arXiv:2303.00305v1 [math.CO] 1 Mar 2023

# 一族 2-群及其相关的一族半对称、局部 2-弧传递图

DanielR. Hawtin数学学院，里耶卡大学，
里耶卡，51000，克罗地亚 电子邮箱：
dan.hawtin@gmail.com

Cheryl E. Praeger
西澳大利亚大学数学与统计系，克劳利，WA 6907，澳大利亚 电子邮箱：
cheryl.praeger@uwa.edu.au

Jin-Xin Zhou
北京交通大学数学与统计学院，北京，100044，中华人民共和国
电子邮箱：jxzhou@bjtu.edu.cn

谨以此文纪念 Zvonimir Janko。

摘要

混合二面体群是一个群 $H$，它有两个不相交子群 $X$ 和 $Y$，两者都是阶为 $2^n$ 的初等阿贝尔群，并且 $H$ 由 $X \cup Y$ 生成，且 $H/H' \cong X \times Y$。本文中，对于每个 $n \geq 2$，我们构造一个幂零类3、阶为 $2^a$ 的混合二面体2-群 $H$，其中 $a = (n^3 + n^2 + 4n)/2$；并构造相应的图 $\Sigma$，它是 $H$的凯莱图的团图。我们证明 $\Sigma$是半对称的，即 Aut(Σ)在 $\Sigma$的边上传递，但在顶点上非传递。这些图是目前已知首批由非2生成群构造的半对称图（事实上， $H$ 需要 $2n$ 个生成元）。此外，我们证明 $\Sigma$是局部 2-弧传递的，并且是“基本”局部 2-弧传递图 $K_{2^n,\ 2^n}$的正规覆盖。因此，这族图的构造有助于研究基本局部2-弧传递图的素数幂阶正规覆盖——这是 C. H. Li 提出的问题的“局部”类比。

关键词：半对称、2-弧传递、边传递、正规覆盖、凯莱图 2000年数学学科分类：
05C38, 20B25

# 1 引言

许多高度对称的图源自基于群的构造。这些图包括凯莱图，以及更一般的弧传递陪集图；它们都是顶点传递的。近年来， [25]中的凯莱图构造被推广为双凯莱图理论，并由此构造出据我们所知首个基于有限2-群的半对称图无限族。

半对称图。这类正则图（即每个顶点的度都相同）是边传递但非顶点传递的。对它们的研究已有 50 多年。1967 年，在或许是该主题最早发表的论文中，Folkman 给出了一种从阿贝尔群构造半对称图实例的方法 [5,定理 4] ，并提出了若干问题；其中，他特别询问所有满足下述条件的 $v, k$ 取值：存在一个以 $v$ 个顶点（即阶为 $v$）且度为 $k$ 的半对称图。到 2006 年，顶点数不超过 768 的所有三度（度为 3）半对称图都已完成枚举（Ivanov [13] 于 1987 年枚举了阶不超过 28 的图，其余由 Conder 等人完成 [2]）。徐明耀提醒第三作者，该列表中没有阶为 2 的幂的实例；后来发现， [25] 中发展的双 Cayley 图理论可用于构造如下图：对每个 $n \geq 2$，都存在一个阶为 $2^{2n+7}$ 的三度半对称图，它是一个阶为 $2^{2n+6}$ 的 2-群 $H$ 上的双 Cayley 图。该群 $H$ 由两个元素生成，其导出商为 $H/H' \cong C_{2^n} \times C_{2^n}$ 和 $|H'| = 2^6$。Conder 等人于 2020 年又给出了一族半对称双 Cayley 图 [3, 例 5.2 和命题 5.4] 。这次所得图的阶为 $4n$、度为 $2k$，其中 $k$ 为奇数；它们被构造成阶为 $2n$ 的二面体群 $D_{2n}$ 上的双 Cayley 图，并要求 $\mathbb{Z}_n^*$ 中某个元素的乘法阶为 $2k$。因此，尽管这一新图族的度没有上界，构造中使用的群仍然都由两个元素生成。

本文旨在介绍一个全新的半对称图无限族，它基于类型迥异的 2-群。对于每个 $n \geq 2$ ，我们构造（见定义 1.1、1.2 和定理 1.3）一个阶为 $2^{n^2\ (n+1)\ /2+n+1}$ 、度为 $2^n$ 的半对称图，该图基于一个满足 $H/H' = C_2^{2n}$ 的 2-群 $H$ （这意味着 $H$ 需要 $2n$ 个生成元）。我们的构造思路源自近期发表的论文 [10] ，我们在该文中研究了群 $H$ （不一定是 2-群）的一种自然凯莱图 $\Gamma(H)$ ，其中有不相交子群 $X$、$Y$ ，满足 $X \cong Y \cong C_2^n$、$H = \langle X、Y \rangle$ 和 $H/H' \cong C_2^{2n}$（定义 1.1）。事实证明，当 $\Gamma(H)$ 是边传递的时，其团图具有许多理想性质 [10, 定理 1.6]。本文将这一理论应用于一族具体的此类群 $H$ ，这些群的幂零类为 3，并证明相应凯莱图 $\Gamma(H)$ 的团图是半对称图（定理 1.3）。

局部 2 弧传递图。在进行这项构造时，我们还怀有另一个目标。我们的构造产生了局部 2-弧传递的半对称图（定理 1.3）。图 $\Sigma$ 中的 2-弧是顶点三元组（$u$， $v$， $w$），其中 $\{u, v\}$ 和 $\{v, w\}$ 是边，且 $u \neq w$；如果 $\Sigma$，则称其为局部（$G$，2）-弧传递，当且仅当 $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$，并且对每个顶点 $u$，稳定子 $G_u$ 在以 $u$为起点的 2-弧（$u$， $v$， $w$）上具有传递性。对于有限连通的局部（$G$，2）-弧传递图 $\Sigma$，群 $G$ 是边传递的，并且 $G$ 要么是顶点传递的，要么 $\Sigma$ 是二部图，且顶点二分划分的两个部分正是 $G$ 个顶点轨道。自 Tutte 在 20 世纪 40 年代的开创性工作 [24] 以来，这类图一直受到广泛研究；近年来，第二作者（在 1993 [20, 定理 4.1]

针对 $G$-顶点传递图；2004 年，第二作者与 Giudici 和 Li 合作 [7, 定理 1.2 和 1.3]，针对 $G$-顶点非传递图）确定了一类“基本”的局部（$G$，2）-弧传递图，使得每个有限连通的局部（$G$，2）-弧传递图都是某个基本例子的正规覆盖（相关概念见第 2.1 节）。这一新方法使得现代置换群理论和有限单群分类得以有效用于研究这类图。值得注意的是，如果一个局部（$G$，2）-弧传递、 $G$-顶点非传递图是基本图 $\Sigma_0$的正规覆盖，那么 $\Sigma_0$ 可能具有并非从 $G$继承而来的额外对称性；特别是，它可能是顶点传递的。

我们的构造所覆盖的图所对应的“基本”图族是完全二部图 $\mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$，当然它们都是顶点传递的。它们构成了在 [14], 中分类的少数几个基本局部（$G$，2）-弧传递、 $G$-顶点传递的素数幂阶图族之一；该分类细化了 [12, 20, 21] 针对素数幂阶所得的分类（见第 2.1 小节）。正如我们在定理 1.3 中证明的那样，它们还作为由 $G$-顶点非传递、局部（$G$，2）-弧传递的 2 的幂阶图所覆盖的基本图出现。若能将Li的分类（针对顶点传递的例子）扩展到所有素数幂阶的基本正则局部（$G$，2）-弧传递图，将会很有意义。我们注意到，存在一些素数幂阶的顶点非传递、基本局部（$G$，2）-弧传递图并非正则图，例如星图 $K_{1,\ p^a-1}$ 其中 $G = S_{p^a-1}$；然而，任何具有这些性质的正则图，其阶都必为 2 的幂。

问题 1 对素数幂阶的基本、正则、局部 ($G$, 2)-弧传递图进行分类。特别是，是否存在 Li 的分类 [14,定理 1.1] 中尚未包含的其他二部例子?

Li [14, pp.130–131]“倾向于认为，素数幂阶的非基本 2-弧传递图将很少见且难以构造”，并提出了问题 [14, 问题]：构造并刻画其分类中的基本图的素数幂阶正规覆盖。我们希望将这一问题扩展到包括问题 1 所产生的所有基本图的覆盖。在这里，与 [10], 一样，我们聚焦于图 $\mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$ 的覆盖。

## 1.1 主要结果

我们将研究的一般群族和图构造在定义 1.1 中给出。其中一个图是群 $G$ 关于逆封闭子集 $S \subseteq G \setminus \{1\}$ （即，对于所有 $s \in S$， $s^{-1} \in S$ ）的凯莱图 Cay($G, S$)：该图的顶点集为 $G$，边集为 $\{\{g, sg\} :\ \ g \in G, s \in S\}$。

定义 1.1 设 $n$ 为一个整数， $n \geq 2$。

(a) 若 $H$是一个有限群，具有子群 $X$、$Y$，使得 $X \cong Y \cong C_2^n$、 $H = \langle X、\ Y\rangle$ 且 $H/H' \cong C_2^{2n}$，其中 $H'$ 是 $H$的导出子群，则称 $H$ 为相对于 $X$ 和 $Y$的 $n$维混合二面体群。

(b) 对于 $H$、$X$、$Y$, 一个 在(a)部分中，图 $C(H, X, Y)$ 和 $\Sigma(H, X, Y)$ 定义如下 :

$$C(H, X, Y) = \mathrm{Cay}(H, S(X, Y)),\ \text{with}\ S(X, Y) = (X \cup Y) \setminus \{1\}; \tag{1}$$

而 $\Sigma = \Sigma(H, X, Y)$ 是顶点集和边集如下所示的图:

$$\begin{aligned} V(\Sigma) &= \{Xh, Yh : h \in H\}, \\ E(\Sigma) &= \{\{Xh, Yg\} : h, g \in H \text{ and } Xh \cap Yg \neq \emptyset\}. \end{aligned} \tag{2}$$

虽然这一构造在 [10, 定理 1.8] 中被用于构造一个无限族的阶为 2 的幂的（顶点传递）2-弧传递正规覆盖 $\mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$，但我们在此关注的是半对称例子。这是一个精细得多的问题，需要我们分析一个新的混二面体 2-群无限族 $\mathcal{H}$（$n$），现定义如下。

定义 1.2 设 $n \geq 2$ 为整数，且设 $X_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$、$Y_0 = \{y_1, \ldots, y_n\}$，并考虑群

$$\mathcal{H}(n) = \langle X_0 \cup Y_0 \mid \mathcal{R} \rangle$$

其中 $\mathcal{R}$ 是以下关系集：对于 $x$、$x' \in X_0$、$y$、$y' \in Y_0$，以及 $z$、$z'$、$z''$、$z''' \in X_0 \cup Y_0$，

$$z^2 = 1,\ [x, x'] = [y, y'] = 1, [x, y]^2 = 1, [[y, x], y'] = 1, [[x, y], z]^2 = 1, [[[z, z'], z''], z'''] = 1.$$

结果表明，对于这些群，图 $\Sigma$（$\mathcal{H}$（$n$） $X$，$Y$）是半对称的，并且是 $\mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$的局部 2-弧传递正规覆盖。

定理 1.3 对于 $n \geq 2$，定义 1.2 中的群 $\mathcal{H}(n)$ 是一个相对于 $X = \langle X_0 \rangle$ 和 $Y = \langle Y_0 \rangle$、阶为 $2^{n(n^2+n+4)/2}$ 的 $n$ 维混合二面体群；如式 (2) 所示，图$\Sigma(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$ 是半对称且局部 2-弧传递的，其度为 $2^n$，阶为 $2^{n^2(n+1)/2+n+1}$。

注 1.4 定理 1.3 中最小的情形是 $n = 2$。此时 $|\mathcal{H}(2)| = 2^{10}$，且$\Sigma = \Sigma(\mathcal{H}(2)\ X, Y)$ 的阶为 $|V(\Sigma)| = 2^9$，度为 4。GAP [6] 中的计算表明，$|\mathrm{Aut}(\Sigma)| = 2^{15} \cdot 3^5$，远大于证明定理 1.3 时所用的子群 $A := \mathcal{H}(2) \cdot A(\mathcal{H}(2)\ X, Y)$ $= \mathcal{H}(2) \cdot (\mathrm{GL}_2(2) \times \mathrm{GL}_2(2))$，其阶为 $2^{12} \cdot 3^2$（另见引理 2.3 和定理 4.5 (5)）。为了深入了解 $\Sigma$ 的结构，我们再次使用 GAP 计算了从顶点 $X$ 和 $Y$ 出发的 $\Sigma$ 的距离图。这些图示于图 1，并表明 $\Sigma$ 是局部 3-距离传递的。从距离 4 起，这两幅图呈现出截然不同的结构。事实上，顶点 $X$ 和 $Y$ 的稳定子 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_X$ 和 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_Y$ 是阶为 $2^7 \cdot 3^5$ 的非同构子群。使用 GAP 和 Magma [1]，进行的进一步计算表明

1. $O_2(\mathrm{Aut}(\Sigma)) = \mathcal{H}(2)'.Y \cong C_2^8$，属于 $\mathcal{H}(2)$，在包含顶点 $X$ 的 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$-轨道上忠实且正则，并且在包含 $Y$ 的 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$-轨道上有四个长度为 64 的轨道。$\Sigma$ 模 $O_2(\mathrm{Aut}(\Sigma))$ 的正规商是“星图”$\mathbf{K}_{1,4}$。

2. 此外，$A$ 在 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 中是自正规化的，并且 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 中恰有 896 个阶为 256 的子群，它们在 $V(\Sigma)$ 上半正则地作用，轨道恰为二分划分的两个部分。因此，至少在 $n = 2$ 的情况下，图 $\Sigma$ 是某个 2-群的双 Cayley 图。

本文的安排如下。第 2 节介绍本文使用的记号，并给出若干预备结果，包括引理 2.3，该引理概述了图 $C(H, X, Y)$ 和 $\Sigma(H, X, Y)$ 的若干性质；这些性质将在本文中用到，且已在 [10] 中得到证明。第 3 节研究群 $\mathcal{H}(n)$ 的结构，第 4 节证明定理 1.3。

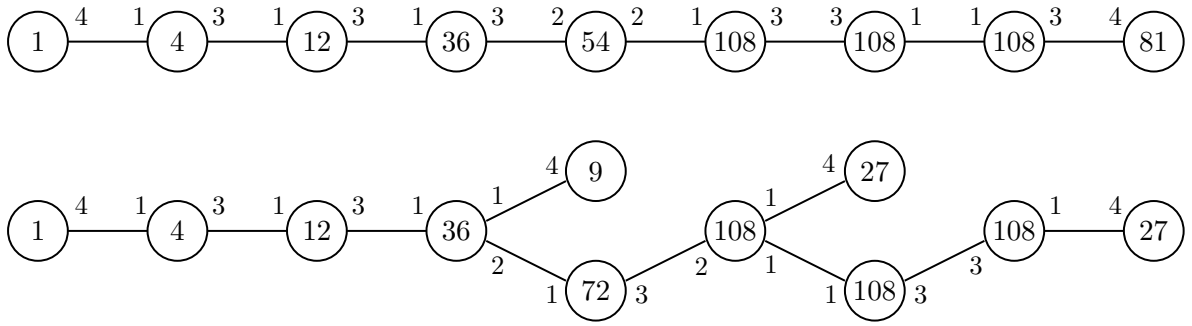


图 1：最小图 $\Sigma = \Sigma(\mathcal{H}(2)\ X,\ Y)$ 中顶点 $X$（上）和 $Y$（下）处的距离图，见定理 1.3。该图有 512 个顶点，度为 4。这里，每个节点表示 $\Sigma$ 的全自同构群中相关顶点（$X$ 或 $Y$）的稳定子的一个轨道。计算由 GAP [6] 完成。

# 2 图的记号与预备结果

本文所讨论的图均为有限、连通、简单无向图。设 $\Gamma$ 为一个图。分别用 $V(\Gamma)$、$E(\Gamma)$ 和 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 表示 $\Gamma$ 的顶点集、边集和全自同构群。对于 $v \in V(\Gamma)$，用 $\Gamma(v)$ 表示与 $v$ 相邻的顶点集合。若存在整数 $k$，使得对所有顶点 $v \in V(\Gamma)$，都有 $|\Gamma(v)| = k$，则称图 $\Gamma$ 为正则图。若 $E(\Gamma) \neq \emptyset$，且 $V(\Gamma)$ 的形式为 $\Delta \cup \Delta'$，其中每条边都由 $\Delta$ 中的一个顶点和 $\Delta'$ 中的一个顶点组成，则称图 $\Gamma$ 为二部图。若 $\Gamma$ 连通，则该顶点划分唯一确定，其两个部分 $\Delta$、$\Delta'$ 通常称为 $\Gamma$ 的二部。

对于一个图 $\Gamma$，令 $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$。对于 $v \in V(\Gamma)$，令 $G_v = \{g \in G : \ v^g = v\}$，即 $G$ 中 $v$ 的稳定子。若 $\Gamma$ 是 $G$-顶点传递的或 $G$-边传递的，则称其分别为 $G$ 在 $V(\Gamma)$ 或 $E(\Gamma)$ 上传递；若 $\Gamma$ 是 $G$-半对称的，则称其为 $\Gamma$ 正则且 $G$-边传递，但不是 $G$-顶点传递。当 $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 时，$G$-顶点传递、$G$-边传递或 $G$-半对称的图 $\Gamma$ 分别简称为顶点传递图、边传递图或半对称图。图 $\Gamma$ 中的 2-弧是满足 $\{u, v\}$、$\{v, w\} \in E(\Gamma)$ 且 $u \neq w$ 的顶点三元组 $(u,\ v,\ w)$。如果图 $\Gamma$ 满足 $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$，并且对于每个 $u \in V(\Gamma)$，$G_u$ 在从 $u$ 出发的 2-弧 $(u,\ v,\ w)$ 上传递，则称其为局部 $(G,\ 2)$-弧传递图；等价地，见引理 3.2], $G_u$ 在集合 $\Gamma(u)$ 上传递。类似地，当 $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 时，局部 $(G,\ 2)$-弧传递图 $\Gamma$ 简称为局部 2-弧传递图。关于局部 2-弧传递图已有相当丰富的文献，例如见[4, 7, 15, 17, 20]。

## 2.1 图的正规商与正规覆盖

用于研究顶点传递图或边传递图的正规商方法如下。假设 $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 使得 $\Gamma$ 是 $G$-顶点传递的或 $G$-边传递的。令 $N$ 为 $G$ 的正规子群，使得 $N$ 在 $V(\Gamma)$ 上是非传递的。$\Gamma$ 的 $N$-正规商图定义为图 $\Gamma_N$，其顶点是 $V(\Gamma)$ 中的 $N$-轨道，并且

如果存在一条 $\Gamma$ 中的边，其一个顶点属于这两个轨道中的一个、另一个顶点属于另一个轨道，则称两个不同的 $N$-轨道相邻。如果 $\Gamma$ 是正则的，且 $\Gamma_N$ 和 $\Gamma$ 具有相同的度，则称 $\Gamma$ 是 $\Gamma_N$ 的一个 $N$-正规覆盖。

如果 $\Gamma$ 是连通的、正则且局部 (2)-弧传递的图，并且 $N$ 在每个 $G$-顶点轨道上都是传递的，那么（根据 [20, 定理 4.1] 和 [7, 引理 5.1]），$\Gamma_N$ 也是连通、正则且局部 $(G/N, 2)$-弧传递的图，$\Gamma$ 是 $\Gamma_N$ 的 $N$-正规覆盖，并且 $N$ 在 $V(\Gamma)$ 上半正则，也就是说，每个 $N$-轨道的大小都是 $|N|$。如果不存在合适的正规子群 $N$ 可以进行这样的约化，即 $G$ 的每个非平凡正规子群 $N$ 都在至少一个 $G$-轨道上传递，从而使商群 $\Gamma_N$ 退化为 $\mathsf{K}_1$ 或某个 $k \geq 1$ 对应的星图 $\mathsf{K}1,_k$，那么这样的图 $\Gamma$ 就称为基本图（有时也称 $G$-基本图，以强调其对 $G$ 的依赖）。在某些情况下，可以确定 $G$-基本图：[14] 中 Li的分类 表明，当 $G$ 是顶点传递时，素数幂阶的 $G$-基本图为以下之一：$\mathsf{K}_{2^n,2^n}$（完全二部图）、$\mathsf{K}_{p^m}$（完全图）、$\mathsf{K}_{2^n,2^n} - 2^n$、$\mathsf{K}_2$（从 $\mathsf{K}_{2^n,2^n}$ 中删去一个 1-因子所得的图），或本原或双本原的“仿射图”（关于该术语，参见 [14, 第 130], 页；Li 指的是 Ivanov 与第二作者在 [12, 表 1] 中分类的图）。

## 2.2 团、团图和线图

图 $\Gamma$ 的团是一个子集 $U \subseteq V(\Gamma)$，其中任意一对顶点在 $U$ 中都构成一条边。若不存在适当包含 $U$ 的 $V(\Gamma)$ 子集 $U$ 也是团，则称团 $U$ 为极大团。图 $\Gamma$ 的团图定义为图 $\Sigma(\Gamma)$，其顶点为 $\Gamma$的极大团；当且仅当两个不同的极大团的交集非空时，它们在 $\Sigma(\Gamma)$ 中相邻。类似地，图 $\Gamma$ 的线图定义为图 $\mathcal{L}(\Gamma)$，其顶点集为 $E(\Gamma)$；当且仅当 $e \cap e' \neq \emptyset$ 时，两个不同的边 $e$、$e' \in E(\Gamma)$ 在 $\mathcal{L}(\Gamma)$ 中相邻。

## 2.3 凯莱图和双凯莱图

集合 $V(\Gamma)$ 上的一个置换群 $G$ 称为正则的，若它是传递的，且某个（因此所有）稳定子 $G_v$ 都是平凡的。（遗憾的是，这与上文对图中“正则”的定义相冲突。）更一般地，若对所有 $v \in V(\Gamma)$，稳定子$G_v = 1$ 都平凡，则称 $G$ 为半正则。因此，$G$ 正则当且仅当它是半正则且传递的。

设 $\Gamma = \mathsf{Cay}(G, S)$ 是 $G$ 上关于 $S$ 的凯莱图。对于任意 $g \in G$，定义

$$R(g) : x \mapsto xg \text{ for } x \in G \text{ and set } R(G) = \{R(g) \ : \ g \in G\}.$$

那么 $R(G)$ 是作用在 $V(\Gamma)$ 上的正则置换群（例如参见 [22, 引理 3.7]），并且是 $\mathsf{Aut}(\mathsf{Cay}(G, S))$ 的子群（因为 $R(g)$ 将每条边 $\{x, sx\}$ 映射为一条边 $\{xg, sxg\}$）。为简便起见，下文将 $R(G)$ 与 $G$ 等同。令

$$\mathrm{Aut}(G, S) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) : S^\alpha = S\}.$$

Godsil [8] 证明了，$\mathsf{Aut}(\mathsf{Cay}(G, S))$ 中 $G$ 的正规化子为 $G : \mathsf{Aut}(G, S)$。

凯莱图恰好是满足以下条件的图：$\Gamma$ $\mathsf{Aut}(\Gamma)$ 含有一个在 $V(\Gamma)$ 上正则的子群。因此，如果图 $\Gamma$ 的 $\mathsf{Aut}(\Gamma)$ 含有

一个子群 $H$，该子群在 $V(\Gamma)$ 上半正则且有两个轨道。以下来自 [10] 的结果将会用到。

引理 2.1 [10, 引理 2.6] 设 $\Gamma$ 为一张连通的 $(G, 2)$-弧传递图，并且 $u \in V(\Gamma)$。假设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$ 的一个 $N$-正规覆盖，其中 $N$ 是 $G$ 的某个正规 2-子群。则 $\Gamma$ 为二部图，且以下情形之一成立：

(1) $\Gamma$ 是一个 2-群的正规 Cayley 图；(2) $\Gamma$ 是一个 2-群 $H$ 的双 Cayley 图，且 $G \leq N_{\mathrm{Aut}(\Gamma)}(H)$；(3) $N \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$。

此外，若稳定子 $G_u$ 在 $\Gamma(u)$ 上非忠实地作用，则第 (3) 部分成立。

下一个结果是由 [16, 定理 1.1] 在局部本原二部图 $\Gamma$情形下发展而来的。对于 $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$，我们用 $G^+$表示 $G$ 的一个子群（指数至多为 2），该子群逐集固定 $V(\Gamma)$ 的两个二部。证明中使用了如下概念：若置换群 $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ 的每个非平凡正规子群在 $V$上至多有两个轨道，且存在一个这样的子群恰有两个轨道，则称其为双拟本原。

引理 2.2 设 $\Gamma$ 是一个阶为 $2^m$、度为 $2^n$ 且具有 $m > n$的连通二部图。假设 $\Gamma$ 是顶点传递且局部本原的，并且对于某个 $u \in V(\Gamma)$，$\mathrm{Aut}(\Gamma)_u$ 在$\Gamma(u)$上不忠实。那么 $n \geq 2$，且存在 $N \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$，使得 $N$是一个 2-群，$N \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)^+$ 且在 $V(\Gamma)$ 上半正则，$\Gamma$是 $N$-正规覆盖 $\Gamma_N$，并且 $\Gamma_N \cong \mathbf{K}_{2^n,\ 2^n}$。

证明 设 $X = \mathrm{Aut}(\Gamma)$，并注意到 $n \geq 2$，因为若 $n = 1$，则 $\Gamma$ 是一个圈，且 $X_u \cong C_2$在 $\Gamma(u)$ 上忠实。设 $N \trianglelefteq X$ 在满足条件 $N$ 在 $V(\Gamma)$ 上至少有三个轨道（可能 $N = 1$）的前提下为极大者，设 $\overline{X} = X/N$，并设 $X^+$ 是 $X$ 中固定 $\Gamma$二分划分两部分的指数为 2 的正规子群。根据 [18, 引理 1.6], 或参见 [19,定理 1.3], $N$在 $V(\Gamma)$ 上半正则，因此 $N$是一个 2-群，因为 $|V(\Gamma)| = 2^m$。此外，根据 [19, 引理 3.1],，商群 $\Gamma_N$是二部图且 $N \leq X^+$，因此 $X^+/N$是 $\overline{X}$的指数为 2 的正规子群，其在 $V(G_N)$ 上的轨道是 $\Gamma_N$的两个二部。再者，由于 $N$的极大性，$\overline{X}$的每个非平凡正规子群在 $V(\Gamma_N)$ 上至多有两个轨道，因此 $\overline{X}$在 $V(\Gamma_N)$ 上是双拟本原的。根据 [19, 定理 1.3], $\Gamma_N$是 $\overline{X}$-局部本原的，且 $\Gamma$是 $N$-正规覆盖 $\Gamma_N$。因此，$\Gamma_N$的度也为 $2^n$，且 $\Gamma_N$的阶为 $2^k = |V(\Gamma)|/|N|$，其中 $k > n \geq 2$。若 $\Gamma_N \cong \mathbf{K}_{2^n,2^n}$，则结论成立，因此可假设 $\Gamma_N \ncong \mathbf{K}_{2^n,2^n}$。

于是，根据 [16, 定理 1.1]证明中的第三段（并利用 [16, 引理 3.3 和 4.2]），$X$ 有一个满足 $N < G \leq X^+$ 的子群 $G$，使得 $G$ 在 $V(\Gamma)$的每个二部部分上忠实且正则；此外，$\Gamma$ 是 $G$ 的双 Cayley 图，其形式为 $\Gamma = \Upsilon \times \mathbf{K}_2$（$\Upsilon$ 与 $\mathbf{K}_2$的直积），其中 $\Upsilon = \mathrm{Cay}(G, S)$是关于 $G$的某个子集 $S$ 的 $G$ 的凯莱图。进一步，$\Gamma_N$ 和 $\overline{X}$ 满足 [16, 引理 3.3(ii) 或 (iii)]。若 [16,引理 3.3(ii)]成立，则根据 [16, 定理 1.1]证明中的倒数第二段，$\Gamma$是 $G \times C_2$的正规 Cayley 图。然而在这种情况下，$X_u$ 在 $\Gamma(u)$上忠实，这就产生矛盾。因此 [16, 引理 3.3(iii)] 成立，于是[16, 定理 1.1] 证明的最后一段表明（因为 $|V(\Gamma)| = 2^m$），商群 $\Upsilon_N = \mathbf{K}_{2^r}^{\times \ell}$（$\mathbf{K}_{2^r}$的 $\ell$ 个副本的直积）的度为 $(2^r - 1)^\ell$。然而在这种情况下，三个图 $\Gamma$、$\Upsilon$ 和 $\Upsilon_N$的度均为 $2^n \geq 4$，这就产生矛盾。□

## 2.4 混合二面体图及其团图

我们记录定义 1.1 中图的一些必要性质。

引理 2.3 [10, 引理 4.1-4.2] 设 $H$ 是关于 $X$ 和 $Y$ 的一个 $n$ 维混合二面体群，且具有 $|X| = |Y| = 2^n \geq 4$；设 $C(H, X, Y)$ 和 $\Sigma(H, X, Y)$ 是定义 1.1 中定义的图。令 $\Sigma = \Sigma(H, X, Y)$，且 $G = H{:}\ A(H, X, Y)$，其中 $A(H, X, Y)$ 是 $\mathrm{Aut}(H)$ 中 $X \cup Y$ 的集合稳定子。则有以下结论。

(1) $\Sigma(H, X, Y)$ 是 $C(H, X, Y)$ 的团图。

(2) 映射 $\varphi{:}\ z \to \{Xz, Yz\}$，其中 $z \in H$，是一个双射 $\varphi{:}\ H \to E(\Sigma(H, X, Y))$，并诱导从 $C(H, X, Y)$ 到 $\Sigma(H, X, Y)$ 的线图 $\mathcal{L}(\Sigma(H, X, Y))$ 的图同构。

(3) $\mathrm{Aut}(C(H, X, Y)) = \mathrm{Aut}(\Sigma(H, X, Y)) = \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(\Sigma(H, X, Y)))$.

(4) 群 $G$ 在 $\Sigma$ 上作为自同构子群作用如下：对于 $h, z \in H, \sigma \in A(H, X, Y)$，以及 $\varphi : H \to E(\Sigma)$，如第 (2) 部分所示：

$$\begin{aligned} &\textit{Vertex action:} && h : Xz \to Xzh,\ Yz \to Yzh && \sigma : Xz \to X^\sigma z^\sigma,\ \ Yz \to Y^\sigma z^\sigma \\ &\textit{Edge action:} && h : \varphi(z) \to \varphi(zh) && \sigma : \varphi(z) \to \varphi(z^\sigma) \end{aligned}$$

子群 $H$ 在 $E(\Sigma)$ 上正则作用，并且在 $V(\Sigma)$ 上有两个轨道。特别地，这个 $G$-作用是边传递的。

(5) $\Sigma$ 的 $H'$-正规商图 $\Sigma_{H'}$ 与 $\mathbf{K}_{2^n,2^n}$ 同构，并且以 $G/H'$ 作为边传递自同构群。此外，$\Sigma$ 是 $\mathbf{K}_{2^n,2^n}$ 的 $H'$-正规覆盖。

(6) $A(H, X, Y)) \cong A(H, X, Y)^{X \cup Y} \leq (\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)) : C_2 \cong (\mathrm{GL}(n, 2) \times \mathrm{GL}(n, 2)) : C_2$ 其中 $C_2$ 交换 $X$ 和 $Y$。

# 3 群的记号与预备结果

对于正整数 $n$，$C_n$ 表示一个阶为 $n$ 的循环群，而 $D_{2n}$ 表示一个阶为 $2n$ 的二面体群。对于群 $G$，我们分别用 1、$Z(G)$、$\Phi(G)$、$G'$、$\mathrm{soc}(G)$ 和 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 $G$ 的单位元、中心、Frattini 子群、导出子群、底和自同构群。对于群 $G$ 的子群 $H$，用 $C_G(H)$ 表示 $H$ 在 $G$ 中的中心化子，用 $N_G(H)$ 表示 $H$ 在 $G$ 中的正规化子。对于群 $G$ 中的元素 $a$、$b$，$a$、$b$ 的交换子定义为 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$。若 $X$、$Y \subseteq G$，则 $[X, Y]$ 表示由所有满足 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 的交换子 $[x, y]$ 生成的子群。我们将需要以下关于 $p$-群的结果。

引理 3.1 [23, 5.3.2] 设 $G$ 是一个有限 $p$-群，其中 $p$ 为某个素数，并设 $p^r = |G{:}\ \Phi(G)|$。则 $\Phi(G) = G'G^p$，其中 $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$。此外，$G$ 的每个生成集都包含一个 $r$ 元子集，该子集也生成 $G$，特别地，$G/\Phi(G) \cong C_p^r$。

## 3.1 任意群中交换子的一些结果

我们首先引用所谓的维特-霍尔公式。

引理 3.2 [9, 10.2.1.4] 或 [23, 5.1.5(iv)] 设 $x$、$y$、$z$ 是群 $G$的元素。那么

$$[[x,y^{-1}],z]^y\cdot[[y,z^{-1}],x]^z\cdot[[z,x^{-1}],y]^x=1.$$

利用上面的维特-霍尔公式，我们得到以下引理。

引理 3.3 设 $a$、$b$、$c$ 是群 $G$ 的元素，且 $G'$ 是阿贝尔群。那么

$$[[a,b],c]\cdot[[b,c],a]\cdot[[c,a],b]=1.$$

证明 设 $a$、$b$、$c\in G$。通过直接计算或由 [23, 5.1.5(iii)]，，我们有 $[b,a^{-1}]^a=[b,a]^{-1}=[a,b]$。因此 $[[b,a^{-1}],c]^a=[[b,a^{-1}]^a,c^a]=[[a,b],c[c,a]]$.

同样（通过直接计算或由 [23, 5.1.5(ii)]），有 $[[a,b],c[c,a]]=[[a,b],[c,a]]\cdot[[a,b],c]^{[c,a]}$。由于 $G'$ 是阿贝尔群，这就变为 $[[a,b],c[c,a]]=[[a,b],c]$。因此，$[[b,a^{-1}],c]^a=[a,b],c]$. 类似地，$[[a,c^{-1}],b]^c=[[c,a],b]$ 且 $[[c,b^{-1}],a]^b=[[b,c],a]$.

现在将引理 3.2 中的 Witt–Hall 公式应用于 $y=a$、$x=b$、$z=c$，即可得到所断言的公式：$[[a,b],c]\cdot[[b,c],a]\cdot[[c,a],b]=1.$ □

## 3.2 自由群中的基本交换子

本节遵循 Marshall Hall 的 [9, 第 11]章，回顾自由群交换子的一些理论。

### 3.2.1 自由群中的形式交换子

设 $F$ 是以有序字母表 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ 为基的自由群，其中 $r\geq 1$。对于$j\geq 1$，由 $F$ 构成的形式交换子 $c_j$ 及其权 $w(c_j)$，按以下规则定义：

(1) 对于 $j=1$，2，...，$r$，$c_j=a_j$，这些都是权为 1 的交换子；即 $w(a_j)=1$。

(2) 如果 $c_i$ 和 $c_j$ 是（形式）交换子，那么 $[c_i,c_j]$ 是一个（形式）交换子，记作 $c_k$，且 $w(c_k)=w(c_i)+w(c_j)$。

### 3.2.2 自由群中权为 $\ell$ 的基本交换子

设 $F$ 为由有序字母表 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ 生成的自由群，其中 $r\geq 1$。对于每个正整数 $\ell$，我们如下定义 $_\ell$ 的基本交换子集合 $F$，其权为 $\ell$，并在 $\cup_{u\geq 1}$BC$_u$ 上赋予全序：

(1) $\mathrm{BC}_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$，并选择全序 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$。设 $\ell >$ 1，并归纳假设 $\cup_{1\le u<\ell}\mathrm{BC}_u$ 已经定义并排序

(2) 集合 $\mathrm{BC}_\ell$ 由满足以下三个条件的所有交换子 $[c_i, c_j]$ 组成：

(a) $c_i, c_j \in \cup_{1\le u<\ell}\mathrm{BC}_u$，其中 $\ell = w(c_i) + w(c_j)$；(b) $c_j < c_i$；(c) 若 $c_i = [c_s, c_t]$，其中 $c_s, c_t \in \cup_{1\le u<\ell}\mathrm{BC}_u$，则 $c_t \le c_j$。

(3) 将 $\cup_{1\le u<\ell}\mathrm{BC}_u$ 上的排序扩展到 $\cup_{1\le u\le\ell}\mathrm{BC}_u$，方法如下：我们在集合 $\mathrm{BC}_\ell$ 上任意选取一种排序；若 $c_i \in \mathrm{BC}_\ell$ 且 $c_j \in \cup_{1\le u<\ell}\mathrm{BC}_u$，则定义 $c_j < c_i$。

接下来，我们利用以下算术事实来说明两个集合 $\mathrm{BC}_2$ 和 $\mathrm{BC}_3$，的性质及大小。

引理 3.4 设 $n \in \mathbb{N}$，其中 $n \ge 2$。则

(a) $|\{(i,j) : 1 \le j < i \le n\}| = \binom{n}{2}$；(b) $|\{(i,j,k) : 1 \le j < i \le n$，且 $j < k \le n\}| = \binom{n}{2}\binom{2n-1}{3} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$)；(c) $|\{(i,j,k) : 1 \le j < i \le n$，且 $j < k \le n, k \ne i\}| = \binom{n}{2}\binom{n-2}{3} = \frac{n^3}{3} - n^2 + \frac{2n}{3}$)；(d) $|\{(i,j,k) : 1 \le j < i \le n$，且 $j \le k \le n\}| = \frac{n^3-n}{3}$。

证明 (a) 对于每个满足 $1 \le j < n$ 的 $j$，$i$ 恰有 $n-j$ 种选择，因此这类数对 $(i,j)$ 的数量为 $\sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell = \binom{n}{2}$。

(b) 对于固定的满足 $1 \le j < n$ 的 $j$，满足 $j < i \le n$ 和 $j < k \le n$ 的 $i$、$k$ 的选择数为 $(n-j)^2$，因此满足所需约束的三元组 $(i,j,k)$ 总数为 $(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$)。

(c) 这些三元组的数量等于 (b) 部分中的三元组数量减去满足 $1 \le j < i \le n$ 的三元组 $(i,j,i)$ 的数量；根据 (a) 部分，该数量为 $\binom{n}{2}$。

(d) 这些三元组的数量等于 (b) 部分中的三元组数量，加上满足 $1 \le j < i \le n$ 的三元组 $(i,j,j)$ 的数量，即根据 (a) 部分为 $\binom{n}{2}$。□

引理 3.5 设 $F$ 是以有序字母表 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ 为基的自由群，其中$r \ge 1$。那么

大小为 $|\mathrm{BC}_2| = \binom{r}{2}$ 的，$\mathrm{BC}_3 = \{[[a_i, a_j], a_k] : 1 \le j < i \le r$，以及大小为 $|\mathrm{BC}_3| = \frac{r^3-r}{3}$ 的 $j \le k \le r\}$

$\mathrm{BC}_2 = \{[a_i, a_j] : 1 \le j < i \le r\}$,

证明 集合 $\mathrm{BC}_2$ 符合所述结论（根据 $\mathrm{BC}_\ell$ 与 $\ell = 2$ 的定义中的条件 (2)(a) 和 (2)(b)），而 $|\mathrm{BC}_2| = {}^{r}{}_{(r-1)\,2}$ 也是如此，因为~~它与~~ $\{1, \ldots, r\}$ 的 2 元子集构成双射。接下来，$\mathrm{BC}_3$ 的每个元素都具有 $[c_t, c_u]$ 的形式，其中 $w(c_t) = 2$，$w(c_u) = 1$（因为 $c_u < c_t$），因此，对于某个 $k \in [1, r]$，有 $c_u = a_k$（根据条件 1）；并且 $c_t = [a_i, a_j]$ 满足 $1 \le j < i \le r$（正如我们刚刚所见）以及 $j \le k$（根据条件 2(c)）。因此 $\mathrm{BC}_3$ 符合所述结论。根据引理 3.4(c)，满足 $1 \le j < i \le r$ 的 $\mathrm{BC}_3$ 元素数量为 $[[a_i, a_j], a_k] \in$，而 $j \le k \le r$ 为 $\frac{r^3-r}{3} = |\mathrm{BC}_3|$.□

以下结果称为基定理。按照 [9], ，对每个 $k$，我们用 $F_k$ 表示自由群 $F$ 的下中心列的第 $k$ 项。特别要注意，$F_2 = F'$ 是 $F$ 的导出子群。

定理 3.6 [9, 定理 11.2.4] 设 $F$ 是以有序字母表 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ 为基的自由群，其中 $r \ge 1$，令 $\ell \ge 1$，并设 $\cup_{1 \le u \le \ell} \mathrm{BC}_u = \{c_1, \ldots, c_t\}$，其中$c_1 < c_2 < \cdots < c_t$。那么，每个 $f \in F$ 都有唯一的表示

$$f = c_1^{s_1} c_2^{s_2} \ldots c_t^{s_t} \bmod F_{\ell+1},$$

对于某些整数 $s_i$ 并且模 $F_{\ell+1}$，$\mathrm{BC}_\ell$ 构成自由阿贝尔群 $F_\ell / F_{\ell+1}$ 的一组基 .

我们用关于商群 $F/F_4$ 的三个结果结束本节。

引理 3.7 设 $F$、$F_\ell$ 和 $\mathrm{BC}_\ell$ 如定理 3.6 中所述。那么

(1) $F' = F_2 = \langle \mathrm{BC}_2, F_3 \rangle$；(2) $F_3 = \langle \mathrm{BC}_3, F_4 \rangle$ 以及 $F_3/F_4 \le Z(F/F_4)$；(3) $(F/F_4)' = F'/F_4$ 是阿贝尔的。

证明 回忆一下，$F_2$ 是 $F'$的导出子群。根据定理 3.6，$\mathrm{BC}_2 F_3 = \{cF_3 \mid c \in \mathrm{BC}_2\}$ 是自由阿贝尔群 $F'/F_3$的一组基，而 $\mathrm{BC}_3 F_4 = \{cF_4 \mid c \in \mathrm{BC}_3\}$ 是自由阿贝尔群 $F_3/F_4$的一组基。因此 $F_3 = \langle \mathrm{BC}_3, F_4 \rangle$，$F' = \langle \mathrm{BC}_2, F_3 \rangle = \langle \mathrm{BC}_2, \mathrm{BC}_3, F_4 \rangle$以及 $F'/F_4 = \langle \mathrm{BC}_2 F_4, \mathrm{BC}_3 F_4 \rangle$。特别地，第 (1) 部分得证。

设 $c = [[a_i, a_j], a_k] \in \mathrm{BC}_3$。那么，对每个 $a \in F$，交换子 $[c, a] \in F_4$，因此$cF_4 \in Z(F/F_4)$。由于 $F_3 = \langle \mathrm{BC}_3, F_4 \rangle$ 这意味着 $F_3/F_4 \le Z(F/F_4)$，从而证明了第 (2) 部分。

由于 $F_4 < F'$，我们有 $(F/F_4)' = F'/F_4$。我们已经证明 $F'/F_4 = \langle \mathrm{BC}_2 F_4、\mathrm{BC}_3 F_4 \rangle$，并且根据第 (2) 部分，$\mathrm{BC}_3 F_4$ 中的每个元素都与 $\mathrm{BC}_2 F_4$ 和 $\mathrm{BC}_3 F_4$中的每个元素交换。因此，要证明第 (3) 部分，只需证明 $\mathrm{BC}_2 F_4$ 中的任意两个元素都交换。设 $[a_i, a_j], c \in \mathrm{BC}_2$。那么

$$\begin{aligned}([a_i, a_j]F_4)^{cF_4} &= [a_i^c, a_j^c]F_4 = [c^{-1}a_i c, c^{-1}a_j c]F_4 = [c^{-1}ca_i[a_i, c], c^{-1}ca_j[a_j, c]]F_4 \\ &= [a_i[a_i, c], a_j[a_j, c]]F_4.\end{aligned}$$

对所有 $k \le r$、$[c, a_k] \in F_3$，根据 $F_3$ 的定义，因此有 $[a_k, c] \in F_3$。因此，根据第 (2) 部分，$[a_i, c]F_4$ 和 $[a_j, c]F_4$ 都包含在 $Z(F/F_4)$ 中。由此可得 $([a_i, a_j]F_4)^{cF_4} = [a_i, a_j]F_4$。所以 $[a_i, a_j]F_4$ 和 $cF_4$ 可交换，第 (3) 部分得证。□

引理 3.8 设 $F$、$A$ 和 $F_\ell$ 如定理 3.6 中所述。那么，对于任意 $a_i$、$a_j$、$a_k \in A$,

(1) $(a_i^2F_4)^{a_jF_4} = a_i^2 \cdot [[a_i, a_j], a_i] \cdot [a_i, a_j]^2F_4$, (2) $([a_i, a_j]^2F_4)^{a_kF_4} = [a_i, a_j]^2 \cdot [[a_i, a_j], a_k]^2F_4$, (3) $[a_i, a_j] = [a_j, a_i]^{-1}$, (4) $[[a_j, a_i], a_k]F_4 = [[a_i, a_j]^{-1}, a_k]F_4 = ([[a_i, a_j], a_k]F_4)^{-1}$, (5) $[[a_i, a_j], a_k]F_4 = ([[a_j, a_k], a_i]F_4)^{-1} \cdot [[a_i, a_k], a_j]F_4$.

证明 (1)、(2) 由引理 3.7 (2)，$[[a_i, a_j], a_i]F_4 \in Z(F/F_4)$。在 $F/F_4$ 中，以下两个计算的最后一步等式用到了这一事实，它们证明了 (1) 和 (2)。

$$\begin{aligned}(a_i^2F_4)^{a_jF_4} &= a_j^{-1}a_i^2a_jF_4 = a_j^{-1}a_ia_ja_i[a_i, a_j]F_4 = a_j^{-1}a_ja_i[a_i, a_j]a_i[a_i, a_j]F_4\\ &= a_i^2[a_i, a_j][[a_i, a_j], a_i][a_i, a_j]F_4 = a_i^2[[a_i, a_j], a_i][a_i, a_j]^2F_4.\\ ([a_i, a_j]^2F_4)^{a_kF_4} &= a_k^{-1}[a_i, a_j]^2a_kF_4 = a_k^{-1}[a_i, a_j]a_k[a_i, a_j][[a_i, a_j], a_k]F_4\\ &= a_k^{-1}a_k[a_i, a_j][[a_i, a_j], a_k][a_i, a_j][[a_i, a_j], a_k]F_4 = [a_i, a_j]^2[[a_i, a_j], a_k]^2F_4.\end{aligned}$$

(3) 这可由下式直接推出：$[a_j, a_i] = (a_j^{-1}a_i^{-1}a_ja_i)^{-1} = a_i^{-1}a_j^{-1}a_ia_j = [a_i, a_j]$。

(4) 由第 (3) 部分，得 $[[a_j, a_i], a_k] = [[a_i, a_j]^{-1}, a_k]$。接着，通过直接计算或利用 [23, 5. 1.5(iii)],，可得 $[[a_i, a_j]^{-1}, a_k] = ([[a_i, a_j], a_k]^{[a_j,a_i]})^{-1}$.。由引理 3.7 (3) 可知

$$[[a_i, a_j]^{-1}, a_k]F_4 = ([[a_i, a_j], a_k]F_4)^{-1},$$

从而证明了第 (4) 部分。

(5) 由引理 3.7 (3)，$F'/F_4$ 是阿贝尔群，因此由引理 3.3 可得

$$[[a_i, a_j], a_k] \cdot [[a_j, a_k], a_i] \cdot [[a_k, a_i], a_j]F_4 = F_4.$$

由于由第 (4) 部分可知 $([[a_k, a_i], a_j]F_4)^{-1} = [[a_i, a_k], a_j]F_4$，再利用 $F'/F_4$ 是阿贝尔群这一事实，便可得

$$[[a_i, a_j], a_k]F_4 = ([[a_j, a_k], a_i]F_4)^{-1} \cdot [[a_i, a_k], a_j]F_4.$$

这就证明了（5），从而完成证明。 □

我们以考察一个包含 $F_4$ 的 $K$ of $F$ 的特定子群来结束本节。

引理 3.9 设 $F$、$A$ 和 $F_\ell$ 如定理 3.6 中所述，并设

$$K = \langle F_4, a_i^2, [a_i, a_j]^2, [[a_i, a_j], a_k]^2, [[a_i, a_j], a_i] : i, j, k \in [1, r]\rangle.$$

则有以下结论。

(1) $K \trianglelefteq F$，且 $K$也由 $F_4 \cup B_K$生成，其中 $B_K$是集合

$$\{a_i^2, [a_i, a_j]^2, [[a_i, a_j], a_k]^2, [[a_i, a_j], a_\ell] : 1 \le j < i \le r,\ j < k \le r,\ k \ne i,\ \ell \in \{i, j\}\};$$

(2) $F'K/K \cong C_2^{r(r-1)(2r-1)/6}$和 $\{cK\colon\ c \in \mathsf{BC}_2 \cup D_K\}$是 $F'K/K$的一组基，其中 $D_K = \{[[a_i, a_j], a_k]\colon\ 1 \le j < i \le r、\ j < k \le r、\ k \ne i\}$，且 $\mathsf{BC}_2$ 如引理 3.5 所述；
(3) $F/F'K \cong C_2^r$。

证明 (1) 由于 $F = \langle A\rangle$，要证明 $K \trianglelefteq F$，只需证明 $b^a \in K$（或等价地，证明 $(bF_4)^{aF_4} \in K/F_4$），对任意 $a \in A$ 以及给定的 $K$ 的生成集中的任意元素 $b$ 均成立。令 $a \in A$。由引理 3.8 (1) 和 (2)，对于所有 $i$、$j$，有 $(a_i^2F_4)^{aF_4}$，$([a_i, a_j]^2F_4)^{aF_4} \in K/F_4$。其余生成元形如 $[[a_i, a_j], a_k]^2$、$[[a_i, a_j], a_i]$，均属于 $F_3$；由引理 3.7 (2)，$F_3/F_4 \le Z(F/F_4)$。因此，对这些生成元中的每一个，$(bF_4)^{aF_4} = bF_4 \in K/F_4$ 也成立。故 $K \trianglelefteq F$。

为证明 (1) 的第二个断言，令 $K_0 := \langle F_4, B_K\rangle$。我们证明给定的 $K$ 的每个生成元都属于 $K_0$。生成元 $a_i^2$ 均属于 $B_K \subset K_0$。由引理 3.8 (3)，$[a_i, a_j] = [a_j, a_i]^{-1}$，因此生成元 $[a_i, a_j]^2$ 均属于 $K_0$。对于满足 $i, j \in [1, r]$ 的生成元$x = [[a_i, a_j], a_i]$，若 $j = i$，则 $x = 1 \in K_0$；若 $j < i$，则 $x \in B_K \subset K_0$；而若 $j > i$，则 $x \in [[a_j, a_i], a_i]^{-1}F_4 \subset K_0$（由引理 3.8(4)）。剩下需要考虑的是形如 $x = [[a_i, a_j], a_k]^2$ 的生成元。若 $i = j$，则 $x = 1 \in K_0$，因此我们可以假设 $i \ne j$。若 $k = i$，则我们刚刚证明了 $[[a_i, a_j], a_k] \in K_0$，所以 $x \in K_0$，并且也可以假设 $k \ne i$。若 $k = j$，则由引理 3.8 (4)，$[[a_i, a_j], a_j] \in [[a_j, a_i], a_j]^{-1}F_4$；我们已证明它属于 $K_0$，因此仍有 $x \in K_0$。故我们可以假设 $i$、$j$、$k$ 两两不同。令 $m = \min\{i, j, k\}$。若 $m = j$，则 $x \in B_K \subset K_0$；若 $m = i$，则由引理 3.8 (4)，$x \in [[a_j, a_i], a_k]^{-2}F_4 \subset K_0$；若 $m = k$，则由引理 3.8 (4)，模 $F_4$ 有 $x = [[a_j, a_k], a_i]^{-2} \cdot [[a_i, a_k], a_j]^2$，且每个因子都位于 $K_0$ 上，因此 $x \in K_0$。由此所有生成元都属于 $K_0$，从而 $K_0 = K$。至此，(1) 的证明完成。

(2) 现在 $F'K/K \cong F'/(F' \cap K) \cong (F'/F_4)/((F' \cap K)/F_4)$（注意 $F_4 \le K \cap F'$）。根据引理 3.7 (3)，$F'/F_4$ 是阿贝尔群，因此 $F'/(F' \cap K)$ 是阿贝尔群。此外，根据 [11, Hilfsatz 1.11]，$F'$ 由 $[a_i, a_j]^g$ 生成，其中 $i$、$j \in [1, r]$ 和 $g \in F$。由于每个 $[a_i, a_j]^2 \in K$，因此可知 $F'K/K \cong C_2^m$，其中某个 $m$，而我们需要求出 $m$。

注意，根据引理 3.5 和 $D_K$ 的定义，$\mathsf{BC}_3$ 是 $\mathsf{BC}_3 = D_K \cup S$ 的不交并，其中 $S = \{[[a_i, a_j], a_\ell]\colon\ 1 \le j < i \le r、\ \ell \in \{i, j\}\}$（并注意 $S \subset B_K \subset K$）。根据引理 3.7，$F' = \langle \mathsf{BC}_2, \mathsf{BC}_3、\ F_4\rangle = \langle \mathsf{BC}_2、\ D_K、\ S、\ F_4\rangle$；又由于 $K$ 包含 $F_4 \cup S$，可知 $\{xK\colon\ x \in \mathsf{BC}_2 \cup D_K\}$ 是 $F'K/K \cong C_2^m$ 的生成集。我们将利用定理 3.6 证明它实际上是一个基。考虑下面这个子群 $H$ 是有帮助的，它满足 $F_4 < H < K$，

$$H = \langle F_4, [a_i, a_j]^2, [[a_i, a_j], a_k]^2, [[a_i, a_j], a_\ell] : 1 \le j < i \le r,\ j < k \le r,\ k \ne i,\ \ell \in \{i, j\}\rangle.$$

由第 (1) 部分可得 $K = \langle H, a_i^2\colon\ i \in [1, r]\rangle$，根据引理 3.8 (1)，每个 $a_i^2H$ 都属于 $Z(F/H)$，因此 $K/H$ 是阿贝尔群。此外，$H/F_4 \le F'/F_4$，根据引理 3.7 (3)，$F'/F_4$ 是阿贝尔群，因此 $H/F_4$ 也是阿贝尔群。为方便起见，我们令 $\mathsf{BC}_2 = \{c_1, \dots, c_s\}$ 和 $D_K = \{d_1, \dots, d_t\}$。假设 $c_1^{e_1} \cdots c_s^{e_s} d_1^{f_1} \cdots d_t^{f_t} K = K$，其中 $e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t \in \{0, 1\}$。令 $g = c_1^{e_1} \cdots c_s^{e_s} d_1^{f_1} \cdots d_t^{f_t}$。于是 $g \in K$，因此 $gH$ 属于阿贝尔群 $K/H = \langle a_i^2H\colon\ 1 \le i \le r\rangle$，从而 $g = (a_1^2)^{\ell_1}(a_2^2)^{\ell_2} \cdots (a_r^2)^{\ell_r}h$，其中某些整数为 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r$，且某个 $h \in H$。此外，$hF_4$ 属于阿贝尔群 $H/F_4$，因此 $h = c_1^{2i_1} \cdots c_s^{2i_s} d_1^{2j_1} \cdots d_t^{2j_t} h'$，其中所有 $i_k$ 和 $j_k$ 都是整数，且 $h' \in \langle F_4, [[a_i, a_j], a_\ell]\colon\ 1 \le j < i \le r,\ \ell \in \{i, j\}\rangle$。因此

$$c_1^{e_1} \cdots c_s^{e_s} d_1^{f_1} \cdots d_t^{f_t} F_4 = gF_4 = (a_1^2)^{\ell_1}(a_2^2)^{\ell_2} \cdots ((a_r^2)^{\ell_r}) c_1^{2i_1} \cdots c_s^{2i_s} d_1^{2j_1} \cdots d_t^{2j_t} h' F_4.$$

然而，根据定理 3.6， $gF_4$ 有唯一的如下形式的群表示

$$gF_4 = d_1'^{s_1'} d_2'^{s_2'} \cdots d_{t'}'^{s_{t'}'} F_4,$$

其中 $d_1', d_2', \ldots, d_{t'}' \in \cup_{u=1}^{3} \mathbf{BC}_u = \{a_i, [a_i, a_j], [[a_i, a_j], a_k] : 1 \le j < i \le r,\ j \le k \le r\}$，且 $s_i'$ 为整数。由此可得 $\ell_i = 0$ $(1 \le i \le r)$，$e_k = 2i_k$ $(1 \le k \le s)$,$f_k = 2j_k (1 \le k \le t)$ 和 $h' \in F_4$。由于 $e_k, f_k \in \{0, 1\}$，这意味着 $e_1 = e_2 = \cdots = e_s = f_1 = f_2 = \cdots = f_t = 0$。因此 $c_1K, \ldots, c_sK$, $d_1K \ldots, d_tK$ 是 $F'K/K \cong C_2^m$ 的基，正如所断言的那样，且 $m = |\mathbf{BC}_2 \cup D_K|$。

最后我们来确定这个基数。由引理 3.5， $|\mathbf{BC}_2| = r(r-1)/2$，且 $|D_K| = \frac{r^3}{3} - r^2 + \frac{2r}{3}$，因此

$$m = \frac{r(r-1)}{2} + \left(\frac{r^3}{3} - r^2 + \frac{2r}{3}\right) = \frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6} = \frac{r(r-1)(2r-1)}{6}.$$

这就完成了第 (2) 部分的证明。

(3) 由于 $F' \le F'K < F$，可得 $F/F'K$是阿贝尔群$F/F'$的商群，因此 $F/F'K$是阿贝尔群，由 $\{a_iF'K$生成： $i \in [1, r]\}$。此外，由于每个$a_i^2 \in K \le F'K$，群 $F/F'K \cong C_2^m$对某个 $m \le r$成立。设

$$a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_r^{e_r} F'K = F'K,$$

其中 $e_1$，……， $e_r \in \{0, 1\}$。那么对于某个 $k \in K$，有 $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_r^{e_r} F' = kF'$；由第 (1) 部分可知，对于某些整数 $f_1$，……， $f_r$，有 $kF' = a_1^{2f_1} a_2^{2f_2} \cdots a_r^{2f_r} F'$。因此 $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_r^{e_r} F' = a_1^{2f_1} a_2^{2f_2} \cdots a_r^{2f_r} F'$。由定理 3.6， $a_1F'$、$a_2F'$、……、$a_rF'$构成自由阿贝尔群 $F/F'$的一组基，这意味着对于每个 $i$，都有 $e_i = 2f_i$。由于每个 $e_i = 0$ 或为 1，我们有$e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$。因此， $a_1F'K$、$a_2F'K$、……、$a_rF'K$构成 $F/F'K$的一组基，并且$F/F'K \cong C_2^r$。□

# 4 $\mathcal{H}(n)$ 的结构

本节旨在研究定义 1.2 中群 $\mathcal{H}(n)$ 的阶、子群和自同构。首先，我们为 $\mathcal{H}(n)$ 的阶获得一个下界。

命题 4.1 设 $F$、$A$ 和 $F_\ell$ 如定理 3.6 中所述，其中 $r = 2n \ge 4$，并记作 $A = A_0 \cup B_0$，其中 $A_0 = \{a_i : 1 \le i \le n\}$ 和 $B_0 = \{a_{n+i} : 1 \le i \le n\}$。此外，设 $K$ 为引理 3.9 中定义的子群，并设 $\mathcal{H}(n)$ 为定义 1.2 中定义的群。定义

$$I = \langle K, [a, a'], [b, b'], [[a, a'], c], [[b, b'], c], [[b, a], b'] \ :\ a, a' \in A_0, b, b' \in B_0, c \in A \rangle,$$

则以下结论成立。

(1) $K < I \le F'I = F'K$, $I \trianglelefteq F$, *and* $(F/I)/(F/I)' \cong F/F'I \cong C_2^{2n}$.

（2） $I$ 也由 $K \cup D_I$生成，其中 $D_I$ 是集合

$$\{[a_i, a_j], [a_{n+i}, a_{n+j}], [[a_i, a_j], a_k], [[a_i, a_j], a_{n+\ell}], [[a_{n+i}, a_{n+j}], a_{n+k}], [[a_{n+i}, a_{n+j}], a_\ell],$$
$$[[a_{n+i'}, a_\ell], a_{n+j'}] : 1 \le j < i \le n,\ j < k \le n,\ 1 \le j' < i' \le n,\ 1 \le \ell \le n,\ k \ne i\}.$$

(3) $I/K \cong C_2^v$的 $v = (13n^3 - 15n^2 + 2n)/6$，以及 $F'I/I \cong C_2^u$的 $u = (n^3 + n^2)/2$；此外，$F/I$ 是幂零类为 3、阶为 $|F/I| = 2^{(n^3+n^2+4n)/2}$的群。

(4) 对每个 $i = 1, \ldots, n$，映射 $\phi(x_i) = a_i I$和 $\phi(y_i) = a_{n+i} I$定义了一个满同态$\phi$: $\mathcal{H}(n) \to F/I$。特别地，$|\mathcal{H}(n)| \ge 2^{(n^3+n^2+4n)/2}$。

证明 (1) 根据定义，$K < I$，且 $F'K$ 包含了给定的 $I$的每个生成元，因此$I \le F'K$。这意味着 $F'I \le F'K$；另一方面，$F'K \le F'I$，所以 $F'I = F'K$。接下来我们证明 $I \trianglelefteq F$。由于 $F_4 \le K < I$ 且 $F_3/F_4 \le Z(F/F_4)$（根据引理 3.7(2)），并且$K \trianglelefteq F$（引理 3.9），可知对每个 $x \in F_3 \cap I$，$y \in K$，且 $z \in F$，共轭元$x^z \in xF_4 \subseteq I$ 和 $y^z \in K < I$。因此，要证明 $I \trianglelefteq F$，只需证明对每个 $a$，$a' \in A_0$、$b$、$b' \in B_0$和 $c \in A$，共轭元 $[a, a']^c$和 $[b, b']^c$ 都属于 $I$。现在$[a, a']^c = [a, a'][[a, a'], c]$，且两个因子都属于 $I$，所以 $[a, a']^c \in I$。类似地，$[b, b']^c \in I$，因此 $I \trianglelefteq F$。最后，$(F/I)' = F'I/I$，因此$(F/I)/(F/I)' \cong F/F'I = F/F'K$；根据引理 3.9(3)，它同构于 $C_2^{2n}$。至此，第 (1) 部分得证。

(2) 设 $I_0 = \langle K, D_I \rangle$，其中 $D_I$如 (2) 所示。则 $I_0 \le I$，我们通过证明给出的每个生成元 $I$ 都属于 $I_0$，来说明等号成立。首先，$K$ 属于该子集，因此 $F_4 < K \le I_0$；由引理 3.8(3) 可知，每个 $[a, a']$和 $[b, b']$ 都属于 $I_0$。接下来考虑 $x := [[a, a'], c]$。若 $a = a'$，则 $x = 1 \in I_0$；若 $c \in \{a, a'\}$，则 $x \in K$（利用引理 3.9 和引理 3.8(4)），同样有 $x \in I_0$。否则，$a$、$a'$、$c$两两不同；若 $c \in B_0$，则由引理 3.8(4)，$x^{\pm 1}F_4$ 包含一个 $D_I$ 中形如 $[[a_i, a_j], a_{n+\ell}]$ 的元素，因此 $x \in I_0$；若 $c \in A_0$，则 $x$形如 $x = [[a_i, a_j], a_k]$，其中$i$、$j$、$k \le n$两两不同。在这种情况下，若 $\min\{i, j, k\} \ne k$，则由引理 3.8(4)，$x \in D_I$或 $x^{-1}F_4$包含 $[[a_j, a_i], a_k] \in D_I$；若 $\min\{i, j, k\} = k$，则由引理 3.8(5)，$xF_4$ 包含 $D_I$ 中两个元素的乘积。所有情况下均有 $x \in I_0$。类似的论证表明，每个 $[[b, b'], c] \in I_0$也成立。最后考虑 $x := [[b, a], b']$。若 $b' = b$，则 $x \in K$，因此取 $b' = a_{n+j'} \ne b = a_{n+i'}$，且 $a = a_\ell$。若 $i' > j'$，则 $x \in D_I \subset I_0$，所以我们可以假设$i' < j'$。由引理 3.8(4) 和 (5)，模 $F_4$，$x = [[a_{n+i'}, a_\ell], a_{n+j'}]$ 满足

$$x \equiv [[a_{n+j'}, a_\ell], a_{n+i'}] \cdot [[a_{n+i'}, a_{n+j'}], a_\ell] \equiv [[a_{n+j'}, a_\ell], a_{n+i'}] \cdot [[a_{n+j'}, a_{n+i'}], a_\ell]^{-1},$$

并且这些因子中的每一个都属于 $I_0$，因此 $x \in I_0$。我们得出 $I_0 = I$。

(3) 注意到 $F'I/I \cong F'/(F' \cap I)$，且由于 $F_4 < K < I$，$F' \cap I$包含 $F' \cap K$。因此，$F'/(F' \cap I)$ 是 $F'/(F' \cap K)$ 的商群，并且根据引理3.9(2)，$F'/(F' \cap K) \cong F'K/K \cong C_2^{r(r-1)(2r-1)/6} = C^{(8n^3-6n^2+n)/3}$（因为 $|A| = r = 2n$），其基为 $\{c(F' \cap K) : c \in \mathsf{BC}_2 \cup D_K\}$，其中 $D_K = \{[[a_i, a_j], a_k] : 1 \le j < i \le 2n,\ j < k \le 2n,\ k \ne i\}$，且 $\mathsf{BC}_2$ 与引理 3.5 中相同。由于 $F'K = F'I$，我们推得，对于某些 $u$、$v$，有 $F'I/I \cong C_2^u$和 $I/K \cong C_2^v$，使得 $u + v = (8n^3 - 6n^2 + n)/3$。

令 $B_2 = \{[b, a] : a \in A_0, b \in B_0\}$。于是 $|B_2| = n^2$, $|\mathsf{BC}_2| = n(2n - 1)$（引理 3.5），且 $\mathsf{BC}_2$是 $\mathsf{BC}_2 = (\mathsf{BC}_2 \cap D_I) \cup B_2$与 $|\mathsf{BC}_2 \cap D_I| = n^2 - n$的不交并。我们得到 $D_K$的一个类似划分。假设 $z \in D_K$且 $z \notin I$。那么对于某些

$c, c', c'' \in A$。首先证明 $c', c'' \in A_0$和 $c \in B_0$。若 $c' \in B_0$，则根据 $D_K$的定义， $c, c'' \in B_0$且 $z$ 是 $D_I$ 中形如 $[[a_{n+i}, a_{n+j}], a_{n+k}]$的一个元素，这与假设矛盾，因此 $c' \in A_0$。接下来，若还有 $c, c'' \in A_0$，那么 $z$ 将是 $D_I$ 中形如 $[[a_i, a_j], a_k]$的一个元素，这与假设矛盾，因此 $c, c''$ 中至少有一个属于 $B_0$。若 $c \in A_0$，则必有 $c'' \in B_0$，于是 $z$ 是 $D_I$ 中形如 $[[a_i, a_j], a_{n+\ell}]$ 的一个元素，这与假设矛盾。因此 $c \in B_0$。若还有 $c'' \in B_0$，那么 $z$ 就是 $I$的一个给定生成元，且形如 $[[b, a], b']$，这再次导致矛盾。因此 $c'' \in A_0$，我们的断言得证。于是，这类元素 $z$ 的形式为 $z = [[a_{n+i}, a_j], a_k]$，其中 $i, j, k \in [1, n]$；并且由于 $z \in D_K$，我们有 $j < k$。令

$$B_3 := \{[[a_{n+i}, a_j], a_k] \ : \ 1 \le j < k \le n, \ 1 \le i \le n\}.$$

于是由引理 3.4， $|B_3| = n \cdot n(n-1)/2 = (n^3 - n^2)/2$，且 $D_K$ 是 $D_K = B_3' \cup B_3$ 与 $B_3' \subset I$ 的不交并。现在 $|D_K| = \frac{8n^3}{3} - 4n^2 + \frac{4n}{3}$（引理 3.9），因此 $|B_3'| = |D_K| - |B_3| = (13n^3 - 21n^2 + 8n)/6$。

与引理3.9(2)证明中类似的论证表明： $\{cI : c \in B_2 \cup B_3\}$ 构成 $F'I/I \cong C_2^u$的一组基，因此 $u = |B_2| + |B_3| = n^2 + (n^3 - n^2)/2 = (n^3 + n^2)/2$。于是由第 (1) 部分， $|F/I| = 2^{2n+u}$且 $2n + u = (n^3 + n^2 + 4n)/2$。另外， $I/K \cong C_2^v$与 $v = |\mathsf{BC}_2 \cap I| + |B_3'| = (n^2 - n) + (13n^3 - 21n^2 + 8n)/6 = (13n^3 - 15n^2 + 2n)/6$。

为了证明 $F/I$ 是 3 阶幂零的，我们首先注意到其导出子群为 $(F/I)' = F'I/I \cong C_2^{2n}$。下中心列的第二项是 $F_3 I/I$。由引理3.7(1)可知 $F'I = \langle \mathsf{BC}_2, F_3, I \rangle$，因此 $F'I/F_3 I$由 $\{cF_3 I : c \in \mathsf{BC}_2, c \notin I\}$生成。我们在上文已证明 $\mathsf{BC}_2 \setminus I = B_2$的阶为 $n^2$，因此 $F'I/F_3 I = C_2^{u_2}$且 $u_2 \le n^2 < u$。下中心列的第三项是 $F_4 I/I$，由于$F_4 < I$，它是平凡的。因此， $F/I$ 是 3 阶幂零的，正如所断言的那样。第 (3) 部分的证明至此完成。

(4) 令 $\phi(x_i) = a_i I$和 $\phi(y_i) = a_{n+i} I$，对每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有一个从定义 1.2 中 $\mathcal{H}(n)$ 的生成集到 $F/I$ 的生成元集合 $\{aI : a \in A\}$ 的映射。此外，将 $\phi$ 扩展为 $\mathcal{H}(n)$ 的这些生成元所成字上的映射，对于定义 1.2 中的每个关系子 $w \in \mathcal{R}$， $\phi(w) = w' I$，使得 $w' \in K$ 或 $w'$ 是给定的 $I$生成元之一。因此，像 $\phi(x_i)$ $\phi(y_i)$ $(1 \le i \le n)$ 满足 $\mathcal{H}(n)$ 的所有给定关系，故由冯·戴克定理（见 [23, 定理 2.2.1], ），将 $\phi$ 扩展到 $\mathcal{H}(n) \to F/I$是一个满同态。本命题的证明至此完成。□

接下来，我们要证明命题 4.1(4) 中的满同态 $\phi$ 实际上是一个同构。我们需要了解 $\mathcal{H}(n)$ 中某些交换子的以下性质。

引理 4.2 设 $\mathcal{H}(n) = \langle X_0 \cup Y_0 \mid \mathcal{R} \rangle$ 是定义 1.2 中定义的群，其中 $n \ge 2$。那么，

(1) 对所有 $z, z' \in X_0 \cup Y_0$, $[[z, z'], z] = [[z, z'], z'] = 1$；(2) 对于 $z, z', z'' \in X_0 \cup Y_0$，我们有 $[[z, z'], z''] \in Z(\mathcal{H}(n))$、 $[z, z'] = [z', z]$和 $[z, z']^2 = [[z, z'], z'']^2 = 1$。(3) $\mathcal{H}(n)$ 的下中心列的第三项 $\mathcal{H}(n)_4$ 为平凡群，因此 $\mathcal{H}(n)$ 是幂零类至多为 3 的幂零群。

证明 (1) 我们使用 $\mathcal{R}$ 中最前面的几个关系。首先， $z^2 = (z')^2 = 1$，因此 $(zz')^2 = [z, z']$。若 $z, z'$ 均属于 $X_0$，或均属于 $Y_0$，则有关系 $[z, z'] = 1$，从而有 $[[z, z'], z] = [[z, z'], z'] = 1$。因此不妨设 $z \in X_0$，例如如此，并且 $z' \in Y_0$。于是 $(zz')^4 = [z, z']^2 = 1$，从而 $\langle z, z' \rangle = D_8$ 或 $C_2^2$。无论哪种情况， $[z, z'] = (zz')^2$ 都被 $z$ 和 $z'$ 中心化，这意味着 $[[z, z'], z] = [[z, z'], z'] = 1$。这就证明了第 (1) 部分。

(2) 令 $u = [[z, z'], z'']$。则对于所有 $z''' \in X_0 \cup Y_0$, $[u, z'''] \in \mathcal{R}$，因此 $[u, z'''] = 1$。由于 $[u, z'''] = u^{-1}u^{z'''}$，这意味着 $u = u^{z'''}$，从而 $u \in Z(\mathcal{H}(n))$。如果 $z, z'$ 都属于 $X_0$，或者都属于 $Y_0$，则 $[z, z'] = [z', z] = 1$，其余断言也随之成立。如果 $z \in X_0$ 且 $z' \in Y_0$，则 $[z, z']^2 \in \mathcal{R}$，从而 $[z, z']^2 = 1$，这意味着 $[z, z']^{-1} = [z, z']$。然而 $[z, z']^{-1} = [z', z]$，因此 $[z, z'] = [z', z]$。在这种情况下，$u^2 \in \mathcal{R}$ 也成立，所以 $u^2 = 1$。最后，如果 $z \in Y_0$ 且 $z' \in X_0$，则 $[z', z]^2 \in \mathcal{R}$，而刚才给出的论证表明 $[z, z'] = [z', z]$ 且 $[z, z']^2 = 1$。这意味着 $u^2 = [[z, z'], z'']^2 = [[z', z], z'']^2$，它属于 $\mathcal{R}$，因此是平凡的。

(3) 由 (2) 可知，对所有 $z$、$z'$、$z''$、$z''' \in X_0 \cup Y_0$，都有 $[[z, z'], z''] \in Z(\mathcal{H}(n))$，因此 $[[[z, z'], z''], z'''] = 1$。另一方面，根据 [11, Hilfsatz 1.11(a)]， $\mathcal{H}(n)_4$ 由这类交换子的所有共轭元 $[[[z, z'], z''], z''']^h$（共轭作用元素为 $h \in \mathcal{H}(n)$）生成，因此$\mathcal{H}(n)_4$ 是平凡群。因此， $\mathcal{H}(n)$是幂零类至多为 3 的幂零群。□

命题 4.3 设 $\mathcal{H}(n) = \langle X_0 \cup Y_0 \mid \mathcal{R} \rangle$ 为定义 1.2 中定义的群，其中$n \geq 2$；设 $F$、$A = A_0 \cup B_0$、$I$、$K$如命题 4.1 所述。则映射 $\psi\colon AI/I \to X_0 \cup Y_0$ 满足 $\psi(a_i I) = x_i$且 $\psi(a_{n+i} I) = y_i$，其中 $i = 1$、.....、 $n$，定义了一个满同态$\psi : F/I \to \mathcal{H}(n)$，且 $\psi$ 是命题 4.1(4) 中映射 $\phi$ 的逆映射。特别地， $\mathcal{H}(n) \cong F/I$ 且 $|\mathcal{H}(n)| = 2^{(n^3+n^2+4n)/2}$。

注 4.4 由命题 4.1(1)可知， $F/I$ 同构于具有群表示 $\overline{F} = \langle A_0 \cup B_0 \mid F_4 \cup B_K \cup D_I \rangle$的群，其中 $B_K$、$D_I$ 如引理 3.9 和命题 4.1(2)所述。在证明中，我们将使用群 $\overline{F}$。

证明 将 $F/I$ 视为群$\overline{F} := \langle A_0 \cup B_0 \mid F_4 \cup B_K \cup D_I \rangle$，则映射 $\psi$ 变为双射 $\psi\colon A_0 \cap B_0 \to X_0 \cup Y_0$，其定义为 $\psi\colon a_i \to x_i, a_{n+i} \to \underline{y_i}$，其中 $i = 1, \ldots, n$。将 $\psi$ 扩展为定义在 $F$ 的这些生成元所构成的字上的映射，使得对于每个元素（关系子） $w \in F_4 \cap B_K \cup D_I$， $\psi(w)$ 在 $X_0 \cup Y_0$ 中是相同的字。我们检验对于每个 $w$， $\psi(w)$ 等于 $\mathcal{H}(n)$ 的单位元，然后应用冯·戴克定理 [23, 定理 2.2.1]。若 $w \in F_4$，则 $\psi(w) = 1$，因为根据引理 4.2(2)， $\mathcal{H}(n)$ 的幂零类至多为 3。

接下来，我们考虑引理 3.9(1) 中的 $B_K$ 的元素 $w$。若对于 $a \in A_0 \cup B_0$，有 $w = a^2$，则 $\psi(w) \in \mathcal{R}$，因此 $\psi(w) = 1$。若 $w = [a, a']^2$ 或 $w = [[a, a'], a'']^2$，对于 $a$、$a'$、$a'' \in A_0 \cup B_0$，则由引理 4.2(3) 可得 $\psi(w) = 1$。最后，假设对于 $a$、$a' \in A_0 \cup B_0$ 且满足 $a'' \in \{a, a'\}$，有 $w = [[a, a'], a'']$。那么由引理 4.2(1) 可知， $\psi(w) = 1$。

最后，我们考虑命题 4.1(2) 中的元素 $w$ $D_I$。如果 $w = [a, a']$ 对于$a$、$a' \in A_0$或 $a$、$a' \in B_0$，那么 $\psi(w) \in \mathcal{R}$，因此 $\psi(w) = 1$。如果 $w = [[a, a'], a'']$，对于 $a$、$a'$、$a'' \in A_0 \cup B_0$，使得 $a$、$a' \in A_0$ 或 $a$、$a' \in B_0$ 中有一个成立，那么同样有 $\psi(w) = 1$，因为在这些情况下$\psi([a, a']) \in \mathcal{R}$。最后，我们考虑元素 $w = [[a, a'], a'']$，对于 $a$、$a'' \in B_0$和 $a' \in A_0$。对于这些元素， $\psi(w) \in \mathcal{R}$，因此 $\psi(w) = 1$。

现在由冯·戴克定理 [23, 定理 2.2.1] 可知，该映射 $\psi$ 定义了一个满同态 $\overline{F} \to \mathcal{H}(n)$。根据定义， $\psi$ 是命题 4.1(4) 中映射 $\phi$ 的逆映射，因此 $\mathcal{H}(n) \cong F/I$。由命题 4.1(3)可得阶 $|\mathcal{H}(n)| = |F/I|$ 。□

## 4.1 $\mathcal{H}(n)$的子群与自同构

本小节的主要目的是证明以下定理。

定理 4.5 设 $\mathcal{H}(n)$ 如定义 1.2 所述，且 $\mathcal{H}(n)_3$ 是 $\mathcal{H}(n)$ 的下中心列中的第三项。那么有以下结论。

(1) 对任意的 $x$、 $x' \in X_0$、 $y \in Y_0$，有 $[[x,y],x'] = [[x',y],x]$。

(2) $\mathcal{H}(n)/(\mathcal{H}(n)' \cong C_2^{2n}$，且 $\mathcal{H}(n)$ 是相对于 $X := \langle X_0 \rangle$ 和 $Y := \langle Y_0 \rangle$ 的 $n$ 维混合二面体群。

(3) $\mathcal{H}(n)' = W \times \mathcal{H}(n)_3 \cong C^{n^2}{}_{(2}{}^{n+1\ /2\ )}$，其中

(a) $W = \langle [x_i, y_j] : 1 \le i,j \le n \rangle \cong C_2^{n^2}$, *and*

(b) $\mathcal{H}(n)_3 = \langle [[x_i,y_j],x_k] : 1 \le i,j \le n,\ i < k \le n \rangle \cong C_2^{n^2(n-1)/2}$; *and moreover* $\mathcal{H}(n)_3 \le Z(\mathcal{H}(n))$.

(4) 对任意 $a \in \mathcal{H}(n)$ 以及 $b$、$b' \in Y$，我们有 $[[b,a],b'] = 1$ 和 $[[a,b],b'] = 1$ .

(5) 对任意 $g \in \mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$， $g$ 诱导出 $\mathcal{H}(n)$ 的一个自同构 .

(6) 设 $c \in X$，并令 $d \in Y$，使得对于某些 $x_{i_1}$、 $x_{i_2}$、...、 $x_{i_k} \in X_0$ 以及 $y_{j_1}$、 $y_{j_2}$、...、 $y_{j_\ell} \in Y_0$，有 $c = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ 和 $d = y_{j_1}y_{j_2}\dots y_{j_\ell}$，其中选择这些表达式使得 $k$、 $\ell$ 最小。于是

$$[c,d]\mathcal{H}(n)_3 = \prod_{1\le u\le k, 1\le v\le \ell} [x_{i_u}, y_{j_v}]\mathcal{H}(n)_3.$$

证明 (1) 设 $x$、 $x' \in X_0$ 和 $y \in Y_0$。根据引理 4.2 (2)，任何涉及 $x$、 $x'$、 $y$ 的权重 3 交换子都属于 $\mathcal{H}(n)$ 的中心。因此，根据引理 3.2，我们有

$$[[x,y^{-1}],x'] \cdot [[y,(x')^{-1}],x] \cdot [[x',x^{-1}],y] = 1.$$

由于 $x^2 = (x')^2 = y^2 = 1$ 和 $[x,x'] = 1$ ，上式变为 $[[x,y],x'] \cdot [[y,x'],x] = 1$，因此 $[[x,y],x'] = [[y,x'],x]^{-1}$。利用关系 $[[x',y],x]^2 = 1$ 和 $[x',y]^2 = 1$ （这意味着 $[x',y] = [y,x']$） ，可得 $[[y,x'],x]^{-1} = [[x',y],x]^{-1} = [[x',y],x]$，第 (1) 部分成立。

(2) 由命题 4.3 可得 $\mathcal{H}(n) \cong F/I$，由命题 4.1 (1) 可得$\mathcal{H}(n)/\mathcal{H}(n)' \cong F/F'I \cong C_2^{2n}$。此外，根据 $\mathcal{H}(n) = \langle X、 Y \rangle$、 $X = \langle X_0 \rangle \cong C_2^n$和 $Y = \langle Y_0 \rangle \cong C_2^n$，

由定义 1.2 可得，因此根据定义 1.1(a)， $\mathcal{H}(n)$ 是相对于 $X$ 和 $Y$的 $n$ 维混合二面体群。

(3) 根据命题 4.3 和 4.1 (3)， $\mathcal{H}(n)' \cong F'I/I \cong C_2^u$，其中 $u = (n^3+n^2)/2$；根据辅助命题 1.11(a) 和 (b)],

$$\mathcal{H}(n)' = \langle [z,z'],[[z,z'],z'']^h \mid z,z',z'' \in X_0 \cup Y_0,\ h \in \mathcal{H}(n) \rangle.$$

此外，根据引理 4.2 (2)， $\mathcal{H}(n)_3 \leq Z(\mathcal{H}(n))$，因此对于每个 $h \in \mathcal{H}(n)$ 都有 $[[z,z'],z'']^h = [[z,z'],z'']$ 。令 $x$、$x' \in X_0$ 以及 $y$、$y' \in Y_0$。由于 $[x,x'] = [y,y'] = 1$ 是 $\mathcal{R}$ 中的关系，所需的唯一二重生成元是 $[x_i,y_j]$，其中 $1 \leq i$、$j \leq n$；对于三重生成元 $[[z,z'],z'']$，我们可以假设 $z$、$z'$ 中的一个属于 $X_0$，另一个属于 $Y_0$。由于根据引理 4.2(3)，$\mathcal{H}(n)_4 = 1$，由引理 3.8(4)可知 $[[x,y],y']^{-1} = [[y,x],y']$；又由于 $[[y,x],y'] = 1$ 是 $\mathcal{R}$ 中的一个关系，因此 $[[x,y],y'] = 1$，所以所需的唯一三重生成元是形如 $[[y,x],x']$ 或 $[[x,y],x']$ 的生成元。此外，根据第 (1) 部分，$[[x,y],x'] = [[x',y],x]$；根据引理 4.2 (1)， $[[x,y],x] = 1$。因此我们有

$$\mathcal{H}(n)' = \langle [x_i,y_j],[[x_i,y_j],x_k] \mid 1 \leq i,j \leq n,\ i < k \leq n \rangle.$$

由于上述生成集中恰有 $u = (n^3+n^2)/2$ 个生成元，且 $\mathcal{H}(n)' = C_2^u$，因此我们得出 $\mathcal{H}(n)' = W \times \mathcal{H}(n)_3$, ，其中 $W = \langle [x_i,y_j] \colon\ 1 \leq i,\ j \leq n \rangle \cong C_2^{n^2}$，且 $\mathcal{H}(n)_3 = \langle [[x_i,y_j],x_k] \colon\ 1 \leq i,\ j \leq n,\ i < k \leq n \rangle \cong C^{n^2\binom{n-1}{2}}$。

(4) 根据第 (3) 部分，我们有 $[b,a^2] = gh$，其中 $g \in W$ 且 $h \in \mathcal{H}(n)_3$。此外，根据第 (3) 部分，我们还得到 $\mathcal{H}(n)_3 \leq Z(\mathcal{H}(n))$。这意味着

$$[[b,a],b'] = [gh,b'] = (gh)^{-1}(b')^{-1}(gh)b' = g^{-1}(b')^{-1}gb' = [g,b'].$$

同样根据第 (3) 部分，对于某些 $w_1$， $w_2$，.....，$w_s \in \{[x_i,y_j] \colon\ 1 \leq i,\ j \leq n\}$，我们有 $g = w_1w_2 \dots w_s$。我们将对 $s$ 使用归纳法，证明对于任意 $y_k \in Y_0$，均有 $[g,y_k] = 1$。在第 (3) 部分的证明中，我们已经证明，对所有 $i$， $j$， $k$，都有 $[[x_i,y_j],y_k] = 1$。因此，若 $s = 1$，则 $[g,y_k] = [w_1,y_k] = 1$。现在假设 $s > 1$，并归纳地假设：若 $g \in W$ 可表示为生成元中长度小于 $s$ 的字，则 $[g,y_k] = 1$ 。于是，根据 [11, Hilfssatz III.1.2(c)],

$$[g,y_k] = [w_1w_2 \dots w_{s-1}w_s,y_k] = [w_1w_2 \dots w_{s-1},y_k]^{w_s}[w_s,y_k],$$

并且 $[w_s,y_k] = 1$ 来自情形 $s = 1$。由于根据第 (3) 部分，交换子子群 $\mathcal{H}(n)'$是阿贝尔群，因此我们有

$$[g,y_k] = [w_1w_2 \dots w_{s-1},y_k]^{w_s} = [w_1w_2 \dots w_{s-1},y_k].$$

由归纳法 $[w_1w_2 \dots w_{s-1},y_k] = 1$，从而 $[g,y_k] = 1$。这意味着 $g$与每个 $y_k \in Y_0$都交换。由于 $Y$ 由 $Y_0$ 生成，因此 $g$ 中心化 $Y$，从而我们有 $[g,b'] = 1$。因此， $[[b,a],b'] = 1$。根据第 (3) 部分， $\mathcal{H}(n)'$ 是初等阿贝尔 2-群，所以 $[b,a] = [b,a]^{-1} = [a,b]$，从而也有 $[[a,b],b'] = 1$。

(5) 令 $(g_1,g_2) \in \mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$，并令 $x_i' = x_i^{g_1}$and $y_i' = y_i^{g_2}$，对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$ 均成立。设 $X_0' = \{x_i' \colon\ i = 1,2,\dots,n\}$，且 $Y_0' = \{y_i' \colon\ i = 1,2,\dots,n\}$。我们将应用冯·戴克定理（见 [23, Theorem 2.2.1]）来证明，映射 $\phi \colon\ X_0 \cap Y_0 \to \mathcal{H}(n)$ 由$x_i \to x_i'$，$y_i \to y_i'$（其中 $i = 1,\dots,n$）给出，并可唯一扩展为 $\mathcal{H}(n)$ 的自同构 $\phi$。为了证明这一点，

只需证明 $\mathcal{H}(n)$ 由 $X_0' \cup Y_0'$ 生成，并且对于 $\mathcal{R}$ 中的每个关系$w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 1$，都有 $w(x_1', \dots, x_n', y_1', \dots, y_n') = 1$。首先，根据 $\mathcal{H}(n)$ 的定义，$X = \langle X_0 \rangle \cong Y = \langle Y_0 \rangle \cong C_2^n$ 且 $\mathcal{H}(n) = \langle X, Y \rangle$。此外，根据 $g_1$ 和 $g_2$ 的定义，$\langle X_0' \rangle = X$ 且 $\langle Y_0' \rangle = Y$。因此 $\mathcal{H}(n) = \langle X_0' \cup Y_0' \rangle$。接下来考虑这些关系。令$a, a' \in X_0', b, b' \in Y_0'$，且 $c, c' \in X_0' \cup Y_0'$。那么 $c^2 = 1$ 且 $[a, a'] = [b, b'] = 1$。根据第 (3) 部分，有 $[a, b], [[a, b], c] \in \mathcal{H}(n)' \cong C^{n^2}(\ n+1\ /2)$，因此 $[a, b]^2 = 1$ 且 $[[a, b], c]^2 = 1$。根据第 (4) 部分，$[[b, a], b'] = 1$。最后，$[[[a, b], c], c']$ 属于 $\mathcal{H}(n)_4$，因此由引理 4.2(3) 可知它是平凡的。这就证明了第 (5) 部分。

(6) 下文为方便起见，记 $w \equiv w' \pmod{\mathcal{H}(n)_3}$，当且仅当$w\mathcal{H}(n)_3 = w'\mathcal{H}(n)_3$。首先，我们多次应用 $[11, \text{Hilfssatz III.1.2(c)}]$：$[gh, f] = [g, f]^h \cdot [h, f] = [g, f] \cdot [[g, f], h] \cdot [h, f]$，对任意 $g, h, f \in \mathcal{H}(n)$。记作 $c = c' x_{i_k}$，这意味着 $[c, d] = [c', d] \cdot [[c', d], x_{i_k}] \cdot [x_{i_k}, d]$；又由于 $[[c', d], x_{i_k}] \in Z(\mathcal{H}(n)_3)$（由第 (3) 部分可知），可得 $[c, d] \equiv [c', d] \cdot [x_{i_k}, d] \pmod{\mathcal{H}(n)_3}$。重复此过程 $k$ 次，我们得到

$$[c, d] \equiv [x_{i_1}, d] \dots [x_{i_k}, d] \pmod{\mathcal{H}(n)_3}.$$

现在我们多次应用 $[11, \text{Hilfssatz III.1.2(b)}]$：$[g, hf] = [g, f] \cdot [g, h]^f = [g, f] \cdot [g, h] \, [[g, h], f]$，对任意 $g, h, f \in \mathcal{H}(n)$。记作 $d = d' y_{j_\ell}$，这就意味着对所有 $u$，都有 $[x_{i_u}, d] = [x_{i_u}, y_{j_\ell}] \cdot [x_{i_u}, d'] \cdot [[x_{i_u}, d'], y_{j_\ell}]$；又因为 $[[x_{i_u}, d'], y_{j_\ell}] = 1$（由第 (4) 部分可知），所以得到$[x_{i_u}, d] = [x_{i_u}, y_{j_\ell}] \cdot [x_{i_u}, d']$。对每个 $u$，重复此过程 $\ell$ 次，并利用以下事实：$\mathcal{H}(n)'/\mathcal{H}(n)_3$ 是阿贝尔群（由第 (3) 部分可知），我们得到

$$[c, d] \equiv \prod_{1 \le u \le k, 1 \le v \le \ell} [x_{i_u}, y_{j_v}] \pmod{\mathcal{H}(n)_3}.$$

证明至此完成。 □

# 5 定理 1.3 的证明

设 $\mathcal{H}(n)$、$X = \langle X_0 \rangle$、$Y = \langle Y_0 \rangle$ 和 $\mathcal{R}$ 如定义 1.2 所述。由定理 4.5 (2)，$\mathcal{H}(n)$ 是相对于 $X$ 和 $Y$ 的 $n$ 维混合二面体群。由命题 4.3，$\mathcal{H}(n)$ 的阶为 $2^{(n^3+n^2+4n)/2}$。设 $\Gamma = C(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$ 和 $\Sigma = \Sigma(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$ 如定义 1.1 所述。由引理 2.3(5) 可知，$\Sigma$ 的度为 $2^n$；由定义 1.1(b) 可知，$|V(\Sigma| = 2 \cdot |\mathcal{H}(n) : X| = 2^a$，其中 $a = 1 + (n^3 + n^2 + 4n)/2 - n = 1 + (n^3 + n^2 + 2n)/2$。我们还需证明 $\Sigma$ 是半对称且局部 2-弧传递的。

首先证明 $\Sigma$ 是局部 2-弧传递的。由引理2.3(1)、(3)和(4)，$\Sigma$ 是 $\Gamma$ 的团图，$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Sigma)$ 包含 $G := \mathcal{H}(n) \rtimes A(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$，群$\mathcal{H}(n)$在 $V(\Sigma)$上有两个轨道，分别为 $\{Xh : h \in \mathcal{H}(n)\}$ 和 $\{Yh : h \in \mathcal{H}(n)\}$，而 $\mathcal{H}(n)$在 $E(\Sigma)$上正则作用。此外，$G$ 中 $\Sigma$ 的 1-弧$(X, Y)$ 的稳定子是子群$A(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$。由定理 4.5(5)，$A(\mathcal{H}(n)\ X, Y)$包含 $\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$。由(2)，$(X, Y, Z)$是 $\Sigma$ 的 2-弧，当且仅当对于某个 $z \in \mathcal{H}(n)$有 $Z = Xz$，使得 $Xz \cap Y \neq \emptyset$。因此，对于某个 $y \in Y$有 $Z = Xy$，且由于 $Z \neq X$，我们有 $y \neq 1$。由于 $\mathrm{Aut}(Y) \cong \mathrm{GL}_n(2)$在 $Y \setminus \{1\}$ 上传递，因此 $\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$在所有形如$(X, Y, Z)$的 2-弧上传递，从而 $G$ 中 $X$的稳定子在所有首顶点为 $X$的 $\Sigma$ 的 2-弧上传递。交换 $X$ 与 $Y$后进行类似论证可得稳定子

在 $G$ 中， $Y$ 的稳定子在所有首顶点为 $Y$的 $\Sigma$ 的 2-弧上传递，因此 $\Sigma$ 是局部 2-弧传递的。

证明 $\Sigma$ 是半对称的，是证明中最微妙的部分。在最小的情形下，即 $n = 2$ 时，使用 Magma 进行计算 [1] 表明 $\Sigma$ 是半对称的（有关这些计算的说明，见注释 5.1）。因此，我们假设 $n \geq 3$。由引理 2.3 (4)， $\Sigma$ 是边传递的。因此，要证明 $\Sigma$ 是半对称的，只需证明 Aut(Σ) 在 $V(\Sigma)$ 上不是传递的。反设 Aut(Σ) 在 $V(\Sigma)$ 上传递，并导出矛盾。在此假设下， $\Sigma$ 是一个阶为 2 的幂、度为 $2^n \geq 8$ 的 2-弧传递图。我们将分以下四个步骤进行证明。

步骤 1. $\mathcal{H}(n)' \trianglelefteq$Aut(Σ)。

设 $u = X \in V(\Sigma)$，并设 $A := \mathcal{H}(n) \rtimes (\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y))$。那么由 (2)， $\Sigma(u) = \{Yx : x \in X\}$，因此由引理 2.3(4) 和定理 4.5(5)，Aut($\sigma$)$_u$ 对 $\Sigma(u)$ 的作用之核包含 Aut($Y$)。于是可应用引理 2.2，因此存在一个 2-群$M \trianglelefteq$ Aut(Σ)，使得 $M \leq \mathrm{Aut}(\Sigma)^+$， $M$ 在 $V(\Sigma)$ 上半正则，并且 $\Sigma$ 是 $M$-正规覆盖 $\Sigma_M \cong \mathrm{K}_{2^n,2^n}$。如上所述， $\mathcal{H}(n) \trianglelefteq A \leq \mathrm{Aut}(\Sigma)^+$，且 $\mathcal{H}(n)$ 在 $E(\Sigma)$ 上正则作用，而 $A$ 在 $\Sigma$ 上局部 2-弧传递（由引理 2.3(4)）。因此， $M\mathcal{H}(n) \trianglelefteq MA \leq \mathrm{Aut}(\Sigma)^+$， $M\mathcal{H}(n)$ 是一个 2-群（因为 $M$ 和 $\mathcal{H}(n)$ 都是 2-群），并且 $M\mathcal{H}(n)$ 在 $\Sigma$ 上边传递（因为 $\mathcal{H}(n)$ 在 $E(\Sigma)$ 上传递），且其顶点轨道是 $\Sigma$ 的两个二部。设 $\Phi$ 是 $M\mathcal{H}(n)$ 的 Frattini 子群，则 $\Phi$ 是 $M\mathcal{H}(n)$ 的特征子群，因此$\Phi \trianglelefteq MA$。若 $\Phi$ 在 $\Sigma_M$ 的某个二部（比如 $O$）上传递，且若 $v \in O$，则$M\mathcal{H}(n) = (M\mathcal{H}(n))_v\Phi$，由 Frattini 子群的性质（[11, 命题 III.3.2(a)]），$M\mathcal{H}(n) = (M\mathcal{H}(n))_v$，这与 $M\mathcal{H}(n)$ 在 $\Sigma$ 的每个二部上传递这一事实矛盾。因此， $\Phi$ 在 $\Sigma_M$ 的每个二部上都是非传递的，且 $\Phi \trianglelefteq MA$。另一方面， $\Sigma$ 是局部 ($MA$, 2)-弧传递的（因为它是局部 ($A$, 2)-弧传递的），因此 $\Sigma_M$ 是局部 ($MA/M$, 2)-弧传递的（由 [7, 引理 5.1]）。

由于 $\Sigma_M \cong \mathrm{K}_{2^n,2^n}$，这意味着 $MA$ 在 $\Sigma_M$ 的每个二分部 $O$ 上都是 2-传递的。又因为 $\Phi$ 是 $MA$ 的非传递正规子群，所以对于 $\Sigma_M$ 的每个二分部 $O$， $\Phi$ 在 $O$ 上的作用都是平凡的。因此，$\Phi$ 包含于 $MA$ 在 $\Sigma_M$ 上作用的核中，也就是 $\Phi \leq M$。于是， $M\mathcal{H}(n)/M$ 是 $M\mathcal{H}(n)/\Phi$ 的一个商群，因此对于某个 $s$，有 $M\mathcal{H}(n)/M \cong C_2^s$（由引理 3.1）。由于 $M\mathcal{H}(n)$ 在 $\Sigma$ 上边传递，可知 $M\mathcal{H}(n)/M$ 是一个阿贝尔群，并传递地作用于 $E(\Sigma_M)$，因此 $M\mathcal{H}(n)/M$ 在 $E(\Sigma_M)$ 上正则（见 [22, 引理 2.4]），故 $s = 2n$ 和 $\mathcal{H}(n)/(M \cap \mathcal{H}(n)) \cong C_2^{2n}$。 $A$ 在 $\Sigma_M$ 上诱导的群是 $A/(A \cap M) \cong MA/M$，并且同构于 $C_2^{2n} \rtimes (\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y))$。因此， $A$ 和 $MA$ 都在 $\Sigma$ 上边传递，其边稳定子同构于 Aut($X$) × Aut($Y$)，从而 $MA = A$，也就是 $M \leq A$。又由于 $\mathcal{H}(n)$ 是 $A$ 的最大正规 2-子群，因此有 $M \leq \mathcal{H}(n)$。于是 $\mathcal{H}(n)/M \cong C_2^{2n}$，进而 $M \leq \mathcal{H}(n)'$；又由于根据定理 4.5(2)，$\mathcal{H}(n)/\mathcal{H}(n)' \cong C_2^{2n}$，我们得出 $M = \mathcal{H}(n)'$，步骤 1 的断言得证。

在论证的下一部分中，我们利用 Aut(Σ) =Aut(Γ) 这一事实。回顾一下， $\Gamma = C(\mathcal{H}(n), X, Y)$ 是凯莱图 Cay($\mathcal{H}(n)$, $S$)，其中 $S = (X \cup Y) \setminus \{1\}$。我们将经常用到引理 2.1] 关于混合二面体群的一个基本事实：自然投影映射 $\phi$： $h \to h\mathcal{H}(n)'$ 确定了一个同构 $\mathcal{H}(n)/\mathcal{H}(n)' \cong \phi(X) \times \phi(Y) \cong X \times Y$。在步骤 2 中，我们研究顶点集 $\mathcal{H}(n)$ 的子集 $\Gamma_4(1)$，它由 $\Gamma$ 中所有满足以下条件的元素组成：

元素 $h$，这些元素可以通过长度至多为四的路径从顶点 1 到达，因此 $\Gamma_4(1)$ 由所有满足 $h = h_1h_2\dots h_k$ 的元素 $h \in \mathcal{H}(n)$ 组成，其中每个 $h_i \in S$ 和 $0 \le k \le 4$。

步骤 2。$\Gamma_4(1) \cap \mathcal{H}(n)' = \{1\} \cup S'$，其中 $S' := \{[x, y] : \ x \in X \setminus \{1\}, \ y \in Y \setminus \{1\}\}$ .

设 $\Gamma_4(1)' := \Gamma_4(1) \cap \mathcal{H}(n)'$。显然 $1 \in \Gamma_4(1)'$ 且 $\Gamma_4(1)' \subseteq \mathcal{H}(n)'$。假设 $h \in \Gamma_4(1)' \setminus \{1\}$，于是 $h = h_1h_2\dots h_k$，其中每个 $h_i \in S$ 和 $1 \le k \le 4$。为 $h$ 选取这样的表达式，使 $k$ 最小。特别注意，$h \in \mathcal{H}(n)'$，因此 $\phi(h) = 1$，其中 $\phi$ 如上所述。若所有 $h_i \in X \setminus \{1\}$，则 $h \in X$；由于 $h \ne 1$，由 [10,引理 2.1] 可知 $\phi(h) \ne 1$，这就矛盾了。若所有 $h_i$ 都属于 $Y \setminus \{1\}$，同样会得到矛盾。因此 $2 \le k \le 4$，且并非所有 $h_i$ 都属于同一个集合，$X \setminus \{1\}$ 或 $Y \setminus \{1\}$。接下来，若存在唯一的 $i$ 使得 $h_i \in X \setminus \{1\}$，则对于某个 $a \in \phi(Y)$，有 $\phi(h) = \phi(h_i) \cdot a$；于是我们再次得到 $\phi(h) \ne 1$，从而产生矛盾。因此，至少有两个 $h_i$ 属于 $X \setminus \{1\}$；类似地，至少有两个 $h_i$ 属于 $Y \setminus \{1\}$。这意味着 $k = 4$，并且恰有两个 $h_i$ 属于 $X \setminus \{1\}$，不妨设为 $x$ 和 $x'$；恰有两个 $h_i$ 属于 $Y \setminus \{1\}$，不妨设为$y$和 $y'$。于是 $\phi(h) = \phi(xx') \cdot \phi(yy')$。若 $xx'$或 $yy'$中至少有一个非平凡，则由 [10, 引理 2.1], 有 $\phi(h) \ne 1$，从而产生矛盾。因此 $x' = x^{-1} = x$ 且 $y' = y^{-1} = y$。此外，若对于某个 $i$ 有 $h_i = h_{i+1}$，则我们将有 $h_ih_{i+1} = 1$，并可为 $h$得到一个更短的表达式。因此，$k$的最小性意味着 $h = xyxy = [x, y]$，或 $h = yxyx = [y, x] = [x, y]$（其中最后一个等式利用了以下事实：$x$、$y$ 和 $[x, y]$ 中的每一个都等于其逆映射）。因此步骤 2 得证。

步骤 3。$\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 在集合上固定步骤 2 中 $V(\Gamma)$ 的子集 $S'$，并在 $S'$ 上传递作用。

由步骤 1，得 $\mathcal{H}(n)' \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\Sigma)$。因此，对顶点稳定子 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 中的所有 $\alpha$，都有 $\alpha^{-1}h\alpha \in \mathcal{H}(n)'$，且 $h \in \mathcal{H}(n)'$。由于 $\mathcal{H}(n)$ 通过右乘作用于 $V(\Gamma) = \mathcal{H}(n)$，顶点 $h \in \mathcal{H}(n)'$ 在 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 下的像为

$$h^\alpha = (1^h)^\alpha = 1^{h\alpha} = 1^{\alpha^{-1}h\alpha} = \alpha^{-1}h\alpha.$$

这意味着 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 在集合上固定 $V(\Gamma)$ 的子集 $\mathcal{H}(n)'$。由于 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 也在集合上固定$\Gamma_4(1)$, 并固定顶点 1，因此 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 在集合上固定 $(\Gamma_4(1) \cap \mathcal{H}(n)') \setminus \{1\}$。由步骤 2，得 $(\Gamma_4(1) \cap \mathcal{H}(n)') \setminus \{1\} = \{[x, y] : x \in X \setminus \{1\}, y \in Y \setminus \{1\}\} = S'$。回顾一下，$\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y) \le \mathrm{Aut}(\Sigma)_1$, 并且由于 $\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$ 规范化 $\mathcal{H}(n)$，$\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$ 通过其自然作用作用于 $V(\Gamma) = \mathcal{H}(n)$。由于 $\mathrm{Aut}(X)$ 在 $X \setminus \{1\}$ 上传递，且 $\mathrm{Aut}(Y)$ 在 $Y \setminus \{1\}$ 上传递，因此 $\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(Y)$，从而 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$,也在 $S'$ 上传递。由此证明了步骤 3。

步骤 4。最终矛盾。

在证明的最后部分，我们分析一个与 $\Gamma$ 相关的凯莱图，即图$\Lambda := \mathrm{Cay}(\mathcal{H}(n), S \cup S')$。注意，$\mathcal{H}(n)$ 的右乘作用使 $\mathcal{H}(n)$ 成为图 $\Gamma := \mathrm{Cay}(\mathcal{H}(n), S)$ 和 $\mathrm{Cay}(\mathcal{H}(n), S')$ 的自同构群的一个子群，因此 $\mathcal{H}(n) \le \mathrm{Aut}(\Lambda)$ 也成立。此外，由于 $\mathrm{Aut}(\Sigma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$，群 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$, 在其对 $V(\Lambda) = \mathcal{H}(n)$ 的自然作用下保持 $S$ 不变；根据步骤 3，$\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 也保持 $S'$ 不变（并在其上具有传递性），因此 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 保持 $S \cup S'$ 不变。因此，$\mathrm{Aut}(\Sigma)_1 \le \mathrm{Aut}(\Lambda)$ 也成立；又由于 $\mathrm{Aut}(\Sigma) = \mathcal{H}(n)\,\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$, , 我们有 $\mathrm{Aut}(\Sigma) \le \mathrm{Aut}(\Lambda)$。现在，$\Lambda(1) = S \cup S'$ 和 $S' \cap S = \emptyset$，且 $\mathrm{Aut}(\Sigma)_1$ 在 $S'$ 上具有传递性。

我们断言， $S$ 也是 Aut(Σ)$_1$ 的一个轨道。集合 $S \cup \{1\} = X \cup Y$ 在 Aut(Σ)$_1$, 下保持不变；在步骤 3 的证明中，我们注意到，Aut($X$) × Aut($Y$) 是 Aut(Σ)$_1$ 的子群，且在 $X \setminus \{1\}$ 和 $Y \setminus \{1\}$ 上分别具有传递性。此外，我们假设 Aut(Σ) 在 $V$(Σ) 上具有传递性；因此，由于 Σ 是局部 2-弧传递的，Aut(Σ) 在 Σ 的弧上具有传递性。于是 Aut(Σ) 含有一个元素 $\sigma$，它将 Σ 的弧 $(X, Y)$ 映射到弧 $(Y, X)$。由于 Σ 是 Γ 的团图（引理 2.3(1)），$X$、$Y$（作为 $\mathcal{H}(n)$ 的子集）是 Γ 的极大团，且被 $\sigma$ 互换。特别地，$\sigma$ 在 Γ 中由 $X \cup Y$ 诱导的子图上诱导一个自同构。单位元 1 在 Γ 中与 $S$ 的每个顶点都相邻，而其他每个顶点 $z \in S$ 只与 $S \cup \{1\}$ 的 $|X| - 1$ 个元素相邻。因此，$\sigma$ 必定固定 1，并互换 $X \setminus \{1\}$ 和 $Y \setminus \{1\}$。由此可得，Aut(Σ)$_1$ 在 $S$ 上具有传递性，从而证明了该断言。因此，Aut(Σ) 在 Λ 的弧上恰有两个轨道：满足 $wz^{-1} \in S$ 的弧 $(w, z)$，以及满足 $wz^{-1} \in S'$ 的弧。

接下来，我们确定 Λ 的某些小子图。对于任意 $[x, y] \in S'$ 和 $y' \in Y \setminus \{1\}$，根据定理 4.5(4)，有 $[[y, x], y'] = 1$ 和 $[[x, y], y'] = 1$，因此 $[x, y]y' = y'[x, y]$，且

$$(1, y', [x, y]y', [x, y], 1)$$

是 Λ 中的一条 4-弧。此外，由于 $[x, y]y' \notin S \cup S'$，可知由 Λ 在 $C$（$x$、$y$、$y'$）：$= \{1, y', [x, y]y', [x, y]\}$ 上诱导的子图是一个 4-圈。

现在我们选取 $x' = x_2 \in X_0$ 和 $a = x_1 \in X_0$、$b = y_1 \in Y_0$，使得 $[a, b] \in S'$。这些元素分别是 $\sigma$ 作用下的像，具体如下：存在 $[x, y] \in S'$ 使得 $[x, y]^\sigma = [a, b]$，并且存在 $y' \in Y$ 使得（$y'$）$^\sigma = x'$。因此，由 Λ 在 $C'$ : $=C$（$x$、$y$、$y'$）$^\sigma = \{1, x', ([x, y]y')^\sigma, [a, b]\}$ 上诱导的子图是一个包含 2-弧（$[a, b]$, 1, $x'$）的 4-圈。于是，令 $z$ : $= ([x, y]y')^\sigma$，该 4-圈为（1, $x'$, $z$, $[a, b]$, 1），从而 $z = sx' = t[a, b]$，其中 $s$、$t \in S \cup S'$。由于这四个顶点两两不同，$sx' \neq 1$ 且 $tsx' = [a, b] \neq 1$。

$t$、$s$ 各自属于 $S$ 或 $S'$，因此有四种可能的组合。我们分别从每种可能性推出矛盾。首先，若 $t$、$s \in S'$均成立，则 $x' = st[a, b]$ 且$st[a, b] \in \mathcal{H}(n)'$，而 $x' \in X \setminus \{1\}$；由 [10, 引理 2.1]可知 $\phi(x') \neq 1$，而 $\phi(st[a, b]) = 1$，故矛盾。接着，假设 $t \in S'$ 且 $s \in S$。那么$sx' = t[a, b] \in \mathcal{H}(n)'$，因此 $\phi(sx') = \phi(t[a, b]) = 1$，这意味着 $sx' = 1$（由[10, 引理 2.1]），矛盾。第三，假设 $s$、$t \in S$。那么 $tsx' = [a, b] \in \mathcal{H}(n)'$，因此 $\phi(tsx') = \phi([a, b]) = 1$。同样，由 [10, 引理 2.1], 可得 $tsx' = 1$，这与假设矛盾。

这就剩下了 $t \in S, s \in S'$ 的情形，因此 $\phi(x') = \phi(sx') = \phi(t[a, b]) = \phi(t)$。由 [10, 引理 2.1], 可知，必有 $t \in X \setminus \{1\}$，且 $\phi(x') = \phi(t)$ 意味着 $t = x'$。因此 $x'sx' = [a, b]$，故 $s = x'[a, b]x' = [a, b]^{x'} \in S'$，这意味着对于某个 $c \in X \setminus \{1\}$ 和 $d \in Y \setminus \{1\}$，有 $[a, b][[a, b], x'] = [a, b]^{x'} = s = [c, d]$。现在，对于某些 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in X_0$ 以及 $y_{j_2}, y_{j_\ell} \in Y_0, \ldots, y_{j_1}$，有 $c = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ 和 $d = y_{j_1}y_{j_2}\ldots y_{j_\ell}$；我们选择这些表达式，使得 $k, \ell$ 尽可能小。现在将定理 4.5 (6) 应用于 $[c, d]$，注意到 $[a, b]\mathcal{H}(n)_3 = [c, d]\mathcal{H}(n)_3$，（回想 $a = x_1 \in X_0$ 和 $b = y_1 \in Y_0$），并利用陪集 $[x_{i_u}, y_{j_v}]\mathcal{H}(n)_3$，（其中 $1 \leq u, v \leq n$）构成 $\mathcal{H}(n)'/\mathcal{H}(n)_3 \cong C_2^{n^2}$ 的一组基这一事实（见定理 4.5 (3)）。由此可得 $k = \ell = 1$，从而 $a = c = x_{i_1} = x_1$ 和 $b = d = y_{j_1} = y_1$。等式 $[a, b][[a, b], x'] = [c, d]$ 进而意味着 $[[a, b], x'] = 1$，也就是说，$[[x_1, y_1], x_2] = 1$，这与定理 4.5 (3) 矛盾。因此，Aut Γ 在 Γ 的顶点上非传递地作用，而 Γ 是半对称的，定理 1.3 的证明至此完成。□

注释 5.1 为了证明在 $n = 2$ 的情形下 $\Sigma$ 是半对称的，我们使用了 Magma 的一次 [1] 计算，现将其说明如下。首先，根据定义 1.2 中给出的群表示，将群 $\mathcal{H}(2)$ 输入有限表示群范畴 GrpFP。接着，使用 pQuotient 命令构造 $\mathcal{H}(2)$ 的最大 2-商 $H2$，其下指数 2 类至多为 100，并将其作为 GrpPC 范畴中的群。比较这些群的阶可得 $|\mathcal{H}(2)| = |H2|$，因此 $\mathcal{H}(2) \cong H2$。接着构造图 $\Sigma$。计算表明，$\Sigma$ 是边传递但非顶点传递的，且度为 4。我们已在下列附录中提供 Magma 程序。

# 附录：在 $n = 2$ 情形下用于证明定理 1.3 的 Magma 程序。

输入群 $\mathcal{H}(2)$:

```
G<x1,x2,y1,y2>:=Group<x1,x2,y1,y2| x1^2, x2^2, y1^2, y2^2,(x1,x2)=(y1,y2)=1,
(x1,y1)^2=(x1,y2)^2=(x2,y1)^2=(x2,y2)^2=1,((x1,y1),x2)^2=((x1,y1),y2)=1,
((x1,y2),x2)^2=((x1,y2),y1)=1,((x2,y1),x1)^2=((x2,y1),y2)=1,
((x2,y2),x1)^2=((x2,y2),y1)=1,
(x1,((x1,y1),x2))=(x2,((x1,y1),x2))=(y1,((x1,y1),x2))=(y2,((x1,y1),x2))=1,
(x1,((x1,y1),y2))=(x2,((x1,y1),y2))=(y1,((x1,y1),y2))=(y2,((x1,y1),y2))=1,
(x1,((x1,y2),x2))=(x2,((x1,y2),x2))=(y1,((x1,y2),x2))=(y2,((x1,y2),x2))=1,
(x1,((x1,y2),y1))=(x2,((x1,y2),y1))=(y1,((x1,y2),y1))=(y2,((x1,y2),y1))=1,
(x1,((x2,y1),x1))=(x2,((x2,y1),x1))=(y1,((x2,y1),x1))=(y2,((x2,y1),x1))=1,
(x1,((x2,y1),y2))=(x2,((x2,y1),y2))=(y1,((x2,y1),y2))=(y2,((x2,y1),y2))=1,
(x1,((x2,y2),x1))=(x2,((x2,y2),x1))=(y1,((x2,y2),x1))=(y2,((x2,y2),x1))=1,
(x1,((x2,y2),y1))=(x2,((x2,y2),y1))=(y1,((x2,y2),y1))=(y2,((x2,y2),y1))=1>;
```

在 GrpPC 类别中，构造 $\mathcal{H}(2)$ 的最大 2-商群，其下指数 2 类不超过 100:

```
H2, q:=pQuotient(G,2,100);
```

$\mathcal{H}2$ 的阶（结果表明 $|H2| = |\mathcal{H}(2)|$，因此 $H2 \cong \mathcal{H}(2)$）：

```
FactoredOrder(H2);
```

构造图 $\Sigma$:

```
X:=sub<H2|x1,
x2>; Y:=sub<H2|y1,y2>;Vsigma1:={};
for g in H2 doXg:={};for a in X do
Include(~Xg, a*g);end for;
Include(~Vsigma1,Xg);
```

```
end for;
Vsigma2:={};
for g in H2 do
Yg:={};
for b in Y do
Include(~Yg, b*g);
end for;
Include(~Vsigma2,Yg);
end for;
Vsigma:=Vsigma1 join Vsigma2;
Esigma:={{x,y}:  x in Vsigma1, y in Vsigma2 | #(x meet y) ne 0};
Sigma:=Graph<Vsigma|Esigma>;
```

检验 $\Sigma$ 是否为四价半对称图:

```
IsVertexTransitive(Sigma);
IsEdgeTransitive(Sigma);Valence(Sigma);
```

## 致谢

第一作者获得克罗地亚科学基金会项目6732的资助。第二作者感谢澳大利亚研究委员会探索项目资助DP230101268。第三作者获得国家自然科学基金委员会（12071023、12161141005）和中国111计划（B16002）的资助。

## 参考文献

[1] W. Bosma、J. Cannon、C. Playoust, 《MAGMA代数系统 I：用户语言》, 《符号计算杂志》24（1997）235–265。[2] M. Conder、A. Malniˇc、D. Maruˇsiˇc 和 P. Potoˇcnik, 《至多有 768 个顶点的半对称三次图普查》, 《代数与组合杂志》23（2006）, 255–294。[3] M. Conder、J.-X. Zhou、Y.-Q. Feng、M.-M. Zhang, 《边传递双凯莱图》, 《组合理论B辑》145（2020）264–306。[4]W. Fan、D. Leemans、C.H. Li、J. Pan, 《局部2弧传递完全二部图》, 《组合理论杂志A辑》120（2013）683–699。[5] J. Folkman, 《正则线对称图》, 《组合理论杂志》3（1967）, 215–232。[6] GAP小组, 《GAP——群、算法与编程》, 版本4.11.1, 2021。[7] M. Giudici、C.H. Li、C.E. Praeger, 《分析有限局部 $s$-弧传递图》, 《美国数学会汇刊》356（2004）291–317。[8] C.D. Godsil, 《关于图的全自同构群》, 《Combinatorica》1（1981）243–256。

[9] M . Hall, 群论 , 麦克米伦公司 , 纽约
.[10] D.R.Hawtin、C.E. Praeger、J.-X. Zhou，边仿射二弧传递覆盖 $K_{2^n,\ 2^n}$ 的刻画。预印本，arXiv:2211.16809（2022）。[11] B. Huppert，《Eudiche Gruppen I》，施普林格出版社，纽约，1967。[12] A.A. Ivanov、C.E. Praeger，有限仿射二弧传递图，《欧洲组合学杂志》14（1993）421–444。[13] A.V. Ivanov，关于边传递但非顶点传递的正则图。组合设计理论，第273–285页，北荷兰数学研究丛书第149卷，《离散数学年刊》第34卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987。[14] C.H. Li，素数幂阶的有限 $s$弧传递图，《伦敦数学会会报》33（2001）129–137。[15] C.H. Li，有限边传递凯莱图与旋转凯莱映射，《美国数学会汇刊》358（2006）4605–4635。[16] C.H. Li、L. Ma、J. Pan，素数幂阶的局部本原图，《澳大利亚数学会杂志》86（2009）111–122。[17] C.H. Li、J.M. Pan，有限二弧传递阿贝尔凯莱图，《欧洲组合学杂志》29（2008）148–158。[18] C.E. Praeger，非本原对称图，《组合艺术》19A（1985）149–163。[19] C.H. Li、C.E. Praeger、A. Venkatesh 和 S. Zhou，有限局部拟本原图，《离散数学》246（2002），197–218。[20] C.E. Praeger，有限拟本原置换群的 O'Nan–Scott定理及其在2-弧传递图中的应用，《伦敦数学会杂志》（第2辑）47（1992），227–239。[21] C.E. Praeger，有限二部二弧传递图的一个约化定理，《澳大拉西亚组合学杂志》7（1993）21–36。[22] C.E. Praeger、C. Schneider，《置换群与笛卡尔分解》，伦敦数学会讲义系列449，剑桥大学出版社，剑桥，2018。[23] D.J. Robinson，《群论教程》，第二版，施普林格出版社，纽约，1996。[24] W.T. Tutte，一个立方图族，《剑桥哲学学会会刊》43（1947），459–474。[25] J.-X. Zhou、Y.-Q. Feng，双凯莱图的自同构，《组合理论B辑》116（2016）504–532。