arXiv:2303.00324v1 [math.KT] 1 Mar 2023

Hvedri Inassaridze

1. TITLE

Γ-环的代数 K-函子

2. ABSTRACT

本文尝试将我们在同调代数中研究群作用的方法推广到代数 K 理论，这种方法可称为 Γ-代数 K 理论导论。本文介绍并研究了 Γ-环的 Milnor 代数 K-理论和 Swan 代数 K-函子。尤其是，与符号群相关的 Matsumoto 猜想，以及与 Witt 代数和 Chow 群相关的 Milnor 猜想，均得到了推广和证明。

3. INTRODUCTION

我们继续研究我们在同调代数中处理群作用的方法，将其应用于代数K理论的情形；这项研究始于 [8]，并在 [9,10]中得到延续。我们研究群和环的同调性质的方法，其原创性在于定义了一种新的、自然且出人意料的群 Γ 作用：它作用于分别定义群 G 的经典同调和环 R 的经典同调的经典链复形上，并且该作用分别由其在群 G 和环R 上的给定作用所诱导。通过取经典链复形在 Γ 的这一作用下与系数群的张量积的同调群，我们定义了Γ-群和 Γ-环的新同调群与上同调群，称为 Γ-等变（上）同调。这些新工具使我们能够将群和环的重要同调性质推广到 Γ-群和 Γ-环的情形，从而开辟了同调代数的一个新方向，我们称之为 Γ-同调代数。近期开展的对等变上同调维数的研究，与 Γ-同调代数 [3,4]密切相关。

我们试图研究当离散群作用于基本环时，群作用对代数K理论基础的影响。 [13,2,16,17]

本文中将使用的一些记号：

ΓG 表示由元素集合 $^{\gamma}gg^{-1}$、 $g \in G$、 $\gamma \in \Gamma$ 生成的 G 的正规子群。商群 $G/\Gamma G$ 记作 G_{Γ}。

$\Gamma - [G,G]$ 表示 Γ-群 G 的子群，该子群由换位子子群 $[G,G]$ 以及形如 ${}^{\gamma}gg^{-1}$、 $g \in G$、$\gamma \in \Gamma$ 的元素生成。它称为群 G 的 Γ-换位子。

G_{Γ}^{ab}表示群 G_{Γ}的阿贝尔化。

对于增广单纯群 G_*^+： $G_* \xrightarrow{\tau} G_{-1}$，使用记号$\pi_{-1}(G_*^+)$，其等于 $Coker\tau$ 。

$\mathbf{G}^{\Gamma}$ 和 $\mathbf{R}^{\Gamma}$ 分别表示这样的范畴：其对象分别是群和环，且固定群 Γ 作用于其上，分别称为 Γ-群和Γ-环；态射则是与 Γ的作用相容的同态。

4. Preliminaries

我们给出一些重要的含幺 Γ-环的例子。

设 A 是任意含幺环， Γ 是一个群。如果给定群同态 $\Gamma \to Aut(A)$, 则称 A 是一个 Γ-环，或称 Γ 作用于 A。

仅具有恒等自同构的环：交换环整数环 Z、有理数域 Q、实数域 R、$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$、$\mathbf{Z}/(p)$（在有理素数 p 处局部化的整数环），以及 $\mathbf{Q}_p$ （p-进数环）。

域是 Γ-环的重要例子。例如，复数域 C 有两个自同构，即恒等自同构和将 a + bi 映为 a - bi 的复共轭；素数幂 F_q 的域 $q = p^n$ 具有 Frobenius 自同构 $\phi: x \to x^p$，其自同构群是由 ϕ生成的阶为 n的循环群；自同构群阶为 2 的二次域 Q(2)；域扩张的伽罗瓦群。

具有非平凡可逆元群 A^* 的非交换环 A（也称为单位元）（例如四元数代数）。于是A^* 作用于 A，并将 $x \to axa^-1$、 $x \in A$、 $a \in A^*$映为相应元素。

设 RA 是一个 R-代数，其中 R 是含幺交换环。如果群 Γ 作用于 RA，即它作用于 R 和 A，并且有 ${}^{\gamma}(ra) = {}^{\gamma}(r){}^{\gamma}(a)$。例如，对称群 S_n 作用于多项式 R-代数 $R[x_1, ..., x_n]$，在 R 上平凡作用，并在 $Z[x_1, ..., x_n]$ 上自然作用。

设 R(G) 为一个群环，且 Γ 是作用于群 G 和环 R 的群。那么 R(G) 成为一个 Γ-环，其作用为 ${}^{\gamma}(rg) = {}^{\gamma}r{}^{\gamma}g, r \in R, g \in G, \gamma \in \Gamma.$

现在，我们回顾一下 [8,10] 中给出的某些定义和命题，稍后将会用到。

Γ-群的任意正合列 E

$$E : 1 \to A \to B \xrightarrow{\tau} G \to 1 \tag{4.1}$$

称为 Γ群 G 被 Γ群 A的 Γ扩张。扩张E 是一个带有 Γ截面映射的扩张，若存在映射 β： $G \to X$ 使得 $\tau\beta = 1_G$，并且与 Γ的作用相容。此外，若 β 是同态，则扩张 E 称为分裂扩张。

Γ-等变 G-模 A 是一个配备了 Γ-模结构的 G-模，并且 G 和 Γ 的作用通过以下等式相互关联

$$^{\sigma}({}^{g}a) = {}^{\sigma}\, g({}^{\sigma}a)$$

对于 $g \in G$、 $\sigma \in \Gamma$、$a \in A$。

Γ-等变 G-模的范畴等价于 $G \rtimes \Gamma$-模的范畴，其中 $G \rtimes \Gamma$ 是 G 与 Γ的半直积。

若 E 是一个带有 Γ截面映射的扩张，且 A是一个 Γ-等变G-模，则称其为 G 被 A的 Γ-等变扩张。此外，若 X 和 G是 Γ-等变 G-模，则称其为Γ-等变 G-模的正合序列。

若 Γ-等变 G-模 F 是一个以 Γ-集为基的自由 G-模，则称其为相对自由 $G \rtimes \Gamma$-模；相对投射的 Γ-等变 G-模是相对自由 Γ-等变 G-模的一个缩回。

相对投射 Γ-等变 G-模的类 $\mathcal{P}$ ，相对于 Γ-等变 G-模的真短正合序列构成一个投射类。

为了对集合 $E^1_\Gamma(G, A)$（即 Γ-等变的 G 被 A 扩张的等价类）进行上同调描述，在 Γ-等变 G-模范畴中，引入了 Γ-群的 Γ-等变同调与上同调，作为相对的 $Tor^{\mathcal{P}}_n$ 和 $Ext^n_{\mathcal{P}}, n \geq 0$；也就是说， Γ-群的 Γ-等变同调与上同调定义如下

$$H^{\Gamma}_n(G, A) = Tor^{\mathcal{P}}_n(\mathbb{Z}, A), H^n_{\Gamma}(G, A) = Ext^n_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}, A), n \geq 0,$$

其中，函子 $\bigotimes$ 和 Hom 是在环 $\mathbb{Z}(G \rtimes \Gamma)$ 上取值的，而群 G 和 Γ 在整数阿贝尔群 $\mathbb{Z}$ 上平凡作用。这种上同调是 Hochschild 和 Adamson 意义下的相对群上同调 [6,1]。

如果 Γ-群是一个以 Γ-集为基的自由群，则称其为 Γ-自由。

任意由 Γ-群 G 生成的自由群 $F(G)$，通过 Γ 的如下作用

$^{\gamma}|\, g \,| = |^{\gamma}\, g \,\rangle$ $g \in G$、 $\gamma \in \Gamma$，都将成为一个 Γ-自由群。其

定义性质是：带有基 E 的 Γ-自由群 F 中，任意 Γ-映射 $E \xrightarrow{f} G$ 到一个 Γ-群 G，都能唯一延拓为一个 Γ-同态 $F \xrightarrow{f'} G$。

令 $\mathbb{F}$ 为范畴 $\mathbf{G}^{\Gamma}$ 中 Γ-自由群的投射类。

存在同构

$$H_n^{\Gamma}(G,A) \cong L_{n-1}^{\mathbb{F}}(I(G) \otimes_{G \ltimes \Gamma} A), H_{\Gamma}^n(G,A) \cong R_{\mathbb{F}}^{n-1} Der_{\Gamma}(G,A)$$

对于 $n \geq 2$，其中 I(G) 是 Γ-等变 G-模的自然同态$\mathbb{Z}(G) \to \mathbb{Z}$ 的核，$Der(G,A)$ 是 Γ-导子的群，$L_{n-1}^{\mathbb{F}}$ 和 $\mathbf{R}_{\mathbb{F}}^{n-1}$ 分别表示相对于投射类 $\mathbb{F}$ 的左、右导出函子。

Let

$$1 \to A \to B \xrightarrow{\tau} G \to 1$$

是 Γ-群的短正合列，具有 Γ-截面映射，并且 $\alpha: P \to B$ 是群 B 的一个 Γ-投射表示。于是存在一个正合列

$$0 \to V \to H_2^{\Gamma}(B) \to H_2^{\Gamma}(G) \to A/[B,A]_{\Gamma} \to H_1^{\Gamma}(B) \to H_1^{\Gamma}(G) \to 0,$$

其中 V 是由 α 诱导的 Γ-同态 $[P,S]_{\Gamma}/[P,R]_{\Gamma} \to [B,A]_{\Gamma}$ 的核，$\mathbf{R} = \mathbf{Ker}\ \alpha$，且 $\mathbf{S} = \mathbf{Ker}\ \tau\alpha$。

如果 G 是一个 Γ-群，那么

(1) $H_1^{\Gamma}(G,A) = G/[G,G]_{\Gamma} \otimes A$、$G$ 和 Γ 在 A上作平凡作用。

(2) $H_2^{\Gamma}(G)$ 同构于群 $(R \cap [P,P]_{\Gamma})/[P,R]_{\Gamma}$，其中$R = Ker\alpha$ 和 $\alpha: P \to G$ 是 Γ- G 的投射表示（群的 Γ-等变同调的 Hopf 公式）。

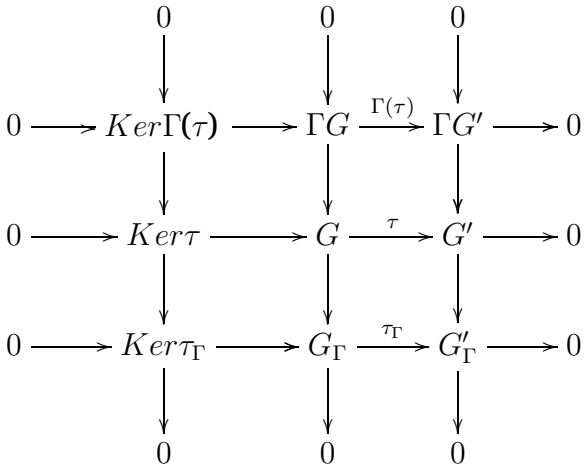
5. Γ-algebraic K-functors

命题 5.1. 设 $\tau: G \to G'$ 是Γ-群的满同态。则有如下群的正合列：

$$0 \to Ker\Gamma(\tau)/\Gamma Ker\tau \to (Ker\tau)_{\Gamma} \to G_{\Gamma} \to G'_{\Gamma} \to 0.$$

证明。考虑以下正合列与正合行构成的交换图：

(5.1)



可得 $\Gamma Ker\tau \subseteq Ker\Gamma(\tau)$、同构 $Ker\tau/Ker\Gamma(\tau) \cong Ker\tau_\Gamma$ 以及满射 $Ker\tau/\Gamma Ker\tau \to Ker\tau/Ker\Gamma(\tau)$，由此可推出正合列 $e \to Ker\Gamma(\tau)/\Gamma Ker\tau \to (Ker\tau)_\Gamma \to Ker\tau_\Gamma \to e.$

根据图 5.1，我们最终得到了所需的正合列。□

推论 5.2. 若 $G \xrightarrow{\alpha} G' \xrightarrow{\beta} G'' \to e$ 是 Γ-群的正合列，则序列 $G_\Gamma \xrightarrow{\alpha_\Gamma} G'_\Gamma \xrightarrow{\beta_\Gamma} G''_\Gamma \to e$ 是正合的。

考虑到满射 $G_\Gamma \to (Ker\beta)_\Gamma$，可由命题 5.1 立即得出。

之后我们将需要以下与 Γ-群的正合列相关的公式。设 G 是一个 Γ-群，H 是它的正规 Γ-子群。考虑以下 Γ-群的正合列：$e \to H \xrightarrow{\sigma} G \to G/H \to e$。它诱导出短正合列：$(H)_\Gamma \xrightarrow{\sigma_\Gamma} (G)_\Gamma \to (G/H)_\Gamma \to e$，从而得到同构 $Coker\sigma_\Gamma \cong (G/H)_\Gamma$。另一方面，有等式 $Coker\sigma_\Gamma = G/H \cdot \Gamma G$，最终得到所需的公式

$$(G/H)_\Gamma = G/(H \cdot \Gamma G).$$

现在，我们将定义代数 K-函子：设环 A 含有单位元，群 Γ 作用于其上，则称其为 Γ-环。

容易验证，这个作用在 $n \times n$ 上的 n 阶一般群 $GL_n(A)$（由 $^\gamma \| a_{ij} \| = \| ^\gamma a_{ij} \|$ 给出）上诱导出相应的作用，而在 A 上的初等矩阵 $n \times n$ - $e_{ij}(a)$ $i, j \le n, a \in A$ 的 n 阶初等群 $E_n(A)$ 成为 $GL_n(A)$ 的一个 Γ-子群。因此，群 Γ 在群 $K_1(n, A) = GL_n(A)/E_n(A)$ 上有一个自然作用。

定义 5.3. 对于含幺环 A，非稳定的 Γ -代数 K-函子 $K_1^\Gamma(n, A)$ 定义为 $(K_1(n, A))_\Gamma$。

考虑正合列 $e \to E_n(A) \xrightarrow{\nu_n} GL_n(A) \to K_1(n, A) \to 0$。根据推论 4.2，它导出正合列$e \to (E_n(A))_\Gamma \to (GL_n(A))_\Gamma \to (K_1(n, A))_\Gamma \to 0$。取归纳极限，$GL(A) = (GL_n(A))_{n\to\infty}$，$E(A) = (E_n(A))_{n\to\infty}$，$K_1(A) = (K_1(n, A))_{n\to\infty}$，由此分别得到 Γ 在 $GL(A)$、$E(A)$ 和 $K_1(A)$ 上的作用，以及同构 $(GL(A))_\Gamma \approx ((GL_n(A))_\Gamma)_{n\to\infty}$、$(E(A))_\Gamma \approx ((E_n(A))_\Gamma)_{n\to\infty}$、$(K_1(A))_\Gamma \approx ((K_1(n, A))_\Gamma)_{n\to\infty}$。最后，我们得到以下正合列 $(E(A))_\Gamma \xrightarrow{\nu_\Gamma} (GL(A))_\Gamma \to K_1^\Gamma(A) \to 0$。

定义 5.4. 对于含幺环 A，Γ -代数 K-函子$K_1^\Gamma(A)$ 定义为 $(K_1(A))_\Gamma$。

One has isomorphisms $K_1^\Gamma(A) \cong GL(A)/(E(A)\cdot\Gamma GL(A)) \cong H_1^\Gamma(GL(A))$.

设A Γ 是一个含幺交换环，* 是其可逆元乘法子群。存在如下自然分裂的正合列

$$e \to SL(A) \to GL(A) \xrightarrow{det} A^* \to 0,$$

其中 det 表示行列式映射，它是一个 Γ-同态；SL(A) 是 det 的核，而分裂映射 $A^* \to GL(A)$ 也是一个 Γ-同态。

这个正合列诱导出如下 Γ-群的分裂正合列，

$$0 \to SL(A)/E(A) \to K_1(A) \to A^* \to 0$$

以及 Γ-群的同构 $K_1(A) \xrightarrow{\simeq} SL(A)/E(A) \oplus A^*$，其中$\Gamma$在右侧逐分量作用。

最后，我们得到如下结果

命题 5.5. 若 A 是一个交换含单位元的 Γ-环，则存在一个同构

$$K_1^\Gamma(A) \approx (SL(A)/E(A))_\Gamma \oplus (A^*)_\Gamma \cong (SL(A)/(E(A)\cdot\Gamma SL(A))) \oplus (A^*)_\Gamma,$$

and $K_1^\Gamma(F) = F_\Gamma^*$ *for a field* F.

例如，若考虑阶为 2 的循环群 Z_2 对复数域 C 的非平凡作用，则 $K_1^{\mathbb{Z}_2}(C) = C^*/Z_2C^*$，而子群 Z_2C^* 由元素 $(a - bi)(a + bi)^{-1}$，$a + bi \neq 0$ 生成。

令 $St_n(A)$ 为环 A 上的第 n 个 Steinberg 群，其生成元为 $x_{ij}^n(a)$ 和 $i,j \leq n$, $a,b \in A$，满足关系

$x_{ij}^n(a).x_{ij}^n(b) = x_{ij}^n(a+b)$ i， $j \leq n$，$[x_{ij}^n(a)$ $.x_{kl}^n(b)] = 1$， $i \neq l$， $k \neq j$，$[x_{ij}^n(a).x_{jk}^n(b)$ $] = x_{ik}^n(ab)$ $i \neq k$.

给定的 Γ 在 A 上的作用，在第 n 个Steinberg群 $St_n(A)$上诱导出如下作用： ${}^{\gamma}(x_{ij}^n(a)) = x_{ij}^n({}^{\gamma}a)$，该作用与其定义关系相容。

取归纳极限， $St(A) = (St_n(A))_{n\to\infty}$，可得到 Γ 在 $St(A)$上的作用，以及同构 $(St(A))_\Gamma \approx ((St_n(A))_\Gamma)_{n\to\infty}$。

显然，同态 $St_n(A) \xrightarrow{\phi_n} E_n(A)$ 将$x_{ij}^n(a)$ to $e_{ij}^n(a)$，是 Γ-群的同态。并且 $K_2(n,A)$ 是 $St_n(A)$ 的Γ-子群。

因此，众所周知的正合列 $0 \to K_2(n,A) \to St_n(A) \to E_n$ A $\to 0$ 导出正合列

$(K_2(n,A))_\Gamma \to (St_n(A))_\Gamma \to (E_n(A))_\Gamma \to 0.$

取归纳极限后，我们最终得到以下正合列

$(K_2(A))_\Gamma \to (St(A))_\Gamma \xrightarrow{\phi_\Gamma} (E(A))_\Gamma \to 0.$

定义 5.6. 对于含幺环 A， Γ -代数 K-函子$K_2^\Gamma(A)$ 定义为 $Ker\phi_\Gamma$。

容易验证，存在自然满射 $(K_2(A))_\Gamma \to K_2^\Gamma(A)$，并且等式 $\Gamma(K_2(A)) = K_2(A)/K_2(A) \cap \Gamma(St(A))$ 成立。

由此立即可得，对于有限域 F， $K_2^\Gamma(F) = 0$。

设 A 为含幺环， $Sym(A)$ 为环A 的符号群，由元素 $\{u,v\}$、 u、$v \in A^*$ 生成，并满足以下关系

(S_0) $\langle u、 1-u\rangle = 1$、 $u \neq 1$、 $1-u \in A^*$,

(S_1) $\langle uu'、 v\rangle = \langle u、 v\rangle\langle u'、 v\rangle$， (S_2) $\langle u、$ $vv'\rangle = \langle u、 v\rangle\langle u、 v'\rangle$。

其中， A^* 表示环 A [5]的可逆元所构成的乘法群。根据松本定理，当 A 是域 [11]时，群 $Sym(A)$ 和$K_2(A)$ 同构。

如果 A 是一个 Γ-环，则 Γ 的作用会在群 $Sym(A)$ 上诱导出一个自然作用，其定义为 ${}^{\gamma}\langle u、 v\rangle = \langle {}^{\gamma}u、 {}^{\gamma}v\rangle$、 u、 $v \in A^\star$。 Γ-等变符号群 $Sym^\Gamma(A)$ 定义为 $Sym^\Gamma(A)$ $=(Sym(A))_\Gamma$。

特别地，如果 Γ 是 A的可逆元群 A^*，那么 A^* 通过共轭作用于 A，从而在 $Sym(A)$上诱导出一个作用，其定义为 ${}^{\gamma}\langle u、 v\rangle = \langle \gamma u\gamma^{-1}、 \gamma v\gamma^{-1}\rangle$、 γ、 u、 $v \in A^\star$。由此得到 A^*-等变符号群 $Sym^{A^*}(A)$ $=(Sym(A))_{A^*}$。

现在给出关于 Γ 域的松本定理。即，

定理 5.7。如果 F 是一个 Γ 域，那么序列

$$0 \to Ker\Gamma(\phi)/\Gamma Ker(\phi) \to Sym^{\Gamma}(F) \to K_2^{\Gamma}(F) \to 0, \tag{5.2}$$

是正合的，其中 ϕ 表示典范满射 $St(F) \to E(F)$。

$Proof$。由此可见，群 Γ 在域 F 上的作用诱导出其在 $Sym(A)$ 上的作用，也诱导出其在 Steinberg 群 $St(F)$ 的子群 $K_2(F)$ 上的作用。容易验证，Matsumoto 同构 $Sym(F) \cong K_2(F)$ 与 Γ 的作用相容。因此，这意味着同构 $(Sym(F))_{\Gamma} \cong (K_2(F))_{\Gamma}$。接下来只需对同态 ϕ 应用命题 5.1。证毕。

设 A 是一个非交换局部环，使得 $A/Rad(A) \neq F_2$。将 A 视为一个 Γ-环，其中 Γ 是单位元群 A^*，它通过共轭作用于 A。

存在正合列 [5,10]

$$0 \to K_2(A) \to U(A) \xrightarrow{\tau} [A^*, A^*] \to e,$$

其中，群 $U(A)$ 由元素 $\langle u, v\rangle, u, v \in A^*$ 生成，并满足以下关系

(U_0) $\langle u, 1-u\rangle = 1, u \neq 1, 1-u \in A^*$, (U_1) $\langle uv, w\rangle = {}^u\langle v, w\rangle\langle u, w\rangle$, (U_2) $\langle u, vw\rangle\langle v, wu\rangle\langle w, uv\rangle = 1$, 以及 ${}^u\langle v, w\rangle = \langle uvu^{-1}, uwu^{-1}\rangle$ [5]。

非交换局部Γ-环的松本定理推广。

定理 5.8. 若 A 是满足 $A/Rad(A) \neq F_2$ 的非交换局部 A^*-环，则存在正合列

$$0 \to Ker\Gamma(\tau)/\Gamma(K_2(A)) \to (K_2(A))_{A^*} \to Sym^{A^*}(A) \to [A^*, A^*]/\Gamma([A^*, A^*]) \to 0,$$

其中 A^* 是 A 的单位元群，它通过共轭作用于 A。

$Proof$。容易验证，群 $U(A)$ 关于作用 ${}^{\gamma}\langle v, w\rangle = \langle \gamma v\gamma^{-1}, \gamma w\gamma^{-1}\rangle$ 成为 A^*-群；由[5,10] 的结果，存在一个满射 A^*-同态 $U(A) \to Sym(A)$。此外，已证明群 $(Sym(A))_{A\star}$ 是阿贝尔群，且同构于 $(U(A))_{A^\star}$。由此得到正合列 $(K_2(A))_{\Gamma} \to (U(A))_{\Gamma} \xrightarrow{\tau_{\Gamma}} [A^*, A^*]/\Gamma([A^*, A^*])$。再次对同态 τ 应用命题 5.1，即可得到所需的正合列。

定义 5.9. 设 A 为任意范畴。若对于 A 中任意一对对象 (A,B)，相应的态射集合 H(A,B) 都是一个 Γ-集，且对任意 $f: A \to B$，则称群 Γ 作用于 A。

且 g: $B \to C$满足以下等式: $\gamma(gf) = \gamma(g)\gamma(f)$, 并且$\gamma(1_A) = 1_A$ 对范畴 A 的任意单位态射 1_A : $A \to A$ 以及任意元素 $\gamma \in \Gamma$都成立。该范畴记作 $\mathbf{A}^\Gamma$, 称为Γ-范畴。

例子。

$\mathcal{G}r^\Gamma$ 范畴中的 Γ-群, 是指群 Γ 作用其上的群所构成的范畴。

$\mathcal{R}^\Gamma$ 范畴中的 Γ-环, 是指群 Γ 作用其上的环所构成的范畴。

定义 5.10. 若 T 是从范畴 A 到群的范畴$\mathcal{G}r$ 的协变函子, 且对于 A 中任意态射 f 以及 Γ中的任意元素 γ , 都有 $T(\gamma(f)) = \gamma(T(f))$, 则称给定了一个协变函子 $T : \mathbf{A}^\Gamma \to \mathcal{G}r^\Gamma$ 。

定义 5.11. 若 (F τ, δ) 是范畴 A 上的余三元组, 函子 F 与 Γ的作用相容, 且态射 τ、 δ 是 Γ-态射, 则称 (F τ, δ) 是 Γ-范畴 $\mathbf{A}^\Gamma$ 上的余三元组。

设 (F τ, δ) 是范畴 $\mathbf{A}^\Gamma$上的余三元组, 其中 τ: $F(A) \to A, \delta$: $F(A) \to F(F(A))$。它诱导出增广单纯对象

$$F_\star^+(A) = F_\star(A) \xrightarrow{\tau} A, F_0(A) = F(A), F_n = F(F_{n-1}(A)) for \geq 1,$$

$\lambda_i^n = F_i \tau F_{n-i}, s_i^n = F_i \delta F_{n-i}$对 $0 \leq i \leq n$。

设 $L_* = (L_n, \lambda_i^n, s_i^n, n \geq 0, n \in \mathbf{Z})$ 是一个单纯群, 其边界算子和退化算子分别为 λ_i^n和 s_i^n。

定义 5.12. 若群 Γ 作用于单纯群 L_*, 即它作用于群 $L_n, n \geq 0$, $n \in \mathbf{Z}$, 使得同态 $\lambda_i^n, s_i^n, n \geq 0, n \in \mathbf{Z}$ 是 Γ-同态, 则称此作用成立。由 L_*, $L_*^\Gamma = ((L_n)_\Gamma, \lambda_{i,\Gamma}^n, s_{i,\Gamma}^n, n \geq 0, n \in \mathbf{Z})$ 得到的商单纯群 L_*^Γ , 其中同态 $\lambda_{i,\Gamma}^n$ 和 $s_{i,\Gamma}^n$ 分别由 λ_i^n 和 s_i^n 诱导, 称为 L_* 相对于 Γ 的作用的 Connes 单纯群。

Γ 对单纯群 L_* 的作用诱导出其对 L_*的同伦群的作用, 而 Connes 单纯群L_*^Γ 的 L_*的同伦群 $\pi_n(L_*^\Gamma)$ $n \geq 0$、 $n \in \mathbf{Z}$ 被称为单纯群 L_*的 Γ-等变同伦群。

显然, 对拟单纯群 [7] 的群 Γ 作用也以类似方式定义。

[10]中给出了模链复形上的群作用的类似定义。其商链复形可称为

Connes链复形。商链复形的同调群被称为链复形的 Γ-等变同调群。

注5.13. Connes复形最初出现在 Hochschild复形中，并受到循环群作用 [11] 的影响；该作用是整数群在 Hochschild 复形 [10] 上的作用。

有如下正合列

$$... \to \pi_{n+1}(L_*^\Gamma) \to \pi_n(\Gamma L_*) \to \pi_n(L_*) \to \pi_n(L_*^\Gamma) \to \pi_{n-1}(\Gamma L_*) \to ...,$$

inducing the exact sequence

$$\pi_n(\Gamma L_*) \to (\pi_n(L_*))_\Gamma \to \pi_n(L_*^\Gamma) \to \pi_{n-1}(\Gamma L_*). \tag{5.3}$$

群 Γ 在单纯群 L_* 上的作用在第一个序列上诱导出 Γ 的作用，从而得到第二个正合列。显然，对于增广Γ-单纯群 L_*^+，也有类似于序列5.3的序列成立。

定义5.14. 设 T 是从 Γ-范畴 $\mathbf{A}^\Gamma$ 到 Γ-群范畴 $\mathcal{G}r^\Gamma$ 的协变函子。相对于余三元组 $\mathbf{F} = (\mathbf{F}\ \tau, \delta)$，$T$ 的非阿贝尔左 Γ-导出函子 $L^\Gamma T_n(A)$ 定义如下：

$$L^\Gamma T_n(A) = \pi_n((TF_*(A))^\Gamma), n \geq 0.$$

也可以按照 Eilenberg-Moore 的意义，利用 Γ-拟单纯群，针对范畴 $\mathbf{A}^\Gamma$ 的投射类来定义函子 T 的非阿贝尔 Γ-导出函子。当群 Γ 平凡作用时，所有这些非阿贝尔 Γ-导出函子的定义都推广了协变函子的著名非阿贝尔导出函子 [7]。

设 G 是一个 Γ-群，A 是一个 Γ-环，并设 $F(G)$ 和 $F(A)$ 分别是由集合 $(|g|)$ $g \in G$ 和集合 $(|a|)$ $a \in A$ 生成的自由群和自由环。定义群 Γ 在 $F(G)$ 上的作用为 $\gamma|g| = |\gamma g|$，在 $F(A)$ 上的作用为 $\gamma|a| = |\gamma a|$，$\gamma \in \Gamma$。于是，由 G 和 A 诱导的自由余三元组分别成为范畴 $\mathcal{G}r^\Gamma$ 和 $\mathcal{R}^\Gamma$ 上的余三元组。

设 A 是一个有单位元的 Γ-环，且 $GL(A)$ 是诱导出的 Γ-群。我们将 Swan 的 Γ-代数 K-函子定义为函子 $Gl(-)$ 关于自由余三元组的 Γ-导出函子，即

定义5.15. 对于一个 Γ-环 A，Swan 的 Γ-代数 K-函子 $K^{S,\ _n}{}^\Gamma(A)$ 定义如下

$K^{S,\ n}{}^{\Gamma}(A) = \pi_{n-2}(GLF_*(A))$ 对于 $n \geq 3$，而群 $K^{S,\ 1}{}^{\Gamma}(A)$、$K^{S,\ 2}{}^{\Gamma}(A)$ 由正合列 $0 \to K^{S,\ 2}{}^{\Gamma}(A) \to \pi_0(GLF_*(A))^{\Gamma} \to (GL(A))_{\Gamma} \to K^{S,\ 1}{}^{\Gamma}(A) \to 0$ 定义，其中 $(GLF_*(A))^{\Gamma}$ 是由 Γ-环 A 诱导的 Γ-单纯群 $GLF_*(A)$ 的 Connes 单纯群。

为定义 Swan 的相对 Γ 代数 K-函子，考虑增广单纯环 $F_*^+(A) = F_*(A) \xrightarrow{\tau} A$，其中 Γ 是环 A。

设 $f: A \to B$ 是带单位元的 Γ 环之间的满同态。它诱导出增广 Γ 单纯群之间的满态射 $GL(F_*^+(f): GL(F_*^+(A)) \to GL(F_*^+(B))$，因此得到态射 $(GL(F_*^+(f))_{\Gamma}: (GL(F_*^+(A)))^{\Gamma} \to (GL(F_*^+(B)))^{\Gamma}$。

定义 $K^S{}_{,n}{}^{\Gamma}(A, I) = \pi_n(Ker((GL(F_*^+(f))_{\Gamma}))\ n > 2$，其中 $I = Kerf$。群 $K^S{}_{,1}{}^{\Gamma}(A, I)$ 和 $K^S{}_{,2}{}^{\Gamma}(A, I)$ 由正合列定义：$0 \to K^S{}_{,2}{}^{\Gamma}(A, I) \to \pi_0 Ker(GLF_*(f))^{\Gamma} \to Ker(GL(f))_{\Gamma} \to K^S{}_{,1}{}^{\Gamma}(A, I) \to 0$。当群 Γ 在 A 上平凡作用时，我们便得到 Swan 代数 K-函子 [17]。

我们还提出如下方式来定义 Quillen 的 Γ-代数 K-函子。

考虑带单位元的 Γ-环 A 的自由分解 $F_*(A) \xrightarrow{\tau} A$。映射 τ 诱导出单纯环之间的映射 $\varphi_*: F_* \to (A)_*$，其中 $(A)_*$是常值单纯环，对所有 $n \geq 0$都有 $A_n = A$，并且 $\varphi_n = \tau\tilde{\lambda}_0^{n-1}$、$\tilde{\lambda}_0^{n-1} = \lambda_0^1 \cdots \lambda_0^{n-1}$适用于 $n \geq 1$和 $\varphi_0 = \tau$。记 I_* 为 φ_* 的核，它是 F_*的无环理想。

设 A 是带单位元的 Γ-环。 Γ的作用诱导出在单纯环 I_*上的作用，进而诱导出在单纯群 $GL(I_*)$上的作用，因此也诱导出在空间 $BGL(I_*)$上的作用，该作用是一个同胚；若f: $[0,1] \to BGL(I_*)$是连续映射，则 $(\gamma f)(t) = \gamma(f(t))$ $t \in [0,1]$。由于有 $K_n^Q(A) \cong \pi_{n-1}(BGL(I_*))\ n > 1$，这个空间可用于定义 Quillen K-群。 Γ 在 $BGL(I_*)$上的作用诱导出其在 $BGL(I_*)$的同伦群上的作用，进而作用于$K_n^Q(A)$，并且有同构 $(K_n^Q(A))_{\Gamma} \cong (\pi_{n-1}(BGL(I_*)))_{\Gamma}, n > 1$.

最后，我们给出 Quillen 代数 Γ-函子$K^{Q,\ n}{}^{\Gamma}(A)\ n > 1$ 的定义：它等于商空间 $BGL(I_*)/\Gamma$ 在离散群 Γ 的作用下的同伦群 $\pi_{n-1}(BGL(I_*)/\Gamma)$。

定理5.16. 1. 对于带单位元的 Γ-环之间的同态 $f: A \to B$，存在一个长正合序列

$$\cdots \to K^{S,\ n+1}{}^{\Gamma}(B) \to K^{S,\ n}{}^{\Gamma}(A, I) \to K^{S,\ n}{}^{\Gamma}(A) \to K^{S,\ n}{}^{\Gamma}(B) \to \cdots \to K^{S,\ 2}{}^{\Gamma}(B) \to K^{S,\ 1}{}^{\Gamma}(A, I) \to K^{S,\ 1}{}^{\Gamma}(A) \to K^{S,\ 1}{}^{\Gamma}(B),$$

其中 $I = Kerf$，并且有一个自然同态 $K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(I) \to K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(A, I)$ $n \geq 1$；2. 若 A 是一个自由环，且群 Γ 作用于其上，则 $K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(A) = o$对 $n \geq 1$成立；3. Swan 和 Quillen 的 Γ-代数 K-函子之间的关系由以下正合列表示

$\pi_{n-2}(\Gamma GLF_*^+(A)) \to (K_n^Q(A))_\Gamma \to K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(A) \to \pi_{n-3}(\Gamma GLF_*^+(A))$, $n > 1$, $F_*^+(A)$: $F_*(A) \to A$ 是 Γ环 A 的自由分解；
4. 存在中心正合列 $0 \to K_2^\Gamma(A) \to K_2^{S,\Gamma}(A) \to Ker\nu_\Gamma \to e$，其中 ν_Γ 由包含映射 $\nu: E(A) \to GL(A)$ 诱导。

$Proof$. 1. 由增广Γ-单纯群的短正合列 $e \to Ker((GL(F_*^+(f))_\Gamma) \to (GL(F_*^+(A)))_\Gamma \to (GL(F_*^+(B)))_\Gamma \to e$ 诱导；同态 $K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(I) \to K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(A, I)$ 由态射的复合 $(GL(F_*^+(I)))_\Gamma \to (GL(F_*^+(f))_\Gamma \to (GL(F_*^+(A)))_\Gamma$ 诱导，其中 $n \geq 1$。

2. 首先证明当 A 是 Γ-自由环时的情形。在这种情况下，增广的 Γ-单纯群 $GLF_*^+(A)$ 是左可缩的，因此它的所有同伦群都是平凡的。设 $F(X)$ 是以子集 X 为基的自由群，群 Γ 作用于该子集，则 $F(F(X))$ 是一个 Γ-自由群，并考虑由单射 $X \to F(X)$ 和恒等映射 $F(X) \to F(X)$ 分别诱导的 Γ-同态 $F(X) \xrightarrow{\sigma} F(F(X)) \xrightarrow{\tau} F(X)$。因此，$K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(F(X))$ 同构于 $K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(F(F(X))$ 的一个子群；对于 $n \geq 1$，后者是平凡的。

3. 利用增广的 Γ-单纯群 $GL(F_*^+(A))$ 的序列 5.4，我们得到如下正合列 $\pi_{n-2}(\Gamma GL(F_*^+(A)) \to (\pi_{n-2}(GL(F_*^+(A)))_\Gamma \to \pi_{n-2}((GL(F_*^+(A)))_\Gamma) \to \pi_{n-3}(\Gamma GL(F_*^+(A))), n > 1$，从而推出正合列 $\pi_{n-2}(\Gamma GL(F_*^+(A)) \to (K_n^S(A))_\Gamma \to K^{S,}{}_n{}^{\Gamma}(A) \to \pi_{n-3}(\Gamma GL(F_*^+(A)))$，$n > 1$。有同构 $(K_n^Q)_\Gamma \cong (\pi_{n-1}BGL(I_*))_\Gamma \cong (\pi_{n-2}GL(I_*))_\Gamma \cong (\pi_{n-2}GLF_*^+(A)_\Gamma \cong (K_n^S(A))_\Gamma, n > 1$，由此得到所需的正合列。

4. 容易验证，$\pi_0((GL(F_*^+(A)))_\Gamma)$ 同构于 $(St(A))_\Gamma$。因此，$K_2^S(A)$ 同构于同态 $(St(A))_\Gamma \to (GL(A))_\Gamma$ 的核，这就得到了所需的正合列。该正合列是中心的，因为 $K_2(A)$ 是 $St(A)$ 的中心。定理得证。

注 5.17. 设 A 是一个无单位元的 Γ-环，且 $A + \mathbb{Z}$ 是 A 的添单位化。Γ 在 A 上的作用诱导出其在 $A + \mathbb{Z}$ 上的作用，即 $\gamma(a, z) = (\gamma a, z)$ $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$。于是，由典范的 Γ-同态 $i: A \to A + \mathbb{Z}$ 和 $p: A + \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 诱导出短正合列 $0 \to (K_n^Q(A))_\Gamma \to (K_n^Q(A + \mathbb{Z}))_\Gamma \to (K_n^Q(\mathbb{Z}))_\Gamma \to 0$。

对于带单位元的交换 Γ-环 A，乘法运算

$$K_1^\Gamma(A) \otimes K_1^\Gamma(A) \to K_2^\Gamma(A)$$

已定义。为此，我们将通过使用 $[x,y]$, $x,y \in GL(A)$ 中给出的符号，遵循 Milnor 构造来定义映射$GL(A) \times GL(A) \to K_2(A)$。考虑典范同态 τ: $St(A) \to E(A)$，并令 $x,y \in E(A)$ 满足 $xy = yx$。通过取 $v,z \in St(A)$ 使得 $\tau(v) = x, \tau(z) = y$，可在 $K_2(A)$ 中正确地定义一个元素，记为 $x*y$。于是 $x*y = vzv^{-1}z^{-1}$且 $\tau(vzv^{-1}z^{-1}) = e$。

现在，符号 $[x,y]$ 定义如下（见 [13]）。对于 $x \in GL_m(A)$ 和 $y \in GL_n(A)$，记 $x \otimes y$ 为对应于 $A^m \otimes A^n$ 的诱导自同构的矩阵。令 I 表示 $m \times m$单位矩阵，并令I'为 $n \times n$单位矩阵。 $E_{3mn}(A)$) 中的矩阵 $diag(x \otimes I';\ x^{-1} \otimes I';\ I \otimes I')$ 和 $diag(I \otimes y, I \otimes I';\ I \otimes y^{-1})$ 彼此交换，且符号 $[x,y]$ 等于

$$diag(x \otimes I'; x^{-1} \otimes I'; I \otimes I') * diag(I \otimes y, I \otimes I'; I \otimes y^{-1}) \in K_2(A).$$

由符号 $[x,y]$ 诱导的映射 $GL(A) \times GL(A) \to K_2(A)$ 具有斜对称性和双乘性，并导出一个同态$K_1(A) \times K_1(A) \to K_2(A)$ [13]。此外，还具有以下性质:

如果 u 和 $1-u$ 是单位元，那么 $[u, 1-u] = 1$ 和 $[u, -u] = 1$。

现在我们可以证明，当环 A 是一个 Γ-环时，所定义的映射 $GL(A) \times GL(A) \to K_2(A)$ 是一个 Γ-映射。如果 $\gamma \in \Gamma$，则有 $\gamma(x,y) = (^\gamma x, ^\gamma y)$，以及 $\gamma(x*y) = \gamma(vzv^{-1}z^{-1}) = \gamma\ v^\gamma z(^\gamma v)^{-1}(^\gamma z)^{-1} = (^\gamma x *^\gamma y)$。因此，

$diag(^\gamma x \otimes I';\ (^\gamma x)^{-1} \otimes I';\ I \otimes I') * diag(I \otimes^\gamma y, I \otimes I';\ I \otimes (^\gamma y)^{-1}) = \gamma($ $diag(x \otimes I';\ x^{-1} \otimes I';\ I \otimes I')) *^\gamma (diag(I \otimes y, I \otimes I';\ I \otimes y^{-1})) = \gamma(diag(x \otimes I';$ $x^{-1} \otimes I';\ I \otimes I') * diag(I \otimes y, I \otimes I';\ I \otimes y^{-1}))$ 表明同态 $K_1(A) \otimes K_1(A)$ $\to K_2(A)$ 是一个 Γ-同态。这意味着存在一个同态 $(K_1(A) \otimes K_1(A))_\Gamma \to (K_2$ $(A))_\Gamma$。考虑到同构 $K_1^\Gamma(A) \otimes K_1^\Gamma(A) \cong (K_1(A) \otimes K_1(A))_\Gamma$ 以及典范满射 ($K_2(A))_\Gamma \to K_2^\Gamma(A)$，我们得到所需的同态 $K_1^\Gamma(A) \otimes K_1^\Gamma(A) \to K_2^\Gamma(A)$。

符号 $[x,y]$ 与我们现在将要定义的米尔诺代数K理论密切相关。

设 A 为一个含幺环。第 n 个米尔诺代数K群 $K_n^M(A)$ 定义为

$$K_n^M(A) = (A^\star)^{\otimes n} / \{a_1 \otimes a_2 ... \otimes a_n : a_i + a_{i+1} = 1\},$$

其中 $a_i \in A^\star$、 $n \geq 2$ 和 $\{a_1 \otimes a_2 ... \otimes a_n\}$ 是由满足关系 $a_i + a_{i+1} = 1$（称为斯坦伯格关系 [14]）的元素 $a_1 \otimes a_2 ... \otimes a_n$ 生成的阿贝尔子群。

如果群 Γ 作用在环 A 上，则它通过逐分量作用于 $(A^\star)^{\otimes n}$，从而在$K_n^M(A)$上诱导出自然作用。因此，如果 A 是一个 Γ-环，则第 n 个 Milnor Γ- 代数 K- 函子 $K^{M,\ _n}{}^{\Gamma}(A)$ 定义为

$$((A^\star)^{\otimes n}/\{a_1 \otimes a_2 ... \otimes a_n : a_i + a_{i+1} = 1\})_\Gamma,$$

其中 $a_i \in A^\star$ 和 $n \geq 2$。

Matsumoto 证明了由符号 $[u, v]$ 诱导的同态 $A^\star \times A^\star / a \otimes (1 - a) \to K_2(A)$、 $a \neq 0$、 1 是同构；当 A 是一个域时，正如我们所证明的，它是一个 Γ-映射。由此，我们得到

定理 5.18. Γ-域的松本定理。

如果 F 是一个 Γ-域，则有同构$K^{M,\ _2}{}^{\Gamma}(F) \cong (K_2(F))$，以及正合列$0 \to (K_2(F) \cap \Gamma St(F))/\Gamma K_2(F) \to K^{M,\ _2}{}^{\Gamma}(F) \to K_2^\Gamma(F) \to 0$。

众所周知（14[,18]），Milnor 代数 K-理论与二次型的维特环以及布洛赫高阶乔群密切相关。现在，我们将通过考察米尔诺猜想，尝试说明这些关系在 Γ-域情形下成立。

设 F 是一个特征不为 2 的域。维特环$W(F)$由非退化二次型的等价类构成。它具有一个滤过：

$$I(F) \supset I^2(F) \supset ... \supset I^n(F) \supset ...$$

该滤过由基本理想 $I(F)$的幂 $I^n(F)$给出，其中基本理想由偶维二次型构成。商群 $I^n(F)/I^{n+1}(F)$在维特环 $W(F)$的研究中发挥着重要作用。

米尔诺猜想断言同构 $\kappa_n^M(F) \cong I^n/I^{n+1}$，其中 $\kappa_n^M(F)$是域 F上的第 n 个米尔诺 K 群模 2，已于 [18]中得到证明。

关于 Chow 群的米尔诺猜想，我们首先给出域 F的 Chow 群 $CH^k(F, n)$的定义。

设 V 是域 F 上的向量空间。射影空间 $P(V)$ 是 $V \backslash 0$ 在关系 $\sim$ 下的等价类集合，其中该关系定义为：若存在非零元素 $\lambda \in F$ 使得 $x = \lambda y$，则 $x \sim y$。若 $V = F^{n+1}$，则相应的射影空间记为 P_F^n，

$$P_F^n = \{a_1, ..., a_{n+1}\}/\sim, a_i \in F,$$

并非所有 $a_i = 0$。且 $(a_1, ..., a_{n+1}) \sim (a'_1, ..., a'_{n+1})$，当存在一个非零元素 $\lambda \in F$使得 $a'_i = \lambda a_i, i = 1, ..., n + 1.$时

设 $Z_k(F,n)$ 为由 P_F^n 中余维为 k 的子簇构成的集合上的自由阿贝尔群，称为 P_F^n 上余维为 k 的代数循环群。记 $B_k(F,n)$ 为其中与零有理等价的 k-循环构成的子群。于是，肖群 $CH^k(F,n)$ 定义为 $Z_k(F,n)/B_k(F,n)$。显然，当 $k \succ n$ 时，肖群 $CH^k(F,n)$ 是平凡的。

米尔诺猜想断言，同构 $K_n^M(F) \cong CH^n(F,n)$，并于 [15,19,20] 中得到证明。

设 F 是一个 Γ-域。记 $\kappa^M{}_{,n}{}^{\Gamma}(F)$ 为模 2 的第 n 个米尔诺 K 群，记 $CH^{n,\Gamma}(F,n)$ 为 Γ-域 F 的第 n 个肖群，稍后将定义该域。

Γ-域 F 上的米尔诺猜想形式如下：

定理 5.19. 若 F 是一个 Γ-域，则存在同构

1. $\kappa_n^{M,\Gamma}(F) \cong (I^n/I^{n+1})_\Gamma$,
2. $K_n^{M,\Gamma}(F) \cong CH^{n,\Gamma}(F,n)$.

Proof. 对于第一个同构，我们需要定义群 $\kappa^M{}_{,n}{}^{\Gamma}(F)$，以及 Γ 在 I^n/I^{n+1}. 上的作用。Γ 在 $K_n^M(F)$ 上的作用会在 $\kappa_n^M(F) = K_n^M(F)/2K_n^M(F)$ 上诱导出相应作用，并将 $\kappa^M{}_{,n}{}^{\Gamma}(F)$ 定义为等于 $(\kappa_n^M(F))_\Gamma$.

理想 $I^n(F)$ 由 n 重 Pfister 形式$<< a_1, ..., a_n >>= \bigotimes_{i=1}^n < 1, -a_i >$ 加法生成；它是一个维数为 2^n, $a_i \in F^\star$ 的二次型。例如，1 重和 2 重 Pfister 形式分别为 $<< a >> \cong < 1, -a >= x_1^2 - ax_2^2$ 和 $<< a, b >> \cong <1, -a, -b, ab >= x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2$。

若 F 是一个 Γ-环，群 Γ 在域 F 上的作用会在幂 $I^n(F)$ 的生成元上诱导出 Γ 的自然作用，其定义为 $\gamma(<<a_1, ..., a_n >>) = <<^\gamma a_1, ...,^\gamma a_n >>$, $\gamma \in \Gamma$。基本理想 $I(F)$ 的幂的上述滤过成为 Γ- 群的滤过。容易验证，该作用与二次型的等价关系相容。

对于 Γ-域，与商 I^n/I^{n+1} 对应的商是其等变形式 $(I^n/I^{n+1})_\Gamma$，它等于 $I^n/I^{n+1} \cdot \Gamma I^n$。

存在一个同态 α_n^M，从 κ_n^M（F）到由 Milnor 定义的商 I^n/I^{n+1}，其形式为（$a_1, ..., a_n$） $\to << a_1, ..., a_n >>$。

我们需要证明该同态 α_n^M是一个 Γ-映射。实际上，只需在生成元集合 {（$a_1, ..., a_n$） $a_i \in F^\star$}上证明这一点。我们有 $^\gamma$（$a_1, ..., a_n$） $= (^\gamma a_1, ...,^\gamma a_n) = <<^\gamma a_1, ...,^\gamma a_n >> = ^\gamma$ （ $<<a_1, ..., a_n >>$ ）。这就推出了同构

$$(K_n^M(F)/2K_n^M(F))_\Gamma \cong (I^n/I^{n+1})_\Gamma$$

以及第一个米尔诺猜想的证明。

关于第二个米尔诺猜想，我们将定义群 Γ 对肖群 $CH^k(F,n)$ 的作用，该作用由其对域 F 的作用诱导。显然，它会在由 $\gamma(a_1, ..., a_n) = (\gamma a_1, ..., \gamma a_n)$ 定义的射影空间 P_F^n 上诱导一个作用。该作用会在 k 维子簇集合上诱导一个作用，因此也会在群 $Z_k(F,n)$ 和 $B_k(F,n)$ 上诱导作用。最后， Γ 对肖群 $CH^k(F,n)$ 的作用由其对 $Z_k(F,n)$ 的作用诱导。 Γ- 肖群 $CH^{k,\ \Gamma}(F,n)$ 定义为 $(CH^k(F,n))_\Gamma$。

众所周知，有一个同态 β_n^M: $K_n^M(F) \to CH^n(F,n)$，Milnor 提出了同态 β_n^M是同构 [14]。为定义它，我们需要肖群乘积映射。乘积映射 $CH^p(F,q) \times CH^r(F,s) \to CH^{p+r}(F,q+s)$ 由代数循环的交给出；也就是说， $CH^{p+r}(F,q+s)$ 中的乘积 $|y||z|$ 是交集 $Y \bigcap Z$ 中所有余维为$q+s$的簇之和，其中 Y和 Z分别是 (F,q) 和 (F,s) 的子簇。容易验证，乘积映射是一个 Γ-映射，且 Γ 在乘积上的作用是逐分量的。

同态 β_n^M 由阿贝尔群的同态 β_1^M:$F^* \to CH^1(F,1)$ 诱导而来，该同态将 F^*的单位元 e映到 $0 \in CH^1(F,1)$，并将元素 $a, a \neq e$映到射影空间 P_F^1中元素 $(a,1)$ 的类。由于 β_1^M和乘积映射都是 Γ-映射，因此诱导同态 β_n^M是一个 Γ-同态。这蕴含了同构

$$(K_n^M(F))_\Gamma \cong (CH^n(F,n))_\Gamma$$

并完成了关于 Γ-域的米尔诺猜想的证明。

推论 5.20. 对于 Γ-域，Chow 群与米尔诺 K函子 K_2 之间的关系如下:

$$0 \to (K_2(F) \cap \Gamma St(F))/\Gamma K_2(F) \to CH^{n,\Gamma}(F,n) \to K_2^\Gamma(F) \to 0.$$

这由定理 5.18 和 5.19 立即得出。

6. Acknowledgment

我谨感谢审稿人仔细阅读稿件，并提出了富有建设性的意见，这些意见极大地帮助提升了论文的表达质量。

References

[1] Adamson I.T，非正规子群与非正规域的上同调理论，Glasgow Math. Ass. 1954(2)(1954)，66-76。[2] Bass H.，代数K理论，W.A.Benjamin, Inc.，1968。

[3] Grant M.、Meir E. 和 Patchkoria I.，带算子群的等变维数，群、几何与动力学 16（2022），1049-1075。[4] Grant M.、Li K.、Meir E. 和 Patchkoria I.，等变上同调维数的比较，arXiv 2302.08574v1（2023），1049-1075。[5] Guin D.，群的非阿贝尔上同调与同调，纯粹与应用代数杂志 50（1088），109-137。[6]Hochschild G.，相对同调代数，美国数学会会刊 82（1956），246-269。[7] Inassaridze H.，非阿贝尔同调代数及其应用，Kluwer Academic，多德雷赫特，1997。[8] ———，群的等变同调与上同调，拓扑学及其应用 153（2005），66-89。[9] Inassaridze H. 和 Khmaladze E.，群的等变整数同调的霍普夫公式，美国数学会会刊 138(9)（2010），3037-3046。[10] InassaridzeH.，Γ-群的（上）同调与 Γ-同调代数，欧洲数学杂志 8（增刊2）（2022），5720-5763。[11] Loday J-L.，循环同调，施普林格，《数学科学基础讲义》301，1998。[12] Matsumoto H.，关于已分裂半单群的算术子群，高等师范学院科学年刊 2(4)（1969），1-62。[13] Milnor J.，代数K理论导论，《数学研究年刊》72，普林斯顿大学出版社，新泽西州，1971。[14] ———，代数K理论与二次型 9（1970），318-344。[15] Orlov D.、Vishik A. 和 Voevodsky D.，关于 $K_*^M/2$ 的一个正合列及其在二次型中的应用 165（2007），1-13。[16] Quillen D.，高阶代数K理论，数学讲义，施普林格 341（1973），77-139。[17] Swan R.G.，代数K理论，数学讲义，76，1968。[18] Totaro B.，米尔诺K理论是代数K理论中最简单的部分，K理论 6（1992），177-189。[19]Voevodsky V.，系数为Z/2的动机上同调，高等科学研究所数学出版物 98（2003），59-104。[20] ———，动机上同调中的约化幂运算，高等科学研究所数学出版物 98（2003），1-57。

A. Razmadze Mathematical Institute of Tbilisi State University, 6, Tamarashvili Str., Tbilisi 0179, Georgia.电子邮件地址：inassari@gmail.com