带测试的克莱尼代数与加权程序

伊戈尔·塞德尔´ar捷克科学院计算机科学研究所，布拉格，捷克共和国 sedlar@cs.cas.cz

arXiv:2303.00322v1 [cs.LO] 1 Mar 2023

摘要——加权程序是概率程序的推广，并提供了一个框架，可通过算法表示来指定和编码数学模型。带测试的克莱尼代数是一种基于正则表达式的代数形式体系，可用于证明程序等价性。我们扩展了带测试的克莱尼代数的语言，使其足以对简化版本的加权程序进行形式化推理。我们为扩展后的语言引入关系语义，并将关系语义推广到带测试的克莱尼代数的一种适当扩展，称为带权与测试的克莱尼代数。我们通过一个示例展示，带权与测试的克莱尼代数为推理加权程序的等价性和最优运行提供了一个简单的代数框架。

索引词——带测试的克莱尼代数、程序等价性、程序语义、正则程序、加权程序

I. 引言

加权程序 [3] 为标准 while 程序 [1]增添了两个特性：（i）非确定性分支；（ii）为当前执行轨迹赋予权重的能力。因此，它们推广了概率程序 [2], : 在概率程序中，程序可以根据随机抛硬币的结果进行分支。

Batz 等人 [3] 认为，加权程序不仅是一种有趣的推广，还提供了一种实用的程序设计范式，可通过算法表示来描述和编码数学模型，例如优化问题或概率分布。他们为加权程序引入了结构操作语义和 Dijkstra 风格的最弱前置条件演算，并利用这一演算确定加权程序的竞争比。

带测试的克莱尼代数 [10], KAT 是正则语言代数理论的扩展，为 while 程序的等式规范与验证，以及证明程序等价性，提供了一种简单的代数形式体系。本文扩展了 KAT 的语言，使其足以形式化推理：对加权程序进行命题抽象，并以无结构的原子动作取代赋值。我们为扩展后的语言引入关系语义，并将关系语义推广至带测试的克莱尼代数的一个适当扩展，称为带权与测试的克莱尼代数，简称 KAWT。我们通过一个示例说明，KAWT 为推理加权程序的等价性和最优运行提供了简单的代数框架。

本研究得到捷克科学基金会资助，项目编号为 GA22-16111S。作者感谢审稿人提出的宝贵意见。

本文结构如下。第二节介绍加权正则程序，即带权重的正则程序扩展，并说明加权正则程序能够表达对加权程序的命题抽象，其中赋值被无结构的原子动作取代。第三节利用加权转移系统为加权正则程序引入关系语义，其中权重取自任意半环。第四节回顾克莱尼代数的基础知识；第五节介绍带测试的克莱尼代数的一种扩展，该扩展推广了加权正则程序的关系语义。此扩展称为带权与测试的克莱尼代数，它在带测试的克莱尼代数中加入一个半环子代数（表示权重）。第六节通过一个示例说明，如何运用带权与测试的克莱尼代数推理正则 while 程序的等价性和最优运行。

II. 加权程序

众所周知，while 程序可以用正则程序 [5], [13]的语法表示。后者将非确定性分支（或选择）作为基本操作之一，因此自然可以为正则程序添加权重，以表示加权程序。为简化起见，我们将采用加权程序的命题抽象，其中赋值 $\mathtt{x} := E$ 被 [5], [10] 风格的非结构化 “ 原子程序 ” 所取代。我们将看到，即使在这种更简单的设定下，我们也能够对加权程序进行大量推理。

定义 1. 签名是 $\Sigma = (\mathrm{P},\mathrm{B},\mathrm{F})$，由三个两两不相交的变量集合组成，分别直观地表示原子程序、布尔测试和加权测试。Σ上的加权正则程序集合 WRP_Σ由以下类型的表达式构成：

Boolean expressions	$b, c :=$	$\mathtt{b} \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid b \cdot c \mid b + c \mid \neg b$
Weightings	$f, g :=$	$\mathtt{f} \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid f \cdot g \mid f + g$
Programs	$p, q :=$	$\mathtt{p} \mid b \mid f \mid p + q \mid p \cdot q \mid p^*$

（假设 $\mathtt{b} \in \mathrm{B}$、$\mathtt{f} \in \mathrm{F}$，且 $\mathtt{p} \in \mathrm{P}$。）我们有时会¯写作 b 而非 $\neg b$，以及 pq 写作 $p \cdot q$。

加权正则程序的语言扩展了带测试的克莱尼代数 [10] 所对应的正则程序语言，增加了“权重”这一类，即表示为计算路径分配权重的半环项

。权重由抽象半环 [4], [12]的元素表示。回顾一下，KAT 的语言如何表达 while 程序的标准控制流命令：

- 跳过 := 1 并中止 := 0
- 顺序组合 p; $q := pq$
- 如果 b 则 p 否则 $q := (bp) + (\neg bq)$
- 当 b 时执行 $p := (bp)^*\neg b$

请注意，在正则程序语言中，非确定性分支（选择）由 $+$ 运算符表示。

例1. 回顾“滑雪租赁程序”，这是 [3] 中加权程序的主要动机示例：[1]

```
1: while n > 0 do
2:     n := n − 1 ;
3:     { ⊙1
4:     ⊕
5:     ⊙y ; n := 0 }
6: end while
```

第 4 行的运算符 $\oplus$ 表示在计算序列之间进行非确定性分支：其中一个序列执行“加权” $\odot 1$，即“增加一个单位的权重”，然后返回 while 循环的开头；另一个序列执行 $\odot y$，即“增加 y 个单位的权重”，随后赋值 $n := 0$，然后返回循环开头。之后，布尔测试 $n > 0$ 的结果为 False，计算随即终止。

滑雪租赁程序的结构可以用以下加权正则程序表示（为便于阅读，我们使用描述性变量名，以粗体表示权重变量，并用花括号括起布尔表达式）：

$$\Big(\{\texttt{neq0}\}\big(\texttt{sub1}(\textbf{one} + \textbf{skis}\,\texttt{end})\big)\Big)^*\{\neg\texttt{neq0}\}\,. \quad (1)$$

在此程序中，$\texttt{neq0} \in \mathsf{B}$ 表示测试 $n > 0$，$\texttt{sub1} \in \mathsf{P}$ 表示指令 $n := n - 1$，即从 n 的值中减去 1；$\texttt{end} \in \mathsf{P}$ 表示赋值 $n := 0$，用于结束循环；$\textbf{one}, \textbf{skis} \in \mathsf{F}$ 则分别表示权重 $\odot 1$（增加一个单位的权重）和 $\odot y$（增加滑雪板的价格）。

III. 关系语义

本节介绍加权正则程序的关系语义，该语义基于取值于半环的迁移系统。

定义 2. 半环是 $\mathsf{S} = (S, +, \cdot, 1, 0)$，其中

- $(S, +, 0)$ 是一个交换幺半群；
- $(S, \cdot, 1)$ 是一个幺半群；
- $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$ 和 $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$；
- $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$。

[1]滑雪租赁问题是一个优化问题，涉及这样一种情况：某人计划进行为期 n 天的滑雪旅行，可以选择每天支付 1 欧元租一副滑雪板，也可以选择支付 y 欧元购买一副滑雪板。

半环是幂等的，当且仅当 $x + x = x$ 对所有 $x \in S$。半环是完备的，当且仅当（S、$+$、0）构成一个完备幺半群，并且满足以下分配律：

$$\sum_{i\in I}(x \cdot x_i) = x \cdot \left(\sum_{i\in I} x_i\right) \qquad \sum_{i\in I}(x_i \cdot x) = \left(\sum_{i\in I} x_i\right) \cdot x$$

（完备幂等半环也称为量子格。）我们将半环上的自然序 $\preceq$ 定义如下：

$$x \preceq y \iff \exists z(x + z = y)\,.$$

我们注意到，在幂等半环中，自然序与由 $x \leq y \iff x + y = y$ 定义的半格序 $\leq$ 相一致。

例 2。（1）一种完备幂等半环，尤其因最短路径算法而广为人知，即扩展自然数上的热带半环

$$\mathbf{T} = (\mathbb{N}^\infty, \min, +, 0^{\mathbb{N}}, \infty)$$

其中

- $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，其中 $\infty \notin \mathbb{N}$；
- min 是扩展到 $\mathbb{N}^\infty$ 上的最小值运算，定义为 $\min(n, \infty) = \min(\infty, n) = n$ 对所有 n均成立；min 被视为半环加法（因此，∞ 是由 $x \leq y$ 定义的序关系 $\leq$ 中的最小元素，当且仅当 $\min(x, y) = y$）；
- $+$表示半环乘法，是 $\mathbb{N}$和 $n + \infty = \infty = \infty + n$ 上的加法，对所有 n 均成立（因此，∞ 是湮灭元）；
- $0^{\mathbb{N}}$自然数零，是关于 $+$的单位元。

（2）模糊逻辑理论中一个广为人知的例子是 Łukasiewicz半环 $\text{Ł} = ([0, 1], \max, \otimes, 1, 0)$，其中 $[0, 1]$ 是实单位区间，$\otimes$ 是 Łukasiewicz t-范数 $x \otimes y = \max\{0, x + y - 1\}$。

直观而言，半环可以看作由一组权重、权重加法运算（半环乘法 $\cdot$）、由半环加法 $+$诱导的权重比较关系 $\preceq$，以及两个指定权重组成，即“无权重” 1 和“绝对”权重 0。

定义 3. 设 S 为一个半环。一个 S^Σ-转移系统是 (X, L)，其中 $X \neq \emptyset$ 和 L 是一个函数，满足

$$L(\mathsf{p}) \subseteq X \times X \qquad L(\mathsf{b}) \subseteq X \qquad L(\mathsf{f}) \in \mathbf{S}\,.$$

直观而言，$(s, t) \in L(\mathsf{p})$ 表示原子程序 p 在状态 s执行时可能在状态 t 终止；$s \in L(\mathsf{b})$ 表示原子布尔表达式 b 在 s中求值得 True；而 $L(\mathsf{f}) \in \mathsf{S}$ 是赋给原子加权表达式 f 的权重。

等价地，L 在 S^Σ-转移系统中可以看作一个从 $\bigcup\Sigma$ 到 $\mathsf{S}^{X\times X}$ 的函数，满足

- $L(\mathsf{p})$ $L(\mathsf{b}) \in \{0, 1\}^{X\times X}$；
- $L(\mathsf{b})(s, t) = 0$ 以及 $L(\mathsf{f})(s, t) = 0$ 如果 $s \neq t$；

对于所有 s、s'、t、$t' \in X$，• $L(\mathsf{f})(s, t) = L(\mathsf{f})(s', t')$。

（实际上， $L(\mathsf{b})$ 和 $L(\mathsf{f})$ 是从 S 上的恒等关系映射出的函数，而该恒等关系又表示 S。）

在给定的 S^{Σ}-半环中， L 可扩展为一个函数 $\mathsf{WRP}_{\Sigma} \to \mathbf{2}^{X\times X}$，它通过将加权正则程序的运算提升到函数集合 $X \times X \to \mathsf{S}$ 上，来指定每个加权正则程序的解释：

定义 4. 设 λ、$\lambda' \in \mathsf{S}^{X\times X}$，并设 $\theta \in \{0,1\}^{X\times X}$

- $\mathbf{1} = \mathrm{id}_X$ *(the identity relation on X);*
- $\mathbf{0}(s,t) = 0$*;*
- $(\lambda + \lambda')(s,t) = \lambda(s,t) + \lambda'(s,t)$*;*
- $(\lambda \cdot \lambda')(s,t) = \sum\{\lambda(s,u) \cdot \lambda'(u,t) \mid u \in X\}$*;*
- $(\neg\theta)(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = t \text{ and } \theta(s,t) = 0 \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$
- $\lambda^0 = \mathbf{1}$ *and* $\lambda^{n+1} = \lambda^n \cdot \lambda$*.*

若 S 是完备半环，则定义：

- $\lambda^* = \sum_{n\geq 0} \lambda^n$*.*

容易验证 $(\mathsf{S}^{X\times X}$、$\cdot$、$+$、$\mathbf{1}$、$\mathbf{0})$ 是一个半环；见下文的引理 1。我们将 $\{0,1\}^{X\times X}$ 记为 $2^{X\times X}$。

IV. 克莱尼代数

克莱尼代数 [8], [9] 是在研究正则语言、有限自动机和最短路径算法等领域中自然出现的结构。克莱尼代数为关于正则程序[10]的等式推理提供了优雅的框架。本节回顾克莱尼代数的基本预备知识。

定义 5. 克莱尼代数是带有一元运算 * 的幂等半环，并满足以下（准）方程：

$$1 + xx^* \leq x^* \qquad 1 + x^*x \leq x^*$$
$$y + xz \leq z \to x^*y \leq z \qquad y + zx \leq y \to yx^* \leq z$$

克莱尼代数是 *-连续的，当且仅当它满足

$$xy^*z = \sum_{n\geq 0} xy^n z\,.$$

例 3. (1) 非空集合 X 上的二元关系的Kleene代数为

$$\mathbf{Rel}_X = (\mathbf{2}^{X\times X}, \cup, \circ, {}^*, \mathrm{id}_X, \emptyset)\,,$$

其中，$\mathbf{2}^{X\times X}$ 是 X上的所有二元关系构成的集合，$\cup$ 是并集，$\circ$ 是关系复合，* 是自反传递闭包，而 id_X 是 X上的恒等关系。

(2) 取一个有限符号集 Δ，并令 Δ^* 为 Δ上的有限序列（包括空序列 ϵ）构成的集合。令 Reg_Δ 为 $\mathbf{2}^{\Delta^*}$（即 Δ 上的所有语言构成的集合）中包含空集 $\emptyset$和集合 $\{\epsilon\}$，并且包含所有 $\{\mathsf{x}\}$（其中 $\mathsf{x} \in \Delta$）的最小子集；该子集对有限并以及以下运算封闭：

- $X \cdot Y = \{xy \mid x \in X \,\&\, y \in Y\}$，即由来自 X 的字符串与来自 Y的字符串连接而成的集合；
- $X^* = \bigcup_{n\geq 0} X^n$，其中 $X^0 = \{\epsilon\}$ 和 $X^{n+1} = X^n \cdot X$，即所有可被解析为 X 中有限多个字符串串接而成的字符串的集合（克莱尼迭代）。

集合 Reg_Δ 称为 Δ 上的正则语言集合。Δ 上的正则语言的克莱尼代数为

$$\mathbf{Reg}_\Delta = (\mathrm{Reg}_\Delta, \cup, \cdot, {}^*, \{\epsilon\}, \emptyset)\,.$$

定义 6. 带测试的克莱尼代数 *[10]* 是如下形式的结构

$$\mathbf{K} = (K, B, \cdot, +, {}^*, {}^-, 1, 0)$$

其中

- $(K, \cdot, +, {}^*, 1, 0)$ *is a Kleene algebra;*
- $B \subseteq K$*, and* $(B, \cdot, +, {}^-, 1, 0)$ *is a Boolean algebra.*

当且仅当其底层克莱尼代数是 *-连续的，带测试的克莱尼代数才是 *-连续的。

在带测试的克莱尼代数中，B 的元素被视为对以布尔语言表述的命题所作的“测试”，而 K 的元素通常表示“结构化动作”。

例 4. (1) 每个克莱尼代数都是带测试的克莱尼代数。取 $B = \{1, 0\}$，并将 $^-$ 定义为 B上的布尔补运算。

(2) 在某个集合X 上的带测试的关系克莱尼代数，是将 Rel_X 扩展为包含 id_X的所有子集（视为 B），并在 id_X 的所有子集（视为 $^-$）上定义补运算。

(3) 取两个有限集合 A 和 T，分别由程序变量和布尔变量组成。我们假设 $\mathsf{A} = \{\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n\}$ 按某种固定但任意的顺序排列。A 上的一个原子是形如 $\mathsf{b}_1^{\pm} \ldots \mathsf{b}_n^{\pm}$ 的序列，其中 $\mathsf{b}_i^{\pm} \in \{\mathsf{b}_i, \bar{}\mathsf{b}_i\}$。令 1_A为 A 上所有原子的集合。A、T 上的一个守卫字符串是任意形如（对于 $k \geq 0$）的序列

$$A_0 p_1 A_1 p_2 A_2 \ldots p_k A_k$$

其中每个 A_i 都是 A 上的一个原子，且每个 $p_i \in \mathsf{T}$。守卫字符串可视为程序执行轨迹的表示（用原子替代抽象状态）。令 $2^{GS_{\mathsf{A},\,\mathsf{T}}}$为 A、T 上所有守卫字符串集合构成的集合。显然$1_\mathsf{A} \subseteq 2^{GS_{\mathsf{A},\,\mathsf{T}}}$。合并积运算 $\diamond$ 是定义在 $GS_{\mathsf{A},\,\mathsf{T}}$ 上的一个偏二元函数，定义如下：

$$xA \diamond A'y = \begin{cases} xAy & \text{if } A = A' \\ \text{undefined} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

合并积运算以显然的方式提升到受限字符串集合上。注意，集合上的合并积运算是一个全函数。A,T 上的受限语言代数 [11],

$$\mathbf{G}_{\mathsf{A},\mathsf{T}} = (2^{GS_{\mathsf{A},\mathsf{T}}}, 2^{1_\mathsf{A}}, \cup, \diamond, {}^*, {}^-, 1_\mathsf{A}, \emptyset)\,,$$

是一个 *-连续的带测试的克莱尼代数（$X^* = \bigcup_{n\geq 0} X^n$，其中幂运算使用 $\diamond$ 定义）。

引理 1. 设 X 是一个非空集合，S 是一个半环。那么 1）$\mathsf{S}(X) = (\mathsf{S}^{X\times X}, \cdot, +, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ 是一个半环；2）如果 S 是幂等的（完备的），那么 $\mathsf{S}(X)$ 是幂等的（完备的）；3）如果 S 是幂等且完备的，那么 $\mathsf{S}^*(X) = (\mathsf{S}(X)^*)$ 是一个 *-连续克莱尼代数；

4）如果 S 是幂等且完备的，那么 $\mathsf{S}_2^*(X)$ =($\mathsf{S}^*(X)$ $\mathbf{2}^{\mathrm{id}_X}$, ¬) 是一个 *-连续带测试的克莱尼代数。

（我们注意到，$\mathsf{S}_2^*(X)$ 给出了一个带测试的克莱尼代数的自然例子，其中测试的集合（即 $\mathbf{2}^{\mathrm{id}_X}$）与 $\mathbf{1} = \mathrm{id}_X$ 下的元素集合并不相同；对于所有 s、$t \in X \times X$，若 $\lambda \leq \lambda'$，则 $\lambda(s,t) \leq \lambda'(s,t)$。）

引理 2. $\mathsf{S}(X)$ 中由所有常值函数组成的子代数与 S 同构。

V. 带权重和测试的 Kleene 代数

鉴于克莱尼代数在推理正则程序和 while 程序方面的应用，从克莱尼代数的角度研究加权程序是很自然的。Gomes 等人 [6]提出了 KAT 的一种推广，称为分级 KAT（或 GKAT），其中测试所用的布尔代数被更一般的代数结构取代。Batz 等人 [3] 指出，深入研究 GKAT 在推理加权程序方面的适用性是一个值得探讨的问题。 [3] 意义上的加权程序结合了布尔测试和权重（加权测试），因此，考虑对 GKAT 方法进行推广似乎顺理成章。

定义 7. 带权与测试的克莱尼代数是一个结构

$$\mathbf{K} = (K, B, S, \cdot, +, {}^*, {}^-, 1, 0)$$

其中

- $(K, \cdot, +, {}^*, 1, 0)$ 是一个克莱尼代数；
- $B \subseteq K$ 以及 $S \subseteq K$；
- $(B, \cdot, +, {}^-, 1, 0)$ 是一个布尔代数；
- $(S, \cdot, +, 1, 0)$ 是一个半环。

K 中的赋值是任意从 WRP_Σ 到 K 的同态 v，满足 $v(\mathsf{b}) \in B$ 且 $v(\mathsf{f}) \in S$。当且仅当对所有 $\mathsf{K} \in \mathcal{K}$ 中的所有赋值 v，均有 $v(p) = v(q)$ 时，两个程序 p、$q \in \mathrm{WRP}_\Sigma$ 在权重与测试克莱尼代数类 $\mathcal{K}$ 中等价。

显然，每个 KAT 都是 KAWT；只需取 K 的任意子宇宙 S即可。不过，还有一些更有趣的例子。

例 5。（1）第一个例子将受限语言的克莱尼代数与热带半环结合起来。取某个固定 A 和 T 上的受限字符串集合，并将其记为 GS。函数 $\lambda : GS \to \mathbb{N}^\infty$ 为每个受限字符串赋予一个权重，可视为指定程序执行轨迹的权重（如果 $\lambda(s) = \infty$，那么要么 s 不是对应于λ 的程序所能生成的轨迹，要么该轨迹带有“绝对权重”）。注意，函数$\lambda : GS \to \mathbb{N}^\infty$ 是受限字符串集合（$GS \to \{0^\mathbb{N}, \infty\}$）的推广，也就是说，它们是克莱尼代数 G 的元素。取

$$\mathbf{T}^\mathbf{G} = ((\mathbb{N}^\infty)^{GS}, B, S, \cdot, +, {}^*, {}^-, 1, 0)$$

其中 $(\mathbb{N}^\infty)^{GS}$ 是从 GS 到 $\mathbb{N}^\infty$ 的所有函数的集合，并且

- $1(s) = \begin{cases} 0^\mathbb{N} & \text{if } s \in 1_\mathsf{A} \\ \infty & \text{otherwise;} \end{cases}$
- $0(s) = \infty$ 对所有 s；
- $\lambda \in B$ 当且仅当 $\lambda(s) \in \{0^\mathbb{N}, \infty\}$ 对于所有 $s \in GT$，且 $\lambda(s) = 0^\mathbb{N}$仅当 $s \in 1_\mathsf{A}$；
- $S = \{\lambda \mid \lambda(s) = \infty$ 若 $s \notin 1_\mathsf{A}$ 且 $\lambda(A_i) = \lambda(A_j)$ 对所有 $A_i, A_j \in 1_\mathsf{A}\}$；
- $(\lambda \cdot \lambda')(s) = \min\{\lambda(t) +^{\mathbb{N}^\infty} \lambda'(u) \mid s = t \diamond u\}$；
- $(\lambda + \lambda')(s) =$ 最小$\{\lambda(s), \lambda'(s)\}$；
- $(\lambda^*)(s) = \min_{n \geq 0}(\lambda^n(s))$ 其中 λ^n 由 $\cdot$定义；
- $^-: B \to B$ 使得 $(\lambda)(s) = \infty$ 当且仅当 $\lambda(s) \neq \infty$。

可以证明，$\mathsf{T}^\mathbf{G}$ 是一个带权与测试的克莱尼代数（*-连续），其中 $(S, \cdot, +, 1, 0) \cong \mathsf{T}$。$\mathsf{T}^\mathbf{G}$ 还包含一个与 G 同构的（真）子代数，即 $(\{0^\mathbb{N}, \infty\}^G, B, \cdot, +, {}^*, {}^-, 1, 0)$。

(2) 类似的构造也可以使用 T 和 Rel_X来完成。我们将细节留给读者，只指出合并积运算 $\diamond$ 可以在 $X \times X$ 上定义：规定若 $t = u$，则 $(s,t) \diamond (u,v)$ 为 (s,v)；否则该运算未定义。

上一个示例中的构造显然可以在更一般的情形下进行。事实上，我们可以采用形式幂级数这一广为人知的概念稍作推广；例如，在加权自动机 [4], [12]的研究中就会用到形式幂级数。形式幂级数是从一个幺半群到一个半环的函数；我们将以定义在某些偏半群上的函数为基础。

定义 8. 带单位元的偏半群是 $(G, D, \diamond, I)$，其中 $G \neq \emptyset$, D 是 G, $\diamond$上的二元关系： $D \to G$，并且$I \subseteq G$ ，使得

- $D(x,y)$ 且 $D(x \diamond y, z)$ 当且仅当 $D(y,z)$ 且 $D(x, y \diamond z)$;
- $D(x,y)$ 且 $D(x \diamond y, z)$ 仅当 $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$;
- 对所有 x ，存在 y： $I(y)$ 且 $D(x,y)$;
- 对所有 x ，存在 y： $I(y)$ 且 $D(y,x)$;
- $D(x,y)$ 且 $I(y)$ 仅当 $x = x \diamond y$;
- $D(y,x)$ 且 $I(y)$ 仅当 $x = y \diamond x$。

我们注意到，上述前两个条件比偏半群的标准定义 [7]更强。我们通常写作 xy，而不是 $x \diamond y$。

例 6. (1) 一个带单位元的偏半群示例是 $\mathsf{Cart}_X = (X \times X, D, \diamond, \mathrm{id}_X)$，其中 $X \times X$是非空集合 X上的笛卡尔积，$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in D$当且仅当$y_1 = x_2$，$(x,y) \diamond (y,z) = (x,z)$，且 $\mathrm{id}_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$是 X上的恒等关系。

(2) $\mathsf{Gu}_{\mathsf{A},\ \mathsf{T}} = (GS, D, \diamond, 1_\mathsf{A})$，其中 GS是某个 A 和 T 上的守卫字符串集合， $\diamond$是合并积运算， D是满足 $s \diamond t$ 有定义的有序对 (s,t) 的集合，而 1_A 是 A 上的原子集合。

(3) $\mathsf{Str}_\Delta = (\Delta^*, D, \frown, \epsilon)$，其中 Δ^* 是有限字母表 Δ 上的有限序列（字符串）集合（包括空字符串 ϵ），D 是 Δ^* 上的全关系，而 $\frown$ 是连接运算（实际上是 Δ^* 上的全运算）。

许多著名的克莱尼代数（带测试）实际上都是从某些特定的（正则）偏半

群到二元素布尔半环 Bo =($\{1,0\}, \wedge, \vee, 1, 0$) 的函数代数；读者只需考察前面的一些例子，就能轻易验证这一点。

定义 9. 设 P =($G, D, \diamond, I$) 是一个带单位元的偏半群，S =($S, \cdot^{\mathbf{S}}, +^{\mathbf{S}}, 1^{\mathbf{S}}, 0^{\mathbf{S}}$) 是一个完备幂等半环。我们定义

$$\mathbf{S}^{\mathbf{P}} = (S^G, B, W, \cdot, +, {}^*, {}^-, 1, 0)$$

其中 S^G 是从 G 到 S 的所有函数构成的集合，并且

- $1(x) = \begin{cases} 1^{\mathbf{S}} & \textit{if } x \in I \\ 0^{\mathbf{S}} & \textit{otherwise;} \end{cases}$
- $0(x) = 0^{\mathbf{S}}$ *for all* s;
- $\lambda \in B$ *iff* $\lambda(x) \in \{1^{\mathbf{S}}, 0^{\mathbf{S}}\}$ *for all* $x \in G$ *and* $\lambda(x) = 1^{\mathbf{S}}$ *only if* $x \in I$;
- $W = \{\lambda \mid \lambda(x) = 0^{\mathbf{S}}$ *if* $x \notin I$ *and* $\lambda(y) = \lambda(z)$ *for all* $y, z \in I\}$;
- $(\lambda \cdot \lambda')(x) = \sum\{\lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(z) \mid (y, z) \in D \ \ \& \ \ y \diamond z = x\}$ *(the sum uses* $+^{\mathbf{S}}$*);*
- $(\lambda + \lambda')(x) = \lambda(x) +^{\mathbf{S}} \lambda'(x)$;
- $(\lambda^*)(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\lambda^n(x)\right)$ *where* λ^n *is defined using* $\cdot$;
- $^- : B \to B$ *such that* $(\bar{\lambda})(x) = 1^{\mathbf{S}}$ *iff* $\lambda(x) \neq 1^{\mathbf{S}}$.

定理 1. 若 P 是一个带单位元的偏半群，且 S 是一个完备幂等半环，则 $\mathbf{S}^{\mathbf{P}}$ 是一个 *-连续的带权与测试的克莱尼代数，其中

$$(W, \cdot, +, 1, 0) \cong \mathbf{S}\,.$$

鉴于克莱尼代数与正规语言代数之间的关系 [9], , 以及带测试的克莱尼代数与正规防护语言代数之间的关系 [11], , 自然会产生这样的问题：对于任意给定的一类半环 $\mathcal{S}$ （在同构下封闭），是否存在一种带权与测试的克莱尼代数，其元素是某个字母表上的字符串集合（借用 [11]的术语，即一种“语言论”代数），并且它在权半环属于 $\mathcal{S}$的带权与测试的克莱尼代数类中是自由的？（也就是说，给定的带权与测试的克莱尼代数类的等式理论，是否相对于某类语言论代数是完备的。）

我们在此不回答这个问题，但要指出，对于任意 A,T，$\mathbf{T}^{\mathbf{G}}$ （从 A,T 上的受限字符串到扩展自然数的函数代数）与一种语言理论代数同构。

设 Φ = (A, T)，其中 A $\subseteq$ B 是有限的布尔变量集合，T $\subseteq$P 是有限的程序变量集合。我们假设 A = {$\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_n$} 按某种固定但任意的顺序排列。令 $\Box$ 为一个新符号（即 $\Box \notin \bigcup \Sigma$）。 Φ 上的带权防护字符串是形如

$$A_0 p_1 A_1 \ldots p_n A_n \Box^m\,,$$

其中，所有 A_i 都是 A 上的原子，且所有 $p_i \in$ 都是 T。因此， Φ 上的带权防护字符串是 Φ 上的防护字符串，后接由 m 个 $\Box$副本组成的字符串。我们将其简写为 $s(m)$，其中 $s \in GS$ 且 $m \in \mathbb{N}$。带权原子是 $s(m)$，其中 $s \in 1_{\mathsf{A}}$。

直观而言，防护字符串表示程序的一条执行轨迹，而权重 $\Box^m$ 表示该轨迹的权重。因此，带权防护字符串的某些集合可以视为表示加权正则程序可能的执行轨迹。如果集合 X 表示一个程序，并且对于所有 m， $s(m) \notin X$ ，那么 s 就不是该程序可能的执行轨迹，也就是说，它的“权重为无穷大”。

带权防护字符串的集合 X 是无歧义的，当且仅当$s(n) \in X$ 且 $s(m) \in X$ 当且仅当 $n = m$；此外， X 是清晰的，当且仅当 $s(m) \in X$ 当且仅当 $m = 0$，而且 X 是一致的，当且仅当$s(n)$ $t(m) \in X$ 当且仅当 $n = m$。带权原子的集合 X 是通用的，当且仅当对所有 A ，都存在 n 使得 $A(n) \in X$。注意，带权防护字符串的清晰集就是受限字符串的集合，而一致集是无歧义的。

两个带权防护字符串集合 X、Y 的无歧义并为

$$X \Cup Y := \{s(\min(U)) \mid U = \{n \mid s(n) \in X \cup Y\}\}\,.$$

注意， $\Cup$ 不一定是幂等的，但它是所有无歧义带权防护字符串集合上的半格连接运算。我们将 $X \Cup X$ 记为 $X^{\Cup}$。

带权防护字符串的合并积定义如下:

$$xA(n) \diamond A'y(m) = \begin{cases} xAy(n+m) & \text{if } A = A' \\ \text{undefined} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义10。固定一个 Φ。令

$$\mathbf{GT} = (K, B, S, \cdot, \Cup, {}^*, {}^-, 1_{\mathsf{A}}, \emptyset)$$

为一个代数，使得:

- K 是所有在 Φ 上的无歧义带权防护字符串集合构成的集合;
- B 是带权原子的清晰集集合（即所有原子集合的集合）;
- S 是带权原子的一致全域集集合;
- $X \cdot Y = (X \diamond Y)^{\Cup}$;
- $X^* = \bigCup_{n \geq 0} X^n$ （其中 X^n 使用 $\cdot$定义）;
- $^-$ 是 1_{A}上的补运算。

（将 $\diamond$ 通常地提升到带权守卫字符串集合，并不一定得到无歧义集合。）

定理 2。$\mathbf{T}^{\mathbf{G}} \cong$GT。

定义 11。在 GT 中，赋值称为规范赋值，当且仅当

- *if* $\mathsf{p} \in \mathsf{T}$, *then* $v(\mathsf{p}) = \{A \,\mathsf{p}\, B \mid A, B \in 1_{\mathsf{A}}\}$;
- *if* $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$, *then* $v(\mathsf{b}) = \{A \mid \neg\mathsf{b}$ *does not occur in* $A\}$.

VI. 使用克莱尼代数推理加权程序

利用带权与测试的克莱尼代数的（准）等式理论，我们可以在简单的代数框架中推理加权程序的等价性。

例 7。回顾滑雪租赁程序和例1。利用克莱尼代数（见 [9], 命题2.7），我们可以证明（1）等价于

$$\begin{array}{c}(\{\mathtt{neq0}\}\,\mathtt{sub1}\,\mathbf{one})^*\\ \big(\{\mathtt{neq0}\}\,\mathtt{sub1}\,\mathbf{skis}\,\mathtt{end}\,(\{\mathtt{neq0}\}\,\mathtt{sub1}\,\mathbf{one})^*\ \big)^*\\ \{\neg\mathtt{neq0}\}\end{array} \tag{2}$$

现在考虑以下方程:

$$\mathtt{sub1}^n\,\{\mathtt{neq0}\} = 0 \tag{3}$$

$$\mathtt{end}\,\{\mathtt{neq0}\} = 0 \tag{4}$$

根据方程中变量的预期含义，在滑雪租赁场景的一个版本中，行程长度以 n 天计，以下两点都对应合理的假设：如果从 n n 次中减去 1，那么测试 $n > 0$ 的计算结果为 False (3)；如果赋值 $n := 0$，那么测试 $n > 0$ 的计算结果为 False (4)。

令 $\gamma^{+n} := 1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^n$。可以证明，在每个满足 (3) 和 (4) 的 *-连续 KAWT 中，若 1 是 S 的最大元（例如，S 同构于热带半环的代数），程序 (2) 等价于

$$\begin{array}{c}(\{\mathtt{neq0}\}\,\mathtt{sub1}\,\mathbf{one})^{+n}\\ \big(1 + \{\mathtt{neq0}\}\,\mathtt{sub1}\,\mathbf{skis}\,\mathtt{end}\big)\{\neg\mathtt{neq0}\}\end{array} \tag{5}$$

因此，可以利用带权与测试的克莱尼代数证明，对于每个输入 n，程序 (2) 等价于一个不涉及 * 的更简单程序 (5)。所以，从某种意义上说，(5) 是有限的。

例8. 取 Φ = (A,T) 上的 GT，其中 A $=\{\{\mathtt{neq0}\},\{\neg\mathtt{neq0}\}\}$，T = {sub1,end}。取任意规范赋值，使得 v(一) $= \{A(1) \mid A \in 1_{\mathsf{A}}\} = \{\{\mathtt{neq0}\}\square, \{\neg\mathtt{neq0}\}\square\}$，并且 v(滑雪) $= \{A(y) \mid A \in 1_{\mathsf{A}}\} = \{\{\mathtt{neq0}\}\square^y, \{\neg\mathtt{neq0}\}\square^y\}$。那么，$v$ 将程序（5）映射为包含以下内容的带权防护字符串集合 X：

$$\begin{array}{c}\{\neg\mathtt{neq0}\}(0),\quad \{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\{\mathtt{neq0}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(y),\\ \{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\{\neg\mathtt{neq0}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(y),\\ \{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\{\neg\mathtt{neq0}\}(1),\\ \{\mathtt{neq0}\}\mathtt{sub1}\{\mathtt{neq0}\}\mathtt{sub1}\{\mathtt{neq0}\}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(1+y),\\ \{\mathtt{neq0}\}\mathtt{sub1}\{\mathtt{neq0}\}\mathtt{sub1}\{\neg\mathtt{neq0}\}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(1+y),\\ \vdots\\ \Big(\{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\Big)^n\{\neg\mathtt{neq0}\}(n),\\ \Big(\{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\Big)^n\{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\{\mathtt{neq0}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(n+y),\\ \Big(\{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\Big)^n\{\mathtt{neq0}\mathtt{sub1}\{\neg\mathtt{neq0}\mathtt{end}\{\neg\mathtt{neq0}\}(n+y)\end{array}$$

GT 中每个带权守卫字符串的集合 G 都定义了一个函数 ϑ_G，该函数从 1_{A} 映射到带权原子集合的集合，定义如下:

$$\vartheta_G(Y) = \{A(n) \mid \exists x(xA(n) \in Y \diamond G)\}^{\sqcup}.$$

因此，$\vartheta_G(Y)$ 是表示从 G 出发、以 Y 中某个原子为起点的最优执行轨迹的带权原子集合。若 G 有限，则显然可以计算 ϑ_G。

例如，$\vartheta_X(\{\neg\mathtt{neq0}\}) = \{\{\neg\mathtt{neq0}\}\}$（如果在满足 $n = 0$ 的状态下运行滑雪租赁程序，它会立即停止，不会累积任何权重），并且

$$\vartheta_X(\{\mathtt{neq0}\}) = \{\{\neg\mathtt{neq0}\}\big(\min(n,y)\big)\}.$$

也就是说，从满足 $n \neq 0$ 的状态开始运行 (5)，其最优运行的权重为 min(n, y)。这一结果符合直觉，也与使用最弱前置权重算子在 [3] 中进行的计算一致。

VII. 结论

我们引入了带权与测试的克莱尼代数，这是对带测试的克莱尼代数的一种扩展，适用于形式化讨论 [3] 中所述加权程序的简化版本。我们介绍了若干“具体的”KAWT 的构造，并通过一个示例展示了 KAWT 可用于推理加权程序的等价性和最优运行。

许多有趣的课题有待未来研究，包括研究自由带权与测试的 Kleene 代数、探讨可判定性和计算复杂度问题，以及将 [3] 中的最弱前置权重算子系统地纳入我们的框架。

参考文献

[1] K. R. Apt、F. S. de Boer 和 E.-R. Olderog。《顺序与并发程序验证》。计算机科学丛书。Springer，第 3 版，2009 年。[2] G. Barthe、J.-P. Katoen 和 A. Silva。《概率程序设计基础》。剑桥大学出版社，2020 年。[3] K. Batz、A. Gallus、B. L. Kaminski、J.-P. Katoen 和 T. Winkler。带权程序设计：一种用于指定数学模型的程序设计范式。《ACM 程序设计语言论文集》，6(OOPSLA1)，2022 年 4 月。[4] M. Droste、W. Kuich 和 H. Vogler（编）。《加权自动机手册》。Springer，2009 年。[5] M. J. Fischer 和 R. E. Ladner。正则程序的命题动态逻辑。《计算机与系统科学杂志》，18：194–211，1979 年。[6] L. Gomes、A. Madeira 和 L. S. Barbosa。推广 KAT 以验证带权计算。《计算机科学年刊》，29(2)：141–184，2019 年。[7] S. P. Gudder 和 R. H. Schelp。正交补与正交模偏序集的坐标化。《美国数学会会刊》，25(2)：229–237，1970 年。[8] D. Kozen。关于克莱尼代数与闭半环。载于 B. Rovan（编），《国际数学基础与计算机科学研讨会论文集》，第 26–47 页。Springer，1990 年。[9] D. Kozen。克莱尼代数与正则事件代数的完备性定理。《信息与计算》，110(2)：366–390，1994 年。[10] D. Kozen。带测试的克莱尼代数。《ACM 程序设计语言与系统汇刊》，19(3)：427–443，1997 年 5 月。[11] D. Kozen 和 F. Smith。带测试的 Kleene 代数：完备性与可判定性。载于 D. van Dalen 和 M. Bezem（编），《计算机科学逻辑》，第 244–259 页，柏林、海德堡，1997 年。Springer Berlin Heidelberg。[12] W. Kuich 和 A. Salomaa。《半环、自动机、语言》。EATCS 理论计算机科学专著第 5 卷。Springer，1986 年。[13] V. Pratt。关于 Floyd-Hoare 逻辑的语义考量。载于《第七届计算机科学基础年度研讨会论文集》，第 109–121 页。IEEE 计算机学会，1976 年。

附录

本附录收录了正文中陈述的一些技术性结果的证明，以及一个将在定理 1 的证明中用到的引理。

引理 3. 以下结论对每个带单位元的偏半群都成立：

1) $I(x)$ *only if* $D(x,x)$ *and* $x = xx$;
2) $I(x)$, $I(y)$ *and* $D(x,y)$ *only if* $I(xy)$.

证明。1) 对所有 x，存在 y，使得 $D(x,y)$ 且 $I(y)$。于是$x = xy$。但如果还有 $I(x)$，那么 $y = xy$。因此，$x = y$，所以$D(x,x)$ 且 $x = xx$。

2) 如果 $D(x,y)$ 且 $I(y)$，那么 $x = xy$。如果还有 $I(x)$，那么$I(xy)$。 □

定理 1. 如果 P 是一个带单位元的偏半群，且 S 是一个完备幂等半环，那么 $\mathbf{S}^{\mathbf{P}}$ 是一个 *-连续的带权与测试的克莱尼代数，其中

$$(W, \cdot, +, 1, 0) \cong \mathbf{S}\,.$$

证明。$(S^G, +, 0)$ 显然是一个交换幺半群。$(S^G, \cdot, 1)$ 是一个幺半群：

(i) $(\lambda_0 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2))(x) = \sum_{y,u} \Big\{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \sum_{z,w} \{ \lambda_1(z) \cdot \lambda_2(w) \mid u = zw \ \&\ D(z,w) \} \,\Big|\, x = yu \ \&\ D(y,u) \Big\} =$
$= \sum_{y,z,w} \{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} (\lambda_1(z) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(w)) \mid D(y,zw) \ \&\ D(z,w) \ \&\ x = y(zw) \}$
$= \sum_{y,z,w} \{ (\lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_1(z)) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(w) \mid D(y,zw) \ \&\ D(z,w) \ \&\ x = y(zw) \}$
$= \sum_{y,z,w} \{ (\lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_1(z)) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(w) \mid D(y,z) \ \&\ D(yz,w) \ \&\ x = (yz)w \}$
$= \sum_{y,z,v,w} \Big\{ \sum \{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_1(z) \,\big|\, v = yz \ \&\ D(y,z) \} \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(w) \,\Big|\, D(v,w) \ \&\ x = vw \Big\}$
$= ((\lambda_0 \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_2)(x)$.

(ii) $(\lambda \cdot 1)(x) = \sum_{y,z} \{ \lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} 1(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \}$
$= \sum_{y,z} \{ \lambda(y) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \ \&\ I(z) \}$
$= \sum_y \{ \lambda(y) \mid x = y \} = \lambda(x)$.
$((1 \cdot \lambda)(x) = \lambda(x)$ is established similarly.)

(i) 中的第四个等式由带单位元的偏半群的定义（前两个条件）推出。[2](ii) 中的第三个等式按如下方式利用带单位元的偏半群的定义证明。从左到右：若$D(y,z)$ 且 $I(z)$，则 $yz = y$；因此，若还有 $x = yz$，则 $x = y$。从右到左：对于所有 y，都存在 z，使得 $D(y,z)$ 且 $I(z)$，这意味着存在 z，使得 $D(y,z)$ 且 $I(z)$ 并且$yz = y$。因此，若 $x = y$，则存在 z，使得 $D(y,z)$、$I(z)$ 且 $x = yz$。

接下来我们证明 $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律：

(iii) $\big(\lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)\big)(x)$
$= \sum_{y,z} \big\{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} (\lambda_1 + \lambda_2)(z) \,\big|\, D(y,z) \ \&\ x = yz \big\}$
$= \sum_{y,z} \big\{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} (\lambda_1(z) +^{\mathbf{S}} \lambda_2(z)) \big| D(y,z) \ \&\ x = yz \big\}$
$= \sum_{y,z} \big\{ \big(\lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_1(z)\big) +^{\mathbf{S}} \big(\lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(z)\big) \big| D(y,z) \ \&\ x = yz \big\}$
$= \sum_{y,z} \{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_1(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \} +^{\mathbf{S}} \sum_{y,z} \{ \lambda_0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda_2(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \}$
$= (\lambda_0 \cdot \lambda_1)(x) +^{\mathbf{S}} (\lambda_0 \cdot \lambda_2)(x)$
$= \big((\lambda_0 \cdot \lambda_1) + (\lambda_0 \cdot \lambda_2)\big)(x)$
$(\big((\lambda_0 + \lambda_1) \cdot \lambda_2\big)(x) = \big((\lambda_0 \cdot \lambda_2) + (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\big)(x)$ is established similarly.)

要证明 0 是湮灭元，只需证明对于所有 $x \in G$，$(\lambda \cdot 0)(x) = 0^{\mathbf{S}} = (0 \cdot \lambda)(x)$：

(iv) $(\lambda \cdot 0)(x) = \sum_{y,z} \{ \lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} 0(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \}$
$= 0^{\mathbf{S}} =$
$\sum_{y,z} \{ 0(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \} = (0 \cdot \lambda)(x)$.

这证明了 $\mathbf{S}^{\mathbf{P}}$ 是一个幂等半环。为了证明它也是一个 *- 连续的克莱尼代数，只需证明它满足 *- 连续性条件：

$$\delta \lambda^* \theta = \sum_{n \geq 0} \delta \lambda^n \theta \tag{6}$$

对所有 δ、λ、$\theta \in S^G$ 均成立。证明 Kleene 星（准）方程可由 *-连续性推出，是一个简单的练习。推理如下：

$$\begin{aligned}
(\delta \lambda^* \theta)(x) &= \sum_{y,z} \Big\{ \delta(y) \cdot^{\mathbf{S}} (\lambda^* \theta)(z) \,\Big|\, D(y,z) \ \&\ yz = x \Big\} \\
&= \sum_{y,z,u,v} \Big\{ \delta(y) \cdot^{\mathbf{S}} \big(\lambda^*(u) \cdot^{\mathbf{S}} \theta(v)\big) \,\Big|\, D(y,z) \ \&\ yz = x \ \&\ D(u,v) \ \&\ uv = z \Big\} \\
&= \sum_{y,z,u,v} \Big\{ \delta(y) \cdot^{\mathbf{S}} \Big(\big(\sum_{n \geq 0} \lambda^n(u) \big) \cdot^{\mathbf{S}} \theta(v) \Big) \,\Big|\, D(y,z) \ \&\ yz = x \ \&\ D(u,v) \ \&\ uv = z \Big\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{y,z,u,v} \Big\{ \delta(y) \cdot^{\mathbf{S}} \Big(\lambda^n(u) \cdot^{\mathbf{S}} \theta(v) \Big) \,\Big|\, D(y,z) \ \&\ yz = x \ \&\ D(u,v) \ \&\ uv = z \Big\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{y,z,u,v} \Big\{ \Big(\delta(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda^n(u) \Big) \cdot^{\mathbf{S}} \theta(v) \,\Big|\, D(y,u) \ \&\ yu = w \ \&\ D(w,v) \ \&\ wv = x \Big\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{w,v} \Big\{ (\delta \lambda^n)(w) \cdot^{\mathbf{S}} \theta(v) \,\Big|\, D(w,v) \ \&\ wv = x \Big\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \Big\{ (\delta \lambda^n \theta)(x) \Big\} = \Big(\sum_{n \geq 0} \delta \lambda^n \theta \Big)(x)
\end{aligned}$$

第四个等式成立，因为 S 是一个完备半环。第五个等式成立，依据是带单位元的偏半群的定义（前两个条件）。

因此，$\mathbf{S}^{\mathbf{P}}$ 是一个 *连续的克莱尼代数。要证明它是一个带测试的 *连续克莱尼代数，我们必须证明 B 是一个布尔代数，并且 $^-$ 是 B上的补运算。但这可由定义直接得出：B 可以等价地看作 I 的幂集（因此显然是一个布尔

[2]值得注意的是，使用 [7] 对偏半群给出的较弱定义无法证明这个等式，因此我们采用了更强的定义。

代数），而 $^-$ 显然被定义为B上的补运算。

为了证明 $\mathsf{S}^{\mathbf{P}}$ 是带权与测试的克莱尼代数，我们必须证明 W 在半环运算 $\cdot$和 $+$下封闭，并且 0、$1 \in W$。W是这样一组函数：它们将 $0^{\mathbf{S}}$ 赋给 I之外的元素，并且在 I上为常数。我们将这类函数的集合记为 C。1 和 0 都属于 C，并且显然 C 在 $+$下封闭。为了证明 C 在 $\cdot$ 下也封闭，我们作如下推理。假设 λ、$\lambda' \in C$。首先，我们证明若 $x \in I$，则

$$(\lambda \cdot \lambda')(x) = \lambda(x) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(x) \tag{7}$$

确实，

$$\sum_{y,z} \{\lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz\} = \lambda(x) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(x)$$

因为

$$\sum_{y,z} \{\lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz\} = \sum_{y,z} \{\lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \ \&\ I(y) \ \&\ I(z)\}$$

（我们可以忽略 y、$z \notin I$，因为 λ、λ'会将它们映射到 $0^{\mathbf{S}}$）并且

$$\sum_{y,z} \{\lambda(y) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(z) \mid D(y,z) \ \&\ x = yz \ \&\ I(y) \ \&\ I(z)\} = \lambda(x) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(x).$$

后者成立，因为求和所遍历的集合至少包含 $\lambda(x) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(x)$（引理 3 的第 1 部分），且至多包含 $\lambda(x) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(x)$，因为 λ、λ' 在 I 上为常数。由 (7) 可知，$\lambda \cdot \lambda'$ 在 I 上为常数，因为 λ 和 λ' 在 I上都为常数。

其次，我们证明 $(\lambda \cdot \lambda')(x) = 0^{\mathbf{S}}$ 当且仅当 $x \notin I$。这由引理 3 的第 2 部分得出：若 $x \notin I$，则 $x = yz$ 且 $D(y,z)$ 仅当 $y \notin I$ 或 $z \notin I$。因此，若 $x \notin I$，则 $(\lambda \cdot^{\mathbf{S}} \lambda')(x) = 0^{\mathbf{S}}$。所以，$(\lambda \cdot \lambda') \in C$ 当且仅当 $\lambda, \lambda' \in C$。

接下来要证明 $(W, \cdot, +, 1, 0)$ 与 S 同构。任取一个 $i \in I$（注意，在所有含单位元的偏半群中，$I \neq \emptyset$），并定义 $\phi\colon W \to \mathsf{S}$：

$$\phi(\lambda) = \lambda(i)$$

映射 ϕ 是一个双射同态。同态：$\phi(1) = 1(i) = 1^{\mathbf{S}}$；$\phi(0) = 0(i) = 0^{\mathbf{S}}$；$\phi(\lambda + \lambda') = (\lambda + \lambda')(i) = \lambda(i) +^{\mathbf{S}} \lambda'(i) = \phi(\lambda) +^{\mathbf{S}} \phi(\lambda')$；$\phi(\lambda \cdot \lambda') = (\lambda \cdot \lambda')(i) = \lambda(i) \cdot^{\mathbf{S}} \lambda'(i)$ 根据 (7) $= \phi(\lambda) \cdot^{\mathbf{S}} \phi(\lambda')$。满射：$W$是所有在 I 上为常值、并将 $0^{\mathbf{S}}$ 赋给元素 $x \notin I$的函数所构成的集合。单射：若 $\phi(\lambda) = \phi(\lambda')$，则 $\lambda(i) = \lambda'(i)$，进而 $\lambda = \lambda'$，因为假设 λ 和 λ' 在 I 上为常值。 □

定理 2. $\mathsf{T}^{\mathbf{G}} \cong \mathsf{GT}$。

证明。定义 $\tau\colon (\mathbb{N}^\infty)^{GS} \to K^{\mathbf{GT}}$，使得

$$\tau(\lambda) = \{s(n) \mid \lambda(s) = n \ \&\ n \neq \infty\}.$$

函数 τ 显然是 $(\mathbb{N}^\infty)^{GS}$ 与$K^{\mathbf{GT}}$之间的双射。此外，

(i) $B^{\mathbf{GT}} = \{\tau(\lambda) \mid \lambda \in B\}$，因为 $\lambda \in B$ 当且仅当 $\lambda\colon GT \to \{0^{\mathbb{N}}, \infty\}$，且 $\lambda(s) = 0^{\mathbb{N}}$ 仅当 $s \in 1_{\mathsf{A}}$ 当且仅当 $\tau(\lambda)$ 是带权原子的清晰集；(ii) $S^{\mathbf{GT}} = \{\tau(\lambda) \mid \lambda \in S\}$，因为 $\lambda \in S$ 当且仅当 $\lambda(s) = \infty$ 对$s \notin 1_{\mathsf{A}}$，且 λ 在 1_{A} 上为常数，当且仅当 $\tau(\lambda)$ 是带权原子的均匀集。

接下来我们需要证明，τ 是一个同态：

(iii) $\tau(1) = \{s(0) \mid s \in 1_{\mathsf{A}}\} = 1^{\mathbf{GT}}$；(iv) $\tau(0) = \emptyset = 0^{\mathbf{GT}}$；(v) $s(n) \in \tau(\lambda \cdot \lambda') \iff (\lambda \cdot \lambda')(s) = n \neq \infty \iff n \neq \infty$，且 $n = \min\{\lambda(t) +^{\mathbb{N}^\infty} \lambda'(u)\}$ 对于 $t, u \in GS$，满足 $t \diamond u = s \iff \exists t, u \in GS$：$s = t \diamond u$，且 $n = \lambda(t) +^{\mathbb{N}^\infty} \lambda'(u)$，且 $\lambda(t) \neq \infty$，且 $\lambda'(u) \neq \infty$，且$\forall t', u' \in GS(s = t' \diamond u' \to n \leq^{\mathbb{N}^\infty} \lambda(t') + \lambda'(u')) \iff s(n) \in \tau(\lambda) \diamond \tau(\lambda')$，且$\forall t', u' \in GS(s = t' \diamond u' \to n \leq^{\mathbb{N}^\infty} \lambda(t') + \lambda'(u')) \iff s(n) \in \tau(\lambda) \cdot^{\mathbf{GT}} \tau(\lambda')$；(vi) $s(n) \in \tau(\lambda + \lambda') \iff (\lambda + \lambda')(s) = n \neq \infty \iff n = \min\{\lambda(s), \lambda'(s)\}$，且 $n \neq \infty \iff s(n) \in \tau(\lambda) \cup \tau(\lambda')$，且$\forall m \in \mathbb{N}(s(m) \in \tau(\lambda) \cup \tau(\lambda') \to n \leq^{\mathbb{N}^\infty} m) \iff s(n) \in \tau(\lambda) \Cup \tau(\lambda')$

(vii) $s(n) \in \tau(\lambda^*) \iff n = \text{最小值}_{m \in \mathbb{N}}\{\lambda^m(s)\}$ $\iff \exists m \in \mathbb{N}\colon n = (\lambda \cdot \ldots \cdot \lambda)(s)$ 和 $\underbrace{\qquad}_{m}$ 次 $\forall k\big(n \leq^{\mathbb{N}} (\lambda \cdot \ldots \cdot \lambda)\underbrace{\qquad}_{k}(s)\big)$次 $\iff s(n) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tau(\lambda)^m$ 和 $n = \min\{n' \mid s\ n' \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tau\ \lambda^k\}$ $\iff s\ n$ 最小 $(\ )(\ )(\ ) \in \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tau(\ )^m\Big)^{\Cup} = \Cup_{m \in \mathbb{N}} \tau(\ )^m$ $\iff s\ n$ λ $(\ ) \in (\tau(\ )^*)^{\mathbf{GT}}$；(viii) 对于 $\lambda \in B$：$s(0^{\mathbb{N}}) \in \tau(\lambda) \iff \overline{\lambda}(s) = 0^{\mathbb{N}} \iff \lambda(s) = \infty \iff s(0^{\mathbb{N}}) \notin \tau(\lambda) \iff s(0^{\mathbb{N}}) \in \tau(\lambda)$。 □

注意，在证明中我们无需假设 GT ∈KAWT，但这可由定理 2 得出。

例 7. 若 K ∈ KAWT 满足 (3) 和 (4) 在 K 中成立，且 1 是 $S^{\mathbf{K}}$ 的最大元，则 (2) 等价于 (5)。

证明。根据 *-连续性和 (4),

$$\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\textbf{skis}\,\texttt{end}(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\textbf{one})^*$$

等价于

$$\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\textbf{skis}\,\texttt{end}$$

因此，(2) 式的第二行等价于

$$1 + \{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\textbf{skis}\,\texttt{end}.$$

根据 *-连续性,

$$(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\mathbf{one})^*$$

等价于

$$\sum_{n\geq 0}\left(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\mathbf{one}\right)^n \tag{8}$$

然而，由于 {neq0},**其中** $\leq$ 1,

$$\left(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\mathbf{one}\right)^{n+1}$$

小于或等于

$$\texttt{sub1}^n\left(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\mathbf{one}\right),$$

根据（3），其等于 0。因此，（8）等价于

$$\left(\{\texttt{neq0}\}\,\texttt{sub1}\,\mathbf{one}\right)^{+n}.$$

□