 静态规范理论的结构》, Boston: Birkhauser (1980)[10] Lawson, H. B. 和 Simons, J., 《关于稳定流及其在实几何与复几何全局问题中的应用》, Ann. Math. vol. 98, no.3, 427-450 (1973).[11] Naber, A. 和 Valtorta, D., 《驻定杨-米尔斯场的能量恒等式》, Invent. math. 216, 847–925 (2019).[12] Naito,H.、Kozono,H. 和 Maeda, Y., 《杨-米尔斯梯度流的稳定流形定理》, Tohoku Math. J. (2), 42, 45-66 (1990).[13] Rivi`ere, T., 《杨-米尔斯场的插值空间与能量量子化》, Commun. Anal. Geom, 10, 683-708 (2002).[14] Song, C., 《杨-米尔斯-希格斯场的收敛》, Math. Ann. 366, 167–217 (2016).[15] Struwe, M., 《四维中的杨-米尔斯流》, Calc. Var 2, 123–150 (1994).[16] Tian, G., 《规范理论与校准几何 I》, Math. Ann. 151, 193-268 (2000).[17] Uhlenbeck, K.K., 《曲率 L^p 界下的联络》, Commun.Math. Phys. 83, 31–42 (1982).[18] Uhlenbeck, K.K., 《杨-米尔斯场中的可去奇点》, Commun.Math. Phys. 83, 11–29 (1982).