arXiv:2303.00292v1 [math.CV] 1 Mar 2023

《拟正则局部同胚的径向极限》评注

郭昌宇和宣毅

Dedicated to the memory of Yurii Reshetnyak

Abstract. 在这篇短文中，我们研究一致域上的拟正则局部同胚。我们证明，此类映射总能沿约翰曲线延拓到某些边界点，从而推广了 Rajala [《美国数学杂志》 2008]中的相应结果。

1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 中的一个域。若映射 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为K拟正则映射，则它属于 $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 并满足

$$\|Df(x)\|^n \leq K J_f(x),$$

对于几乎处处的 $x \in \Omega$，其中 $Df(x)$ 是 f 在 x处的微分，$\|Df(x)\|$是 $Df(x)$ 的算子范数，而 $J_f(x)$ 是 $Df(x)$ 的雅可比行列式。若进一步假设 f 是单射，则得到 K-拟共形映射这一类。高维拟共形映射理论由 Reshetnyak、Gehring 和 V¨ais¨al¨a 正式开创（关于其历史的精彩介绍，见 [10] ），并由 Mostow [15] 成功应用于证明其著名的刚性定理。向非单射拟正则情形的进一步推广同样由 Reshetnyak [18, 19] 开创，而 Martio、Rickman 和 V¨ais¨al¨a 则在其开创性著作 [12, 13, 14]中全面发展了基础理论。高维拟正则映射理论中最深刻的结果之一，是 Reshetnyak [18, 19]的以下定理：非常值拟正则映射是连续、离散、开且保向的。关于高维拟共形映射和拟正则映射理论的更多内容，参见优秀的专著 [20, 22, 21]。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30C65,30C80,31B15.

Key words and phrases. 约翰域、一致域、拟正则映射、拟共形映射、径向极限。C.-Y. Guo 受中国科学技术部青年科学家计划（编号：2021YFA1002200）、国家自然科学基金（编号：12101362）和山东省自然科学基金（编号：ZR2022YQ01、ZR2021QA003）资助。通讯作者 Y. Xuan 受中国科学院前沿科学重点研究（资助编号：ZDBS-LY-7002）资助。

在这篇简短的札记中，我们将考察拟正则映射的边界行为。回顾 Fatou [3]的经典定理：定义在单位圆盘上的有界解析函数，在单位圆上几乎处处存在径向极限。然而，迄今为止，能否将这一结果推广到高维拟正则映射的情形仍未解决。事实上，即使对于有界拟正则映射，这个问题也尚无答案。Kai Rajala [17], 在这一问题上取得了重大突破，他证明拟正则局部同胚$f: B^n(0,1) \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$在边界$S^{n-1}(0,1) = \partial B^n(0,1)$上的某个点处存在径向极限。更确切地说，存在一点 $\xi \in S^{n-1}(0,1)$，使得径向极限

$$\lim_{t\to 1} f(t\xi) = b_\xi \in \mathbb{R}^n \qquad \text{exists.}$$

如果我们进一步限制f的重数函数的增长，那么可以证明在$S^{n-1}(0,1)$上几乎处处存在径向极限，甚至还可以对“坏”集合给出豪斯多夫维数估计；在该集合上，径向极限不存在；参见 [11] 和 [8]。

我们将把注意力限制在 Rajala 的结果 [17] 上，并通过将定义域 $B^n(0,1)$放宽到由 Gehring 和 Osgood 引入的更一般的有界一致域类 [4]，来考虑一种自然的推广。

回顾一下，有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为 c-一致域，如果每一对点 x_1、$x_2 \in \Omega$ 都可以由一条曲线 $\gamma \subset \Omega$ 连接起来，并满足以下两个性质：

$$\ell(\gamma) \leq c|x_1 - x_2|,$$
$$\min_{i=1,2} \ell(\gamma(x_i, x)) \leq c d(x, \partial\Omega) \text{ for all } x \in \gamma.$$

¨实际上，我们将采用 Akkinen 和 Guo [2]引入的一种一致域变体。为此，我们还需要 John 域的定义。回顾一下，有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为以 $x_0 \in \Omega$ 为中心的 c-John 域，如果每个点 $x \in \Omega$ 都可以由一条可求长曲线 $\gamma: [0,l] \to \Omega$ 连接，该曲线以弧长参数化，并满足 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(l) = x_0$，且具有如下性质：

$$d(\gamma(t), \partial\Omega) \geq \frac{t}{c} \text{ for every } t \in [0,l]. \tag{1.1}$$

容易验证，John 域 Ω 的每个边界点 $\subset \mathbb{R}^n$都可以通过一条 x_0 曲线 γ 与满足 (1.1) 的点相连。具有此性质的曲线 γ 称为 c-John 曲线。对于点 $\xi \in \partial\Omega$，我们将所有连接 ξ 与 x_0的 c-John 曲线的集合记为$I_c(\xi, x_0)$。注意，对于有界的 c-一致域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，存在一点 $x_0 \in \Omega$，使得 Ω 是以 x_0为中心的 c_1-John 域，其中 c_1 仅取决于 c；见 [23, 第2节17]。因此，我们定义

定义 1.1（带中心的一致域）。若有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一 c一致域，且同时是以 x_0为中心的 cJohn 域，则称其为以 x_0 为中心的 x_0一致域。

Akkinen 和 Guo 在 [2]中研究了带中心的一致域内拟正则映射的边界行为，乃至更一般的有限畸变映射类在某些正则性限制下的边界行为。¨特别是，他们证明了这些映射类沿 John 曲线的极限存在且唯一。

今后，除非另有说明，维数 n 始终假设大于或等于 3。本短文的主要结果是以下定理，它可以看作是 [17, 定理 1.1] 的自然推广。

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个带中心的 c_0一致域，且 x_0 有$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为一个拟正则局部同胚。则存在一点$\xi \in \partial\Omega$，使得对于任意 c_0-John 曲线 $\gamma \in I_{c_0}(\xi, x_0)$,

$$\lim_{t\to 0+} f(\gamma(t)) = b_\xi \in \mathbb{R}^n$$

存在，并且极限 b_ξ 与所选取的 c_0-John 曲线$\gamma \in I_{c_0}(\xi, x_0)$ 无关。

如前所述，如果对 f 增加更多正则性限制，那么我们就能证明沿约翰曲线的极限几乎处处存在这一更强的结论（甚至可能得到维数估计）；关于这一方向的更多内容，见 [2, Section 3] 。与 [17], 类似，我们将证明一个更一般的结果；见下文定理 3.1。特别是，这将推出在 $\partial\Omega$ 上有无穷多个点沿约翰曲线的极限存在；见定理 3.1 后的注释。

对于空间 K-拟正则映射，定理 1.1 中的局部同胚假设可以由一个小量假设 $K \le 1+\epsilon(n)$ 取代；见 [14, 16]。假设 $n \ge 3$ 对定理 1.1 的结论是必要的；平面情形下的一个反例见 [17, Page 271] 。

定理 1.1 的证明思路与 Rajala [17] 所用的思路非常相似，只需作一些细微的技术调整：我们从像上的一条线段 γ 出发，使得 γ 终止于一点 y，该点属于 $\partial\Omega$ 的聚集集，并且它有一个提升 γ'，该提升趋近于 $\partial\Omega$ 上的一点 x。选取一条连接 x_0 与 x 的约翰曲线 $\hat{}\gamma$。接着，我们尝试将 γ' 的性质与约翰曲线 $\hat{}\gamma$ 的像的行为联系起来。与 [17] 的情形相比，一个重要区别是，提升 γ' 并不呈现简单的切向／非切向行为。相反，我们利用适当的拟双曲测地线，并借助拟双曲距离进行连续性估计。幸运的是，在 [17], 中证明的必要辅助结果在我们的情形下仍然成立，因此我们可以像 [17] 中那样估计某些曲线族的共形模。

本文的结构如下。第2节中，我们介绍一些预备知识，并固定本文所用的记号。第 3 节中，我们按照 [17] 确定基本设置，并表述更一般的定理 3.1。我们还汇集了 [17] 中证明下一节结论所需的主要辅助结果。由于论证与 [17], 中的论证几乎完全相同，我们只作简要概述，并指出需要

修改之处。定理 3.1 的证明见第 4 节。最后一节中，我们考察具有 p-可积畸变的更一般映射类的径向极限存在性，从而推广 [1] 中的相应结果。

致谢：我们感谢 Jinsong Liu 教授和¨Tuomo Akkinen 教授对本工作的关注，并在准备本工作期间进行了许多有益的讨论。

2. Preliminaries

我们用 $B^n(x,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心、半径为 r 的欧氏球，或简记为 $B(x,r)$，并记 $S^{n-1}(x,r) = \partial B^n(x,r)$。两点 $x,y \in \mathbb{R}^n$ 之间的欧氏距离记为 $|x-y|$，而两个子集 $A,B \subset \mathbb{R}^n$ 之间的欧氏距离记为 $d(A,B)$。对于一点$a \in \mathbb{R}^n$，$d(\{a\},B)$简记为 $d(a,B)$。集合$A \subset \mathbb{R}^n$ 的欧氏直径记为 diam (A)。对于集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 和开集 $G \subset \mathbb{R}^n$，若存在紧集 K 使得 $A \subset K \subset G$，则记作 $A \subset\subset G$。定义球冠 $C(z,\alpha,w)$如下：

$$C(z,\alpha,w) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-z| = |w-z|, (w-z)\cdot(x-z) > |x-z|^2 \cos\alpha\}.$$

此外，对于任意的 $z \in \mathbb{R}^n$，我们将以 z 为顶点、张角为 φ 的圆锥 $K(z,\varphi)$ 定义为

$$K(z,\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : z\cdot(z-x) > |z||z-x|\cos\varphi\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线 γ 是从一个区间 I 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射，且 γ 在 x、$y \in \gamma$ 之间的子曲线记作 $\gamma(x,y)$。γ 的像记作 $|\gamma|$，而曲线 γ 的曲线长度为 $\ell(\gamma)$。

设 $\gamma\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$ 为一条曲线，且 f 是从域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个连续、离散且开映射。假设 $x \in f^{-1}(\gamma(a))$。从 x 开始的 γ 的最大 f-提升定义为一条曲线 $\beta\colon [a,c) \to \Omega$，使得

(1) $\beta(a) = x$，(2) $f\circ\beta = \gamma|_{[a,c)}$，(3) 若 $c < c' \le b$，则不存在一条曲线 $\alpha : [a,c') \to \Omega$，使得 $\beta = \alpha|_{[a,c)}$ 且 $f\circ\alpha = \gamma|_{[a,c')}$。

对于连续、离散且开映射的 f，这样的最大提升总是存在；参见 [21,第 II 章第 3] 节。

真域 Ω $\mathbb{R}^n$ 中两点 x、y 之间的拟双曲距离 d_{qh} 为

$$d_{qh}(x,y) = \inf\int_\gamma \frac{ds}{d(z,\partial\Omega)},$$

其中，下确界取遍 Ω 中连接 x 与 y 的所有可求长曲线 γ。这一距离最早由 Gehring 和 Palka [5] 引入。一条曲线

γ 连接 x 与 y，并且达到该下确界，即

$$d_{qh}(x,y)=\int_{\gamma}\frac{ds}{d(z,\partial\Omega)}$$

称为连接 x 和 y的拟双曲测地线。根据 [4, 引理1], ，真域 Ω 中任意两点之间总存在一条拟双曲测地线。

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界域。惠特尼分解 $\mathcal{W}=\mathcal{W}(\Omega)$是由开立方体 $Q\subset\Omega$构成的一个族，它们两两不相交，并满足以下两个性质:

- $\Omega=\bigcup_{Q\in\mathcal{W}}\overline{Q}$;
- $\operatorname{diam}(Q)\le d(Q,\partial\Omega)\le 4\operatorname{diam}(Q)$.

众所周知，对于任意真域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，这样的分解总是存在。

接下来，我们介绍曲线族模的概念。设 Γ是 Ω 中的一个曲线族。共形 n-模 $M\Gamma$ 定义为

$$M\Gamma=\inf_{\rho\in X(\Gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)^n dx,$$

其中 $X(\Gamma)$是所有满足以下条件的博雷尔函数 $\rho\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ 的集合

$$\int_{\gamma}\rho ds\ge 1\text{ for all }\gamma\in\Gamma.$$

对于一个 K-拟正则映射 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ 以及 Ω 中的一个曲线族 Γ，以下重要的波列茨基不等式成立（见 [21, 第 II 章定理 8.1]）：

$$Mf(\Gamma)\le K^{n-1}M\Gamma.$$

按照 [22], ，我们将模的概念引入到位于 $\mathbb{R}^n$ 的子流形上的曲线族中。设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个（$n-1$）维光滑子流形，Γ 是 S 上的一个曲线族。Γ 关于 S 的 n-模定义为

$$M_n^S(\Gamma)=\inf_{\rho\in X(\Gamma)}\int_S\rho^n dm_{n-1},$$

其中，$X(\Gamma)$ 是所有博雷尔函数 $\rho\colon S\to[0,\infty]$ 的集合，使得对于所有 $\gamma\in\Gamma$，均有 $\int_\gamma\rho ds\ge 1$。

接下来，我们证明一个关于与惠特尼分解相关的曲线族之模上界的简单引理。

引理 2.1. 设 Ω 为一个域，$\mathcal{W}(\Omega)$ 是 Ω 的惠特尼分解。对于任意立方体 $Q\in\mathcal{W}(\Omega)$，设 Γ_Q 为 Ω 中所有连接 $\partial\Omega$ 与 Q 的曲线族。那么，存在一个常数 C，与 Q 无关，使得 $M\Gamma_Q\le C$.

证明. 固定一个立方体 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$。记 Q 的中心为 x_Q。于是，根据惠特尼分解的性质，我们有

$$Q \subset B\big(x_Q, \operatorname{diam}(Q)/2\big),$$

and

$$B\big(x, \operatorname{diam}(Q)\big) \subset \Omega.$$

因此，根据模的一个基本性质，我们有 $M\Gamma_Q \le M\Gamma_d$，其中 Γ_d 是连接 $B(x, d/2)$ 与 $\mathbb{R}^n \backslash B(x,d)$ 的所有曲线所组成的曲线族。众所周知（例如参见 [22]），

$$M\Gamma_d \le C,$$

由此我们推得 $M\Gamma_Q \le C$。 □

3. Basic setting and auxillary results

在本节中，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个以 x_0 为中心的 c，且 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是一个拟正则局部同胚。对于一个以 x_0 为中心的 $c\,\Omega$，连接 x_0 与某个边界点 x_1 的 c-John 曲线 $\gamma\colon [0,l] \to \Omega$ 以弧长参数化，并满足 $\gamma(0) = x_1$ 以及 $\gamma(l) = x_0$。不失一般性，我们假设 $f(x_0) = 0$。于是，根据局部同胚的性质，我们可以取得充分小的 $\delta > 0$ 以及 x_0 的一个邻域 U，使得 f 在 U 上的限制是从 U 到 $B(0,\delta)$ 的同胚。对于任意 $y \in S^{n-1}(0,1)$，定义

$$\gamma_y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n, \gamma_y(t) = ty.$$

假设 $\tilde{\gamma}_y$ 是从 x_0 出发的 γ_y 的最大 f 提升。对于每个 $y \in S^{n-1}(0,1)$，存在一个数 $\lambda(y) \in [\delta, \infty]$、一个点 $x_y \in \partial\Omega$ 以及一个递增序列 $\{t_i\}_{i\ge 1}$，满足

$$t_i \to \lambda(y) \text{ as } i \to \infty$$

and

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\gamma}_y(t_i) = x_y.$$

设星形域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为

$$G = \{ty : y \in S^{n-1}(0,1), t \in [0, \lambda(y))\}.$$

将 $f^{-1}(G)$ 的 x_0 分支记为 G'，将 f 在 G' 上的限制记为 g。容易验证 g 是一个同胚（见 [17, 第 275] 页）。因此，g 是一个拟共形映射。此外，设

$$F = \{z_y : y \in S^{n-1}(0,1)\} \backslash \{\infty\},$$

其中

$$z_y = \begin{cases} \gamma_y(\lambda(y)), & \delta \le \lambda(y) < \infty, \\ \infty, & \lambda(y) = \infty. \end{cases}$$

那么 $F \neq \emptyset$，否则我们就会得到一个拟共形映射$g^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \Omega$；这是不可能的，因为 $\mathbb{R}^n$ 的拟共形像是 $\mathbb{R}^n$。

我们将满足以下条件的所有 $z_y \in F$ 的集合记为 H，其中存在两个正数r_y和φ_y，使得

$$K(z_y, \varphi_y) \cap B(z_y, r_y) \subset G.$$

由 f 的局部同胚性质可知，我们可以找到一点 $z_y \in H$，使其在所有 $z \in H$ 中使 $|z|$ 取到最小值。于是 $z_y \in H$，从而 $H \neq \emptyset$。

现在，我们可以陈述主要定理，由此可推出定理 1.1。

定理 3.1. 设 Ω 和 f 如上所述。则对于任意满足 $z_y \in H$ 的点 $y \in S^{n-1}$ (0, 1)，以及 Ω 中连接 x_0 和 x_y 的任意 c-John 曲线 γ，我们有

$$\lim_{t \to 0+} f(\gamma(t)) = z_y. \tag{3.1}$$

按照定理 3.1]，后的段落中的推理，我们可以证明 H 含有无穷多个元素。因此，定理 3.1 表明，定理 1.1 的结论在 $\Omega = B^n$ 中的无穷多个点上成立。然而，即使在 $\Omega = B^n$ (0, 1) 的情形下，我们仍不清楚能否对极限存在点集的大小推导出测度估计。

接下来，我们从 [17, 第 3] 节收集一些有用的技术引理，这些引理将在定理 3.1 的证明中用到。第一个是一个拓扑结果，之后将用于估计某些曲线族的共形模。对于球冠 $C \subset S^{n-1}(a, r)$，∂C 表示 C 相对于 $S^{n-1}(a, r)$ 的相对边界。

引理 3.1. 假设 $z_y \in F$，且$\hat{\gamma}$：$[0, 1) \to \Omega$是一条曲线，$\hat{\gamma}(0) \in |\tilde{\gamma}_y|$。此外，假设对于某个 $r > 0$，$f(\hat{\gamma}(0)) \in B(z_y, r)$，并且集合

$$S := \{s : f(\hat{\gamma}(s)) \in S^{n-1}(z_y, r)\} \neq \emptyset.$$

令 $s^r = \min_{s \in S}$. 那么存在一个角度 $0 < \alpha \leq \pi$ 和一个点

$$k_r \in \partial C(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r))),$$

使得在 $C(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r)))$中，连接 $f(\hat{\gamma}(s^r))$与 k_r的每条曲线 η都满足：从$\hat{\gamma}(s^r)$出发的 η 的最大提升 η' 具有如下性质

$$\overline{|\eta'|} \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

证明。证明基本包含在 [17, 引理 3 的证明2]中。该论证基本上是拓扑性的，只用到了 f的局部同胚性质。为方便读者，我们在此简要概述。

对于 $\varphi > 0$，记 C'_φ为 $f^{-1}(C(z_y, \varphi, f(\hat{\gamma}(s^r)))$ 中包含 $\hat{\gamma}(s^r)$ 的分支。令 $\alpha \in (0, \pi]$ 为满足下述条件的最大角度

$$f|_{C'_\alpha} : C'_\alpha \to C\left(z_y, \alpha, f\left(\gamma\left(s^r\right)\right)\right)$$

是一个同胚，并令 $h = f|_{C'_\alpha}$。我们考虑两种情形。

情况 1： $\alpha < \pi$。

我们采用反证法。如果引理不成立，那么对于每个

$$p \in \partial C\left(z_y, \alpha, f\left(\hat{\gamma}\left(s^r\right)\right)\right),$$

存在一条曲线 η，连接 $f(\hat{\gamma}(s^r))$ 和 p，且位于 $C(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r)))$ 中，并满足以下性质：从 $\hat{\gamma}(s^r)$ 出发的 η 的提升 η' 满足

$$\left|\eta'\right| \subset \Omega_\epsilon$$

对某个 $\epsilon > 0$，其中

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

根据 [21, 第三章引理 3.3]，h^{-1} 可延拓为定义在 p 的一个邻域上的映射。由于 $p \in \partial C(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r)))$ 是任意的，h^{-1} 可延拓为一个同胚，将 $\overline{C}(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r)))$ 映到 $\overline{C'_\alpha}$ 上。此外，[21, 第三章引理 3.2] 保证我们可以将 h^{-1} 延拓为一个同胚，将 $C(z_y, \alpha, f(\hat{\gamma}(s^r)))$ 的一个邻域-$^-$ 映到其像上。因此，α 不是最大值，这与假设矛盾。

情形 2：$\alpha = \pi$。

我们将 $\partial C\left(z_y, \pi, f\left(\hat{\gamma}\left(s^r\right)\right)\right)$ 中的唯一点记为 p，并用反证法进行论证。若引理不成立，则存在一条曲线 η，连接 $f(\hat{\gamma}(s^r))$ 和 p，且具有如下性质：从 $\hat{\gamma}(s^r)$ 出发的 η 的极大提升 η' 满足

$$\left|\eta'\right| \subset \Omega_\epsilon \tag{3.2}$$

对某个 $\epsilon > 0$ 成立。接下来，我们定义一个嵌套集列如下：

$$W_i = h^{-1}\left(B\left(p, i^{-1}\right) \cap C\left(z_y, \pi, f\left(\hat{\gamma}\left(s^r\right)\right)\right)\right)$$

由于 $n \geq 3$，每个 W_i 都是连通的，且 $\overline{W_i}$ 也连通。因此，

$$\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W_i}$$

是紧且连通的。因此，由 (3.2) 可得

$$\mathcal{K} \cap \Omega \neq \emptyset$$

然而，由于 f 是离散的，且

$$\mathcal{K} \cap \Omega \subset f^{-1}(p),$$

$\mathcal{K}$ 必须是单点集。

其余论证与 [17]中引理 3.2的证明完全相同。利用一个拓扑论证构造一条曲线 β，它有两个提升，二者均起始于$\hat{\gamma}(s^r)$，这与 f的局部同胚性质相矛盾。□

下文中，我们固定一点 $z_y \in H$，并令 $\varphi_y = \varphi_0$ 和 $r_y = r_0$。不失一般性，假设 $r_0 \leq \frac{1}{2}$ 和 $|x_y - x_0| = 1$。对于 $0 < r < 1$，令

$$t_r = \min\{t \in [0, \lambda(y)) : \tilde{\gamma}_y(t) \in S^{n-1}(x_y, r)\}$$

and

$$x_r = \tilde{\gamma}_y(t_r) \in S^{n-1}(x_y, r). \tag{3.3}$$

于是，显然

$$|g(x_{r_1}) - z_y| < |g(x_{r_2}) - z_y|, \text{ whenever } r_1 < r_2.$$

根据 [17],，我们定义函数 $\theta\colon (0,1] \to (0,1]$ as

$$\theta(t) = d(x_t, \partial\Omega).$$

那么，很容易验证 θ 是右连续的。此外，我们有关于 θ 的以下积分估计。

引理 3.2（命题 4.1, [17]）。如果 $f(x_s) \in B(z_y, r_0/2)$，那么对任意 $0 < t < s/2$, 有

$$\int_t^s \frac{dr}{\theta(r)} \leq C_0 \log \frac{C_1}{|f(x_t) - z_y|},$$

其中两个正常数 C_0、C_1 仅取决于 φ_0、r_0、K 和 n。

上述引理中 θ 的定义不同于 [17, 命题 4.1] 中所采用的定义。然而，那里给出的证明仅使用了拟共形性与局部拟对称性的定量等价性，因此无需修改即可应用于我们的情形。

最后，我们回顾关于 θ 的以下技术性函数引理。

引理 3.3（引理 5.1, [17]）。设 $\theta\colon (0,1] \to (0,1]$ 是一个右连续函数，使得当 $\theta(t_i) \to 0$ 时 $t_i \to 0$，并且满足以下性质：

$$\lim_{t\to 0} \theta(t) t^{-1} = 0. \tag{3.4}$$

那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个数 M 以及一个递减序列 $T_i \to 0$，使得

$$\log \frac{1}{\theta(T_i)} \leq \epsilon \int_{T_i}^1 \frac{dr}{\theta(r)} + M \text{ for any } i \geq 1.$$

4. Proof of the Main Result

定理 3.1 的证明。仿照 [17, 定理 3.1], 的证明，我们用反证法证明定理 3.1。假设定理 3.1 的结论不成立。那么，存在一条连接 Ω 中 x_0 和x_y 的 a c-John 曲线 γ、一个常数 $m > 0$ 以及一个递减序列 $t_j \to 0$，使得

$$|f(\gamma(t_j)) - z_y| \geq m \text{ for all } j \geq 1.$$

令$a_j = \gamma(t_j)$，并固定一个如引理 3.2 中所述的常数 s。由于

$$|x_y - a_j| \leq \ell(\gamma(x_y, a_j)) = t_j,$$

我们可以假设

$$|x_y - a_j| < s \text{ for all } j \geq 1.$$

对于每个 $j \geq 1$，我们选取一个点 $b_j = x_{\alpha(j)}$，其中某个 $0 < \alpha(j) < s$，使得

$$|b_j - x_y| < |a_j - x_y|,$$

其中$x_{\alpha(j)}$ 如（3.3）所示，稍后我们将确定 $\alpha(j)$。于是，我们有

$$\alpha(j) = |b_j - x_y| \xrightarrow{j\to\infty} 0. \tag{4.1}$$

设 β 是连接a_j 和 b_j 的一条拟双曲测地线，并用$\mathcal{W}(\Omega)$表示 Ω 的惠特尼分解。将$\mathcal{W}(\Omega)$中所有与拟双曲测地线 β 相交的立方体记为 $\{Q_i\}_{1\leq i\leq N_j}$。于是我们有

$$N_j \leq C d_{qh}(a_i, b_i), \tag{4.2}$$

其中 C 是仅依赖于 n 的常数（例如参见 [9, 第 421]页）。由于 Ω 是一个 c-一致域，我们有（例如参见 [4]）

$$d_{qh}(a_j, b_j) \leq C \log\Big(1 + \frac{|a_j - b_j|}{\min\{d(a_j, \partial\Omega), d(b_j, \partial\Omega)\}}\Big), \tag{4.3}$$

其中 C 是仅依赖于 n 和 c的常数。由于 γ 是一条 c-John 曲线，我们有

$$d(a_j, \partial\Omega) \geq \ell(\gamma(a_j, x_y))/c \geq |a_j - x_y|/c \geq \theta(\alpha(j))/c = d(b_j, \partial\Omega)/c.$$

此外，

$$|a_j - b_j| \leq |a_j - x_y| + |b_j - x_y| \leq 2|x_y - a_j|.$$

因此，由（4.2）、（4.3）及上述估计可得

$$N_j \leq C \log(1 + C\frac{|x_y - a_j|}{\theta(\alpha(j))}). \tag{4.4}$$

Set

$$r_j = |f(b_j) - z_y| \quad \text{and} \quad s_j = |f(a_j) - z_y| \geq m. \tag{4.5}$$

断言： $r_j \to 0$ 当 $j \to \infty$时。

我们用反证法证明该断言。若该断言不成立，则存在常数 ϵ和一个子序列 b_{k_j}，使得 $|f(b_{k_j}) - z_y| > \epsilon$。由于对所有 $j \geq 1$都有 $f(b_{k_j}) \in \gamma_y([0, \lambda(y)))$，因此可得

$$\{f(b_{k_j})\} \subset\subset G.$$

由于 g 是同胚，我们有

$$\{b_{k_j}\} \subset\subset G',$$

这与（4.1）矛盾。因此，该断言成立。

那么，对于所有 $r \in (r_j, s_j)$，我们有

$$f(b_j) \in B(z_y, r),$$

and

$$f(a_j) \in \mathbb{R}^n \backslash B(z_y, r).$$

对于每个 $r \in (r_j, s_j)$，我们可以选择 β 的参数化： $[0,1] \to \Omega$，使得 $\beta(0) = b_j$ 且 $\beta(1) = a_j$，从而满足引理 3.1 的假设。设 $p_r = f(\beta(s^r))$，其中 s^r 如引理 3.1 中所给出。于是，引理 3.1 蕴含存在一个球冠 C_r 和一点 $k_r \in \partial C_r$，使得若记 Γ_r 为在 C_r 中连接 p_r 和 k_r 的所有曲线的集合，则从 $\beta(s^r)$ 出发的每条 $\gamma \in \Gamma_r$ 的最大提升 γ' 满足

$$\overline{|\gamma'|} \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \tag{4.6}$$

应用 [22, 定理102] 可得

$$M_S^n \Gamma_r \geq \frac{C}{r},$$

其中正的常数 C 仅取决于 n。因此，对于曲线族

$$\Gamma = \bigcup_{r \in (r_j, s_j)} \{\gamma : \gamma \in \Gamma_r\},$$

对 r 积分前一个估计可得

$$M\Gamma \geq C \log \frac{s_j}{r_j}. \tag{4.7}$$

接下来，令

$\Gamma' = \{\gamma' :$ γ'是某条 $\gamma \in \Gamma_r$的最大提升，它始于 $\beta(s^r)$ $r \in (r_j, s_j)\}$.

请注意，惠特尼分解中与β 相交的立方体记为 $\{Q_i : \ 1 \leq i \leq N_j\}$。用 Γ_i 表示所有连接 Q_i 与 $\partial\Omega$的曲线的集合，其中 $1 \leq i \leq N_j$。于是，根据引理 2.1,

$$M\Gamma_i \leq C, \text{ for all } 1 \leq i \leq N_j.$$

由 (4.6) 和模的次可加性可得

$$M\Gamma' \leq \sum_{i=1}^{N_j} M\Gamma_i \leq CN_j.$$

将上述估计与 (4.4) 结合，得到

$$M\Gamma' \leq C \log(1 + C\frac{|x_y - a_j|}{\theta(\alpha(j))}).$$

由波列茨基不等式、上述不等式、(4.7) 和 (4.5) 可得

$$\log m \leq \log s_j = \log \frac{s_j}{r_j} - \log \frac{1}{r_j} \leq C_2 \log(1 + C_3 \frac{|x_y - a_j|}{\theta(\alpha(j))}) - \log \frac{1}{r_j}. \tag{4.8}$$

注意，函数 θ 满足引理 3.3 的所有要求，除了 (3.4) 外。接下来，我们根据 θ 是否满足 (3.4)，分两种情况讨论。

情况 1：(3.4) 不成立。

由此可得

$$\limsup_{t\to 0}\theta(t)t^{-1}\geq\tau'>0.$$

现在，固定

$$\tau\in(0,\tau').$$

Set

$$m_j=|x_y-a_j|<s.$$

定义 $\epsilon_j m_j$ 为所有满足 $\theta(r)\geq\tau r.$ 的 $r\in(0,m_j]$ 的上确界。容易验证，对于所有 $j\geq 1$，$\epsilon_j m_j>0$。因此，对于任意 $j\geq 1$，存在一个数 $\alpha(j)\in[\epsilon_j m_j/2,\epsilon_j m_j]$，使得 $\theta(\alpha(j))\geq\tau\alpha(j)$。

接下来，若我们假设对于所有 $j\geq 1$，$\epsilon_j>\epsilon>0$，则 (4.8) 蕴含

$$\log m\leq C\log\left(C\frac{2m_j}{\tau\epsilon m_j}+1\right)-\log\frac{1}{r_j}\leq C(\tau,\epsilon)-\log\frac{1}{r_j}\to-\infty$$

当 $j\to\infty$ 时。这是一个矛盾。

因此，如有必要，取一个子列后，我们可以假设当 $j\to\infty$ 时，ϵ_j 趋于 0，且 ϵ_j 单调递减。现在，由于对于所有 $r\in[\epsilon_j m_j,m_j]$，$\theta(r)<\tau r$，根据引理 3.2，我们得到

$$\log\frac{C}{r_j}\geq C^{-1}\int_{\epsilon_j m_j}^{m_j}\frac{dr}{\theta(r)}\geq\frac{\log\frac{1}{\epsilon_j}}{C\tau}.$$

于是，由上述不等式和 (4.8) 可得

$$\log m\leq C\log\left(\frac{2C}{\tau}+\epsilon_j\right)+(C_1-\tau^{-1}C_2^{-1})\log\frac{1}{\epsilon_j}+C.$$

取 τ 足够小，使得系数 $C_1-\tau^{-1}C_2^{-1}<0$。于是，当 $j\to\infty$ 时，上述不等式右端趋于 $-\infty$。这就产生了矛盾，从而完成了这一情形的证明。

情形 2：(3.4) 成立。

我们对 $\epsilon=C_0^{-1}C_2^{-1}$ 应用引理 3.3。对每个 $j\geq 1$，取一个数 $i=i(j)$，使得

$$T_{i(j)}=|x_{T_{i(j)}}-x_y|<|a_j-x_y|,$$

其中 T_i 与引理 3.3 中相同。令 $\alpha(j)=T_{i(j)}$。于是，由引理 3.2 和引理 3.3 可得

$$\begin{aligned}C_2\log\frac{1}{\theta(T_i)}-\log\frac{C_1}{r_j}&\leq C_2\log\frac{1}{\theta(T_i)}-C_0^{-1}\int_{T_i}^{s}\frac{dr}{\theta(r)}\\&\leq MC_2+C_0^{-1}\int_s^1\frac{dr}{\theta(r)}.\end{aligned}$$

因此，结合上述不等式和 (4.8)，我们推得

$$\log m\leq C_2\left(\log(C_3|x_y-a_j|+\theta(T_i))+M\right)+\log C_1+C_0^{-1}\int_s^1\frac{dr}{\theta(r)}\xrightarrow{j\to\infty}-\infty,$$

这就产生了矛盾。因此，定理 3.1 的证明完毕。

□

5. Further discussion

本节将沿着 [1] 的思路，简要讨论雅可比行列式满足额外增长条件的某些有限畸变映射的径向极限的存在性。为此，我们首先介绍 p-可积畸变映射的定义；关于有限畸变映射理论的更多内容，参见专著 [7, 6]。

在本节中，我们假设 $f \in W^{1,\,1\,\mathrm{loc}}(B^n(0,1)\ \mathbb{R}^n)$，$J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B^n(0,1))$，且存在一个几乎处处有限的可测函数 $K(x) \geq 1$，使得 f 满足畸变不等式

$$|Df(x)|^n \leq K(x) J_f(x) \tag{5.1}$$

对几乎所有 $x \in B^n(0,1)$ 都成立。此外，我们还假设

$$\frac{|Df(x)|^n}{\log(e + |Df(x)|)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(B^n(0,1)).$$

定义 5.1. 我们称 $f\colon B^n(0,1) \to \mathbb{R}^n$ 是一个具有 p-可积畸变的映射，若存在 $M < \infty$ 使得

$$\int_{B^n(0,1)} K^p(x)\, dx \leq M.$$

本节的主要结果是以下定理，它推广了 [1,推论 1.2]。

定理 5.1。对于 $p > n-1$，令 $f\colon B^n(0,1) \to \mathbb{R}^n$ 是一个具有 p-可积畸变的映射，并进一步假设其雅可比行列式 f 满足增长条件

$$\int_{B(0,r)} J_f(x)\, dx \leq c(1-r)^{-a}$$

对某个 $a \in [0, n-1-n/p)$，则

$$\dim_{\mathcal{H}} E(f) \leq a + \frac{n}{p},$$

其中，$\dim_{\mathcal{H}}$ 指豪斯多夫维数，而 $E(f)$ 由所有满足以下条件的点 $x \in S^{n-1}(0,1)$ 组成：f 在 x处没有径向极限。特别地，在 $\partial B^n(0,1)$ 中几乎处处存在径向极限。

固定 $p > n-1$ 并令

$$p^* = \frac{np}{p+1}.$$

于是显然，$n-1 < p^* < n$ 和 $p = p^*/(n-p^*)$。我们将需要以下标准连续性估计。

命题 5.2. 设 $f\colon B^n(0,1) \to \mathbb{R}^n$ 是一个具有 $p > n-1$ 的 p-可积畸变映射。若 $B(z,r)$ 满足 $B(z,2r) \subset B^n(0,1)$，则对每个 $x, y \in B(z,r)$

$$|f(x) - f(y)|^{p^*} \leq C(n,p^*) t^{p^*-n+1} \int_{\partial B(z,t)} |Df(x)|^{p^*}\, dx,$$

几乎处处满足 $t \in (r, 2r)$。

证明。首先注意到 $f \in W^{1,\, p^*}{}_{\mathrm{loc}}(B^n(0,1)\ \mathbb{R}^n)$，其中 $p^* < n$。命题 5.2 现在可直接由以下球面上的 Sobolev 嵌入得到（例如参见 [1, 引理 3.2]）

$$|f(x) - f(y)|^{s} \leq C(n,s) t^{s-n+1} \int_{\partial B(z,t)} |Df(x)|^{s}\, dx.$$

以及欧几里得空间中的连续开映射是单调的这一事实，即

$$\operatorname{diam}(f(B^n(x,r))) \leq \operatorname{diam}(f(S^{n-1}(x,r)))$$

对所有 $B^n(x,r) \subset B^n(0,1)$。 □

现在我们可以证明定理 5.1 了

定理 5.1 的证明。证明与 [1, 定理 1 的证明1]类似。定义$\gamma_y\colon [0,1] \to B^n(0,1)$ 为与 $y \in S^{n-1}(0,1)$ 相关联的径向线段。于是，对每个 $k = 1, 2, \ldots\ldots$，令

$$\gamma_{y,k} = \gamma_y|_{[r_k, r_{k+1}]},$$

其中 $r_k = 1 - 2^{-k}$。此外，令

$$A_k = \{y \in S^{n-1}(0,1) : \operatorname{diam}(f|\gamma_{y,k}|) \geq k^{-1-\delta/n}\}.$$

Now

$$E(f) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k,$$

因此我们令

$$E_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

接下来，我们希望为集合 A_k 找到合适的覆盖，这可以借助命题 5.2 来实现。令 $y \in S^{n-1}(0,1)$ 和 $k \in \mathbb{N}$，并定义 $x_0 = \frac{r_{k+1}+r_k}{2} y$ 和 $R_k = \frac{r_{k+1}-r_k}{2}$。于是 $B(x_0, 2R_k) \subset B(0, r_{k+3}) \backslash B(0, r_{k-1})$，根据推论 5.2,

$$|f(x) - f(y)|^{p^*} \leq C(n,p^*) t^{p^*-n+1} \int_{\partial B(x_0,t)} |Df(x)|^{p^*}\, dx$$

对于几乎所有的 $t \in (R_k, 2R_k)$，只要 $x, y \in B(x_0, R_k)$。我们对范围 $(R_k, 2R_k)$ 上的变量 t 积分，得到

$$|f(x) - f(y)|^{p^*} \leq C(n, p^*) R_k^{p^*-n} \int_{B(x_0, 2R_k)} |Df(x)|^{p^*} \, dx.$$

此外，由于 f 的连续性，我们有

$$\operatorname{diam}(f|\gamma_{y,k}|)^{p^*} \leq C(n, p^*) R_k^{p^*-n} \int_{B(x_0, 2R_k)} |Df(x)|^{p^*} \, dx. \tag{5.2}$$

现在令 $y \in A_k$。则

$$1 \leq C(n, p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*} R_k^{p^*-n} \int_{r_{k-1}}^{r_{k+3}} \int_{S(y, \alpha(k))} |Df(tx)|^{p^*} t^{n-1} \, dx \, dt,$$

其中 $\alpha(k) = \arcsin\left(2\frac{R_k}{|x_0|}\right)$，且 $S(z, r)$ 表示 $S^{n-1}(0, 1)$ 中的球冠。接着，对每个 k，我们用球面球 $S(y_k, \alpha(k))$ 覆盖集合 A_k，并使用 Vitali 覆盖引理，得到一个由两两不相交的球面球构成的有限子集，记作 $\{S(y_i^k, \alpha(k))\}_{i=1}^{p_k}$，使得

$$A_k \subset \bigcup_{i=1}^{p_k} S(y_i^k, 5\alpha(k)).$$

注意到

$$E_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=s}^{\infty} A_k$$

对每个 $s \in \mathbb{N}$ 都成立。令 $t \in (a + \frac{n}{p}, n-1)$，并令 $\varepsilon > 0$。此外，选取 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$\operatorname{diam}(S(y_i^k, \alpha(k))) \leq \varepsilon$$

对于所有 $k \geq M$。于是

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^t(E(f)) &\leq \mathcal{H}_\varepsilon^t\Big(\bigcup_{k=M}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=M}^{\infty} \mathcal{H}_\varepsilon^t(A_k) \\ &\leq \sum_{k=M}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_k} \operatorname{diam}((S(y_k^i, 5\alpha(k)))^t \\ &\leq C(n) \sum_{k=M}^{\infty} p_k 2^{-kt}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

由于 $\alpha(k) \leq C(n) 2^{-k}$。

现在我们需要估计覆盖每个 A_k 所需的球面球数量。记为 $x^i_{0^k} = \frac{r_{k+1}+r_k}{2} y_i^k$ 以及 $B_i^k = B(x^i_{0^k}, 2R_k)$。将（5.2）两边求和可得

$$p_k \leq C(n, p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*} R_k^{p^*-n} \sum_{i=1}^{p_k} \int_{B_i^k} |Df(x)|^{p^*} \, dx.$$

因此，由于 $R_k = C2^{-k}$，根据畸变不等式（5.1）和 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
p_k &\le C(n,p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*}2^{k(n-p^*)}\sum_{i=1}^{p_k}\int_{B_i^k}(|Df(x)|^n)^{p^*/n}\,dx\\
&\le C(n,p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*}2^{k(n-p^*)}\sum_{i=1}^{p_k}\int_{B_i^k}K(x)^{p^*/n}J_f(x)^{p^*/n}\,dx\\
&\le C(n,p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*}2^{k(n-p^*)}\sum_{i=1}^{p_k}\Big(\int_{B_i^k}K(x)^{\frac{p^*}{n-p^*}}\,dx\Big)^{\frac{n-p^*}{n}}\Big(\int_{B_i^k}J_f(x)\,dx\Big)^{\frac{p^*}{n}}\\
&= C(n,p^*)(k^{1+\delta/n})^{p^*}2^{k(n-p^*)}\sum_{i=1}^{p_k}\Big(\int_{B_i^k}K(x)^{p}\,dx\Big)^{\frac{n-p^*}{n}}\Big(\int_{B_i^k}J_f(x)\,dx\Big)^{\frac{p^*}{n}}.
\end{aligned}$$

应用以下带有 $\theta = n/p^*$ 的 H¨older 不等式

$$\sum_{i=1}^{p_k}a_i^{\frac{n-p^*}{n}}b_i^{\frac{p^*}{n}} \le \Big(\sum_{i=1}^{p_k}1\Big)^{1-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{i=1}^{p_k}\Big(a_i^{\frac{n-p^*}{n}}b_i^{\frac{p^*}{n}}\Big)^{\theta}\right)^{\theta^{-1}}$$

然后将两边提升到 θ 次幂，我们得到

$$p_k \le C(n,p^*)k^{n+\delta}2^{k\frac{n(n-p^*)}{p^*}}\sum_{i=1}^{p_k}\Big(\int_{B_i^k}K(x)^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\int_{B_i^k}J_f(x)\,dx.$$

由畸变的 p-可积性可得

$$\int_{B_i^k}K(x)^p\,dx \le \int_{B^n(0,r_{k+3})}K(x)^p\,dx \le M.$$

因此，根据关于雅可比行列式的假设

$$\begin{aligned}
p_k &\le C(n,p^*,M)k^{n+\delta}2^{k\frac{n(n-p^*)}{p^*}}\sum_{i=1}^{p_k}\int_{B_i^k}J_f(x)\,dx\\
&\le C(n,p^*,M)k^{n+\delta}2^{k\frac{n(n-p^*)}{p^*}}\int_{B^n(0,r_{k+3})}J_f(x)\,dx\\
&\le C(n,p^*,M,a)k^{n+\delta}2^{k(a+\frac{n(n-p^*)}{p^*})}.
\end{aligned}$$

继续估计 (5.3) 中 $E(f)$ 的测度:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\varepsilon(E(f)) &\le C(n,p^*,M,a)\sum_{k=M}^{\infty}p_k2^{-kt}\\
&\le C\sum_{k=M}^{\infty}k^{n+\delta}2^{-k(t-a-\frac{n(n-p^*)}{p^*})}.
\end{aligned}$$

右侧的级数收敛，因为

$$\frac{n(n-p^*)}{p^*} = \frac{n}{p}\ ,\ t > a + \frac{n}{p}$$

因此我们可以得出结论： $\mathcal{H}^t(E(f)) = 0$。

注 5.3. 可以证明，有界映射 $f\colon B^n(0,1) \to \mathbb{R}^n$ of$p$-可积畸变满足

$$\int_{B^n(0,r_k)} J_f(x)\,dx \le c(1-r_k)^{\frac{p+1}{p}(1-n)},$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。另一方面，上述论证表明，如果

$$\int_{B^n(0,r_k)} J_f(x)\,dx \le c(1-r_k)^{-a},$$

其中 $a \in [0, n-1-\frac{n}{p})$，那么 f 在 $\partial B^n(0,1)$ 上几乎处处都有径向极限。因此，与拟正则映射的情形不同，对于某个区间内的 a 值，我们并不知道在 $\partial B^n(0,1)$ 上是否几乎处处存在径向极限。

□

References

[1] T. ¨Akkinen, *Radial limits of mappings of bounded and finite distortion*。《几何分析杂志》24 (2014)，第 3 期，1298–1322。[2] T. ¨Akkinen 和 C.-Y. Guo, *Mappings of finite distortion: boundary extensions in uniform domains* 4 **196** 2017 1, 65 83 ，《纯粹与应用数学年刊》( ) ( )，第 – 期。[3] P. Fatou, *Series trigonometriques et series de Taylor(French)*，《数学学报》30 (1906)，335–400。[4] F. W. Gehring，B. G. Osgood, *Uniform domains and the quasihyperbolic metric*《数学分析杂志》36 (1979)，50–74。[5] F. W. Gehring，B. P. Palka， *Quasiconformally homogeneous domains*，《数学分析杂志》30 (1976)，172–199。[6] S. Hencl 和 P. Koskela， *Lectures on mappings of finite distortion*。《数学讲义》2096。施普林格，Cham，2014。[7] T. Iwaniec 和 G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-Linear Analysis*，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，2001。[8] P. Koskela、J. Manfredi 和 E. Villamor, *Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions* 348 1996 **2**, 755 766 。《美国数学会会刊》( )，第 – 期。[9] P. Koskela、J. Onninen，J.T. Tyson, *Quasihyperbolic boundary conditions and capacity: Holder continuity of quasiconformal mappings* **76 3** ，《赫尔维提数学评论》( ) (2001)，416–435。[10] G. Martin, *The theory of quasiconformal mappings in higher dimensions, I.*《Teichmüller 理论手册》第四卷，619-677，《IRMA 数学与理论物理讲义》19，欧洲数学会，苏黎世，2014。[11] O. Martio 和 S. Rickman， *Boundary behavior of quasiregular mappings*。《芬兰科学院年刊》A. I. 系列，第 507 号 (1972)。[12] O. Martio 、 S. Rickman 和 J. V¨ais¨al¨a， *Definitions for quasiregular mappings*，《芬兰科学院年刊》A I 系列，第 448 号 (1969)。[13] O. Martio、S. Rickman 和 J. V ¨ ¨ ¨ *Distortion and singularities of quasiregular* aisala， , *mappings* **465** 1970 《芬兰科学院年刊》A I 系列，第 ( ) 号。[14] O. Martio、S. Rickman 和 J. V ¨ ¨ ¨ *Topological and metric properties of quasireg-* aisala， , *ular mappings* **488** 1971 《芬兰科学院年刊》A I 系列，第 ( ) 号。[15] G.D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolicspace forms.* 高等科学研究所数学出版物第 34 号 (1968)，53–104。

[16] K. Rajala, *The local homeomorphism property of spatial quasiregular mappings with distortion close to one* **15** 2005 5, 1100 1127 。《几何与泛函分析》( ), 第 – 期。[17] K. Rajala, *Radial Limits of Quasiregular Local Homeomorphisms*, 《美国数学杂志》130(1) (2008), 269–289。[18] Yu. G. Reshetnyak, *Spatial mappings with bounded distortion*。（俄文）《西伯利亚数学杂志》8 (1967), 629–658。[19] Yu. G. Reshetnyak, *A condition for boundedness of the index for mappings with bounded distortion* **9** 1968 368 374 。（俄文）《西伯利亚数学杂志》( ), –。[20] Yu. G. Reshetnyak, *Space Mappings with Bounded Distortion*, 数学专著译丛, 73, 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯, 1989。[21] S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, 施普林格出版社, 柏林, 1993。[22] J. V¨ais¨al¨a, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, 数学讲义, 施普林格出版社, 柏林, 1971。[23] J. V¨ais¨al¨a, *Uniform domains*, 《东北数学杂志》40 (1988), 101–118。

(C.-Y. Guo) Research Center for Mathematics, Shandong University 266237, Qingdao P. R. China and Frontiers Science Center for Nonlinear Expecta- , , , tions Ministry of Education P. R. China
Email address: changyu.guo@sdu.edu.cn

(Y. XUAN)
HLM Academy of Mathematics and Systems Science Chinese Acad- , , , , , emy of Sciences Beijing 100190 P. R. China and School of Mathematical , , ,China Sciences University of Chinese Academy of Sciences Beijing 100049 P. R.
Email address: xuanyi@amss.ac.cn