arXiv:2303.00275v1 [math.NT] 1 Mar 2023

第二类多重斯特林数

TAEKYUN KIM[1], *, DAE SAN KIM[2], *, 以及 HYE KYUNG KIM[3], *

摘要。第二类多重斯特林数、无符号第一类多重斯特林数、多重拉赫数和多重伯努利数，均借助多重对数来定义，并分别推广了第二类斯特林数、无符号第一类斯特林数、无符号拉赫数和高阶伯努利数。本文旨在介绍第二类多重斯特林数，并探讨涉及这四种以多重对数定义的数以及其他一些特殊数的若干恒等式。

1. 引言

第二类斯特林数 $\left\{ {n \atop r} \right\}$ 表示将含有 n 个元素的集合划分为 r 个非空子集的方法数。这些数推广为第二类多重斯特林数 $\left\{ {n \atop k_1,k_2,\cdots,k_r} \right\}$（见式（18）），当 $(k_1,k2,\dots,k_r)=(1,1,\dots,1)$ 时，它们化为第二类斯特林数。事实上，$\left\{ {n \atop 1,1,\cdots,1} \right\}=\left\{ {n \atop r} \right\}$。

另一方面，无符号第一类斯特林数 $\left[{n \atop r} \right]$ 表示由 r 个不相交循环的乘积构成的、含有 n 个元素的集合的排列数。这些数推广为无符号第一类多重斯特林数 $\left[{n \atop k_1,k_2,\cdots,k_r} \right]$（见（28））；当 $(k_1,k2,\dots,k_r)=(1,1,\dots,1)$ 时，它们就成为无符号第一类斯特林数。因此，$\left[{n \atop 1,1,\cdots,1} \right]=\left[{n \atop r} \right]$。

无符号拉赫数 L(n, k) 统计将含有 n 个元素的集合划分为 k 个非空线性有序子集的方法数。这些数推广为多重拉赫数 $L^{(k_1,k_2,\dots,k_r)}(n,r)$（见（8））；当 $(k_1,k2,\dots,k_r)=(1,1,\dots,1)$ 时，它们就退化为无符号拉赫数。事实上，$L^{(1,1,\dots,1)}(n,r)=L(n,r)$。

此外，多重伯努利数 $B^{(k_1,k_2,\dots,k_r)}_n$（见（7））推广了 r 阶伯努利数。事实上，我们看到 $B_n^{(1,1,\dots,1)}=\frac{1}{r!}(-1)^n B_n^{(r)}$。

这四类数的共同特征是，它们都是借助多重对数 $\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\dots,k_r}(z)$（见（4））定义的；当 $r=1$ 时，多重对数会退化为多对数 $\mathrm{Li}_{k_1}(z)$。

本文旨在引入第二类多重斯特林数，并推导若干涉及通过多重对数定义的这四类数及其他一些数的恒等式。具体而言，在定理 3 中，我们推导了一个涉及多重伯努利数、第二类斯特林数、贝尔多项式和第二类多重斯特林数的恒等式。在定理 4 中，我们用无符号第一类多重斯特林数表示第二类多重斯特林数。在定理 5 中，我们得到一个涉及第二类斯特林数、多重拉赫数、第二类多重斯特林数以及 r 阶富比尼多项式的恒等式。在定理 6 中，我们推导了一个涉及第二类多重斯特林数、带符号第一类斯特林数以及

2010年数学主题分类。11B68；11B73；11B83。关键词和短语。第二类多重斯特林数；无符号第一类多重斯特林数；多重拉赫数；多重伯努利数。* 为通讯作者。

多重拉赫数的恒等式。最后，在定理 7 中，我们给出了一个涉及第二类多重斯特林数、带符号第一类斯特林数、第二类斯特林数和多重伯努利数的恒等式。本节余下部分将回顾本文后续所需的基本事实。

我们回顾一下，下降阶乘序列定义为

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1), \ (n \geq 1), \quad \text{(see [1-5,7-16,18,19])}. \tag{1}$$

众所周知，第二类斯特林数定义为

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (x)_k, \quad (n \geq 0), \quad \text{(see [5])}. \tag{2}$$

由（2）可知，第二类斯特林数的生成函数为

$$\frac{1}{k!}(e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!}, \quad (k \geq 0), \quad \text{(see [18])}. \tag{3}$$

对于整数 $k_i (1 \leq i \leq r)$，指标为 $(k_1, k2, \cdots, k_r)$ 的多重对数定义为

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(t) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{t^{m_r}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_r^{k_r}}, \quad \text{(see [9, 11])}. \tag{4}$$

如果 $r = 1$，$\mathrm{Li}_{k_1}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m m^{k_1}$ 就是多对数。由（4）可容易得到

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(t) = \frac{1}{t}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r-1}(t), \quad \text{(see [10, 11, 16])}. \tag{5}$$

由（5），我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_{r-1},1}(t) &= \frac{1}{t} \sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} \sum_{m_r=m_{r-1}+1}^{\infty} t^{m_r} \\ &= \frac{1}{1-t}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

2000年，Kim-Kim 引入了指标为 $(k_1, k2, \ldots, k_r)$ 的多重伯努利数，其定义为

$$\frac{1}{(1-e^{-t})^r}\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \frac{t^n}{n!}, \quad \text{(see [10])}. \tag{7}$$

注意，$B_n^{(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{r\text{次}})} = (-1)^n r!\, B_n^{(r)} = B_n^{(r)}(r)\, r!$，其中 $B_n^{(r)}(x)$ 是由下式给出的 r 阶伯努利多项式

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^r e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}, \quad \text{(see [9-16])},$$

并且 $B_n^{(r)} = B_n^{(r)}(0)$ 是 r 阶伯努利数。

最近，Kim-Kim-Kim-Lee-Park 引入了多重拉赫数，其定义为

$$\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{-t})}{(1-t)^r} = \sum_{n=r}^{\infty} L^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(n,r)\frac{t^n}{n!}, \quad \text{(see [9])}. \tag{8}$$

注意,

$$L^{(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{r-\text{times}})}(n,r)=L(n,r),\quad (n,r\geq 0), \tag{9}$$

其中 L(n, r) 是无符号拉赫数，定义如下

$$\frac{1}{r!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{r}=\sum_{n=r}^{\infty}L(n,r)\frac{t^{n}}{n!},\quad \text{(see [5, 9, 18])}. \tag{10}$$

Y. Ma 等人还研究了如下定义的第一类多重斯特林数

$$(-1)^{r}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(-t)=\sum_{n=r}^{\infty}S^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(n,r)\frac{t^{n}}{n!},\quad \text{(see [16])}. \tag{11}$$

注意，$S^{(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{r-\text{次}})}=S_1(n,r)$，其中 $S_1(n, r)$ 是如下定义的第一类斯特林数

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n,k)x^{k},\quad (n\geq 0),\quad \text{(see [5, 13])}. \tag{12}$$

无符号第一类斯特林数定义如下

$$\langle x\rangle_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k},\quad (n\geq 0),\quad \text{(see [5, 12])}, \tag{13}$$

其中 $\langle x\rangle_0=1$, $\langle x\rangle_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$, $(n\geq 1)$。由 (12) 和 (13) 可知

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=(-1)^{n-k}S_1(n,k),\quad (n,k\geq 0),\quad \text{(see [5, 12])}. \tag{14}$$

现在，我们回顾一下，r 阶富比尼多项式定义为

$$\left(\frac{1}{1-x(e^{t}-1)}\right)^{r}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(r)}(x)\frac{t^{n}}{n!},\quad \text{(see [13])}. \tag{15}$$

由（15）可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(r)}(x)\frac{t^{n}}{n!}&=\left(\frac{1}{1-x(e^{t}-1)}\right)^{r}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}x^{k}(e^{t}-1)^{k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}\binom{r+k-1}{k}k!\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}\frac{t^{n}}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}k!x^{k}\right)\frac{t^{n}}{n!}.\end{aligned} \tag{16}$$

因此，由 (16) 可得

$$F_n^{(r)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}k!\binom{r+k-1}{k}x^{k},\quad \text{(see [13])}. \tag{17}$$

2. 第二类多重斯特林数

根据 (3)，我们可以考虑如下定义的第二类多重斯特林数 y

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t})=\sum_{n=r}^{\infty}\left\{\begin{matrix} n \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{matrix}\right\}\frac{t^n}{n!}. \tag{18}$$

现在，我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_{r-1},1}(1-e^{1-e^t}) &= \frac{d}{dt}\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{(1-e^{1-e^t})^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}m_r} \\ &= \sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}}\frac{e^te^{1-e^t}}{1-e^{1-e^t}}\sum_{m_r=m_{r-1}+1}^{\infty}(1-e^{1-e^t})^{m_r} \\ &= e^t\sum_{0<m_1<\cdots<m_{r-1}}\frac{(1-e^{1-e^t})^{m_{r-1}}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} = e^t\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_{r-1}}(1-e^{1-e^t}).\end{aligned} \tag{19}$$

因此，由（19）可得

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{1,1}(1-e^{1-e^t})=e^t\mathrm{Li}_1(1-e^{1-e^t})=-e^t\log(e^{1-e^t})=e^t(e^t-1). \tag{20}$$

由（20）可知

$$\mathrm{Li}_{1,1}(1-e^{1-e^t})=\int_0^t\mathrm{Li}_{1,1}(1-e^{1-e^x})dx=\int_0^t e^x(e^x-1)dx=\frac{1}{2!}(e^t-1)^2. \tag{21}$$

由（19）和（20）可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{1,1,1}(1-e^{1-e^t}) &= \int_0^t e^x\mathrm{Li}_{1,1}(1-e^{1-e^x})dx \\ &= \frac{1}{2!}\int_0^t e^x(e^x-1)^2dx=\frac{1}{3!}(e^t-1)^3.\end{aligned} \tag{22}$$

继续这一过程，我们得到

$$\mathrm{Li}_{\underbrace{1,1,\cdots,1}_{r-\text{times}}}(1-e^{1-e^t})=\frac{1}{r!}(e^t-1)^r=\sum_{n=r}^{\infty}\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}\frac{t^n}{n!}. \tag{23}$$

因此，由式 (18) 和 (23)，我们得到以下定理。

定理 1. 对于满足 n $\geq$ r 的 n,r ≥ 0，我们有

$$\left\{\begin{matrix} n \\ \underbrace{1,1,\cdots,1}_{r-times} \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}.$$

由（19）可知，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_{r-1},1}(1-e^{1-e^t}) &= e^t\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}}(1-e^{1-e^t}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}\sum_{m=r-1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_{r-1} \end{matrix}\right\}\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{n=r-1}^{\infty}\left(\sum_{m=r-1}^{n}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_{r-1} \end{matrix}\right\}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{24}$$

另一方面，由（18）可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_{r-1},1}(1-e^{1-e^t}) &= \frac{d}{dt}\sum_{n=r}^{\infty}\left\{ {n \atop k_1,\cdots,k_{r-1},1}\right\}\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=r}^{\infty}\left\{ {n \atop k_1,\cdots,k_{r-1},1}\right\}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=r-1}^{\infty}\left\{ {n+1 \atop k_1,\cdots,k_{r-1},1}\right\}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{25}$$

因此，由 (24) 和 (25)，我们得到以下定理。

定理 2. 对于 $n \geq 0$ 和 $r \geq 0$ 且 $n+1 \geq r$，我们有

$$\left\{ {n+1 \atop k_1,\cdots,k_{r-1},1}\right\} = \sum_{m=r-1}^{n}\binom{n}{m}\left\{ {m \atop k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}}\right\}.$$

在 (7) 中用 e^t-1 替换 t，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-e^{1-e^t})^r}\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t}) &= \sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(k_1,\cdots,k_r)}\frac{1}{m!}(e^t-1)^m\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{ {n \atop m}\right\}\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}\left\{ {n \atop m}\right\}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{26}$$

另一方面，由 (18) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-e^{1-e^t})^r}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t})\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}e^{l(1-e^t)}\sum_{m=r}^{\infty}\left\{ {m \atop k_1,\cdots,k_r}\right\}\frac{t^m}{m!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}\phi_j(-l)\right)\frac{t^j}{j!}\sum_{m=r}^{\infty}\left\{ {m \atop k_1,\cdots,k_r}\right\}\frac{t^m}{m!}\\ &= \sum_{n=r}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-r}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}\phi_j(-l)\binom{n}{j}\left\{ {n-j \atop k_1,\cdots,k_r}\right\}\right)\frac{t^n}{n!},\end{aligned} \tag{27}$$

其中$\phi_n(x)$ 是贝尔多项式，由下式给出

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

因此，由（26）和（27），我们得到以下定理。

定理 3. 对于 $n,r \geq 0$ 且 $n \geq r$，有

$$\sum_{m=0}^{n}B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}\left\{ {n \atop m}\right\} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{r+l-1}{l}\phi_j(-l)\binom{n}{j}\left\{ {n-j \atop k_1,k_2,\cdots,k_r}\right\}.$$

此外，对于 $0 \leq n < r$，我们有

$$\sum_{m=0}^{n}B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}\left\{ {n \atop m}\right\} = 0.$$

鉴于 (11) 和 (14)，我们可以考虑如下定义的无符号第一类多重斯特林数

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(t)=\sum_{n=r}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}\frac{t^n}{n!}. \tag{28}$$

注意

$$\begin{bmatrix} n \\ \underbrace{1,1,\cdots,1}_{r-\text{times}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix},\quad (n,r\geq 0). \tag{29}$$

在（28）中将 t 替换为 $1-\mathrm{e}^{1-e^t}$，令

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t}) &= \sum_{m=r}^{\infty}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}\frac{1}{m!}(1-e^{1-e^t})^m \\
&= \sum_{m=r}^{\infty}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}(-1)^m\sum_{l=m}^{\infty}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}\frac{1}{l!}(1-e^t)^l \\
&= \sum_{l=r}^{\infty}\left(\sum_{m=r}^{l}(-1)^{l-m}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}\right)\frac{1}{l!}(e^t-1)^l \\
&= \sum_{l=r}^{\infty}\left(\sum_{m=r}^{l}(-1)^{l-m}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}\right)\sum_{n=l}^{\infty}\begin{Bmatrix} n \\ l \end{Bmatrix}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=r}^{\infty}\left(\sum_{l=r}^{n}\sum_{m=r}^{l}(-1)^{l-m}\begin{Bmatrix} n \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{30}$$

因此，由（18）和（30），我们得到以下定理。

定理 4. 对于 n,r $\in\mathbb{N}$，且 n $\geq$ r，有

$$\begin{Bmatrix} n \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{Bmatrix}=\sum_{l=r}^{n}\sum_{m=r}^{l}(-1)^{l-m}\begin{Bmatrix} n \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{bmatrix}.$$

在（8）中将 t 替换为 e^t-1。则有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t})}{(2-e^t)^r} &= \sum_{k=r}^{\infty}L^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(k,r)\frac{1}{k!}(e^t-1)^k \\
&= \sum_{k=r}^{\infty}L^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(k,r)\sum_{n=k}^{\infty}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=r}^{\infty}\left(\sum_{k=r}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}L^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(k,r)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{31}$$

另一方面，由（15）可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2-e^t)^r}\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{1-e^t}) &= \sum_{k=r}^{\infty}\begin{Bmatrix} k \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{Bmatrix}\frac{t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}F_l^{(r)}(1)\frac{t^l}{l!} \\
&= \sum_{n=r}^{\infty}\left(\sum_{k=r}^{n}\begin{Bmatrix} k \\ k_1,k_2,\cdots,k_r \end{Bmatrix}\binom{n}{k}F_{n-k}^{(r)}(1)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{32}$$

因此，由（31）和（32）可得以下定理。

定理 5. 对于满足 n $\geq$ r 的 n,r $\in \mathbb{N}$，有

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} L^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(k,r) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{k_1,k_2,\cdots,k_r} \binom{n}{k} F_{n-k}^{(r)}(1).$$

在（18）中用 log(1 +t) 替换 t，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t}) &= \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} \frac{1}{m!} (\log(1+t))^m \\ &= \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} \sum_{n=m}^{\infty} S_1(n,m) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{m=r}^{n} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} S_1(n,m) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{33}$$

另一方面，由（8）可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t}) &= \frac{\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t})}{(1-t)^r} (1-t)^r \\ &= \sum_{m=r}^{\infty} l^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(m,r) \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r}{l} (-1)^l t^l \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{m=r}^{n} \frac{1}{m!} l^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(m,r) \binom{r}{n-m} (-1)^{n-m} \right) t^n. \end{aligned} \tag{34}$$

因此，由（33）和（34）可得以下定理。

定理 6. 对于满足 n $\geq$ r 的 n,r $\in \mathbb{N}$，有

$$\sum_{m=r}^{n} \binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_r} S_1(n,m) = \sum_{m=r}^{n} \frac{n!}{m!} l^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}(m,r) \binom{r}{n-m} (-1)^{n-m}. \tag{35}$$

在（18）中用 log(1 +t) 替换 t，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t}) &= \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} \frac{1}{m!} (\log(1+t))^m \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} \sum_{n=m}^{\infty} S_1(n,m) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{m=r}^{n} \binom{m}{k_1,k_2,\cdots,k_r} S_1(n,m) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{36}$$

另一方面，根据（7），可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t}) &= \frac{\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(1-e^{-t})}{(1-e^{-t})^r} (1-e^{-t})^r \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \frac{t^m}{m!} \right) r! (-1)^r \frac{1}{r!} (e^{-t}-1)^r \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \frac{t^m}{m!} \right) r! (-1)^r \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j}{r} (-1)^j \frac{t^j}{j!} \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} (-1)^{j-r} r! \binom{n}{j} B_{n-j}^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{37}$$

因此，由 (36) 和 (37) 可得以下定理。

定理 7. 对于 $n,r \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq r$，我们有

$$\frac{1}{r!}\sum_{m=r}^{n}\left\{ {n \atop k_1,k_2,\cdots,k_r} \right\} S_1(n,m) = \sum_{j=r}^{n}\left\{ {j \atop r} \right\}(-1)^{j-r}\binom{n}{j}B_{n-j}^{(k_1,k_2,\cdots,k_r)}.$$

3. 结论

借助多重对数，我们引入了第二类多重斯特林数，它是第二类斯特林数的推广。同样，第一类多重斯特林数、多重拉赫数和多重伯努利数分别是无符号第一类斯特林数、无符号拉赫数和高阶伯努利数的推广，它们均借助多重对数定义。本文推导了涉及这四种由多重对数定义的数以及其他一些数的若干恒等式。

无符号拉赫数近期已应用于电信中的隐写术方法 [6] 以及光学中色散的微扰描述 [17]。因此，探索多重拉赫数的一些应用将是一个有趣的研究课题。

此外，我们还希望继续寻找一些特殊数及其在物理学、科学、工程学和数学中的应用。

致谢
全体作者感谢长田数学科学研究所对本研究的支持。

数据和材料的可用性
不适用。

资金支持
本研究的第一作者获得了光云大学2023年的研究资助，第三作者获得了韩国国家研究基金会基础科学研究计划的资助（NRF-2021R1F1A1050151）。

伦理审批与参与同意
所有作者声明，本文的撰写不存在伦理问题。

利益冲突
所有作者均声明不存在利益冲突。

发表同意
所有作者均希望在本期刊发表本文。

参考文献

[1] Araci, S. 关于与多指数函数相关的一类新贝努利多项式及其相关恒等式。《当代数学高级研究》（庆尚）31（2021），第2期，195-204页。[2] Bayad, A.; Hamahata, Y. 多重多对数与多重多项式伯努利多项式。《函数、逼近与评论数学》46（2012），第1部分，45-61页。[3] Carlitz, L. 第一类和第二类加权斯特林数 I。《斐波那契季刊》18（1980），第2期，147-162页。

[4] 120 2015 113 127 Choi, J. Y. 多重受限斯特林数。

[5] 《组合艺术》（），- Comtet, L. 高级组合学：有限与无限展开的艺术。修订增补版。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1974年。[6] Ghosal, S. K., Mukhopadhyay, S., Hossain, S., Sarkar, R. 拉赫变换在电信中通过信息隐藏实现数据安全与隐私的应用。《新兴电信汇刊》T. V.32，2020，N.2，e3984。[7] Jang, L.-C. 关于退化型二阶多重多项式根诺基多项式的注记。《当代数学高级研究》（庆尚）30（2020），第4期，539-545页。

[8] Kim, B. M.; Kim, Y.; Park, J,-W. 关于倒数退化 Lah-Bell 多项式与数。《当代数学高级研究》（庆尚）32（2022），第1期，63-70页。[9] Kim, D. S.; Kim, H. K.; Kim, T.; Lee, H.; Park, S. 多重拉赫数与第一类多重斯特林数。《差分方程进展》2021，论文编号411，9页。[10] Kim, M.-S.; Kim, T. 关于n阶广义 Bernoulli 数的显式公式。《印度纯粹与应用数学杂志》31（2000年），第11期，1455-1461页。[11] Kim, T.; Kim, D. S. 关于退化多重 poly-Bernoulli 数与多项式的注记。《应用分析与离散数学》，在线获取：http://pefmath.etf.rs [12] Kim, T.; Kim, D. S. 通过玻色子算子得到的退化 r-Stirling 数的一些恒等式。《俄罗斯数学物理杂志》29（2022），第4期，508-517页。[13] Kim, T.; Kim, D. S.; Kim, H. K.; Lee, H. 退化 Fubini 多项式的一些性质。《应用数学、科学与工程》30（2022），第1期，235-248页。[14] Kwon, J,; Wongsason, P.; Kim, Y.; Kim, D. 修正型二阶退化 poly-Bernoulli 多项式的表示。《AIMS 数学》7（2022），第6期，11443-11463页。[15] Ma, M.; Lim, D. 关于退化多重 poly-Bernoulli 多项式的注记。《当代数学高级研究》（庆尚）30（2020），第4期，599-608页。[16] Ma, Y.; Kim, D. S.; Lee, Y.; Park, S.; Kim, T. 第一类多重斯特林数研究。《分形》30（2022），第10期，2240258，7页。[17] Popmintchev, D., Wang, S., Zhang, X., Stoev, V., Popmintchev, T. 用于微扰色散的解析 Lah-Laguerre 光学形式体系，《Optics Express》V.30，2022，N.22/24，40779-40808页。[18] Roman, S. 标号演算。纯粹与应用数学，第111卷。学术出版社。 [Harcourt Brace Jo-vanovich 出版社], 纽约，1984年。[19] Simsek, Y. Euler 型多项式与数的插值函数。《当代数学高级研究》（庆尚）23（2013），第2期，301-307页。[1]数学系，光云大学，首尔 139-701，大韩民国 电子邮箱：tkkim@kw.ac.kr[2]西江大学数学系，首尔121-742，大韩民国 电子邮箱：dskim@sogang.ac.kr[3]数学教育系，大邱天主教大学，庆山38430，韩国 电子邮箱：hkkim@cu.ac.kr