arXiv:2303.00283v1 [math.DS] 1 Mar 2023

使用爆破方法和正规形理论重新审视带线性阻力的开普勒问题

K. ULDALL KRISTIANSEN

丹麦技术大学应用数学与计算机科学系，*2800 Kgs. Lyngby*，丹麦

Abstract. 本文重新研究带线性阻力的开普勒问题。在存在耗散的情况下，能量和角动量均不断减小，但在 [35] 中已证明，对于线性阻力情形，偏心率向量具有良好定义的极限。该极限偏心率向量定义了一个守恒量；在本文中，我们证明了相应的不变集是光滑流形。这些结果依赖于正规形理论和爆破变换，后者揭示出不变流形是（非双曲）周期轨道（的极限）的稳定集。此外，我们还确定了另一个对应于零极限偏心率向量的不变流形。该流形作为零-Hopf 点的零特征空间上的广义中心流形获得。最后，我们给出详细的爆破分析，为动力学提供几何图景。我们相信，我们的方法和结果对于具有爆破动力学的问题具有普遍意义。

关键词。不变流形、非双曲集、动力系统理论、爆破 .

1. Introduction

本文研究带线性阻力的开普勒问题 [34, 35]

$$\ddot{u} + \delta\dot{u} + c\frac{u}{|u|^3} = 0, \tag{1.1}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, $c > 0$ 且对于 $\delta > 0$。 $u = 0$ 处的奇点对应于碰撞极限，而对于 $\delta = 0$ （无阻力/阻尼），我们得到经典开普勒问题，其轨道为圆锥曲线。事实上，与经典情形一样，我们可以对 u 和 t 进行缩放，以达到 $c = 1$ ，因此下文均作此假设。（这样一来， δ 就替换为 $\delta c^{-1/2}$。）对于$\delta = 0$，能量：

$$E(u, \dot{u}) = K(\dot{u}) + P(u), \quad K(\dot{u}) := \frac{1}{2}|\dot{u}|^2,\ P(u) := -\frac{1}{|u|},$$

角动量：

$$L(u, \dot{u}) = u \wedge \dot{u},$$

以及偏心率向量

$$\mathcal{E}(u, \dot{u}) = \dot{u} \wedge L(u, \dot{u}) - \frac{u}{|u|},$$

都是守恒量。对于 $\delta \neq 0$，我们有 $\frac{d}{dt}E = -\delta|\dot{u}|^2 \leq 0$，因此能量在 $\delta > 0$ 时单调递减。此外，简单计算可得

$$\frac{d}{dt}L = -\delta L, \tag{1.2}$$

从而

$$L(u(t), \dot{u}(t)) = e^{-\delta t}L(u(0), \dot{u}(0)), \tag{1.3}$$

因此角动量呈指数递减。不过请注意，L 的方向是常数，因此运动（u，$\dot{u}$）包含在一个平面（轨道平面）内。

$\mathcal{E}$ 对于 $\delta \neq 0$也不是守恒的，但在 [35] 中证明了存在一个极限偏心率向量：令 ϕ_t（u，$\dot{u}$）表示与（1.1）相关的流。则

$$\mathcal{E}_\infty(u, \dot{u}) = \lim_{t \to t_{\max}^-} \mathcal{E}(\phi_t(u, \dot{u})),$$

对所有 u、$\dot{u}$均存在。这里，$t_{\max}$ 是最大存在时间（对于 $L = 0$为有限值，对于 $L \neq 0$为无穷大，见 [34]）。在 [35], 中证明了 $\mathcal{E}_\infty$ 的分量在函数意义上相互独立，并且具有旋转等变性：对于所有 $R \in SO$（3），$\mathcal{E}_\infty$（Ru，$R\dot{u}$）$= R\mathcal{E}_\infty$（u，$\dot{u}$），且 $|\mathcal{E}_\infty$（u，$\dot{u}$）| 取遍（$0, 1$]中的所有值。如果 $|\mathcal{E}_\infty$（u，$\dot{u}$）$| = 1$，则 $L = 0$，见 [35]。在 [36],中，同一组作者将其结果推广到了这样的情形：δ 是满足 δ（$|u|$）$\geq c > 0$的 $|u|$的函数 δ（$|u|$）。在 [32], 中，阻力 δ（$|u|$）在 $u = 0$处是奇异的，并且他们证明，在某些情况下，极限偏心率向量可能是不连续的。

$\mathcal{E}_\infty$ 的光滑性问题在 [35]中仍未解决。本文将给出 $\mathcal{E}_\infty$的一种不同刻画，从而使我们能够处理 $|\mathcal{E}_\infty| \in$ (0,1)的光滑性问题。与此同时，借助动力系统理论，我们识别出一个与 $\mathcal{E}_\infty = 0$对应的新的光滑不变流形，它充当具有 $|\mathcal{E}_\infty| \in$ (0,1)的振荡轨道的中心。需要指出的是，这个在与 $\mathcal{E}_\infty = 0$对应的约化相空间中将是一维的不变流形，实际上已在 [19], 中作为形式级数推导出来，并由此引起了本文作者的兴趣。本质上，我们的证明表明，该级数在 Borel-Laplace 意义下是可和的。另一方面，以爆破和紧化为主要工具，我们给出了动力学的几何描述。这将进一步阐明 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1$。

天体力学中耗散问题的研究历史悠久，甚至可以追溯到 Jacobi [20], ，他引入了 $-\delta|\dot{u}|^{n-1}\dot{u}$类型的耗散力；$n = 1$这一情形对应于本文研究的线性阻力。天体力学中至少存在两种重要的耗散机制：星云导致的粒子碰撞（斯托克斯耗散）和太阳辐射（彭廷-罗伯逊耗散），参见 [6, 34]。

Corne 和 Rouche [8] 以及 Diacu [9] 或许是最早致力于为具有一般非常数阻力族 $\delta = \delta(u, \dot{u})$ 的含阻力的开普勒问题（1.1）发展定性理论的研究者，其中该阻力族依赖于 u 和 $\dot{u}$。[8] 研究了带有$\delta(u, \dot{u}) = k(|\dot{u}|)/|\dot{u}|$ 的（1.1），并证明在对函数 k 施加某些附加假设的条件下，所有解都会趋于奇点（可能在有限时间内）。另一方面，[9] 分析了广义斯托克斯阻力类中的耗散开普勒问题的定性动力学；该族包含重要的彭廷-罗伯逊情形。多年以后，Margheri、Ortega 和 Rebelo 在 [34] 中研究了带线性阻力的开普勒问题（1.1），并对其动力学给出了更为深入的描述。特别地，他们证明了

在非零角动量集合上，该系统是完备的，即解在整个时间范围内全局存在。后来在 [35], 中，同一批作者进一步给出了更具几何性的描述，包括极限偏心率向量的性质。他们的结果还表明，对于满足 $|\mathcal{E}_\infty| \in (0,1)$ 的轨道， $|u(t)||L(t)$的上极限 $\limsup_{t\to\infty}$ 和下极限 $\liminf_{t\to\infty}$ 均存在，另见 [19]。

与此同时，也有一些关于限制性三体问题耗散版本的研究，参见例如 [6, 18, 33]。在 [6] 中，作者采用数值方法（基于快速李雅普诺夫指标（ FLI ））来提供相空间不同区域的信息。他们展示了碰撞轨迹和非碰撞轨迹。有趣的是，他们还记录了周期轨道吸引子，但仅限于线性阻力和斯托克斯阻力的情形。相较之下，在彭廷-罗伯逊耗散的情形下，作者发现除主天体（碰撞）外不存在其他吸引子。基于这项研究， [33] 考察了周期轨道的存在与否，包括天平动点 L_4 和 L_5附近的霍普夫分岔。

本文将使用爆破方法和正规形理论研究（1.1）的动力学。在天体力学和哈密顿系统的背景下，正规形理论历史悠久，可追溯至庞加莱和伯克霍夫的研究。事实上，KAM理论 [1] 本身也可视为一种正规形理论。另一方面，爆破方法为研究局部动力系统理论中的退化平衡点提供了一个通用框架，而双曲理论（例如哈特曼-格罗布曼定理和中心流形理论）并不适用。这种方法的基本思路是应用一个不可逆变换（例如极坐标），将平衡点爆破为一个球面（若退化平衡点构成直线，则爆破为圆柱）。通过适当选择与变换相关的权重，对于解析系统，可以将所得向量场除以半径的某个幂次，其中半径衡量到平衡点的距离。由此得到一个新的向量场，它仅在平衡点之外与原系统等价；对于该向量场，奇点经爆破后可能（部分）获得双曲性（或椭圆性）。有时需要连续多次采用这种平衡点爆破方法，参见例如 [14]。

近年来，这种爆破解法在奇异摄动理论领域日益受到重视，因为退化平衡点在此会自然出现，参见 [12, 13, 15, 30]。将Fenichel几何奇异摄动理论与爆破方法结合起来，在描述慢快模型中的全局现象方面已取得显著成效，参见例如 [23,24, 25, 26, 27]。近来，爆破解法又得到推广，其目的并非获得双曲性，而是在光滑系统趋近非光滑系统的背景下“获得光滑性”，参见 [21, 22, 29, 31]。

显然，在数学中，爆破也可以有另一种含义，即（有限时间内）常微分方程或偏微分方程解的爆破。在动力系统理论中，可以通过庞加莱紧化或庞加莱–李雅普诺夫紧化来研究爆破解（事实上，这些方法与爆破方法有些相似），参见 [14]。紧化之后，在对向量场进行适当的去奇异化后，可以研究无穷远处的平衡点，并运用动力系统理论的局部方法分析这些平衡点。特别是，这些无穷远点有时会完全退化，此时可以用爆破方法加以处理。

与解的爆破相关的是趋近常微分方程真正奇异性的解的存在性；例如 (1.1) 的碰撞极限 $u = 0$ ，此时相应的

向量场未定义。对 n 体问题中的碰撞（以及近碰撞）解的研究历史悠久，可追溯至 Poincar´e，另见 [5, 10, 11]。对于可化为 $(1.1)_{\delta=0}$ 的二体问题，存在一种坐标变换（ Levi-Cevita 变换）和一种非线性时间变换（与去奇异化有关），可将碰撞变为方程中的正则点。Levi-Cevita 变换与爆破变换类似，并非可逆；事实上，它是一种双重覆盖。更一般地，在 n 体问题中，可应用 Levi-Cevita 变换证明， n 体问题的解能够解析延拓穿过孤立的二体碰撞（在天体力学中，这也称为正则化）。值得注意的是，Mcgehee [38] 使用爆破方法研究了共线三体问题背景下更为复杂的三体碰撞。具体而言，作者将碰撞集爆破为一个球面，并在进行去奇异化后，得到碰撞流形上的双曲平衡点。由此，作者通过双曲不变流形得出结论：三体碰撞无法正则化。随后， [16] 运用这一方法证明，同时二体碰撞情形无法正则化。值得注意的是， [37] 证明了在共线情形下，它恰好是 $C^{8/3}$ 可正则化的。 [16, 38] 基于正规形理论和爆破解法给出了一种独立的几何证明，见 [10]。在 [11] 中，同一批作者运用这一方法证明，相同结论在平面情形下也成立；这一结果最初由 [37] 提出猜想。

1.1. 概要。 本文结构如下：第2节中，我们介绍用于刻画 $\mathcal{E}_\infty$ 的方法（基于某些爆破变换），并提出两个关于（1.1）存在光滑不变流形的定理：定理2.6讨论对应于 $\mathcal{E}_\infty = 0$ 的轨道的存在性，定理 2.7讨论对应于 $|\mathcal{E}_\infty| \in (0,1)$的光滑不变流形的存在性，另见定理 2.8。第3节中，我们利用关于以下形式的解析系统$x^2 \frac{dy}{dx} = F(x, y)$的Gevrey-1不变流形 $y = Y(x)$ 的一般结果，证明定理2.6，其中 $F(0, 0) = 0$且 $D_y F(0, 0)$非奇异。笔者认为，这些结果并不广为人知。我们沿用 [4], 的方法，该文以或许最容易理解的方式证明了此类流形（以及某些正规形）的存在性。第4节中，我们借助正规形理论（基于平均化）建立一个具有适当正则性的方程来描述不变流形，并通过应用隐函数定理求解该方程，从而证明定理2.7。这种方法或许具有普遍意义。第5节中，我们依次进行一系列爆破变换，并结合适当的紧化，以提供动力学的几何描述。我们在图1中对此作了总结。由 [35], 可知， $|\mathcal{E}_\infty|$ 不会超过1。爆破分析的结果将为这一事实提供另一种刻画方式，同时也使我们能够探讨 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1$中的微妙问题。我们将在最后的讨论部分，即第6节，进一步详细阐述这些内容。

2. Existence of invariant manifolds

由于 L 的方向保持不变，不失一般性，我们可以考虑 $u(t) \in \mathbb{R}^2$。下文均如此处理。按通常方式将 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 认同后，令

$$u := re^{i\theta}, \tag{2.1}$$

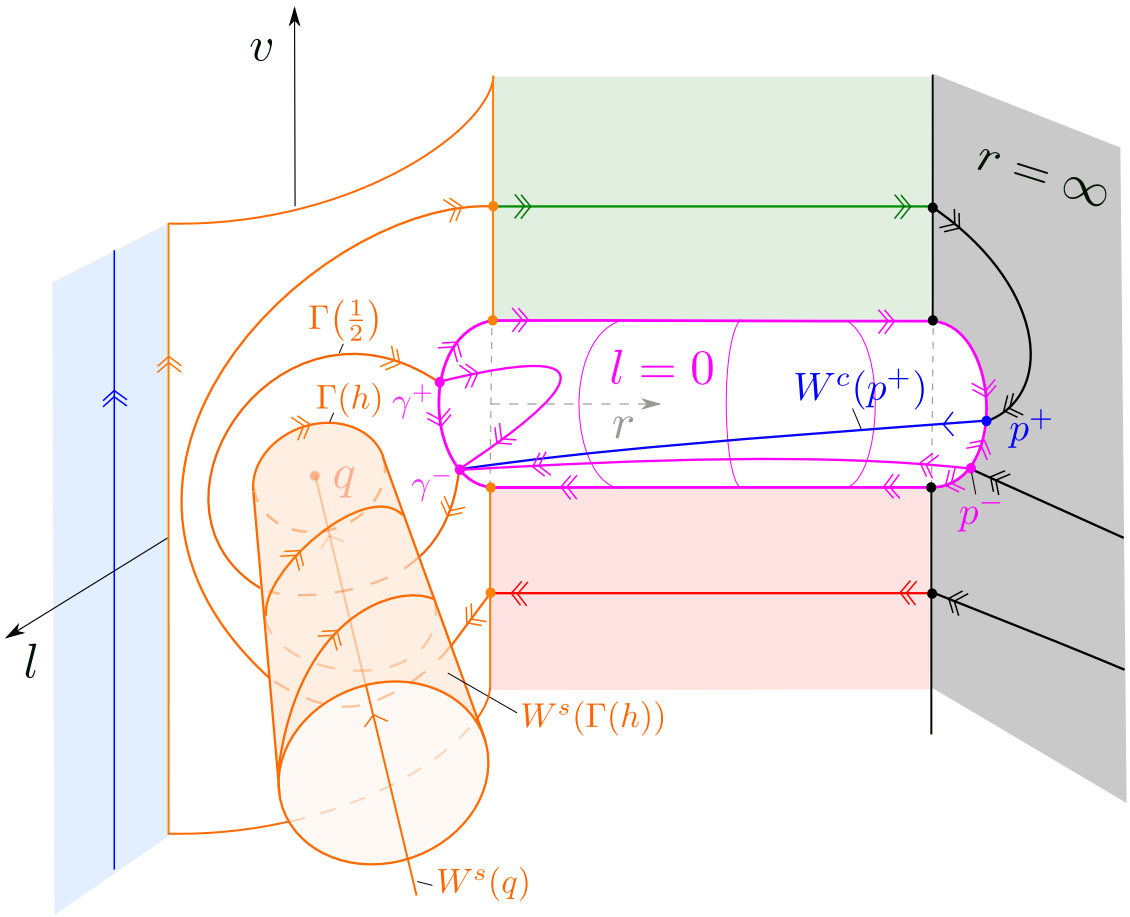


FIGURE 1. 爆破（及去奇异化）后，方程 (1.1) 动力学的几何图像。这里 $l = |L|$ 和 v 由 $v = l\dot{r}$定义，见 (2.4)。不变流形 $W^s(q)$ 和 $W^s(\Gamma(h))$ 分别是零-Hopf 点q 和周期轨道 $\Gamma(h)$、 $h \in (0, \frac{1}{2})$ 的稳定集，它们位于 $r = l = 0$ 的爆破上； $\Gamma(h)$ 的法向方向（其中 $l > 0$）是非双曲的。 $W^s(\Gamma(h))$ 对应于 $|\mathcal{E}_\infty| \in (0, 1)$，而 $W^s(q)$ 对应于 $\mathcal{E}_\infty = 0$。最后，$|\mathcal{E}_\infty| = 1$位于紫色的 $l = 0$-圆柱上。更多细节见第 5 节。异宿环 $\Gamma_1(\frac{1}{2})$ 对于描述 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1$至关重要，见第 6 节。此外， $l = 0$ 内连接 γ^+和 γ^- 的异宿轨道对应于弹射-碰撞轨道，其中 $r(t) \to 0$ 在反向和正向时间中成立，见 [34]。另一方面，无穷远处 p^- 与 γ^- 之间的连接是捕获-碰撞轨道，其中 $r(t) \to 0$ 在反向和正向时间中成立，例如见 [9, 34]。非双曲鞍点 p^+ 与 γ^- 之间唯一的捕获-碰撞连接，是弹射-碰撞轨道与捕获-碰撞轨道之间的边界，见注5.7。

并令

$$l := |L| = r^2\dot{\theta} \geq 0, \tag{2.2}$$

表示角动量的大小。于是（1.1）变为

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{1}{r^2} + \frac{l^2}{r^3} - \delta \dot{r}, \\ \dot{l} &= -\delta l. \end{aligned} \tag{2.3}$$

在本节中，我们假设 $l > 0$，并定义坐标 r_1 和v 为

$$r = l^2 r_1, \quad v = l\dot{r} \tag{2.4}$$

这些坐标通过我们的爆破解法系统地出现，见第5节。于是，动能 K 具有以下形式：

$$K(\dot{u}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2l^2}\left(v^2 + \frac{1}{r_1^2}\right),$$

在（r_1， v， l）坐标中。此外，我们有以下微分方程

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= l^{-3}\left(v + 2\delta r_1 l^3\right), \\ \dot{v} &= l^{-3}\left(-\frac{r_1 - 1}{r_1^3} - 2\delta v l^3\right), \\ \dot{l} &= -\delta l. \end{aligned} \tag{2.5}$$

现在，由于 l^{-3} 是右端的公因子，我们进行一个相应于乘以 l^3 的非线性时间变换：

$$\begin{aligned} r_1' &= v + 2\delta r_1 l^3, \\ v' &= -\frac{r_1 - 1}{r_1^3} - 2\delta v l^3, \\ l' &= -\delta l^4. \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 $l > 0$， （2.5）和（2.6）是等价的。然而，（2.6）对 $l = 0$ 有定义（它定义了一个不变集），因此我们可以利用动力系统理论，通过研究（2.6）来推断从$l = 0$ 到 $l > 0$ 的性质。反过来，这些性质也适用于等价的系统（2.5）。

注 2.1. 下文中，我们将用$\dot{()}$ 表示对原始时间求导。相比之下，我们将反复使用$()'$ 表示对不同时间求导。根据上下文，应能清楚看出不同的$()'$ 之间可能存在怎样的关系。

在（2.6）中令 $l = 0$，得

$$\begin{aligned} r_1' &= v, \\ v' &= -\frac{r_1 - 1}{r_1^3}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其为哈密顿系统，哈密顿函数为：

$$H(r_1, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{(r_1 - 1)^2}{2r_1^2}. \tag{2.8}$$

注 2.2。 若 $\delta = 0$，则 *(1.1)* 化为保守开普勒问题，而哈密顿函数 *(2.8)* 用原变量 r、$\dot{r}$ 和 l 表示为：

$$H(l^{-2}r, l\dot{r}) = \frac{1}{2}l^2\dot{r}^2 + \frac{(l^2-r)^2}{2r^2},$$

$is,$ 以及 l，它是 *(2.3)* 的一个守恒量。事实上，在这种情况下 $H = \frac{1}{2}|\mathcal{E}|^2 \quad e.$

引理 2.3. *考虑 (2.1)、(2.2) 和 (2.4)*。则

$$\dot{u} = \frac{v}{l}e^{i\theta} + \frac{il}{r}e^{i\theta},$$

and

$$e^{-i\theta}\mathcal{E}(u, \dot{u}) = \frac{1-r_1}{r_1} - iv,$$

使得

$$H(r_1, v) = \frac{1}{2}|\mathcal{E}(u, \dot{u})|^2. \tag{2.9}$$

证明。 直接计算。 □

作为推论，我们有

$$H_\infty(r_1, v, l) := \lim_{t\to\infty} H(\underline{r}_1(t, r_1, v, l), \underline{v}(t, r_1, v, l)) = \frac{1}{2}|\mathcal{E}_\infty(u, \dot{u})|^2, \tag{2.10}$$

其中我们使用 $(r_1(t, _ r_1, \ v, \ l)\ v(t, _ r_1, \ v, \ l)\ l(t, _ r_1, \ v, \ l))$，其中

$$\underline{z}(0, \ldots) = z,$$

$z = r_1, \ v,$ 以及 l，作为我们对方程 (2.6) 的流的记号。

引理2.4。 $(r_1, v) = (1, 0)$ 是方程 *(2.7)* 的一个中心，周围被周期轨道 $\Gamma_1(h), h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 环绕，这些轨道由水平集 $H(r_1, v) = h$ 给出。 $\Gamma_1(h)$ 与 r_1 轴相交于两点 $(r_{1,\pm}(h), 0)$，且

$$r_{1,-}(h) = \frac{1}{1+\sqrt{2h}}, \quad r_{1,+}(h) = \frac{1}{1-\sqrt{2h}}.$$

由水平集 $H(r_1, v) = \frac{1}{2}$ 给出的无界轨道 $\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$（根据 *(2.10)*，对应于 $|\mathcal{E}_\infty| = 1$），与 r_1 轴仅在 $r_1 = r_{1, \ -}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 处相交；它是一条分界轨道，将有界轨道（$H(r_1, v) < \frac{1}{2}$）与无界轨道（$H(r_1, v) > \frac{1}{2}$）分隔开。

证明。 直接计算。特别注意，$(r_1, \ v) = (1, \ 0)$ 是哈密顿函数的一个极值点（最小值点），因此也是 (2.7) 的一个中心。事实上，在 $(r_1, \ v) = (1, \ 0)$ 附近进行线性化得到 $\pm i$ 作为特征值。□

我们在图2中展示了 (2.7) 的相图。

在完整系统的相应平衡点 q_1 处，对 (2.6) 进行线性化，得到

$$q_1 : \quad (r_1, v, l) = (1, 0, 0),$$

显然会产生特征值 $\pm i, \ 0$。因此，它对应于一个零-Hopf 点 [17]。类似地，所有周期轨道 $\Gamma_1(h)$、$h \in \left(0, \ \frac{1}{2}\right)$ 嵌入完整的7

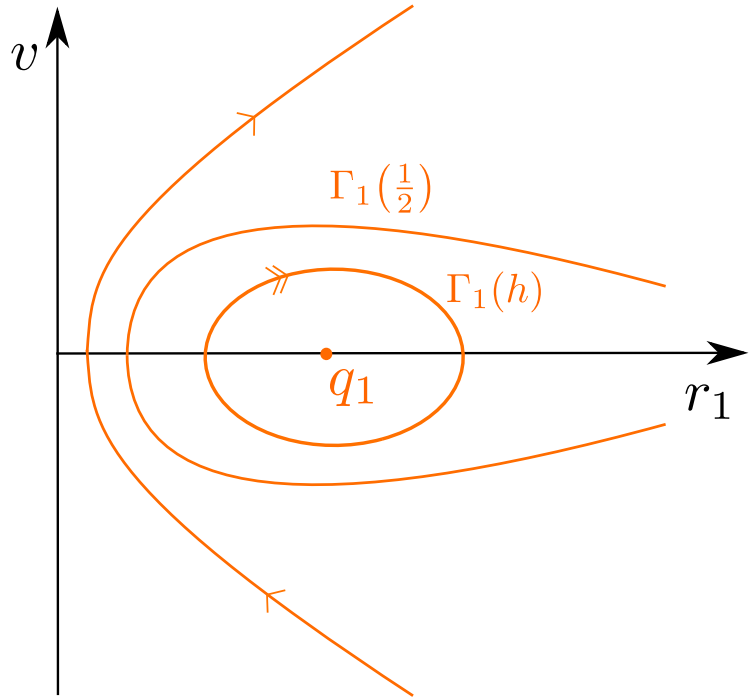


FIGURE 2.（2.7）的相图。由 $H(r_1, v) = \frac{1}{2}$定义的轨道是一条分界轨道，将有界轨道与无界轨道分隔开来。

系统 (2.6) 中也都是退化的。因此，这些点集的稳定集描述因缺乏双曲性而变得复杂。

注2.5。 </style}对于，回顾注2.2，对应于保守开普勒问题中零偏心率的圆轨道，而 (h)、$h \in (0, \frac{1}{2})$对应于偏心率为 $|\mathcal{E}| \in (0, 1)$ 的椭圆轨道。最后，$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$ 对应于抛物线轨道，而 $\Gamma_1(h)$、$h > \frac{1}{2}$对应于双曲轨道。

2.1. 主要结果。 现在陈述我们的主要结果。

定理2.6。 （$W^s_{loc}(q_1)$ 的局部稳定流形 q_1。）局部稳定集 $W^s_{loc}(q_1)$ 是一个光滑的一维流形，具有如下图形式

$$r_1 = 1 + l^3 F_1(l^3), \quad v = l^3 G_1(l^3), \quad l \in [0, l_0], \tag{2.11}$$

当 $l_0 > 0$ 足够小时，且 F_1、G_1 : $[0, l_0] \to \mathbb{R}$ 是 *Gevrey-1*光滑函数。此外，

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} F_1(0) = 0, \quad \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} G_1(0) = 0, \tag{2.12}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立。

利用 (2.4)，我们发现 (2.11) 中的 $W^s(q_1)$ 具有以下形式

$$r = l^2(1 + l^3 F_1(l^3)), \quad \dot{r} = l^2 G_1(l^3),$$

关于 r 和 $\dot{r}$。这些量是沿此轨道的 l 的光滑函数，并按 $e^{-2\delta t}$衰减。由于 $F_1(0) = 0$，参见带有 $n = 0$ 的 (2.12)，我们由 (1.2)、(2.2) 和 (2.4) 得到

that

$$\frac{d\theta}{dl} = -\frac{1}{\delta l^4(1+l^3F_1(l^3)} := -\frac{1}{\delta l^4}\left(1+l^6\widetilde{F}_1(l^3)\right), \tag{2.13}$$

从而得到总和

$$l^3\theta(l) + l^3\int\frac{1}{\delta l^4}dl = l^3\theta(l) - \frac{1}{3\delta},$$

等于

$$-\frac{l^3}{3\delta}\int\widetilde{F}_1(l^3)dl^3,$$

根据 (2.13)，它是沿 (2.11) 中轨道的 l^3 的光滑函数。这一结果补充了 [35, Eq. (43)] 的结论，后者表明，只要 $|\mathcal{E}_\infty| \in (0,1)$，$\dot{\theta}l^{-3}$ 的 $\limsup_{t\to\infty}$ 和 $\liminf_{t\to\infty}$ 都存在。

现在我们将注意力转向 $W^s(\Gamma_1(h))$ 的稳定集，其中 $h \in (0, \frac{1}{2})$。

定理 2.7.（$\Gamma_1(h)$ 的局部稳定流形。）固定 $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$。则 $\Gamma_1(h)$ 的稳定集 $W^s(\Gamma_1(h))$ 定义为 $H_\infty(r, v, l) = h$。此外，任取 $k \in \mathbb{N}$。则存在 $\Gamma_1(h)$ 的一个邻域 $N(k, h)$，使得 $W^s_{loc}(\Gamma_1(h)) = W^s(\Gamma_1(h)) \cap N(k, h)$ 是一个 C^k-光滑二维子流形。对 h 的依赖也是 C^k-光滑的。

尽管定义域 $N(k, h)$ 依赖于 k 和 h，但流在 $l = 0$ 之外是正则的，因此我们可以通过应用反向流将局部流形延拓为全局流形。由于系统是实解析的，这些全局稳定流形实际上也具有 C^k。类似地，若固定一个紧区间 $I \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$，则我们可以统一描述 $N(k)$ 内的所有局部流形：$= \cap_{h\in I} N(k, h)$；通过在此集合上进行研究，我们的方法还表明稳定流形也具有 C^k。进而，由于 $k \in \mathbb{N}$ 是任意的，我们得到以下结果：

定理 2.8。 $q_1 : (r, v, l) = (1, 0, 0)$ 和 $\Gamma_1(h)$ 分别对应的全局稳定流形 $W^s(q_1)$ 和 $W^s(\Gamma_1(h))$ $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，各自均为 C^∞。$W^s(\Gamma_1(h))$ 对 h 的依赖也具有 C^∞。

由于 (2.10)，我们已经完整描述了 $|\mathcal{E}_\infty(u, \dot{u})| \in (0,1)$ 的光滑性，这一问题在 [35] 中仍未解决。看起来，$\Gamma_1(h)$ 的全局稳定流形也可能是 Gevrey-1（正如 $q_1 : (r_1, v, l) = (1, 0, 0)$ 的稳定流形 $W^s(q_1)$ 一样），但这需要更好的标准形。[3] 研究了这类标准形，但关于迹的条件在当前背景下并不满足。

最后，我们指出，不变集 $W^s(q_1)$ 的存在性是在 [35] 中通过度理论以更间接的方式证明的。尽管这种方法没有涉及光滑性，但对于由 $\delta = \delta(|u|)$ 定义的更一般耗散项类别，[36] 中的结果 $\delta(|u|) \geq c > 0$ 仍然成立。不过，我们的结果也可以推广到这一一般情形。我们将此留给感兴趣的读者。

3. Proof of Theorem 2.6

为证明定理2.6，我们从以下角度考察（2.6）：

$$x = l^3. \tag{3.1}$$

由此可得

$$\begin{aligned} r_1' &= v + 2\delta r_1 x, \\ v' &= -\frac{r_1 - 1}{r_1^3} - 2\delta v x, \\ x' &= -3\delta x^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

or

$$\begin{aligned} x^2 \frac{dr_1}{dx} &= \frac{1}{3\delta}\left(-v - 2\delta r_1 x\right), \\ x^2 \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{3\delta}\left(\frac{r_1 - 1}{r_1^3} + 2\delta v x\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

消去时间后。为了放大观察 q_1 在 $r_1 = 1,\ v = 0, x = 0$ 附近的行为，我们进行爆破变换:

$$(x, r_{11}, v_{11}) \mapsto \begin{cases} r_1 &= 1 + x r_{11}, \\ v &= x(v_{11} - 2\delta), \end{cases} \tag{3.4}$$

保持 x 不变。这就得到最终系统:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = Ay + f(x, y), \tag{3.5}$$

令 $y = (r_{11},\ v_{11})$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3\delta} \\ \frac{1}{3\delta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x, r_{11}, v_{11}) = \frac{1}{3} x \begin{pmatrix} -5\delta^{-1} r_{11} \\ 2\delta - v_{11} - \delta^{-1} r_{11}^2 \left(3 + 3x r_{11} + x^2 r_{11}^2\right)\left(1 + x r_{11}\right)^{-3} \end{pmatrix}.$$

A 的特征值为 $\pm \frac{i}{\sqrt{3\delta}}$，且 ~~$f$~~是实解析的。众所周知，存在一个形式级数解

$$y(x) = \widehat{Y}(x) := \sum_{x=1}^{\infty} Y_n x^n, \tag{3.6}$$

对于（3.5），参见例如 [4]，以及 [19]，其中给出了当前情形下展开的详细过程。特别地,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2\delta^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 16\delta^3 \end{pmatrix},$$

并对 n应用归纳法

$$Y_{2n-1} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

for 所有 $n \in \mathbb{N}$。此处 $*$ 是一个依赖于 n 和 δ的未指定量。

令 $S(\phi,\ r) \subset \mathbb{C}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 中沿正实轴居中的开扇形区域，其半径为 r，开角为 ϕ:

$$S(\phi, r) = \{x \in \mathbb{C} : |\arg(x)| < \phi/2, 0 < |x| < r\}.$$

令 $\overline{S(\phi,\ r)}$ 表示其闭包。以下结果表明，级数 (3.6) 是 Gevrey-1 且*1*-可求和 [2]:

命题 3.1。 存在足够小的 $x_0 > 0, \phi > 0$ ，以及一个 *Gevrey-1* 函数Y： $S(\phi+\pi, r) \to \mathbb{C}$，满足 $Y(0) = 0$，且在 $S(\phi+\pi, r)$ 上实解析，使得其图

$$y = Y(x), \quad x \in S(\phi + \pi, r)$$

满足方程 *(3.5)*，且 $Y(0) = 0$。这里， Y具有 Y，见 *(3.6)*，作为 *Gevrey-1* 渐近级数，使得 $Y^{(n)}(0) = n!\ Y_n$

证明。</style}结论可由 $[4,$ 定理 $3]$ 得出；尽管该结果并未直接论证不变流形的存在性（而是 [4] 证明了某种标准形的存在性），但利用方程 (8) 中集合 $y = 0$ 的 $[4,$ 不变性，可以将其作为推论得到。为完整起见，我们给出一个仅论证 $y = Y(x)$ 存在性的证明版本，另见 $[28,$ 附录 A$],$ ，其中包含一个类似的证明。

沿着 [4] 的思路，我们首先 (a) 将 (3.3) 变换为“Borel 平面”上的方程（通过 Borel 变换 $\mathcal{B}$），然后 (b) 在该平面上应用不动点论证，最后 (c) 通过应用 Laplace 变换得到所需的解。

为满足我们的目的，Borel 变换定义如下：若 $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$是一个 Gevrey-1 形式级数：

$$|h_n| \le a b^n n!, \tag{3.8}$$

则 h 的 Borel 变换由下式给出

$$\mathcal{B}(h)(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+1}}{n!} u^n.$$

显然，若 (3.8) 成立，则 $\mathcal{B}(h)$ 在 $|u| < b^{-1}$ 上解析。另一方面，对于 Laplace 变换，我们需要在无穷扇区内至多具有指数增长$|\alpha(u)| \le \mathcal{O}(1) e^{\zeta|u|}$, $\zeta > 0$的解析函数 $\alpha(u)$。为此，令 $S(\phi) \subset \mathbb{C}$ 为沿正实 x轴居中、开角为 $\phi \in (0, \pi)$ 的（无穷）扇区，并令 $B(R)$ 为以 0 为中心、半径为 R 的开球。最后，设

$$\Delta := S(\phi) \cup B(R).$$

于是，对任意 $\zeta > 0$，我们定义范数

$$\|\alpha\|_\zeta := \sup_{u \in \Delta} \left\{ |\alpha(u)| (1 + \zeta^2 |u|^2) e^{-\zeta|u|} \right\}, \tag{3.9}$$

参见 $[4],$ 在 Δ上的解析函数空间：

$$\mathcal{G} := \{\alpha : \alpha \text{ is analytic on } \Delta \text{ and } \|\alpha\|_\zeta < \infty\}.$$

赋范空间 $(\mathcal{G}, \ \|\cdot\|_\zeta)$ 是一个完备空间。接下来我们需要 ζ 足够大。范数 $\|\cdot\|_\zeta$ 中的因子 $1 + \zeta^2 |w|^2$ 确保卷积：

$$(\alpha \star \beta)(u) = \int_0^u \alpha(s) \beta(u - s) ds,$$

作为 $\mathcal{G}$上的双线性算子是连续的。特别地，我们有

$$\|\alpha \star \beta\|_\zeta \le \frac{4\pi}{\zeta} \|\alpha\|_\zeta \|\beta\|_\zeta,$$

参见 [4, 命题 4]。Laplace 变换（沿正实轴 ）

$$\mathcal{L}(\alpha)(x) := \int_0^\infty \alpha(u)e^{-u/x}du,$$

因此对任意 $\alpha \in \mathcal{G}$ 都有定义。事实上，我们有如下结果 .

引理 3.2. [4, 命题 3] *Laplace* 变换定义了一个线性连续映射，其算子范数为 $\|\mathcal{L}\| \le 1$，它将 $\mathcal{G}$ 映射到局部扇形域$S(\pi+\phi, R_0) = S(\pi+\phi) \cap B(R_0)$ 上的解析函数集合，其中 $\phi \in (0,\pi)$ 且 $R_0 > 0$ 充分小。此外，

$$\mathcal{L}(\alpha \star \beta)(x) = \mathcal{L}(\alpha)(x)\mathcal{L}(\beta)(x),$$

and

$$x^2\frac{d}{dx}\mathcal{L}(\alpha)(x) = \mathcal{L}(u\alpha)(x), \tag{3.10}$$

其中 $u\alpha$ 是函数 $u \mapsto u\alpha(u)$，对任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ 均成立。

根据 (3.10)，我们现在可以将 (3.5) 的左端写成 $y = Y(x)[uI - A]\Phi(u)$，其中 $\Phi = \mathcal{B}(Y)$。为了构造相应的右端，我们需要处理非线性项 $f(x, Y(x))$。这由 [4, 命题 5]描述:

引理3.3。将 f写成收敛级数 $f(x,y) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)y^n$, $f_n(x) := \sum_{m=1}^\infty f_{mn}x^m$并令 F_n 为 f_n的 *Borel* 变换。则对于每个 n，都有 $F_n \in \mathcal{G}$。固定 $C_0 > 0$，并取足够大的 ζ，回顾式 *(3.9)*，考虑满足 $\|\alpha\|_\zeta \le C_0$的 $\alpha \in \mathcal{G}$。则由 $\alpha \mapsto f^*(\alpha)$ 定义的

$$f^*(\alpha)(u) := \sum_{n=1}^\infty F_n(u) \star \alpha(u)^{\star n},$$

在 $\mathcal{G}$中收敛、可微，并满足以下估计

$$\|f^*(\alpha)\|_\zeta \le C_1, \quad \|D(f^*)(\alpha)\|_\zeta \le \zeta^{-1}C_1, \tag{3.11}$$

其中某个常数 $C_1 > 0$ 仅依赖于 f 和 C_0。此外，

$$\mathcal{L}(f^*(\alpha))(x) = f(x, \mathcal{L}(\alpha)(x)). \tag{3.12}$$

根据式 (3.12)，因此最终需要考虑

$$\Phi(u) = [uI - A]^{-1}f^*(\Phi)(u), \tag{3.13}$$

其中 Φ 是 Y的 Borel 变换。方程 (3.13)具有不动点方程的形式。由于 A 的特征值是虚数，若取 $\phi \in (0,\pi)$，则 $[uI - A]^{-1}$在 $S(\phi)$上是一致有界的。利用式 (3.11)，可知存在某个 $M > 0$，它依赖于 f、ϕ 和 R，使得当 $\zeta > 0$ 足够大时，式 (3.13) 的右端在满足 $\|\cdot\|_\zeta \le M$ 的 $\mathcal{G}$ 子集上定义一个压缩映射。因此，根据巴拿赫不动点定理，存在唯一解 $\Phi \in \mathcal{G}, \|\Phi\|_\zeta \le M$，满足式 (3.13)。应用 Laplace 变换，即可得到所需的解

$$Y(x) := \mathcal{L}(\Phi)(x),$$

利用（3.10）和（3.12）得到（3.5）。函数 Y定义在定义域 $S(\pi+\phi, R_0) = S(\pi+\phi) \cap B(R_0)$ 上，并具有引理 3.2 所述的性质。最后，我们强调，当自变量为实数时，Borel 变换的值也是实数。因此，当Φ 为实数时，（3.13）也是实数。由于沿正实轴积分时，拉普拉斯变换的结果为实数，所以如所述，$Y = \mathcal{L}(\Phi)$ 在 $S(\pi+\theta, R_0)$ 上实解析。□

将命题 3.1 中的流形变换回 $(r_1,\ v,\ l)$ 坐标，利用（3.1）和

$$\begin{pmatrix} F_1(l^3) \\ G_1(l^3)+2\delta \end{pmatrix} := Y(l^3),$$

参见 (3.4)，可得 (2.11)。(2.12) 也可由 (3.7) 得出。 $W^s_{loc}(q_1)$ 不可能包含 (2.11) 中没有的点；这由定理 2.7 得出，我们将在下一节证明这一点。定理2.6的证明至此完成。

4. Proof of Theorem 2.7

为证明定理 2.7，我们将分三步进行：首先引入适当的（作用量-角度）坐标，以参数化 $H(r_1,\ v) = h$，见第 4.1 节。随后在第 4.2 节中，通过平均化将我们的系统化为标准形。最后在第 4.3 节中，我们利用标准形建立关于不变流形$W^s(\Gamma_1(h))$ 的方程，并用隐函数定理求解。实质上，我们的方法让人想起流盒论证；我们将证明存在光滑坐标 $(h,\ \phi,\ l)$，$\phi \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$，其中 $h' = 0$。

4.1. 作用角坐标。 我们首先考虑如下重复给出的平面哈密顿系统: (2.7),

$$\begin{aligned} r_1' &= v, \\ v' &= -\frac{r_1-1}{r_1^3}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其哈密顿函数为:

$$H(r_1,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{(r_1-1)^2}{2r_1^2}.$$

集合 $H^{-1}(I)$ 满足 $I := \left(0, \frac{1}{2}\right)$，其中充满了以点 $(r_1, v) = (1,0)$ 为中心的周期轨道。众所周知（例如参见 [39],），该集合上存在一个实解析辛微分同胚

$$\Psi : (r_1, v) \mapsto (A, \phi_1) \in (0, J_0) \times \mathbb{T}, \quad \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),$$

其作用角坐标为 (A, ϕ_1)，使得 (4.1) 化为

$$\begin{aligned} A' &= 0, \\ \phi_1' &= \Omega'(A). \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里 $\Omega(A) = H \circ \Psi^{-1}(A, \phi_1)$ 是用新坐标表示的哈密顿函数；显然，关键在于 Ω 与 ϕ_1 无关。考虑 $\Gamma_1(h) = \{(r_1, v) : H(r_1, v) = h\}$, $h \in I$，并记 $\Psi = (\Psi_A, \Psi_\phi)$。那么 $A = \Psi_A(r_1, v)$ 就是椭圆 $\{(r_1, v) :\ H(r_1, v) \le h\}$ 所围成的面积，而 $\phi_1 = \Psi_\phi(r_1, v) \in \mathbb{T}$ 使得 $dr_1 \wedge dv = d\phi_1 \wedge dA$。由 (4.2) 可知，角度 ϕ_1 是时间的尺度化（模 2π），使得每个 $\Gamma_1(h)$ 都是 2π-周期的。因此，若 $p(h)$ 是 $\Gamma_1(h)$ 的周期，则

$$\Omega'(A) = \frac{2\pi}{p(h)} > 0. \tag{4.3}$$

就我们的目的而言，使用 $H = \Omega(A)$ 而非 A 作为作用量变量会更方便。利用 (4.3)，可得

$$A \mapsto H = \Omega(A), \tag{4.4}$$

是一个实解析微分同胚，其反函数 $H \mapsto \Omega^{-1}(H)$ 定义在 $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上。我们将 Ψ_A 与（4.4）复合，得到以下实解析微分同胚：

$$(r_1, v) \mapsto (H, \phi_1) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \mathbb{T},$$

在 $H^{-1}(I)$ 上，将（4.1）变换为

$$\begin{aligned} H' &= 0, \\ \phi_1' &= \Omega_0(H), \end{aligned}$$

with

$$\Omega_0(H) := \Omega'(\Omega^{-1}(H)). \tag{4.5}$$

现在我们将注意力转向 $l > 0$-系统。我们仍然更倾向于使用 $x = l^3$ 而不是 l，因此考虑（3.2），现重述如下：

$$\begin{aligned} r_1' &= v + 2\delta r_1 x, \\ v' &= -\frac{r_1 - 1}{r_1^3} - 2\delta v x, \\ x' &= -3\delta x^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

引理 4.1。令 X_1 表示（4.6）的向量场，并定义以下函数

$$H_1(r_1, v, x) := H(r_1, v) + 2\delta r_1 v x + 3\delta^2 r_1^2 x^2.$$

Then

$$\mathcal{L}_{X_1} H_1(r_1, v, x) = -6\delta^3 r_1^2 x^3, \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{L}_{X_1} H_1 = \nabla H_1 \cdot X_1$ 是李导数。

证明。由直接计算可得：

$$\frac{\partial H_1}{\partial r_1} r_1' + \frac{\partial H_1}{\partial v} v' = 6\delta^2 r_1 v x^2 + 12\delta^3 r_1 x^3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x} x' = -6\delta^2 r_1 v x^2 - 18\delta^3 r_1^2 x^3,$$

使得

$$\mathcal{L}_{X_1} H_1 = \frac{\partial H_1}{\partial r_1} r_1' + \frac{\partial H_1}{\partial v} v' + \frac{\partial H_1}{\partial x} x' = -6\delta^3 r_1^2 x^3.$$

□

引理 4.2. 取一个开区间 J，使得 $J \subset I$。那么存在一个 $x_0 > 0$，使得

$$\widetilde{\Psi} : (r_1, v, x) \mapsto (H_1, \phi_1, x)$$

定义在 $H^{-1}(J) \times (-x_0, x_0)$ 上的映射是实解析微分同胚。

证明。$\widetilde{\Psi}(r_1, v, x) = (\Psi_1(r_1, v, x), \Psi_2(r_1, v, x), x)$ 是由 $(r_1, v, x) \mapsto (H(r_1, v), \phi_1(r_1, v), x)$ 定义的微分同胚的 x-纤维化（多项式）扰动。因此，结论由反函数定理得出。□

引理 4.3。 设 X_1 表示式 *(4.6)* 的向量场，并考虑引理 *4.2* 中的 Ψ 。那么 $\sim\Psi_* X_1$ 具有以下形式：

$$\begin{aligned} H_1' &= x^3 R_1(H_1, \phi_1, x), \\ \phi_1' &= \Omega_0(H_1) + x P_1(H_1, \phi_1, x), \\ x' &= -3\delta x^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中，$_0$ 是在 *(4.5)* 中定义的 Ω，对所有 $H_1 \in J$ 均成立。函数 R_1 和 P_1 都是在 $J \times \mathbb{T} \times (-x_1, x_1)$ 上定义的实解析函数，其中 $x_1 > 0$ 足够小。

证明。 结论可直接由 (4.2)、引理 4.1 和引理 4.2 得出。特别地，由 (4.7) 可知

$$R_1(H_1, \phi_1, x) = -6\delta^3 r_1^2,$$

其中 $r_1 = r_1(H_1, \phi_1, x)$，参见引理 4.2。 □

4.2. **标准形**。 现在我们将采用平均化方法对 (4.8) 进行标准化。具体而言，这将使角度依赖项关于 x 移至更高阶。

引理 4.4。 (迭代引理) 考虑以下实解析系统

$$\begin{aligned} H_n' &= x^3 \Lambda_n(H_n, x) + x^{n+2} R_n(H_n, \phi_n, x), \\ \phi_n' &= \Omega_n(H_n, x) + x^n P_n(H_n, \phi_n, x), \\ x' &= -3\delta x^2, \end{aligned} \tag{4.9}$$

它定义在 $J_n \times \mathbb{T} \times (x_n, x_n)$ 上，且具有 $n \in \mathbb{N}$。这里，$\Omega_n(H_n, 0) = \Omega_0(H_n) \geq c > 0$。那么，对任意 $J_{n+1} \subset J_n$，都存在一个常数 $x_{n+1} > 0$，以及一个 x-纤维化实解析微分同胚 $(H_n, \phi_n, x) \mapsto (H_{n+1}, \phi_{n+}, x)$，其形式近似于恒等映射

$$H_{n+1} = H_n + x^{n+2} T_n(H_n, \phi_n, x), \tag{4.10}$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + x^n Q_n(H_n, \phi_n, x), \tag{4.11}$$

使得

$$\begin{aligned} H_{n+1}' &= x^3 \Lambda_{n+1}(H_{n+1}, x) + x^{n+3} R_{n+1}(H_{n+1}, \phi_{n+1}, x), \\ \phi_{n+1}' &= \Omega_{n+1}(H_{n+1}, x) + x^{n+1} P_{n+1}(H_{n+1}, \phi_{n+1}, x), \\ x' &= -3\delta x^2, \end{aligned} \tag{4.12}$$

且右端在 $J_{n+1} \times \mathbb{T} \times (-x_{n+1}, x_{n+1}$ 上实解析 $)$.

证明。 该结论可由经典平均化定理的一个改进版本推出，参见例如 [17]。我们写作

$$R_n(H_n, \phi_n, x) = \overline{R}_n(H_n, x) + \widetilde{R}_n(H_n, \phi_n, x),$$

其中

$$\overline{R}_n(H_n, x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_n(H_n, s, x) ds,$$

$\sim$是 $\phi \mapsto R_n$（H_n、ϕ、x）的平均值，且 R_n 的平均值为零：

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{R}_n(H_n, s, x) ds = 0. \tag{4.13}$$

接下来我们取

$$T_n(H_n,\phi_n,x) := -\Omega_0(H_n)^{-1}\int_0^{\phi_n}\widetilde{R}_n(H_n,s,x)ds,$$

在（4.10）中。注意，由（4.13）可知， T_n 对 $\phi_n\in\mathbb{T}$ 是良定义的。此外，

$$\frac{\partial}{\partial\phi_n}T_n(H_n,\phi_n,x) = -\Omega_0(H_n)^{-1}\widetilde{R}_n(H_n,\phi_n,x). \tag{4.14}$$

因此，由（4.10）可得：

$$\begin{aligned}
H'_{n+1} &= H'_n + x^{n+2}\frac{\partial}{\partial\phi}T_n(H_n,\phi_n,x)\phi'_n + \mathcal{O}(x^{n+3})\\
&= x^3\Lambda_n(H_n,x) + x^{n+2}\overline{R}_n(H_n,x) + x^{n+2}\left\{\widetilde{R}_n(H_n,\phi_n,x) + \frac{\partial}{\partial\phi_n}T_n(H_n,\phi_n,x)\Omega_0(H_n)\right\}\\
&\quad + \mathcal{O}(x^{n+3})\\
&:= x^3\Lambda_{n+1}(H_{n+1},x) + x^{n+3}R_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x),
\end{aligned}$$

with

$$\Lambda_{n+1}(H_{n+1},x) := \Lambda_n(H_{n+1},x) + x^n\overline{R}_n(H_{n+1},x),$$

利用（4.14），可得 $\{\cdots\}=0$。

随后，我们定义

$$P_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x) := x^{-n}\left[\Omega_n(H_n,x) - \Omega_n(H_{n+1},x) + x^nP_n(H_n,\phi_n,x)\right],$$

使得

$$\phi'_n = \Omega_n(H_{n+1},x) + x^nP_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x).$$

由（4.10）可知， $P_{n+\frac12}$ 可光滑延拓至 $x=0$。记

$$P_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x) = \overline{P}_{n+\frac12}(H_{n+1},x) + \widetilde{P}_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x),$$

其中

$$\overline{P}_{n+\frac12}(H_{n+1},x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{n+\frac12}(H_{n+1},s,x)ds,$$

$\widetilde{}$是 $\phi\mapsto P_{n+\frac12}$的平均值（$H_{n+1}$， ϕ， x），且 $P_{n+\frac12}$的平均值为零：

$$\int_0^{2\pi}\widetilde{P}_{n+\frac12}(H_{n+1},s,x)ds = 0.$$

接着，我们对 ϕ_n方程应用相同的步骤。具体而言，我们考虑如下变换：

$$\phi_{n+1} = \phi_n + x^nQ_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x),$$

固定 H_{n+1} 和 x，并且

$$Q_{n+\frac12}(H_{n+1},\phi_n,x) := -\Omega_0(H_{n+1})^{-1}\int_0^{\phi_n}\widetilde{P}_{n+\frac12}(H_{n+1},s,x)ds. \tag{4.15}$$

这导出了关于 ϕ_{n+1}的以下方程:

$$\begin{aligned}\phi'_{n+1} &= \phi'_n + x^n \frac{\partial}{\partial \phi_n} Q_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, \phi_n, x)\phi'_n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\ &= \Omega_n(H_{n+1}, x) + x^n \overline{P}_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, x) \\ &+ x^n \left\{ \widetilde{P}_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, \phi, x) + \frac{\partial}{\partial \phi_n} Q_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, \phi_n, x)\Omega_0(H_{n+1}) \right\} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\ &=: \Omega_{n+1}(H_{n+1}, x) + x^{n+1} P_{n+1}(H_{n+1}, \phi_{n+1}, x),\end{aligned}$$

with

$$\Omega_{n+1}(H_{n+1}, x) := \Omega_n(H_{n+1}, x) + x^n \overline{P}_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, x),$$

利用 (4.15) 得出 $\{\cdots\} = 0$。最后，我们令

$$R_{n+1}(H_{n+1}, \phi_{n+1}, x) := R_{n+\frac{1}{2}}(H_{n+1}, \phi_n, x).$$

证明至此完成。 □

由于 (4.8) 满足迭代引理的条件，其中 $n = 1$ 和 $\Lambda_1(H_1, x) \equiv 0$，$\Omega_1(H_1, x) \equiv \Omega_0(H_1)$，因此我们得出，对于任意 $J \subset I$ 以及任意 $N \in \mathbb{N}_0$，都可以将 (4.8) 变换为“标准形”:

$$\begin{aligned}H'_{N+1} &= x^3 \Lambda_{N+1}(H_{N+1}, x) + x^{N+3} R_{N+1}(H_{N+1}, \phi_{N+1}, x), \\ \phi'_{N+1} &= \Omega_{N+1}(H_{N+1}, x) + x^{N+1} P_{N+1}(H_{N+1}, \phi_{N+1}, x), \\ x' &= -3\delta x^2,\end{aligned} \tag{4.16}$$

当 $x_{N+1} > 0$ 充分小时，在 $J \times \mathbb{T} \times (-x_{N+1}, x_{N+1})$ 上通过关于 H 和 ϕ 的近恒等变换。此后省略下标，并将其写成等价形式

$$\begin{aligned}\frac{dH}{d\tau} &= \frac{1}{3\delta} x \left[\Lambda(H, x) + x^N R(H, \phi, x) \right], \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{1}{3\delta x^2} \left\{ \Omega(H, x) + x^{N+1} P(H, \phi, x) \right\}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= -1,\end{aligned} \tag{4.17}$$

对于 $x > 0$。

引理 4.5。 *(4.17)* 的流，$H(\tau, H_0, \underline{\phi_0}, x_0)$ $\phi(\tau, H_0, \underline{\phi_0}, x_0)$，$x(\tau, H_0, \underline{\phi_0}, x_0) = x_0 - \tau$其中

$$\underline{z}(0, \cdot) = z,$$

对于 $z = H$、ϕ，C^∞ 是否位于该集合上

$$V(\xi) := \{(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in (0, \xi) \times J \times \mathbb{T} \times (0, \xi) \,:\, 0 < \tau < x_0\}, \tag{4.18}$$

当 $\xi > 0$ 充分小时。

证明。右端是光滑的，甚至是实解析的，因此存在光滑局部流 $H(\tau, H_0, \phi_0, x_0)$ $\phi(\tau, H_0, \phi_0, x_0)$ $x(\tau, H_0, \phi_0, x_0) = x_0 - \tau$，其中 $\tau \in I(H_0, \phi_0, x_0) := (0, \tau_{\max})$，由此可知。接下来，我们对等式 (4.17) 两边积分：

$$\underline{H}(\tau, H_0, \phi_0, x_0) = H_0 - \frac{1}{3\delta}\int_{x_0}^{x} s\,[\cdots]\,ds, \tag{4.19}$$
$$\underline{\phi}(\tau, \phi_0, x_0) = \phi_0 - \frac{1}{3\delta}\int_{x_0}^{x} s^{-2}\,\{\cdots\}\,ds,$$

其中 $x = x_0 - \tau$，且 $[\cdots]$、$\{\cdots\}$ 是 (4.17) 中的括号在 $H = H(x_0 - x,\ H_0,\ \phi_0,\ x_0)$ $\phi = \phi(x_0 - x,\ H_0,\ \phi_0,\ x_0)$ 处的取值。因此，通常可得到关于 $\tau \in I(H_0,\ \phi_0,\ x_0)$ 的以下估计：

$$|\underline{H}(\tau, H_0, \phi_0, x_0) - H_0| \le C|\tau| \le Cx_0, \quad |\underline{\phi}(\tau, H_0, \phi_0, x_0) - \phi_0||\tau - x_0| \le C, \tag{4.20}$$

对某个足够大的 $C > 0$ 以及所有 $(H_0,\ \phi_0,\ x_0) \in J \times \mathbb{T} \times (0,\ \xi)$，只要 $\xi > 0$ 足够小。这表明 $\tau_{\max} = x_0$，从而完成证明。

□

4.3. 光滑不变流形的存在性。 (4.20) 中的不等式分别给出了 H 和 ϕ 的 C^0-估计。

引理 4.6。 $H(\tau,\ H_0,\ \phi_0,\ x_0)$ 可连续延拓至闭包 $V(\xi)$，见 *(4.18)*，其中 $H(0,\ H_0,\ \phi_0,\ 0) = H_0$ 对所有 $(H_0,\ \phi_0) \in J \times \mathbb{T}$ 均成立。

注 4.7。 尽管 ϕ 本身无法延拓至 $\tau = x_0$，这一点仍然成立。

证明。考虑在 $\tau \in [0, x_0$ 上给出的 $\phi(\tau, H_0, \phi_0, x_0)$。它在 $V(\xi)$ 上连续。此外，$(\tau, x_0) \mapsto H(\tau, H_0, \phi_0, x_0)$ 关于 $(H_0, \phi_0) \in J \times \mathbb{T}$ 一致绝对连续，见式 (4.19)。因此，H 可连续且唯一地延拓到闭包 $V(\xi)$。此外，根据定义，对于所有 $x_0 \in (0, \xi)$，$H(0, H_0, \phi_0, x_0) = H_0$，因而 $H(0, H_0, \phi_0, 0) = H_0$。□

设 $h \in J_0 \subset J$。于是我们考虑所得方程

$$h = \underline{H}(x, H, \phi, x), \tag{4.21}$$

其中 $(H,\ \phi,\ x) \mapsto H(x,\ H,\ \phi,\ x)$ 由引理 4.6 在 $J \times \mathbb{T} \times [0, \xi]$ 上定义且连续。

引理 4.8. 方程 *(4.21)* 在 (H, ϕ, x) 空间中定义了一个不变集 $W^s(\Gamma_1(h))$。

证明。$(x_0, H_0, \phi_0) \in W^s(\Gamma_1(h)) \implies$

$$\begin{aligned} h &= \lim_{\tau \to x_0^-} \underline{H}(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \\ &= \lim_{\tau \to (x_0 - s)^-} \underline{H}(\tau, \underline{H}(s, H_0, \phi_0, x_0), \underline{\phi}(s, H_0, \phi_0, x_0), x_0 - s) \\ &= \underline{H}(x_0 - s, \underline{H}(s, H_0, \phi_0, x_0), \underline{\phi}(s, H_0, \phi_0, x_0), x_0 - s), \end{aligned}$$

利用流的群性质。因此，对于所有 $s \in (0, x_0)$，$(H(s, H_0, \underline{\phi_0}, x_0)\ \phi(s, H_0, \phi_0, \underline{x_0})\ x_0 - s) \in W^s(\Gamma_1(h))$。□

就.....而言 在（例如）式（4.16）中使用的时间 s， $\tau \to x_0^-$ 对应于 $s \to \infty$，由于e

$$\underline{H}(0, H_0, \phi_0, 0) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{(r_1 - 1)^2}{2r_1^2},$$

回忆一下 (2.8)，另见引理 4.2 和引理 4.4，我们得出 $W^s(\Gamma_1(h))$ 是 $\Gamma_1(h)$、 $h \in J_0 \subset (0,$ $_{1\ 2})$ 的稳定集，正如所需。

命题 4.9。 考虑 *(4.17)*，固定 $N \in \mathbb{N}$，并假设存在一个 $M \in \mathbb{N}$，使得 H 可延拓为定义在闭包 $V(\xi)$ 上的 C^M-光滑函数，回忆一下 *(4.18)*，且满足

$$\frac{\partial}{\partial H_0}\underline{H}(0, H_0, \phi_0, 0) = 1. \tag{4.22}$$

那么，对任意 $J_0 \subset J$，都存在一个 $\xi > 0$，使得以下结论成立。*(4.21)* 在 $h \in J_0$下，对于以下图形式的 $(H, \phi, x) \in J \times \mathbb{T} \times [0, \xi]$，有唯一解

$$H = F(h, \phi, x), \tag{4.23}$$

其中 $F \in C^M$ 位于 $J_0 \times \mathbb{T} \times [0, \xi]$ 上。

证明。 由隐函数定理直接得到。事实上，我们有

$$h = \underline{H}(0, h, \phi, 0), \quad \frac{\partial}{\partial H_0}\underline{H}(0, h, \phi, 0) = 1,$$

对所有 $\phi \in \mathbb{T}$，由 (4.22) 可知，且由假设，(4.21) 的右端有定义，并且关于 $(H,\ \phi,\ x)$ 的 C^M $\in J \times \mathbb{T} \times [0, x_0]$。因此，我们可以将 (4.21) 中的 H 解为 $h,\ \phi,\ x$ 的函数。这给出 (4.23)，且 F 是 C^M 光滑的，因为 H 也是如此。□

在命题 4.9 的假设下，回到$l = x^3$，可得如下结论：对于任意 $h \in J_0$，(4.23) 在 (H, ϕ, l) 空间中将 $W^s(\Gamma_1(h))$ 局部参数化为一个 C^M 光滑图 $H = F(h, \phi, l^3)$， $\phi \in \mathbb{T}, l \in (0, \xi^{1/3})$。现在，由引理 4.2 和引理 4.4 可知，$(r_1, v, l) \mapsto (H, \phi, l)$，其中 $l \in (0, \xi^{1/3})$ 在 $\xi > 0$ 充分小时，是一个光滑微分同胚（在相关集合上）。因此，我们得到一个 C^M 不变流形 $W^s(\Gamma_1(h))$，它是原始 (r_1, v, l) 空间中 $\Gamma_1(h)$ 的稳定集，正如所需。

因此，为了完成定理 2.7 的证明，只需验证命题 4.9 的条件，并注意到增大 N 后，M 可以任意取值。我们将证明可以取 $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$。这里，对于 $x \in \mathbb{R}$， $\lfloor x \rfloor$ 表示下取整函数，即 $n = \lfloor x \rfloor$是满足 $n \le x$ 的最大整数。显然，一旦证明 H 能以 C^M 阶光滑的方式延拓至 V（ξ），它就满足 (4.22)。

定义

$$\underline{z}_\nu := \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \tau^{\nu_1} \partial H_0^{\nu_2} \partial \phi_0^{\nu_3} \partial x_0^{\nu_4}} \underline{z}, \tag{4.24}$$

当 $z = H,\ \phi,\ x$，且其中 $\nu = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_3) \in \mathbb{N}_0^4,\ |\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_4 \ge 0$。

引理 4.10. 固定满足 $N \ge 3$ 的 $N \in \mathbb{N}$，并令 $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$。那么存在一个充分大的常数 $C_N > 0$，以及一个充分小的常数 $\xi > 0$，使得

$$|\underline{H}_\nu(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \le C_N,$$

对于 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in \overline{V(\xi)}$， 以及所有 $|\nu| \le M$。

证明。 证明推迟至附录 A。证明依赖于对 (4.17) 的高阶变分方程进行细致估计。主要困难在于估计 ϕ_ν，这是由于 (4.17) 在 $x=0$ 处具有奇异性。我们发现

$$|\phi_\nu(\tau, H_0, \phi_0, x_0)||\tau - x_0|^{1+\nu_1+\nu_4} \leq C_N,$$

对于（τ， H_0， ϕ_0， x_0）， $\in V$（ξ），以及所有的 $|\nu| \leq M$。利用 ϕ相关项在 H方程中含有一个 x^{N+1}因子，我们便可以控制并延拓（如引理 4.6的证明中所示）H_ν到闭包V（ξ），前提是 $N > \nu_1 + \nu_4$。

□

5. Blowing up the linearly damped Kepler problem

在第2节中，我们将 $|\mathcal{E}_\infty| \in (0, 1)$的常数值刻画为（$r_1$， v， l）空间中的一个光滑圆柱，见定理 2.7。另一方面， $\mathcal{E}_\infty = 0$成为一维流形，见定理2.6。同时，由于 $|\mathcal{E}_\infty| = 1 \Rightarrow L = 0$，见 [35]， $|\mathcal{E}_\infty| = 1$是（r， v， 0）在（r， v， l）空间中定义的平面。因此， $|\mathcal{E}_\infty| = 0$和 $|\mathcal{E}_\infty| = 1$是相关不变集发生分岔的特殊情形。由 [35, 36], 还可知， $|\mathcal{E}_\infty| \in [0, 1]$，并且该集合取得所有值。在我们通过哈密顿函数 $|\mathcal{E}_\infty|$ H对 $|\mathcal{E}_\infty|$进行刻画时，见（2.9）和（2.10），这意味着如下内容：

引理 5.1。 由 $H(r_1, v) = h, \rho_1 = 0$ 定义的集合 $\Gamma_1(h)$，其中 $h \geq \frac{1}{2}$，不是一个 ω-极限集。

证明。 $H(r_1, v) > \frac{1}{2}$显然成立，因为此时 $|\mathcal{E}_\infty| > 1$，这将与 [35]矛盾。此外，尽管 $H(r_1, v) = \frac{1}{2}$对应于 $|\mathcal{E}_\infty| = 1$，但它也不可能是一个 ω-极限集，这是因为$|\mathcal{E}_\infty| = 1 \Rightarrow L = 0$，参见 [35], ，它是一个不包含 $\Gamma_1(h)$ 的不变集。□

我们将这一结果作为 [35]的推论得到。从第2节的视角无法直接理解这一结果。然而，在本节中，我们将利用爆破方法（以及去奇异化和紧化），对轨道平面内（即 $u = re^{i\theta}$）的 (1.1) 动力学作全面的几何描述。通过这种方式，我们得到一个系统，其中所有奇点都对应着实部非零的特征值（仅 q 例外，它只有虚特征值）；这使我们能够以一种独立的几何方式解释引理 5.1，并进一步阐明 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1$（对应于 $h \to \frac{1}{2}$，参见 (2.10)），另见第6节。

我们采用爆破解法的出发点是使用坐标 (r， v， l)、回忆以及 (2.2)。这得到了以下系统 (2.4)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{v}{l}, \\ \dot{v} &= \frac{l^3}{r^3} - \frac{l}{r^2} - 2\delta v, \\ \dot{l} &= -\delta l. \end{aligned} \tag{5.1}$$

现在我们定义时间重参数化，相当于将 (5.1) 的右端乘以 lr^3:

$$\begin{aligned} r' &= vr^3, \\ v' &= l\left(l^3 - rl - 2\delta r^3 v\right), \\ l' &= -\delta r^3 l^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(5.1) 和 (5.2) 对 $r > 0$、 $l > 0$ 等价，但 (5.2) 的优势在于它在 $r = 0$、 $l = 0$ 上定义良好。这使我们能够运用动力系统理论，从 $r = 0$、 $l = 0$推断出 (5.2) 的性质，进而也推断出 (5.1) 的性质。

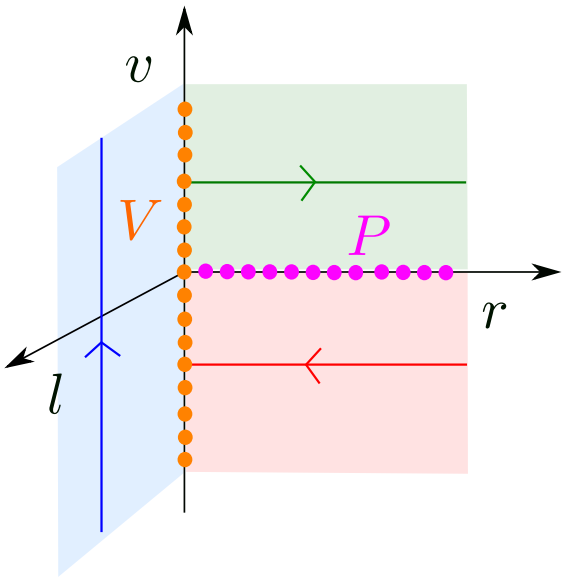


FIGURE 3. (5.2) 的动力学。 V 和 P 是退化平衡点集。

系统 (5.2) 有两个不变平面： $\{r = 0\}$ 其中

$$\begin{aligned} v' &= l^4, \\ l' &= 0, \end{aligned}$$

以及 $\{l = 0\}$ 其中

$$\begin{aligned} r' &= vr^3, \\ v' &= 0, \end{aligned}$$

见图3。它们的交集 $V = \{r = l = 0\}$ 和 $P = \{v = l = 0\}$ 完全由完全退化的平衡点 $v' = 0$构成，因为在 V或 P 中任意一点处的线性化都只有零特征值。因此，我们采用爆破方法，见 [14, 15]。具体步骤如下：首先，通过应用以下柱状吹起变换，对 V 进行爆破

$$\Phi^V: \quad \rho \geq 0, (\bar{r}, \bar{l}) \in S^1 \mapsto \begin{cases} r &= \rho^2 \bar{r}, \\ l &= \rho \bar{l}, \end{cases} \tag{5.3}$$

该变换固定 $v_\circ$。见图4。令 X 表示式 (5.2) 中的向量场。随后选择爆破权重，使得 $X = \Phi_*^V X$ 具有 ρ^4 作为公因子。因此，接下来我们研究的是去奇异化向量场 $\rho^{-4}X$。为了进行计算，我们使用两个分离图，分别记为 $(l=1)_1$ 和 $(\bar{r}=1)_2$，，其图特定坐标 $(r_1,\ v,\ \rho_1)$ 和 $(\rho_2,\ v,\ l_2)$ 定义如下

$$(\bar{l}=1)_1: \quad \begin{cases} r &= \rho_1^2 r_1, \\ l &= \rho_1, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$(\bar{r}=1)_2: \quad \begin{cases} r &= \rho_2^2, \\ l &= \rho_2 l_2. \end{cases} \tag{5.5}$$

另请参见图4以了解这些坐标的示意图。以下表达式

$$\rho_2 = \rho_1\sqrt{r_1}, \quad l_2 = 1/\sqrt{r_1},$$

定义了 $\rho_1 \geq 0, r_1 > 0$ 的光滑坐标变换。我们将分别通过除以 ρ_1^4 和 ρ_2^4 对局部向量场进行除奇异化。

注5.2。 我们在第*2*节中使用了（*5.4*）的 r_1-坐标，见（*2.4*），以证明定理 *2.6* 和定理 *2.7*。$(\bar{r}=1)_2$-图表中的坐标使我们能够跟踪并分析无界轨道 $\Gamma(h)$，其中 $h \geq \frac{1}{2}$。

随后，在（$\bar{r}=1$）$_2$-图表中，我们将发现，由 P_2 定义的集合

$$v_2 = 0,\ l_2 = 0,$$

以及 $\rho_2 \geq 0$ 是一个完全退化平衡点集；该集合显然对应于 $P_\circ$。因此，我们通过应用以下柱状吹起变换对 P_2 进行爆破:

$$\Phi^{P_2}: \quad \mu \geq 0, (\bar{v}, \bar{l}_2) \in S^1 \mapsto \begin{cases} v &= \mu\bar{v}, \\ l &= \mu\bar{l}_2, \end{cases} \tag{5.6}$$

保持 ρ_2 不变。见图5。令 X_2 表示（$\bar{r}=1$）$_2$-图中的局部向量场。那么$X_2 = \Phi_*^{P_2} X_2$ 有 μ 作为公因子。因此，我们接下来研究的是去奇异化向量场 $\mu^{-1}X_{2\circ}$ 为进行计算，我们使用三个分离图（$\bar{r}=1,\ l_2=1$）$_{21}$，（$\bar{r}=1,\ \bar{v}=1$）$_{22}$ 以及（$\bar{r}=1,\ \bar{v}=-1$）$_{23}$，其图特定坐标分别为（$\rho_2,\ v_1,\ \mu_1$）、（$\rho_2,\ \mu_2,\ l_{22}$）和（$\rho_2,\ \mu_3,\ l_{23}$），定义如下

$$(\bar{r}=1, \bar{l}_2=1)_{21}: \quad \begin{cases} v &= \mu_1 v_1, \\ l_2 &= \mu_1, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$(\bar{r}=1, \bar{v}=1)_{22}: \quad \begin{cases} v &= \mu_2, \\ l_2 &= \mu_2 l_{22}, \end{cases} \tag{5.8}$$

$$(\bar{r}=1, \bar{v}=-1)_{23}: \quad \begin{cases} v &= -\mu_3, \\ l_2 &= \mu_3 l_{23}. \end{cases} \tag{5.9}$$

这些坐标的示意图另见图5。$(\bar{r}=1,\ l_2=1)_{21}$ 与（$\bar{r}=1,\ \bar{v}=1$）$_{22}$ 之间的坐标变换为

$$\mu_2 = \mu_1 v_1, \quad l_{22} = v_1^{-1}, \tag{5.10}$$

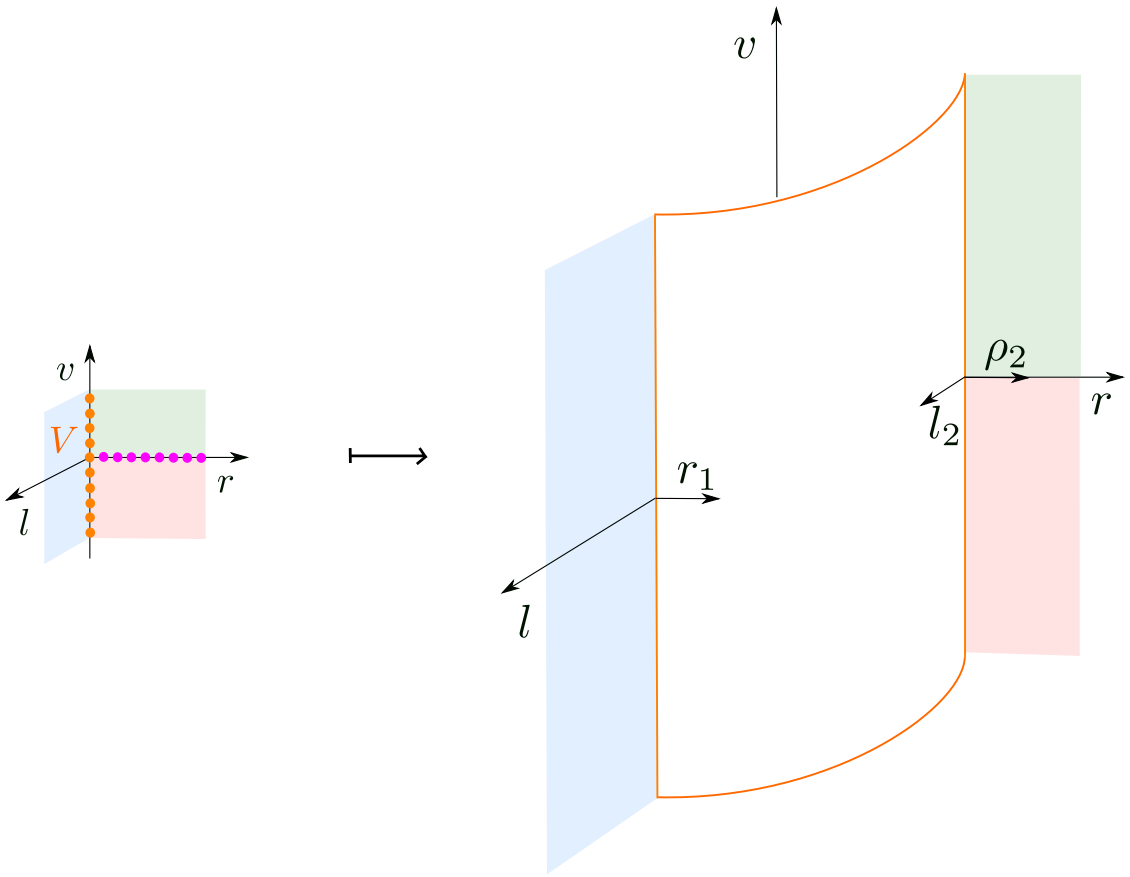


FIGURE 4. 退化集 V 的柱状吹胀示意图，见 (5.3).

对于 $\mu_1 \geq 0, v_1 > 0$。类似地，在 $(\bar{r}=1,\ l_2=1)_{21}$ 与 $(\bar{r}=1,\ \bar{v}=-1)_{22}$ 之间，我们有

$$\mu_3 = \mu_1(-v_1), \quad l_{23} = -v_1^{-1}, \tag{5.11}$$

对于 $v_1 < 0$。我们将在各个图表中，分别通过将局部向量场除以 μ_i、$i = 1,2,3$ 来实现去奇异化。

注 5.3。利用 *(5.5)* 和 *(2.4)*，可将 *(5.7)* 中的 v_1 表示为 r 和 $\dot{r}$ 的如下形式：

$$v_1 = \rho_2 \dot{r}. \tag{5.12}$$

因此，在 $(\bar{r}=1、\ l_2=1)_{21}$ 图表中得到的方程（见第*5.3*节和 *(5.19)*）等价于 $r = \rho_2^2 > 0$ 上的 *(2.3)*。然而，*(5.12)* 中的 ρ_2 因子会导致 $\dot{r}$ 的紧化。另见注 *5.6*。

正如我们将看到的，$(\bar{r}=1, \bar{v}=1)_{22}$ 中的轨道会变得无界（当 $\rho_2 \to \infty$ 时）。因此，我们需要将空间 (ρ_1, μ_2, l_{22}) 紧化。事实证明，实现这一点最方便的方法如下：

$$(\nu, l_{222}) \mapsto \begin{cases} \rho_2 &= \nu^{-1}, \\ l_{22} &= \nu^3 l_{222}, \end{cases} \tag{5.13}$$

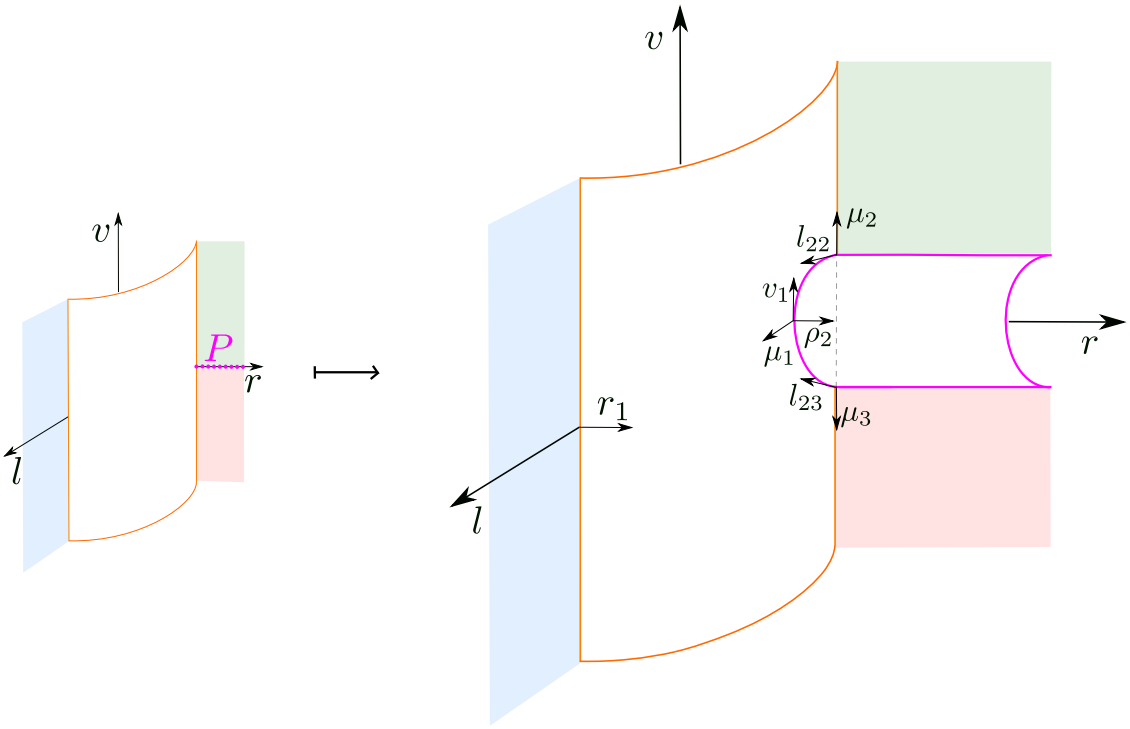


FIGURE 5. 退化集 P_2 的柱状吹胀示意图，见 (5.6).

令 $\nu \geq 0, l_{222} \geq 0$，同时保持 μ_2 不变。这样，$\nu = 0$ 对应于 $\rho_2 = \infty$（或根据 (5.4) 对应于 $r = \infty$）以及 $l_{22} = 0$。后一个性质可能看起来不太自然，但利用 (5.10) 后，我们可以发现，它导出了与 $(\bar{r} = 1, l_2 = 1)_{21}$-图表相关的 (ρ_2, v_1, μ_1)-空间的如下紧化：

$$(\nu, v_{11}) \mapsto \begin{cases} \rho_2 & = \nu^{-1}, \\ v_1 & = \nu^{-3} v_{11}, \\ \mu_1 & = \nu^3 \mu_{11} \end{cases} \tag{5.14}$$

其中 $v_{11} = l_{222}^{-1}$, $\mu_{11} = \mu_2 l_{222}$。利用 (5.11)，我们还可得到以下在 $(\bar{r} = 1, \bar{v} = -1)_{23}$-图表中的紧化：

$$(\nu, l_{23}) \mapsto \begin{cases} \rho_2 & = \nu^{-1}, \\ l_{23} & = \nu^3 l_{233} \end{cases} \tag{5.15}$$

其中 $\nu \geq 0, l_{233} \geq 0$，同时保持 μ_3 不变。

我们在图6中以示意方式展示紧化相空间的最终几何图像。该图还展示了在 $r = \infty$ 处使用的坐标。

在下一节中，我们将研究各个图表中的动力学。

注 5.4。公平地说，$\{r = 0\}$ 内的轨道在 v方向上也不受界限，见图表 *3*；从这一角度来看，对 v方向进行紧化同样是理想的。不过，为简单起见，我们选择不纳入这一点。

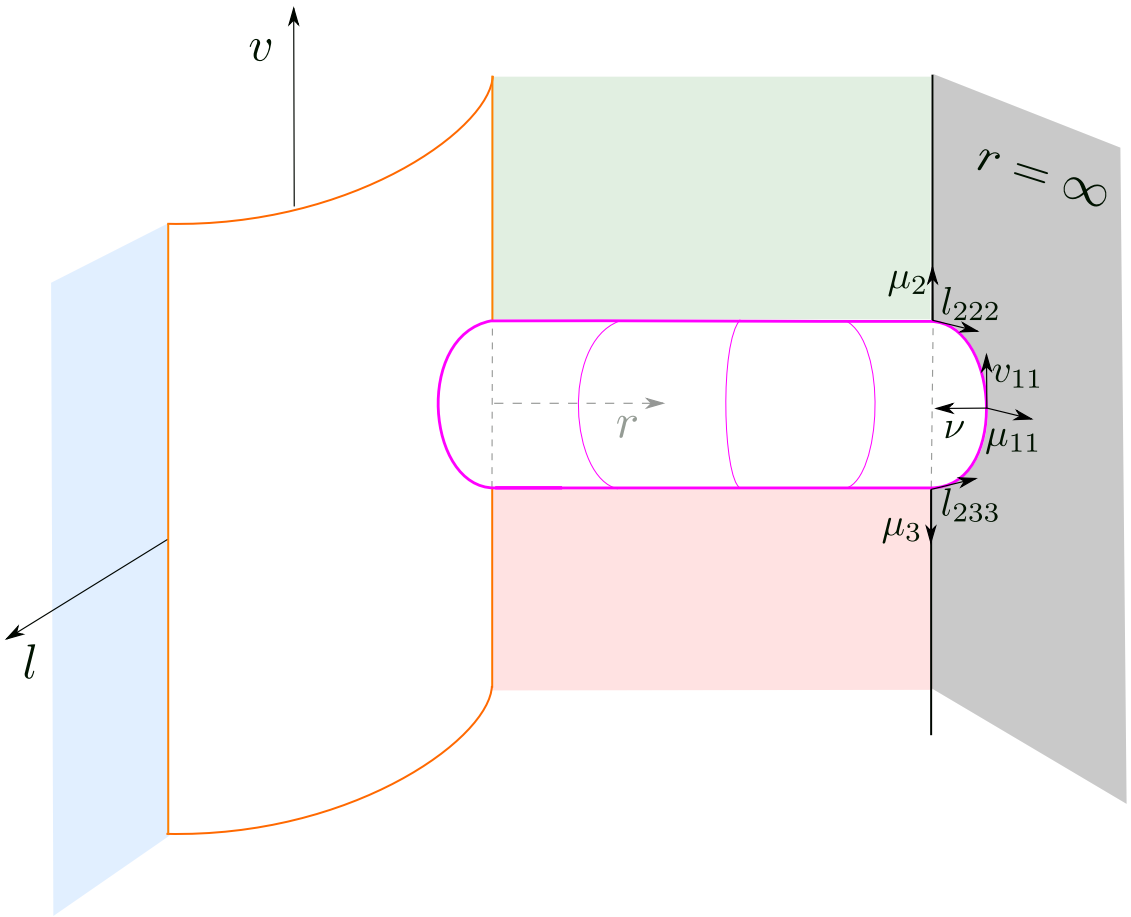


FIGURE 6. 完整吹起并紧化后的系统示意图。我们标出了在 $r=\infty$ 处使用的坐标，另见 (5.13)、(5.14)、(5.15)。

5.1. 图表 ($l=1$)。 将（5.4）代入（5.2），可得

$$\begin{aligned} r_1' &= vr_1^3 + 2\delta r_1^4\rho_1^3, \\ v' &= -r_1 + 1 - 2\delta v r_1^3\rho_1^3, \\ \rho_1' &= -\delta r_1^3\rho_1^4, \end{aligned} \tag{5.16}$$

去奇异化后，相当于将右端除以 ρ_1^4。令 $\rho_1 = l$，并将右端除以 r_1^3，得到（2.6）。因此，在 $\rho_1 = 0$ 内，我们得到哈密顿系统，其哈密顿函数为 $H(r_1, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{(r_1-1)^2}{2r_1^2}$，参见（2.8）；该系统在 $\rho_1 = 0$ 内具有周期轨道 $\Gamma_1(h)$、$h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，并环绕中心 $(r_1, v) = (1, 0)$。定理2.6和定理 2.7证明了 $(r_1, v, \rho_1) = (1, 0, 0)$ 处稳定流形的存在性，以及 $\Gamma_1(h)$、$h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的存在性。轨道 $\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$ 定义为 $H(r_1, v) = \frac{1}{2}$，它位于 $\rho_1 = 0$ 内，是一条分界轨道，将有界（周期）轨道与无界轨道（$H(r_1, v) \geq \frac{1}{2}$）分隔开来，见引理2.4和图2。

5.2。**图表**$(\bar{r}=1)_{2}$。将（5.5）代入（5.2），得到以下方程：

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2 v,\\ v' &= l_2^2(l_2^2-1) - 2\delta\rho_2^3 v l_2,\\ l_2' &= -\frac{1}{2} l_2\left(v + 2\delta\rho_2^3 l_2\right),\end{aligned} \tag{5.17}$$

去奇异化后（相当于将右端除以 ρ_2^4）。这里有两个由 $\rho_2=0$ 和 $l_2=0$定义的不变平面。在前一个平面内，我们重新发现了位于 $(v,\ l_2)=(0,\ 1)$ 处的中心以及周期轨道 $\Gamma_2(h)$、$h\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，其表达式为

$$H_2(l_2,v) := H(l_2^{-2},v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2} - l_2^2 + \frac{1}{2}l_2^4 = h, \tag{5.18}$$

环绕着中心。然而，$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$现在变成了一个有界轨道 $\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$，它与由 $(\rho_2,\ v,\ l_2)=(0,\ 0,\ 0)$ 定义的退化点 γ_2同宿，见图 7。v轴上的所有其他点 $(0,\ v,\ 0)$ 都是部分双曲的，其线性化的特征值为$\pm\frac{1}{2}$、0。所有轨道 $H_2(l_2,\ v)=h$其中 $h>\frac{1}{2}$，都是 $\rho_2=0$内连接 v 轴上各点的异宿连接。接下来，在 $l_2=0$ 内，我们有

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2 v,\\ v' &= 0.\end{aligned}$$

ρ_2轴是退化平衡点集合 P_2，其通过(5.6)被吹起。注意到$H_2(0,\ 0)=\frac{1}{2}$，且由于 H_2 独立于 ρ_2，我们利用(2.10)得出

引理5.5。$|\mathcal{E}_\infty|=1$ 在 P_2上。

5.3. **图表**$(\bar{r}=1,\ l=1)_{21}$。将(5.7)代入(5.17)，我们得到如下方程

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2 v_1,\\ v_1' &= \mu_1^2 + \frac{1}{2}v_1^2 - 1 - \delta\rho_2^3 v_1,\\ \mu_1' &= -\left(\frac{1}{2}v_1 + \delta\rho_2^3\right)\mu_1,\end{aligned} \tag{5.19}$$

去奇异化后（对应于将右端除以 μ_1）。$\mu_1=0$对应于对 P_2的爆破，并且在这个不变子空间内，我们有

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2 v_1,\\ v_1' &= \frac{1}{2}v_1^2 - 1 - \delta\rho_2^3 v_1.\end{aligned} \tag{5.20}$$

我们有两个沿 $\rho_2=0$ 、由 $v_1=\pm\sqrt{2}$ 给出的双曲平衡点 $\gamma_{21}^{\pm}$，前者是不稳定结点，后者是稳定结点。作为完整系统的平衡点 $(0,\pm\sqrt{2},0)$，它们是双曲鞍点，而从 $(\bar{r}=1)_1$ 出发、现记为 $\Gamma_{21}\left(\frac{1}{2}\right)$ 并由 $H_2(\mu_1,\mu_1 v_1)=\frac{1}{2}$ 在 $\rho_2=0$ 内给出的分界轨道 $\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$，现在是一条连接这两个双曲鞍点的异宿轨道。我们在图 8 中总结了这些发现。

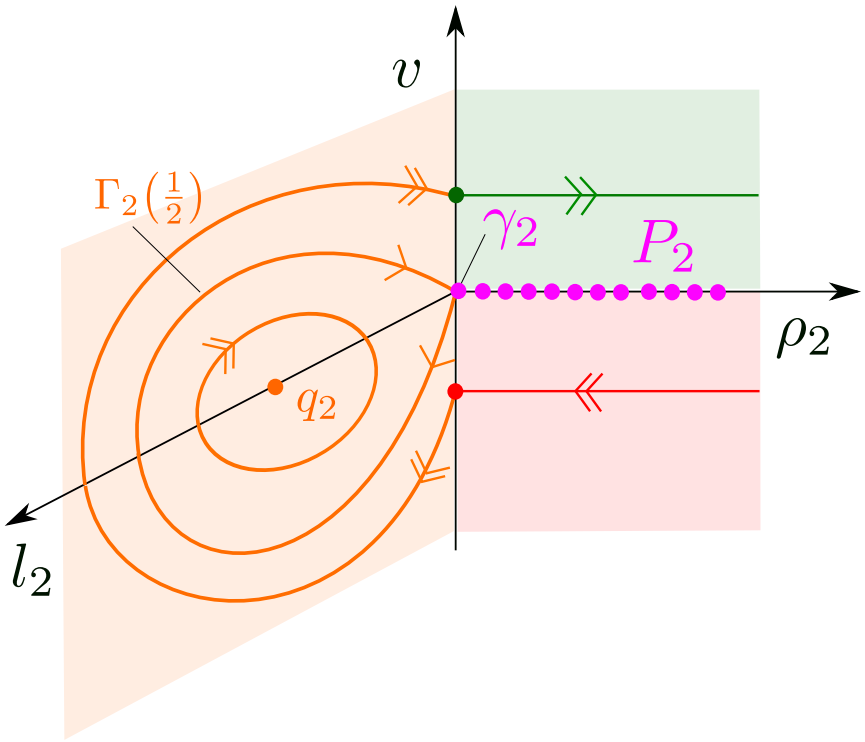


FIGURE 7. $(\bar{r}=1)$ $_2$图表中的动力学。在这里，特殊轨道 $\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$ 在 $(\bar{l}=1)$ $_1$图表中变为一条通往退化平衡点γ_2的同宿轨道$\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$。

注 5.6. 根据注 *5.3*，*(5.20)* 等价于带有 $l=0$ 的 *(2.3)*：

$$\ddot{r}=-\delta\dot{r}-\frac{1}{r^2}.$$

特别是，令 $v_1=\rho_2 u$，其中 $u=\dot{r}$ 且 $\rho_2=\sqrt{r}$，可将（*5.20*）变换为

$$\begin{aligned} r' &= ur^2, \\ u' &= -\delta u r^2-1, \end{aligned}$$

该方程在 [35, 命题3。1]中进行了研究。采用（*5.20*）的优点在于，u轴得以紧化。特别是，在$\mu_1=0$内连接 $\gamma_{21}^{\pm}$ 的异宿轨道（见图 *8*；在 [34]中称为弹射-碰撞轨道）在（r，$u=\dot{r}$）坐标中变为无界。

5.4. **图表**$(\bar{r}=$ $\bar{1}, l=1)_{22}$. 将 (5.8) 代入 (5.17)，得到下列方程 s

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2, \\ \mu_2' &= l_{22}\mu_2\left(l_{22}^3\mu_2^2-2\delta\rho_2^3-l_{22}\right), \\ l_{22}' &= -l_{22}\left(l_{22}^4\mu_2^2-\delta l_{22}\rho_2^3-l_{22}^2+\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{5.21}$$

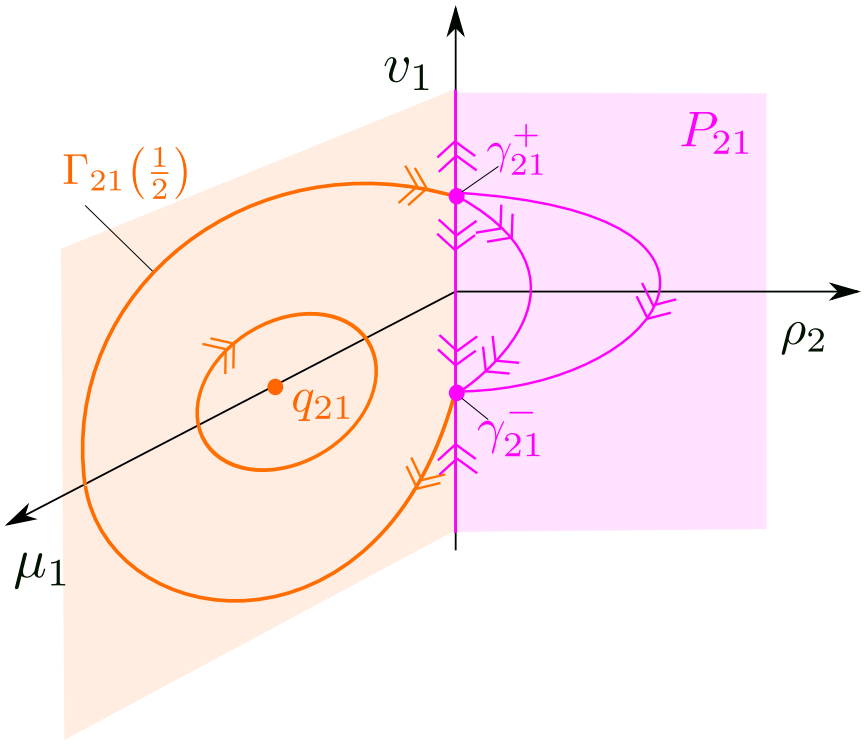


FIGURE 8. $(\bar{r}=1, l=1)_{21}$-图表中的动力学。这里，$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$ $(\bar{l}=1)_1$-图表中的特殊轨道变为一条异宿轨道 $\Gamma_{21}\left(\frac{1}{2}\right)$，连接两个双曲鞍点 $\gamma_{21}^{\pm}$。

去奇异化后（相当于将右端除以 μ_2）。由 $\mu_2=0$、$\rho_2=0$ 和 $l_{22}=0$ 分别定义的三个不变平面均为不变的。在 $\mu_2=0$ 内，我们得到

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2, \\ l_{22}' &= -l_{22}\left(-\delta l_{22}\rho_2^3 - l_{22}^2 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

在 $(\bar{r}=1, \bar{l}=1)_{21}$-图表中，我们重新发现了 γ_{21}^+，它是$\mu_2=0$ 内的一个双曲不稳定结点，由下式给出

$$\gamma_{22}^+: \quad (\rho_2, \mu_2, l_{22}) = (0, 0, 1/\sqrt{2}),$$

另见（5.10）。同时，对于（5.22），$(\rho_2, l_{22}) = (0,0)$ 是一个双曲鞍点，其线性化的特征值为 $\pm\frac{1}{2}$。两条坐标轴 ρ_2和 l_{22} 分别是相应的不稳定流形和稳定流形。

接下来，在 $l_{22}=0$ 内，我们有

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2, \\ \mu_2' &= 0, \end{aligned}$$

因此， μ_2 轴是（5.21）的鞍点线，其不稳定流形（分别为稳定流形）为 $l_{22}=0$ ($\rho_2=0$)。我们在图9中总结了这些结果。

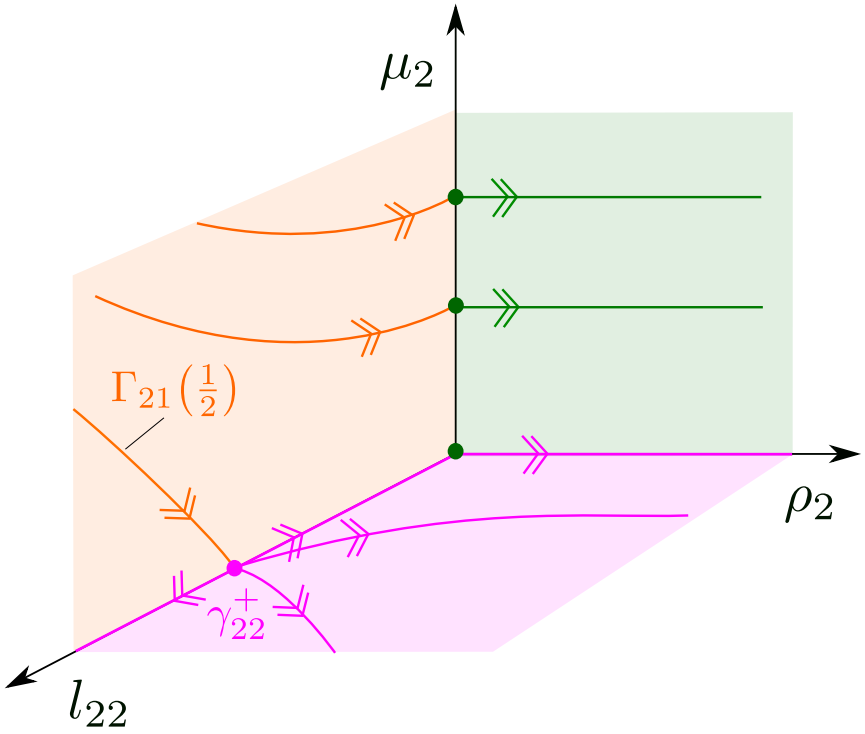


FIGURE 9. （$\bar{r}=1$， $l=1$）$_{22}$图表中的动力学，与图 8 进行比较 .

¯5.5. **图表** （$\bar{r}=1$， $l=1$）$_{23}$。 将（5.9）代入（5.17），可得到以下方程

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \frac{1}{2}\rho_2,\\ \mu_3' &= l_{23}\mu_3\left(l_{23}^3\mu_3^2-2\delta\rho_2^3-l_{23}\right),\\ l_{23}' &= -l_{23}\left(l_{23}^4\mu_3^2-\delta l_{23}\rho_2^3-l_{23}^2+\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\tag{5.23}$$

去奇异化之后（相当于将右端除以 μ_3）。¯在此图表中的分析与（$\bar{r}=1$， $l=1$）$_{22}$中的分析几乎完全相同。特别地，我们重新得到¯来自（$\bar{r}=1$， $l=1$）$_{21}$图表的平衡点 γ_{21}^{-}，现在表示为

$$\gamma_{23}^{-}:\quad (\rho_2,\mu_3,l_{23})=(0,0,1/\sqrt{2}).$$

同时，我们还发现， μ_3轴是方程（5.23）的鞍点线，其稳定流形（不稳定流形）分别为 $l_{22}=0$（$\rho_2=0$）。要展示该图表中的动力学，可以将图9中的示意图进行时间反演（(a) 将 l_{22}、 μ_2 分别替换为 l_{23} 和 μ_3；(b) 将 γ_{22}^{+} 替换为 γ_{23}^{-}；最后，(c) 按照图6，将不变平面 $l_{22}=0$ 的绿色改为红色）。

¯5.6. **在 ($\bar{r}=1$, $l=1$)$_{21}$-图表中的紧化**。将（5.14）定义的 (ρ_2, v_1) 变换应用于系统（5.19）后，我们得到以下方程

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= -\frac{1}{2}\nu v_{11},\\ \dot{v}_{11} &= -v_{11}(\delta+v_{11})+\nu^6(\mu_{11}^2\nu^6-1),\\ \dot{\mu}_{11} &= \mu_{11}(v_{11}-\delta),\end{aligned} \tag{5.24}$$

去奇异化之后（对应于将右端乘以 ν^3）。这里$\nu=0$（对应于 $r=\infty$）是不变集，在其上我们得到如下结果:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{11} &= -v_{11}(\delta+v_{11}),\\ \dot{\mu}_{11} &= \mu_{11}(v_{11}-\delta).\end{aligned} \tag{5.25}$$

我们得到两个平衡点: p_{21}^+: (ν, v_{11}, μ_{12}) =(0, 0, 0) 和 p_{21}^-: (ν, v_{11}, μ_{12}) =(0, $-\delta$, 0)，它们在 $\nu=0$ 内对于约化系统 (5.25) 都是双曲的。事实上，(5.25) 在 p_{21}^+ 处的线性化产生特征值 $-\delta$, $-\delta$ （半单），而 (5.25) 在 p_{21}^- 处的线性化则产生特征值 δ, -2δ 。因此，p_{21}^+ 是 (5.25) 的稳定结点，而 p_{21}^- 是鞍点。

$\mu_{11}=0$ 也是方程组 (5.24) 的一个不变集，在该集合上我们得到:

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= -\frac{1}{2}\nu v_{11},\\ \dot{v}_{11} &= -v_{11}(\delta+v_{11})-\nu^6.\end{aligned} \tag{5.26}$$

显然， p_{21}^- 对于这些方程而言是不稳定结点，而 p_{21}^+ 则只是半双曲型，其线性化的特征值为 0 和 $-\delta$。通过简单计算可得，相应的中心流形 W^c(p_{21}^+) 具有如下图形式:

$$W^c(p_{21}^+): \quad v_{11}=-\frac{1}{\delta}\nu^6(1+\mathcal{O}(\nu^6)). \tag{5.27}$$

$\mathcal{O}(\nu^6)$ 项是 ν^6 （以及 δ）的光滑函数。这是因为方程组 (5.26) 的第一个方程可以写成 (ν^6)$'=-3\nu^6 v_{11}$。将 (5.27) 代入 (5.26) 得到

$$\dot{\nu}=\frac{1}{2\delta}\nu^7(1+\mathcal{O}(\nu^6)),$$

因此， $\nu>0$ 在 W^c(p_{21}^+) 上递增。故中心流形是唯一的，因为 p_{21}^+ 的不稳定集，而 p_{21}^+ 是方程组 (5.26) 的一个非双曲鞍点。我们在图10中展示所得结果。

注5.7. 通过简单计算可知，*(5.24)* 中所用的时间与*(5.1)* 中的原始时间一致，这就是我们使用 $()$而非$()'$的原因；回想注*2.1*。

利用 *(5.5)*、*(5.12)* 和 *(5.14)*，我们可以将 *(5.27)* 在$(r,\dot{r})$-平面中写成一条图

$$\dot{r}=-\frac{1}{\delta r^2}(1+\mathcal{O}(r^{-3})),$$

关于 $r\gg 1$。我们看到，当 $t\to-\infty$ 时， $\dot{r}\to 0$ 在 W^c 上，这与 [34, 命题31] 的结果一致。

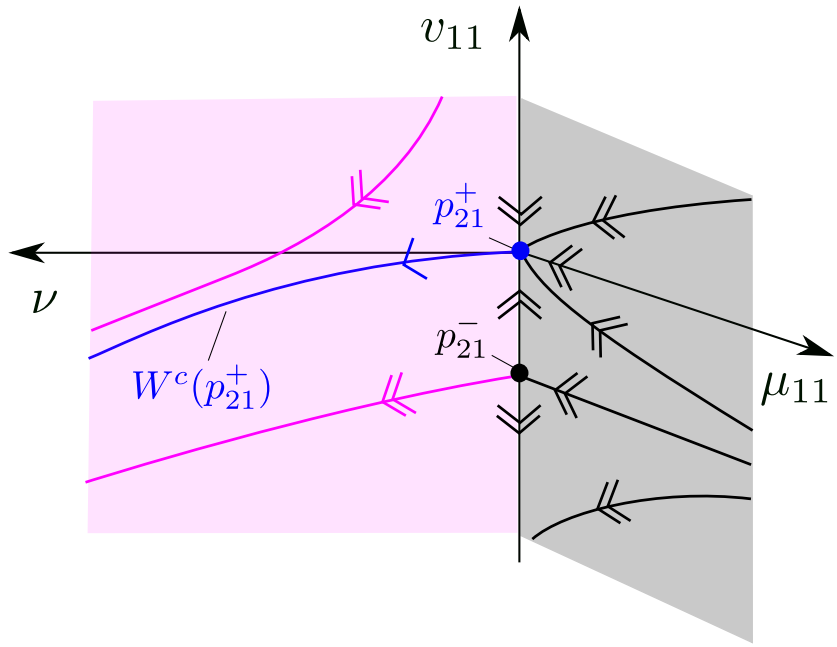


FIGURE 10. （5.24）的动力学。点 p_{21}^- 是完全双曲型的，而p_{21}^+ 仅为半双曲型（我们用单向箭头区分中心方向与双向箭头表示的双曲方向）。p_{21}^+ 的中心流形 W^c（p_{21}^+）是唯一的，因为它就是 p_{21}^+的不稳定集。

5.7. 在 $(\bar{r}=1, l=1)_{22}$图表中的紧化。将 (5.13) 定义的 (ρ_2, l_{22}) 变换应用于系统 (5.21) 后，我们得到以下方程

$$\begin{aligned} \nu' &= -\frac{1}{2}\nu, \\ \mu_2' &= -\mu_2 l_{222}\left(2\delta + \nu^6 l_{222} - \nu^{12} l_{222}^3 \mu_2^2\right), \\ l_{222}' &= l_{222}\left(1 + \delta l_{222} + \nu^6 l_{222}^2 - \nu^{12} l_{222}^4 \mu_2^2\right). \end{aligned} \tag{5.28}$$

这里，$l_{222}=0$定义了一个不变集，在该集合上有 $\nu' = -\frac{1}{2}\nu$和 $\mu_2' = 0$。由于$l_{222}=0$ 对应于 $l_{22}=0$，见（5.13），因此这些发现显然与在（$\bar{r}=1, l=1$）$_{22}$-图表中的结果一致，只要 $\nu>0$，见第5节4和图9（绿色平面）。另一方面，对应于 $r=\infty$的 $\nu=0$现在是（5.28）的一个不变集。事实上，$\nu = l_{222} = 0$ 是一条鞍点线；在该集合中任意一点处对（5.28）进行线性化，所得特征值为 $-\frac{1}{2}, 0, 1$。$\nu = l_{222} = 0$的稳定流形是（ν, μ_2）平面，而相应不稳定集是（μ_2, l_{222}）平面。将 $\nu=0$ 代入（5.28）得到

$$\begin{aligned} \mu_2' &= -2\delta\mu_2 l_{222}, \\ l_{222}' &= l_{222}\left(1 + \delta l_{222}\right), \end{aligned}$$

它在第一象限内没有平衡点。特别地，$l_{222} > 0$（μ_2）是单调递增的（分别为递减）。最后，在 $\mu_2 = 0$ 内有

$$\nu' = -\frac{1}{2}\nu,$$
$$l'_{222} = l_{222}\left(1 + \delta l_{222} + \nu^6 l_{222}^2\right),$$

在原点处有一个双曲鞍点。我们在图 11 中总结了局部结果。

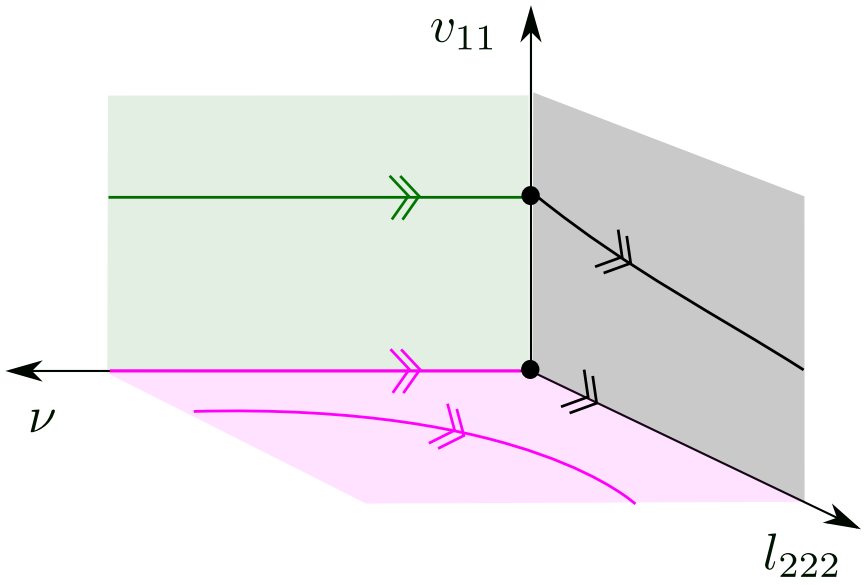


FIGURE 11. 方程 (5.28) 的动力学。v_{11}轴是一条鞍点线。在此图表中没有其他平衡点。

5.8. 在$(\bar{r} = 1, l = 1)_{23}$图表中的紧化。将由 (5.13) 定义的变换 (ρ_2, l_{22}) 应用于系统 (5.21) 后，我们得到以下方程

$$\begin{aligned}
\nu' &= \frac{1}{2}\nu, \\
\mu'_3 &= \mu_3 l_{233}\left(2\delta - \nu^6 l_{233} - \nu^{12} l_{233}^3 \mu_3^2\right), \\
l'_{233} &= l_{233}\left(-1 + \delta l_{233} - \nu^6 l_{233}^2 + \nu^{12} l_{233}^4 \mu_3^2\right).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

对这些方程的分析与第 5.6 节和第 5.7 节中的分析几乎完全相同。因此，我们仅展示一幅图，见图 12。

综合局部图中的所有结果，我们得到图 1 所示的全局视角（采用图 6 中的几何视角）。请注意，从这一视角可以直接得出，任何满足 $h > \frac{1}{2}$ 的 $\Gamma(h)$ 都不可能是 ω-极限集。我们将在下一节进一步阐述这一点。

6. DISCUSSION

本文重新研究了线性阻尼开普勒问题 (1.1)，主要目的是描述 [35]，中得到的不变流形的光滑性，见定理 2.7 和定理 2.8。在此过程中，我们发现了一个独立的不变流形 $W^s(q)$，

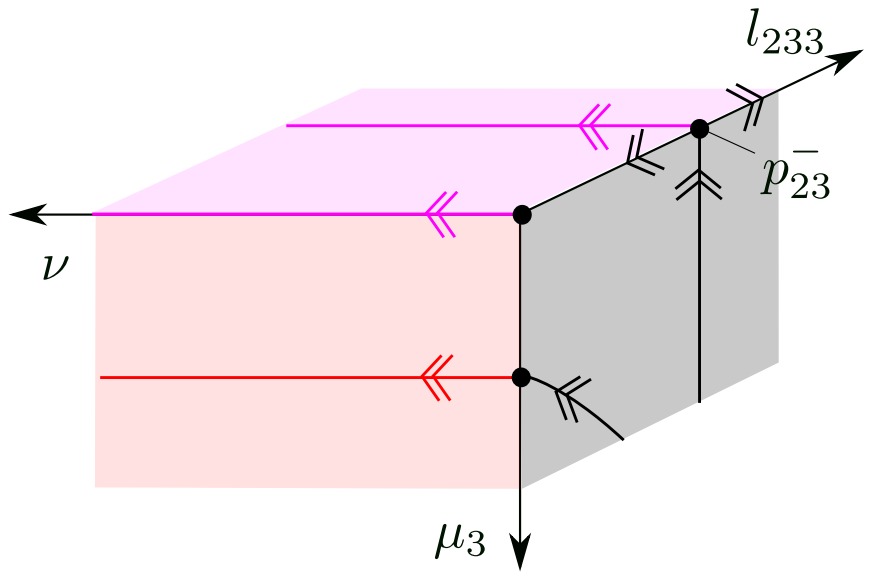


FIGURE 12. 方程 (5.29) 的动力学。双曲点 p_{23}^- 在由 $l_{233} = -v_{11}^{-1}$定义的坐标变换下对应于点 p_{22}^-，见图10。 μ_3轴是一条鞍点线。

见定理2.6。这个由 (2.3) 描述的一维流形对应于随着 $t \to \infty$ 变得越来越圆的轨道，它是定理 2.7 和定理 2.8 中不变流形上振荡的中心，见图1。

最后，在第5节中，我们进行了爆破分析，从而得到了图1所示动力学的几何描述。在未来的工作中，我们计划采用类似的解法研究具有一般的、依赖于 $(u, \dot{u})$ 的非线性阻尼的方程 (1.1)：

$$\delta = \frac{k|\dot{u}|^\alpha}{|u|^\beta},$$

对于 $\beta, \alpha \in \mathbb{N}_0$ 和 $k > 0$。庞加莱曾研究过这一族方程，并给出了形式论证，见例如 [32], ：当 α 和 β 足够大时，在某个开集上，轨道趋于“圆化”，即 $\mathcal{E} \to 0$ 对于 $t \to \infty$ 。据我们所知，迄今这仍是一个猜想。我们希望解决这一猜想，并采用类似的爆破解法确定发生“圆化”时所有的 α 和 β。我们强调，已知线性阻尼不会导致圆化（事实上，根据定理2.6和定理 2.7，这种情况是例外的），庞廷–普卢默–丹比阻尼 ($\alpha = 0$, $\beta = 2$) 也不会导致圆化。关于 $\alpha = 0, \beta > 0$ 情形的一般分析，见 [9] 和 [32] 。

下文中，我们将使用爆破解法的几何框架来阐明 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1$，并回顾引理 5.1。

首先，在图13中，我们使用 Matlab 的 ODE45 对初始条件接近集合 $\Gamma_2(0.8)$ 的系统进行了模拟，该集合由 $\rho_2 = 0$, $H_2(l_2, v) = 0.8 > \frac{1}{2}$ 定义，回顾式 (5.18)。更具体地，在 (a) 中，我们使用 $(\rho_2, v, l_2)\bar{r} = 1_2$-图表的坐标，见 (5.5)，并选取了 50 个初始条件（由 $v = 0$ 附近的青色圆柱体标示），其中 $(l_2, v, \rho_2) = (l_{20}, 0, \rho_{20})$, $H_2(l_{20}, 0) = 0.8 > \frac{1}{2}$，且 ρ_{20} 位于区间 $(0.15, 0.25)$ 内（等距）。曲线 $\Gamma_2(0.8)$ 以

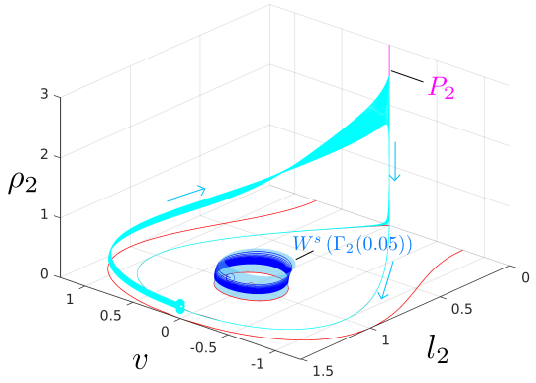
红色显示，正向轨道（也为青色）沿着该红色曲线运行，但仅持续到 v-轴附近（这是由于沿该集合的鞍点结构，见图7以及下文对图 14 的讨论）。从这里开始， ρ_2 增大，轨道最终向退化集 P_2 压缩。在 (b) 中，我们使用 $(\rho_2, v_1, \mu_1)\bar{r} = 1, l_2 = 1_{21}$-图表的坐标，其中 P_2 已被吹起，以说明相同的（计算得到的）轨道。在此我们看到，(a) 中沿 P_2 的运动是由于向中心流形 $W^c(p_{21}^+)$ 的压缩所致；这也在 (c) 中通过向 (ν, v_{11})-平面的投影得到展示，回顾式 (5.14)。在图13(b) 中沿 $W^c(p^+)$ 运动之后，青色曲线在 γ_{21}^- 附近彼此靠近，并沿着连接 γ_{21}^- 和 γ_{24}^+ 的异宿轨道 $\Gamma_{21}\left(\frac{1}{2}\right)$ 运行。一旦经过 γ_{21}^+ 附近，青色曲线便再次靠近 $\mu_1 = 0$平面，随后返回到 γ_{21}^- 和 $\Gamma_{21}\left(\frac{1}{2}\right)$。这一过程不断重复。计算采用较低的容差 ($10^{-12}$) 进行，并在 l 的值达到 10^{-4} 时结束。

图13中的结果与第5节的发现一致（见图1）。我们在图 14 中进一步强调这一点，其中展示了橙色圆柱上一点的“奇异”轨道。这里的“奇异”是指该轨道位于吹起空间上（因此并非系统 (1.1) 的真正轨道，因为它发生在 $r = 0$ 上），同时我们还使用了跨越鞍点的不稳定流形和稳定流形的拼接。橙色圆柱上从青色曲线附近开始的初始条件的正向轨道（with $0 < l \ll 1$）（如图13所示，在局部图 $(\bar{r} = 1)_2$ and $(\bar{r} = 1, l_2 = 1)_{21}$中）将沿着这条曲线前进（也就是说，在局部图的紧子集内，轨道始终接近其局部副本），直到 γ^+。这可由第5节的结果推出，但我们不再赘述。

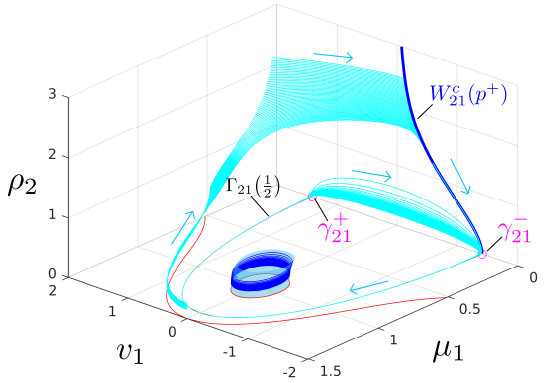
在 γ^+ 处，向前的（奇异）轨道并不唯一，因为 γ^+ 是 $\mu = 0$上的一个不稳定结点（ P_2爆破后对应的 $l = 0$圆柱，见（5.6）），另见图 8。尽管如此，由于 (a) γ^+连接到 γ_-，(b) γ_-在 $\rho = 0$上是收缩的，且 (c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$连接回$\gamma^+$，对于一条实际轨道来说，这个过程会重复：轨道从青色圆盘附近出发，并带有 $0 < l \ll 1$。然而，由于 l 单调递减，从 γ^+ 到 γ^- 的往返将越来越接近紫色连接（沿着 $\rho_2 = 0$ 内的半圆（ $\bar{v}, \bar{l}_2$） $\in S^1\ \bar{l}_2 \geq 0$ ）。我们通过数值计算观察到了这一现象（图13 (b)中靠近$\mu_1 = 0$的蓝色线段也表明了这一点）。

然而，关键在于，由于 $\Gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$不能是 ω-极限集（见引理 5.1），且 $l = 0$是不变的，图13中的初始条件（或图 14 中青色圆盘附近的初始条件）的 ω-极限集必定是 $\Gamma_1(h)$，其中 $h < \frac{1}{2}$ 但 $h \sim \frac{1}{2}$。换言之，这些初始条件属于某个 $h \in (0, r_2)$ 对应的 $W^s(\Gamma(h))$，其中 $h \to \frac{1}{2}$当 $l_0 \to 0$ 时。因此，圆柱 $W^s(\Gamma(h))$ 会出现显著的极限 $h \nrightarrow \frac{1}{2}$（对应于 $|\mathcal{E}_\infty| \to 1^-$，见式 (2.10)）。事实上，具有 $h < \frac{1}{2}$ 但 $h \sim \frac{1}{2}$ 的二维圆柱流形 $W^s(\Gamma(h))$ 会如花朵般绽开，沿橙色圆柱和图 14 中的紫色圆柱同时伸展（当 $h \to \frac{1}{2}$ 时则收缩）（分别对应于 r 非常小和非常大的情形）。

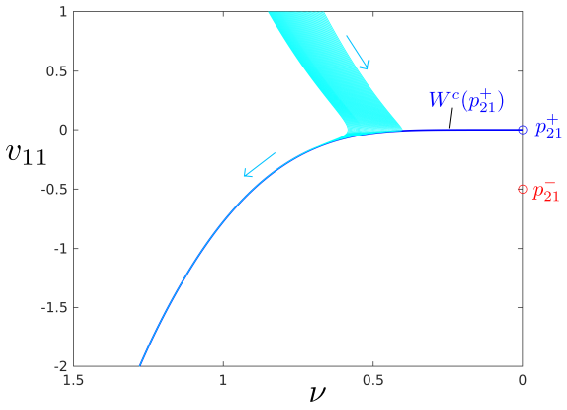
同时， $l = 0$ 定义了一个（共线轨道的）不变集，而该集合中任意一点的 ω极限集都是 γ^-。以 γ^+ 为 α极限集（位于 $l = 0$内）的轨道称为弹射-碰撞轨道；而以 p^- 或 p^+ 为 α极限集的轨道（后一种情况沿着 W^s（p_{21}^+）运动）称为捕获-碰撞轨道，参见例如[9, 34]。有趣的是，图13中具有 $0 < l \ll 1$ 的轨道同时表现出这两种行为：首先沿着 W^c（p_{21}^+）附近运动，呈现捕获-碰撞行为；随后经过 γ^+ 和 γ^-附近，反复呈现弹射-碰撞行为。我们在最后一幅图图 15 中展示了这一点，绘制了图 13(a)中一条青色曲线上的 r 随 t 变化的关系。



(a)（$\bar{r}=1$）$_2$-图表



(b)（$\bar{r}=1,\bar{l_2}=1$）$_{21}$-图表



(c)

FIGURE 13. 使用 Matlab 的 ODE45（容差较低）对初始条件进行数值向前积分（青色圆柱体靠近 $v=0$），这些初始条件起始于哈密顿函数 H_2 的一个 $h=0.8$ 水平集附近，位于 $\rho_2=0$ 内（(a) 和 (b) 中的红色曲线）。相应的轨道（同样为青色）遵循一条可由我们的爆破分析解释的路径（参见正文，并与下文图 14 对比）。在 (a) 中，我们使用（ρ_2，v，l_2）坐标，即（$\bar{r}=1$）$_2$-图表的坐标；而在 (b) 中，我们使用（ρ_2，v_1，μ_1）坐标，即（$\bar{r}=1$，$l_2=1$）$_{21}$-图表的坐标。在 (c) 中，我们将其投影到（ν，v_{11}）平面上，见 (5.14)。这里可以看到，青色轨道均沿着中心流形 W^c（p^+_{21}）运动，该流形将这些轨道引向 γ^-_{21} 和 $\Gamma_{21}(\frac{1}{2})$，见 (b)。

REFERENCES

[1] V. I. Arnold。经典力学的数学方法。Springer，1989年。[2] W. Balser。从发散幂级数到解析函数：多重可求和幂级数的理论与应用。Springer，1994年。[3] A. Bittmann。复数域(c3,0)中的双共振鞍结点与 painlev´e 方程中的无穷远处的固定奇点：解析分类。*Annales De L'institut Fourier*，68(4):1715–1830，2018年。

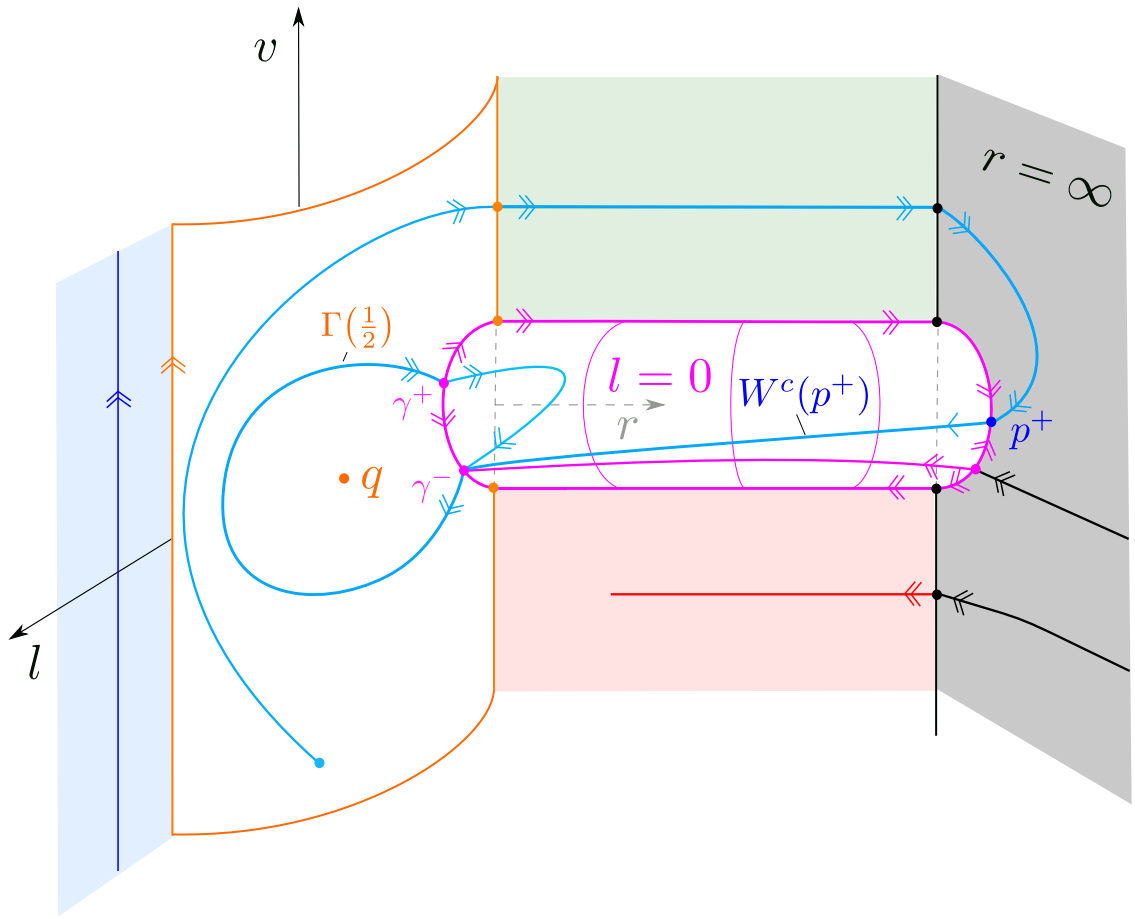


FIGURE 14. 初始条件（青色圆盘）的正向流若具有足够小的角动量 $0 < l \ll 1$，且靠近哈密顿函数 H的一个 $h > \frac{1}{2}$ 水平集，则会沿着青色的“奇异轨道”运动（也就是说，当角动量的初始值为 $l \to 0^+$时，正向轨道在局部图中始终与这条青色曲线的局部副本保持 $o(1)$距离以内），至少直到 γ^+，见图13。

[4] P. Bonckaert 和 P. De Maesschalck. 具有一个零特征值的向量场的Gevrey正规形。数学分析与应用杂志, 344(1):301–321, 2008年。[5] A. Celletti. 正则化理论基础。北约科学丛书*II*：数学、物理与化学, 227:203–230, 2006年。[6] A. Celletti、L. Stefanelli、E. Lega 和 C. Froeschl´e. 带耗散的正则化限制性三体问题全局动力学的一些结果。《天体力学与动力天文学》, 109(3):265–284, 2011年。[7] G. M. Constantine 和 T. H. Savits. 多元法迪布鲁诺公式及其应用。美国数学学会汇刊, 348(2):503–520, 1996年。[8] J.L. Corne 和 N. Rouche. 利用一族李雅普诺夫函数证明闭集的吸引性。《微分方程杂志》, 13(2):231–246, 1973年。[9] F. Diacu. 有阻力或推力的二体问题：定性结果。《天体力学与动-力天文学》, 75(1):1–15, 1999年。[10] N. Duignan 和 H. R. Dullin. 共线四体问题中同时二体碰撞的c8/3正则化。《微分方程杂志》, 269(10):7975–8006, 2020年。

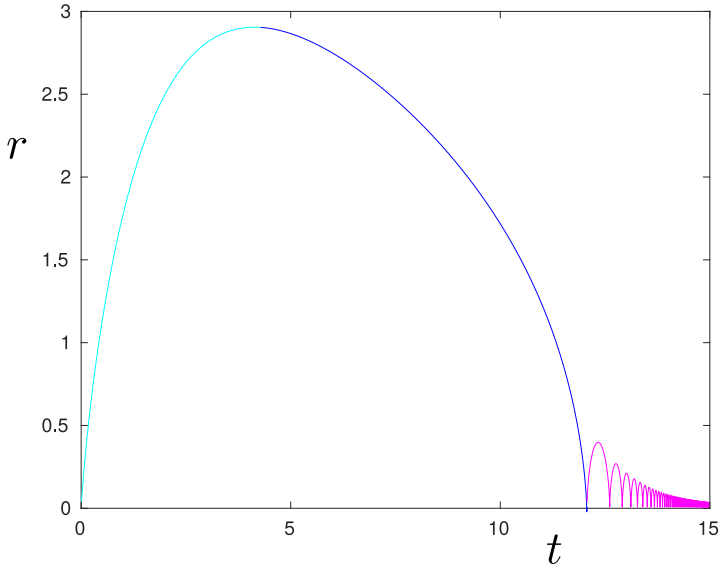


FIGURE 15. r（t）沿图 13 中的一条青色曲线运动。该曲线分为三段：青色、蓝色和紫色，其特征如下。第一段青色部分对应于 r 的增加，这是由于图 13(a) 中沿 v轴存在一条鞍点线。接下来是蓝色部分，对应于捕获-碰撞型运动（在相空间中，这一段是由于受到中心流形 W^c（p_{21}^+）的吸引而形成的）。最后的紫色部分对应于反复发生的弹射-碰撞型振荡，其振幅逐渐减小。

[11] N. Duignan 和 H. R. Dullin. 关于平面四体问题中同时二体碰撞的 c8/3正则化。《非线性》，34(7):4944–4982, 2021年。[12] F. Dumortier. 平面向量场的局部研究：奇点及其展开。载于 H. W. Broer 等编，《动力学中的结构》，《有限维确定性研究》，第 2 卷，第 161–241 页。Springer Netherlands，1991年。[13] F. Dumortier. 局部分岔理论中的技术：吹起、正规形、幂零分岔、奇异摄动。载于 Dana Schlomiuk 编，《向量场的分岔与周期轨道》，北约高级研究所系列第 408 卷，第 19–73 页。Springer Netherlands，1993年。[14] F. Dumortier、J. Llibre 和 J. C. Artes. 平面微分系统定性理论。Springer Berlin Heidelberg，2006年。[15] F. Dumortier 和 R. Roussarie. 鸭形周期与中心流形。《美国数学会回忆录》，121:1–96，1996年。[16] M.S. ELBIALY. 天体力学中的碰撞奇点。《*SIAM*数学分析杂志》，21(6):1563–1593，1990年。[17] J. Guckenheimer 和 P. Holmes.《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》。施普林格出版社，第 5 版，1997年。[18] J. D. Hadjidemetriou 和 G. Voyatzis. 耗散作用下太阳系外行星系统的动力学：行星迁移。《天体力学与动力天文学》，107(1):3–19，2010年。[19] A. Haraux. 关于若干阻尼二体问题。《演化方程与控制理论》，10(3):657–671，2021年。[20] C.G.J. Jacobi.《雅可比动力学讲义》，《雅可比动力学讲义》。印度斯坦图书机构，2009年。

[21] S. Jelbart、K. U. Kristiansen、P. Szmolyan 和 M. Wechselberger。具有指数非线性的奇异摄动振子。《动力系统与微分方程杂志》，第 1–53 页，2021年。[22] S. Jelbart、K. U. Kristiansen 和 M. Wechselberger。奇异摄动边界焦点分岔。《微分方程杂志》，296：412–492，2021年。[23] I. Kosiuk 和 P. Szmolyan。奇异摄动问题中的尺度化：弛豫振子的爆破。《SIAM应用动力系统杂志》，Siam J. Appl. Dyn. Syst、Siam J a Dy、Siam J Appl Dyn Syst、Siam Stud Appl Math，10(4)：1307–1343，2011年。[24] I. Kosiuk 和 P. Szmolyan。胚胎细胞周期 Goldbeter 最简模型的几何分析。《数学生物学杂志》，J. Math. Biol、J Math Biol，2015年。[25] K U Kristiansen。平坦慢流形的爆破。《非线性》，30(5)：2138–2184，2017年。[26] K. U. Kristiansen。一个具有速率与状态摩擦模型中的新型弛豫振荡。《非线性》，33(6)：2960–3037，2020年。[27] K. U. Kristiansen 和 P. Szmolyan。接近非光滑极限的底物耗竭振子中的弛豫振荡。《非线性》，34(2)：1030–1083，2021年。[28] K. U. Kristiansen 和 P. Szmolyan。WKB方法的动力系统方法：简单转向点。arXiv:2207.00252:v2，审稿中，2022年。[29] K. Uldall Kristiansen 和 S. J. Hogan。利用正则化和爆破解析 $\mathbb{R}^3$ 中的分段光滑可见-不可见双折奇点。《非线性科学杂志》，29(2)：723–787，2018年。[30] M. Krupa 和 P. Szmolyan。弛豫振荡与鸭爆发。《微分方程杂志》，174(2)：312–368，2001年。[31] J. Llibre、P. R. da Silva 和 M. A. Teixeira。通过奇异摄动正则化 $\mathbb{R}^3$ 上的不连续向量场。J. Dyn. Diff. Eq.，19：309–331，1997年。[32] A. Margheri 和 M. Misquero。具有一族奇异阻力的耗散开普勒问题。《天体力学与动力天文学》，132(3)：17，2020年。[33] A. Margheri、R. Ortega 和 C. Rebelo。关于具有耗散的限制性三体问题中周期轨道的一些分析结果。《天体力学与动力天文学》，113(3)：279–290，2012年。[34] A. Margheri、R. Ortega 和 C. Rebelo。具有线性阻力的开普勒问题的动力学。《天体力学与动力天文学》，120(1)：19–38，2014年。[35] A. Margheri、R. Ortega 和 C. Rebelo。具有线性阻力的开普勒问题的第一积分。《天体力学与动力天文学》，127(1)：35–48，2017年。[36] A. Margheri、R. Ortega 和 C. Rebelo。关于一族具有线性耗散的开普勒问题。Rendi- conti Dell'istituto Di Matematica Dell'universita Di Trieste，49：265–286，2017年。[37] R. Martinez 和 C. Sim´o。平面四体问题中的同时二体碰撞。《非线性》，12(4)：903–930，1999年。[38] R. McGehee。共线三体问题中的三体碰撞。《数学创刊》，27(3)：191–227，1974年。[39] K. R. Meyer、G. R. Hall 和 D. Offin。《哈密顿动力系统与N体问题导论》，第77卷。Springer，2009年。

Appendix A. Proof of Lemma 4.10

我们考虑（4.17），为方便起见在此重述

$$\begin{aligned}\frac{dH}{d\tau} &= \frac{1}{3\delta}x\left(\Lambda(H,x)+x^N R(H,\phi,x)\right),\\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{1}{3\delta x^2}\left(\Omega(H,x)+x^{N+1}P(H,\phi,x)\right),\\ \frac{dx}{d\tau} &= -1,\end{aligned} \tag{A.1}$$

对于 $x>0$。随后，我们对这些方程的两边应用 $\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial\tau^{\nu_1}\partial H_0^{\nu_2}\partial\phi_0^{\nu_3}\partial x_0^{\nu_4}}$；回顾（4.24）中定义的记号。于是，在左端分别得到 $\frac{d}{d\tau}H_\nu$、$\frac{d}{d\tau}\phi_\nu$ 和 $\frac{d}{d\tau}x_\nu$。显然，

$$x_\nu \equiv 0 \text{ unless } \nu=(1,0,0,0), \text{ or } \nu=(0,0,0,1), \tag{A.2}$$

其中 $x_{(1,0,0,0)}=-1$，$x_{(0,0,0,1)}=1$。

为处理相应的右端项，我们使用法迪布鲁诺公式 [7]：对于$\nu=(\nu_1,\ \cdots,\ \nu_d)\in\mathbb{N}_0$，$z=(z_1,\ \cdots,\ z_d)$，$d\in\mathbb{N}$，定义

$$\begin{aligned}\nu! &:= \prod_{i=1}^{d}\nu_i!,\\ D^\nu &:= \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_d^{\nu_d}},\\ [z]^\nu &:= \prod_{i=1}^{d} z_i^{\nu_i}.\end{aligned}$$

此外，如果我们还考虑 $\mu=(\mu_1,\ \ldots,\ \nu_d)$，那么只要满足以下条件中的至少一个，我们就写作 $\mu\prec\nu$

(1) $|\mu|<|\nu|$；(2) $|\mu|=|\nu|$ 和 $\mu_1<\nu_1$；或 (3) 对于某个 $1\le k<d$，$|\mu|=|\nu|$，$\mu_1=\nu_1,\ldots,\mu_k=\nu_k$ 和 $\mu_{k+1}<\nu_{k+1}$。

最后，我们将 $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ 写作 $\mathbb{N}_0^d$。

引理 A.1。[7, 定理 2。1] 考虑光滑函数 $F\colon\ \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 和 $G=(G_1、\ldots\ldots、G_m)\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$，并定义

$$W(z) := (F\circ G)(z).$$

Then

$$D^\nu W = \sum_{1\le|\lambda|\le n} D^\lambda F \sum_{s=1}^{n}\sum_{p_s(\nu,\lambda)}(\nu!)\prod_{j=1}^{s}\frac{[D^{l_j}G_1,\cdots,D^{l_j}G_m]^{k_j}}{(k_j!)(l_j)^{|k_j|}}, \tag{A.3}$$

其中 $n = |\nu|$ 和

$$p_s(\nu,\lambda) := \Big\{ (k_1,\dots,k_s,l_1,\dots,l_s) : |k_i| > 0, \\ \mathbf{0} \prec l_1 \prec \cdots \prec l_s, \\ \sum_{i=1}^{s} k_i = \lambda, \quad \sum_{i=1}^{s} |k_i| l_i = \nu \Big\}. \tag{A.4}$$

现在考虑以下函数:

$$W_R = \underline{x}^{N+1}.R \circ (\underline{H},\underline{\phi},\underline{x}),$$
$$W_P = \underline{x}^{N-1}.P \circ (\underline{H},\underline{\phi},\underline{x}),$$

of $(\tau,\ H_0,\ \phi_0,\ x_0) \in V(\xi)$，它们出现在 (A.1) 的右侧。这里 $V(\xi)$ 定义于 (4.18)，为方便起见，在此重述:

$$V(\xi) := \{(\tau,H_0,\phi_0,x_0) \in (0,\xi) \times J \times \mathbb{T} \times (0,\xi) \,:\, 0 < \tau < x_0\}.$$

引理 A.2. 设 $M \in \mathbb{N}$ 满足 $N - 2M \geq 0$。假设

$$|\underline{H}_\nu(\tau,H_0,\phi_0,x_0)| \leq C_M, \quad |\underline{\phi}_\nu(\tau,H_0,\phi_0,x_0)||\tau - x_0|^{1+\nu_1+\nu_4} \leq C_M,$$

对所有 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in V(\xi)$ 以及所有 $1 \leq |\nu| \leq M$ 均成立。则存在常数 $K = K(M, |R|_{C^M}, |P|_{C^M}, C_M) > 0$，它仅取决于: *(a)* M，*(b)* R 和 P 的一致 C^M 界 $|R|_{C^M}$ 和 $|P|_{C^M}$，以及 *(c)* $C_M > 0$，使得

$$|D^\nu W_R(\tau,H_0,\phi_0,x_0)| \leq K|\tau - x_0|^{N+1-\nu_1-\nu_4-|\nu|},$$
$$|D^\nu W_P(\tau,H_0,\phi_0,x_0)||\tau - x_0|^2 \leq K|t - x_0|^{N+1-\nu_1-\nu_4-|\nu|},$$

对所有 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in V(\xi)$ 以及所有 $1 \leq |\nu| \leq M$ 均成立。

证明。我们着重讨论 W_R。W_P 的估计可以完全类似地得到。首先，我们写出

$$D^\nu W_R = D^{(\nu_1,0,0,\nu_4)} \left(\underline{x}^{N+1}.D^{(0,\nu_2,\nu_3,0)} \underline{R} \right),$$

使用 (A.2)。这里我们用 $D^\nu R$ 表示复合函数 $R(H()\ \phi()\ x())$ 的偏导数。根据乘积法则，我们有

$$D^\nu W_R = \sum_{q_4=0}^{\nu_4} \sum_{q_1=0}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-q_1} \binom{\nu_4}{q_4} \binom{\nu_1}{q_1} \binom{N+1}{\nu_4-q_4+\nu_1-q_1} (\nu_4 - q_4 + \nu_1 - q_1)! \\ \times \underline{x}^{N+1-\nu_4+q_4-\nu_1+q_1} D^{(q_1,\nu_2,\nu_3,q_4)} \underline{R}, \tag{A.5}$$

再次使用 (A.2)。接着，我们使用引理 A.1，特别是使用 (A.3) 中的 $\nu = (q_1, \nu_2, \nu_3, q_4)$, $d = 4$, $m = 3$, $D^{l_j} G_1 = \underline{H}_{l_j}$, $D^{l_j} G_2 = \underline{\phi}_{l_j}$, $D^{l_j} G_3 = \underline{x}_{l_j}$, 来估计 $D^{(q_1,\nu_2,\nu_3,q_4)} R$: —

$$\begin{aligned} |D^{(q_1,\nu_2,\nu_3,q_4)} \underline{R}| &\le K_0 \sum_{p_s((q_1,\nu_2,\nu_3,q_4),\lambda)} \prod_{j=1}^{s} |\underline{H}_{l_j}|^{k_{j,1}} |\underline{\phi}_{l_j}|^{k_{j,2}} |\underline{x}_{l_j}|^{k_{j,3}} \\ &\le K_0 \sum_{p_s((q_1,\nu_2,\nu_3,q_4),\lambda)} \prod_{j=1}^{s} C_M^{|k_j|} |\underline{x}|^{-k_{j,2}(1+l_{j,1}+l_{j,4})} \\ &\le K_0 C_M^M |\underline{x}|^{-q_1-q_4}, \end{aligned}$$

写作 $k_j = (k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3})$, $l_j = (l_{j,1}, \ldots, l_{j,4})$, 其中 $K_0 = K_0(M, |R|_{C^M}) > 0$ 仅取决于：(a) M 和 (b) 光滑函数 R 的 C^M 界 $|R|_{C^M}$。在最后一个不等式中，我们使用了 p_s （A.4）的定义。具体而言，由

$$\sum_{j=1} k_{j,2}(1 + l_{j,1} + l_{j,2}) < \sum_{j=1} |k_j|(1 + l_{j,1} + l_{j,2}) \le \sum_{j=1} |\nu|(1 + l_{j,1} + l_{j,2}) \le 1 + q_1 + q_2. \quad \text{(A.6)}$$

我们得出 $\sum_{j=1} k_{j,2}(1 + l_{j,1} + l_{j,2}) \le q_1 + q_2$；注意，（A.6）中的第一个不等式是严格的。现在利用（A.5），我们得到

$$|D^\nu W_R| \le K |\tau - x_0|^{N+1-\nu_1-\nu_4},$$

当 $K = K(M, |R|_{C^M}, C_M) > 0$ 足够大时。 □

最后，我们描述函数

$$W_\Lambda = \underline{x}.\Lambda \circ (\underline{H}, \underline{x}), \quad W_\Omega = \underline{x}^{-2}.\Omega \circ (\underline{H}, \underline{x}),$$

这些函数也出现在（A.1）的右侧，但与 ϕ无关。

引理 A.3。令 $M \in \mathbb{N}$，并假设

$$|\underline{H}_\nu(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \le C_M,$$

对所有 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in V(\xi)$ 以及所有 $1 \le |\nu| \le M$，都存在一个常数 $K = K(M, |D|_{C^M}, |\Omega|_{C^M}, C_M) > 0$，它仅取决于：*(a)* M；*(b)* D 和Ω的统一 C^M界 $|D|_{C^M}$和 $|\Omega|_{C^M}$；以及 *(c)* 常数 $C_M > 0$，使得

$$|D^\nu W_\Lambda(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \le K, \quad |D^\nu W_\Omega(\tau, H_0, \phi_0, x_0)||\tau - x_0|^{2+\nu_1+\nu_4} \le K,$$

对所有 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in V(\xi)$ 以及所有 $1 \le |\nu| \le M$。

证明。由直接计算可得。 □

引理 A.4。设 $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$。那么，对于任意满足 $|\nu| \le M$ 的 $\nu \in \mathbb{N}_0$，存在一个常数 C_ν 和一个 $\xi_\nu > 0$，使得

$$|\underline{H}_\nu(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \le C_\nu, \quad |\underline{\phi}_\nu(\tau, H_0, \phi_0, x_0)||\tau - x_0|^{1+\nu_1+\nu_4} \le C_\nu, \qquad \text{(A.7)}$$

对所有 $(\tau, H_0, \phi_0, x_0) \in V(\xi_\nu)$。

按照引理 4.6 的证明继续进行，(A.7) 表明 H_ν 可连续延拓至 $\underline{V}(\xi)$。因此，只需证明引理 A.4，即可完成引理 4.10 的证明。

为证明引理 A.4，我们采用归纳法。对于 $\nu = 0$，结论成立，参见 (4.20) 和引理 4.5 的证明。接下来，假设结论对于 $|\nu| = n$成立。于是我们考虑 $\nu' := \nu + \delta_i$，其中 $\delta_i = (\delta_{i,1}, \ldots\ldots, \delta_{i,4})$ 对于

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

引理 **A.5.** 对于足够大的 $C_{\nu'} > 0$ 和足够小的 $\xi > 0$，有 *th* *at*

$$|\underline{H}_{\nu'}(0, H_0, \phi_0, x_0)| \leq \widetilde{C}_{\nu'}, \quad |\underline{\phi}_{\nu'}(0, H_0, \phi_0, x_0)||x_0|^{1+\nu_1+\nu_4+\delta_{i,1}+\delta_{i,4}} \leq \widetilde{C}_{\nu'},$$

对于所有 $(0、 H_0、 \phi_0、 x_0) \in V(\xi)$

证明。根据定义，$H\underline{(0, H_0, \phi_0, x_0)} = H_0$，$\underline{\phi}(0, H_0, \phi_0, x_0) = \phi_0$，$_x(0, H_0, \phi_0, x_0) = x_0$。因此，如果 $\nu = (0, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$，则对于 $_z = H、\phi、x$，有 $z_\nu(0, \ldots) = 0$（除非 $_H_{(0,1,0,0)} = 1、_\phi_{(0,0,1,0)} = 1$ 或 $x_{(0,0,0,1)} = 1$）。另一方面，如果 $\nu_1 \geq 1$，则由 (A.1) 可得

$$\underline{H}_{\nu+\delta_i}\big|_{\tau=0} = \frac{1}{3\delta}\left(D^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)+\delta_i}(\underline{x}.\Lambda(\underline{H}, \underline{x}))_{\tau=0} + D^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)+\delta_i}(\underline{x}^{N+1}.R(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x}))_{\tau=0}\right),$$

$$\underline{\phi}_{\nu+\delta_i}\big|_{\tau=0} = \frac{1}{3\delta}\left(D^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)+\delta_i}(\underline{x}^{-2}.\Omega(\underline{H}, \underline{x}))_{\tau=0} + D^{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)+\delta_i}(\underline{x}^{N-1}.P(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x}))\right)_{\tau=0}.$$

利用归纳假设、引理 A.2 和引理 A.3，即可得到该结果。

□

现在我们考虑

$$\frac{d\underline{H}_{\nu'}}{d\tau} = \frac{1}{3\delta}\left(D^{\nu'}(\underline{x}.\Lambda(\underline{H}, \underline{x})) + D^{\nu'}(\underline{x}^{N+1}.R(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x}))\right),$$

$$\frac{d\underline{\phi}_{\nu'}}{d\tau} = \frac{1}{3\delta}\left(D^{\nu'}(\underline{x}^{-2}.\Omega(\underline{H}, \underline{x})) + D^{\nu'}(\underline{x}^{N-1}.P(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x}))\right).$$

~ ~ ~ ~令 $C_{H,\nu'} := 2C_{\nu'}$ 且 $C_{\phi,\nu'} > C_{\nu'}$。

我们可以取足够大的 $C_{\nu'}$，使得对所有$|\nu| \leq n$，都有 $C_{\nu'} \geq C_\nu$。于是，根据引理 A.5，我们有

$$|\underline{H}_{\nu'}(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \leq C_{H,\nu'}, \quad |\underline{\phi}_{\nu'}(\tau, H_0, \phi_0, x_0)||\tau - x_0|^{1+\nu_1+\nu_4+\delta_{i,1}+\delta_{i,4}} \leq C_{\phi,\nu'}, \tag{A.8}$$

对所有 $\tau \in (0, \tau_0)$，当 $\tau_0(H_0, \phi_0, x_0)$ 足够小时，> 0。事实上，由引理 A.2 和归纳假设可得

$$D^{\nu'}(\underline{x}^{N+1}.R(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x})) \to 0, \quad D^{\nu'}(\underline{x}^{N-1}.P(\underline{H}, \underline{\phi}, \underline{x})) \to 0$$

当 $\tau,\ x_0 \to 0$ 对任意 $C_{H,\ \nu'},\ C_{\phi,\ \nu'} > 0$均成立。因此，由引理 A.3 可知，当 $\xi > 0$ 足够小~时，存在常数 $K = K(M,\ |\Lambda|_{C^M},\ |\Omega|_{C^M},\ C_{\nu'})$，它仅取决于：(a) M，~(b) C^M 的统一 $|\Lambda|_{C^M}$ 界以及 |和 Ω 关于 $|_{C^M}$ 的 Λ 界，分别为；以及 (c) $C_{\nu'}$，使得

$$\left|\frac{d\underline{H}_{\nu'}}{d\tau}\right| \leq K,$$

$$\left|\frac{d\underline{\phi}_{\nu'}}{d\tau}\right| \leq \underline{x}^{-2-\nu_1-\nu_4-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}}K,$$

对所有 $(\tau,\ H_0,\ \phi_0,\ x_0) \in V(\xi)$ 和 $\tau \in (0,\ \tau_0)$ 均成立。这里的主要观察是，取足够小的$\xi > 0$，即可确保 K 与 $C_{H,\ \nu'}$ 和 $C_{\phi,\ \nu'}$无关。随后我们进行积分并使用

$$\left| \int_0^\tau \underline{x}^{-q} dt \right| \leq \frac{2}{q-1} |\tau - x_0|^{1-q},$$

对任意 $q > 1$。由此得到如下结果

$$|\underline{H}_{\nu'}(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| \leq \widetilde{C}_{\nu'} + |x_0| K,$$

$$\begin{aligned} |\underline{\phi}_{\nu'}(\tau, H_0, \phi_0, x_0)| &\leq \widetilde{C}_{\nu'} |x_0|^{-1-\nu_1-\nu_4-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}} + \frac{2}{1+\nu_1+\nu_4+\delta_{i,1}+\delta_{i,4}} |\tau - x_0|^{-1-\nu_1-\nu_4-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}} K \\ &\leq |\tau - x_0|^{-1-\nu_1-\nu_4-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}} \left(\widetilde{C}_{\nu'} + \frac{2K}{1+\nu_1+\nu_4+\delta_{i,1}+\delta_{i,4}} \right), \end{aligned}$$

其中我们还用到了引理 A.5。现在取

$$C_{\phi,\nu'} := \widetilde{C}_{\nu'} + \frac{2K}{1+\nu_1+\nu_4+\delta_{i,1}+\delta_{i,4}},$$

~，并进一步减小 $\xi > 0$，以确保$|x_0| \leq \frac{C_{\nu'}}{K}$。于是，(A.8) 对所有 $\tau \in (0,\ x_0)$ 都成立，正如所需。这就完成了引理 A.4 的证明。