arXiv:2303.00330v1 [math.CO] 1 Mar 2023

基于 VC 维理论改进任意有限域上的点线关联界

Alex Iosevich* Thang Pham† Steven Senger‡ Michael Tait§

2023年3月2日

摘要

本文的主要目的是证明，利用 VC 维理论中的工具，可以在某些范围内改进 Vinh 于 2011 年给出的任意有限域上的点线关联界。作为推论，本文还将详细讨论若干应用。

1 引言

设 $\mathbb{F}_q$ 是一个阶为 q 的有限域，其中 q 是一个素数幂。设 P 是 $\mathbb{F}_q^2$ 中的一个点集， L 是 $\mathbb{F}_q^2$ 中的一个直线集。 P 与 L 之间的关联数记为 $I(P,L)$。记号 $f \ll g$ 表示 $f = O(g)$。

以下点线关联界归功于 Vinh [18], , 该界是通过谱图论方法证明的。

定理 1.1. P 与 L 之间的关联数满足

$$\left| I(P,L) - \frac{|P||L|}{q} \right| \ll q^{\frac{1}{2}} \sqrt{|P||L|}. \tag{1}$$

为了了解这个定理的效果如何，我们将其与著名的柯西-施瓦茨估计进行比较。

$$I(P,L) \leq \min\{|P|^{1/2}|L| + |P|,\ |P||L|^{1/2} + |L|\}. \tag{2}$$

更确切地说，

1. 若 $q^3 = o(|P|L|)$，定理 1.1 给出了紧确界 $I(P,\ L) = (1+o(1))|P||L|/q$。2. 若 $|P| > q$ 且 $|L| > q$，则界 (1) 优于 (2) 中的界。3. 当 $|P| < q$ 或 $|L| < q$ 且 $|P| \neq |L|$时，文献中没有非平凡的界

.

尽管上述定理有许多初等证明，例如，Cilleruelo 在 [2] 中利用 Sidon 集给出的证明，或 Murphy 和 Petridis 在 [10], 中提出的几何计数论证，

*罗切斯特大学数学系。电子邮箱：iosevich@math.rochester.edu
†越南国家大学河内科学大学。电子邮箱：phamanhthang.vnu@gmail.com
‡密苏里州立大学数学系。电子邮箱：StevenSenger@MissouriState.edu§维拉诺瓦大学数学与统计系。电子邮箱：michael.tait@villanova.edu。

但很难说在任意有限域的一般情形下，该定理在什么条件下能够得到改进，以及哪些方法适用于此目的。

在素域的情形下，文献中已有若干更优的结果。最早的一篇论文由 Bourgain、Katz 和 Tao 于 2004 年撰写 [1]，他们证明：对于 $\mathbb{F}_p^2$ 中的任意点集 $\mathcal{P}$ 和任意直线集 $\mathcal{L}$，若满足 $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = N = p^\alpha$, $0 < \alpha < 2$，则有

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \ll N^{\frac{3}{2}-\varepsilon}, \tag{3}$$

其中 ε 为正数，且取决于 α。多年来，指数 ε 已被明确确定；最近的进展来自 Stevens 和 de Zeeuw [17],，他们在对 P 和 L的大小施加某些条件时，证明了 $I(P, L) \ll |P|^{11/15}|L|^{11/15}$。这改进了 Helfgott 和 Rudnev[4] 以及 Jones [8]此前的结果。尽管 [4, 8] 中的方法依赖枢轴论证和加乘型问题，Stevens 和 de Zeeuw 证明中的主要工具是 Rudnev [13]提出的点-平面关联界。若对集合能量附加一些条件，还可得到一些改进，见 [12, 14]。我们还指出，Stevens–de Zeeuw 的结果也适用于任意域，但所得界依赖于域的特征；因此，当 q 不是素域时，满足该界的集合可能相较于 q而言较小。Jones [7] 证明，只要点集P 与所有子域的平移的交集满足某些附加条件，就可以将 [4, 8] 中的论证用于在任意有限域上推出形如 (3) 的结果，其中 $|P| = |L| = N$。

本文的主要目的是说明，利用 VC 维理论中的工具，可以证明关于 $\mathbb{F}_q$ 的改进点线关联界。本文还将讨论若干应用。

1.1 结果陈述

定理 1.2. 设 L 是 $\mathbb{F}_q^2$ 中由 $y = ax+b$ 形式的直线组成的集合，其中 $a \neq 0$ 且 $P = A \times B \subset \mathbb{F}_{q^\circ}^2$ 假设对于某个 $\alpha \in \in (0, 1)$，有 $|L||A| > q^\alpha \max\{|A|, |L_x|\}$，则

$$I(A \times B, L) \ll \frac{|L||A||B|^{1/2}}{q^{\alpha/2}} + q^\alpha |L|^{1/2}|A|^{1/2}|B|^{1/2}.$$

这里 $L_x := \{a: \ y = ax + b \in L\}$。此外，如果 L 还包含形如 $y = c$ 或 $x = c$ 的直线，那么

$$I(A \times B, L) \ll \frac{|L||A||B|^{1/2}}{q^{\alpha/2}} + q^\alpha |L|^{1/2}|A|^{1/2}|B|^{1/2} + 2|A||B|.$$

该定理证明中的关键环节是 $\mathbb{F}_q^3$ 中的一个点-平面关联定理，我们将利用 VC 维理论中的工具来证明它。本文给出了两个版本，二者的主要区别在于共线点或共面平面的最大数量。

定理 1.3. 设 P 是一个点集，Π 是 $\mathbb{F}_q^3$ 中的一个平面集。假设 Π 中的平面具有 $a \cdot x = 1$ 这种形式，其中 $a \in \mathbb{F}_{q^\circ}^3$ 若对于某个 $\alpha \in$ （0, 1），$|\Pi| \geq 2q^{1+\alpha}$，则

$$I(P, \Pi) \ll \frac{|P||\Pi|}{q^\alpha} + |\Pi| q^{2\alpha}.$$

对称地，若对于某个 $\alpha \in (0,1)$， $|P| \geq 2q^{1+\alpha}$，则

$$I(P,\Pi) \ll \frac{|P||\Pi|}{q^{\alpha}} + |P|q^{2\alpha}.$$

如果我们将条件 $|P| \geq 2q^{1+\alpha}$ 放宽为 $|P| \geq 2kq^{\alpha}$，其中 k 是 P 中共线点的最大数量，那么我们有下面的定理。

定理 1.4. 设 P 是一组点， Π 是 $\mathbb{F}_q^3$ 中的一组平面。假设 Π 中的平面具有形式 $a \cdot x = 1$，其中 $a \in \mathbb{F}_q^3$。如果不存在一条直线包含 P 中的 k 个点，且该直线包含于 Π 中的两个平面内，并且 $|P| \geq 2kq^{\alpha}$，那么

$$I(P,\Pi) \ll \frac{|P||\Pi|}{q^{\alpha}} + |P|q^{2\alpha}.$$

1.2 应用

现在我们讨论一些可能具有独立意义的其他应用。

$\mathbb{F}_q^3$ 中平面的交集：下面的定理告诉我们，给定满足 $|U'|^3 \ll |U|^2$ 的 $U' \subset U$，存在许多对 $(u, v) \in U \times U$，使得相应的平面与 U' 的交集相同，即 $\pi_u \cap U' = \pi_v \cap U'$.

正式表述如下。

定理 1.5. 给定 $U \subset \mathbb{F}_q^3$ 且 $|U| \gg q^2$，以及 $U' \subset U$ 且 $|U'|^3 \ll |U|^2$，则满足 $\pi_u \cap U' = \pi_v \cap U'$ 的数对 (u, v) 的数量至少为 $|U|^2/|U'|^3 \in U^2$。

$\mathbb{F}_q^3$ 中的两集合间的距离：给定 E、$F \subset \mathbb{F}_q^3$， E 与 F 之间的距离集记为 $\Delta(E, F)$，其为

$$\Delta(E,F) = \{||x-y|| = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 \colon x \in E, y \in F\} \subset \mathbb{F}_q.$$

当 E 与 F 的大小差异很大时，任意有限域上的当前最佳结果归功于 Koh 和 Sun 在[9]中的工作。具体而言，他们证明了

$$|\Delta(E,F)| \gg \begin{cases} \min\{q, |E||F|q^{-(d-1)}\} & \text{if } |E| < q^{\frac{d-1}{2}} \\ \min\{q, |F|q^{-\frac{d-1}{2}}\} & \text{if } q^{\frac{d-1}{2}} \leq |E| \leq q^{\frac{d+1}{2}} \\ \min\{q, |E||F|q^{-d}\} & \text{if } |E| \geq q^{\frac{d+1}{2}} \end{cases}. \tag{4}$$

注意，在偶数维中，我们需要一个附加条件，即 $|E||F| \gg q^d$。

在下一个定理中，我们在 $\mathbb{F}_q^3$ 的某些范围内改进这一结果。

定理 1.6。设 E 和 F 是 $\mathbb{F}_q^3$ 中的集合，其中 $q \equiv 3$ 模 4。假设零距离点对的数量至多为 $|E||F|/2$。定义 k 为满足以下条件的最大整数：在 F $\{u_1, \cdots, u_k\}$ 中存在 k 个共线点，且存在一对点 $(x, y) \in E \times E$

对所有 i 满足 $||x-u_i||=||y-u_i||\neq 0$。由 $|F|>2kq^{\alpha}$ 定义 α。对于 $\alpha\in(0,1)$，我们有

$$|\Delta(E,F)|\gg\begin{cases}\max\{k,\ q^{\alpha}\} & if\ |E|\geq q^{3\alpha}\\ \max\left\{k,\frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\} & if\ |E|\leq q^{3\alpha}\end{cases}$$

当集合 E 和 F 相同时，相关结果请参阅 [5, 11, 16] 。

$\mathbb{F}_q^3$ 中两个集合的点积：给定 E、$F\subset\mathbb{F}_q^3$，E 和F之间的点积集记作 $D(E,F)$，其定义为

$$D(E,F)=\{x\cdot y\colon x\in E,y\in F\}\subset\mathbb{F}_q.$$

类似地，我们可以得到点积函数的定理 1.6 的以下变体 .

定理 1.7. 设 E 和 F 是 $\mathbb{F}_q^3$中的集合。假设 $E\times F$中的正交对数量至多为 $|E||F|/2$，并且任意两个形如 $v\cdot x=\lambda$和 $w\cdot x=\lambda$、v、$w\in E$、$\lambda\neq 0$的平面，在 F中共有的共线点至多为 k 个。进一步假设 $|F|>2kq^{\alpha}$ 和 E 未完全包含在任何平面中，则

$$|D(E,F)|\gg\begin{cases}\max\{k,\ q^{\alpha}\} & if\ |E|\geq q^{3\alpha}\\ \max\left\{k,\frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\} & if\ |E|\leq q^{3\alpha}\end{cases}.$$

1.3 改进的结果范围

定理 **1.2** 的改进范围： 定理 1.2 在点集和直线集的大小相差较大时表现良好。与点数和直线数相近的情况相比，人们对这一情形的了解相对较少，相关讨论参见 [19]。定理1.2 在其适用范围内给出的上界优于式（1）和（2）中的上界，具体范围为

1. 若 $|L||A|<q^{3\alpha}$，则定理 1.2 给出 $q^{\alpha}|L|^{1/2}|A|^{1/2}|B|^{1/2}$。在以下范围内，这优于式（1）和（2）

$$\alpha<1/2,\ q^{\alpha}\max\{|A|,|L_x|\}<|L||A|<q^{3\alpha},|L|>q^{2\alpha},\ |A||B|>|L|q^{2\alpha}.$$

2. 若 $|L||A|>q^{3\alpha}$，则定理 1.2 给出 $|L||A||B|^{1/2}q^{-\alpha/2}$。在以下范围内，这优于式（1）和（2）

$$q^{\alpha}\max\{|A|,|L_x|\}<|L||A|<q^{1+\alpha},\ |A|<q^{\alpha},\ |L|<q^{\alpha}|B|.$$

下面给出两个例子，一个对应 $|A||L|\ll q^{3\alpha}$，另一个对应 $|A||L|\gg q^{3\alpha}$.

- ($|A||L|\ll q^{3\alpha}$) 设 $\alpha=\frac{1}{4}$，然后令 L_x为一个包含 $q^{\frac{1}{2}}$个不同斜率的集合，并为每个斜率选取 $q^{\frac{1}{8}}$条不同的直线，共得到 $q^{\frac{5}{8}}$条直线。然后任取 A、$B\subset\mathbb{F}_q$，使得 $|A|=q^{\frac{1}{12}}$且$|B|=q^{\frac{2}{3}}$.

- ($|A||L|\gg q^{3\alpha}$) 设 $\alpha=\frac{2}{5}$，再令 L_x为一个包含 $q^{\frac{4}{5}}$个不同斜率的集合，并从每种斜率中选取 $q^{\frac{1}{5}}$条不同的直线，共得到 q 条直线。然后任取 A、$B\subset\mathbb{F}_q$，使得 $|A|=q^{\frac{4}{15}}$ 且

$|B| = q^{\frac{3}{4}}$.

定理的改进范围**1.3**：为了解定理在哪些范围内具有非平凡性，我们回顾以下适用于任意有限域的著名关联界，即 中的 Vinh 的结果：

$$I(P,\Pi) \leq \frac{|P||\Pi|}{q} + 2q\sqrt{|P||\Pi|}, \tag{5}$$

以及柯西–施瓦茨关联界：

$$I(P,\Pi) \leq q^{1/2}|P|^{1/2}|\Pi| + |P|,\ q^{1/2}|P||\Pi|^{1/2} + |\Pi|. \tag{6}$$

1. 若 $|P| \gg q^{3\alpha}$，则定理 1.3 给出 $|P||\Pi|q^{-\alpha}$。当

$$q^{3\alpha} < |P| < q^{1+2\alpha},\ q^{1+\alpha} < |\Pi| < q^{1+2\alpha},\ |P||\Pi| < q^{2+2\alpha},\ |P||\Pi| \ll q^4,\ \alpha \in (0, 1/2).$$

2. 若 $|P| \ll q^{3\alpha}$，则定理 1.3 给出 $q^{2\alpha}|\Pi|$。当

$$q^{4\alpha-1} < |P| < q^{3\alpha},\ \ q^{1+\alpha} < |\Pi| < \min\{|P|^2q^{1-4\alpha}, |P|q^{2-4\alpha}\}, |P||\Pi| \ll q^4.$$

为说明定理 1.3 在非平凡应用中给出了新的界，我们列举三个具体例子，其中两个针对 $|P| \ll q^{3\alpha}$，另一个针对 $|P| \gg q^{3\alpha}$.

- （$|P| \ll q^{3\alpha}$和 $|P| < |\Pi|$）设 $\alpha = \frac{1}{5}$，并令 Π为一个由 $q^{\frac{5}{4}}$个平面组成的集合。然后任取满足 $|P| = q$.的 $P \subset \mathbb{F}_q^3$
- ($|P| \ll q^{3\alpha}$和 $|P| > |\Pi|$) 设定 $\alpha = \frac{1}{5}$，并令 Π为一个由 $q^{\frac{5}{4}}$个平面组成的集合。然后任取满足 $|P| = q^{\frac{4}{3}}$.的 $P \subset \mathbb{F}_q^3$
- ($|P| \gg q^{3\alpha}$) 设定 $\alpha = \frac{1}{3}$，并令 Π为一个由 $q^{\frac{3}{2}}$个不同平面组成的集合。然后任取满足 $|P| = q^{\frac{11}{10}}$.的 $P \subset \mathbb{F}_q^3$

定理的改进范围 **1.4**： 为说明定理 1.4 在一些非平凡应用中也能给出新的界，我们列举两个例子，一个针对 $|\Pi| \ll q^{3\alpha}$，另一个针对 $|\Pi| \gg q^{3\alpha}$.

- ($|\Pi| \ll q^{3\alpha}$) 设定 $\alpha = \frac{1}{3}$，并令 Π为一个由 $q^{\frac{8}{9}}$个平面组成的集合。然后任取满足$|P| = q^{\frac{1}{2}}$的 $P \subset \mathbb{F}_q^3$，并注意任意平面的交集中， P 中的点不超过 $k = q^{\frac{1}{8}}$个。
- ($|\Pi| \gg q^{3\alpha}$) 再次，令 $\alpha = \frac{1}{3}$，并设 Π 为由 $q^{\frac{5}{4}}$ 个不同平面组成的集合。然后任选满足 $|P| = 2q^{\frac{4}{3}}$. 的 $P \subset \mathbb{F}_q^3$。由于不同平面至多共享 q 个点，因此在这种情况下，我们只需令 $k = q$ 。

注 1.1. 我们注意到，在素域上，Rudnev 在 *[13]*, 中给出了更好的改进，其表述如下：

$$I(P,\Pi) \ll |P|^{1/2}|\Pi| + k|\Pi|,$$

其中 k 是 P、$|P| \le |\Pi|$ 和 $|P| = O(p^2)$ 中的共线点的最大数量，p 是该域的特征。

定理 1.6 的改进范围**1.6**：与（4）相比，当两个集合的大小相差很大时，这一结果最为有效。

1. 若 $|E| \in (q^{2\alpha}, q^{3\alpha})$，$\alpha \in (0, 1/2)$，且

$$|F| \in \left(q,\ \min\left\{q^{2-2\alpha},\ q \cdot \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}\right) \cap (2kq^{\alpha}, q^2),$$

那么（4）比定理 1.6 给出的结果更弱。更具体地说，当 $|F| \in (q, q^2)$ 时，应用（4）（并交换 E 和 F 的角色）可得 $|\Delta(E,F)| \gg q^{-1}|E|$；当 $\alpha \in (0, 1/2)$ 时，这比 $q^{-2\alpha}|E|$ 更差。若 $|E| \in (q^{2\alpha}, q^{3\alpha}) \cap (0, q)$，则由（4）可得 $|\Delta(E,F)| \gg q^{-2}|E||F|$，当 $|F| < q^{2-2\alpha}$ 时，该结果小于 $q^{-2\alpha}|E|$。若 $|E| \in (q^{2\alpha}, q^{3\alpha}) \cap (q, q^2)$，则可得 $|\Delta(E,F)| \gg q^{-1}|F|$；当 $|F| < q^{1-2\alpha}|E|$ 时，这也比 $q^{-2\alpha}|E|$ 更弱。

2. 类似地，如果 $|E| \in (q^{2\alpha}, q^{3\alpha})$ 和 $|F| \in \left(2kq^{\alpha},\ \min\{q^{2-2\alpha}, q\}\right)$，那么定理 $q^{-2\alpha}|E|$ 中的界 1.6 也更优。如果 $|E| \le q$，那么（4）给出 $|E||F|q^{-2}$；如果 $|E| \ge q$，那么（4）给出 $|F|q^{-1}$；这两个结果在给定范围内都小于 $|E|q^{-2\alpha}$。

1.4 主要思路

在文献中，利用 VC 维数研究关联问题的想法并不新鲜。例如，Fox、Pach、Sheffer、Suk 和 Zahl 在 [3] 中证明了以下定理。

定理 1.8. 设 $G = (P, Q, E)$ 是一个二分图，其 $|P| = m$ 和 $|Q| = n$ 满足：系统 $\mathcal{F}_1 := \{N(q) : q \in Q\}$ 对所有 z 都满足 $\pi_{\mathcal{F}_1}(z) \le cz^d$。那么，如果 G 是 $K_{k,k}$-自由的，则

$$|E(G)| \le c_1(mn^{1-1/d} + n),$$

其中 $c_1 = c_1(c, d, k)$，且 $N(q)$ 是 q 在 P 中的邻居集合。

我们首先想比较该定理的证明与上述关联界证明之间的异同。定理 1.8 的证明策略是进行若干次归约，在每一步中，他们都界定了从 Q 出发的单个顶点的邻居数量。更确切地说，令 $\mathcal{F}_1$ 如上，并令 $\mathcal{F}_2 = \{N(u) : u \in P\}$。给定一个集合 $B \in \mathcal{F}_2$ 和 k 个点 $\{v_1, \dots, v_k\} \subset Q$。如果 $\{v_1, \dots, v_k\} \not\subset B$ 且 $B \cap \{v_1, \dots, v_k\} \neq \emptyset$，我们称 B 交叉 $\{v_1, \dots, v_k\}$。已有文献 [3] 证明，对于这样的族 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$，存在 k 个点 v_1、……、v_k，属于 Q，使得至多有 $2c'm/n^{1/d}$ 个集合来自 $\mathcal{F}_2$ 交叉 $\{v_1, \dots, v_k\}$，其中 $c' = c'(c, d, k)$。对于这样的 k-元组，我们注意到，q_1 的邻域至多包含 $c''m/n^{1/d} + (k-1)$ 个点，其中 $c'' = c''(c', k)$。这可以由以下事实解释：至多有 $k-1$ 个点 u_i 满足 $N(u_i)$ 覆盖 $\{v_1, \dots, v_k\}$（该图是 K_k、k-自由的），而交叉 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 的集合数量至多为 $2c'm/n^{1/d}$。注意，可能存在顶点 u_1 和 u_2 属于 P，使得 $N(u_1) = N(u_2)$ 于 $\mathcal{F}_2$ 中；若我们假设 $\mathcal{F}_2$ 中的每个集合至少包含 k 个点，则可以排除这种情况，因为显然 $c'' \le kc'$。在计算出 v_1 的邻居后，我们将其移除，并对剩余部分重复该论证，直至剩下的点少于 k 个。

在有限域中，上述定理至少在二维和三维情况下并不实用。例如，在二维中，如果我们有一个点集和一个直线集，显然该图是$K_{2,\ 2}$-自由的，并且是 $d=2$，因此它除了给出柯西-施瓦茨界之外没有任何实际意义。在三维中，对于点和平面，我们知道该图可能包含一个非常大的子图，例如$K_{q,\ q}$。因此，因子 c_1 可能会非常大，从而使界变得更差。定理 1.8 在 [6] 中得到了改进，但将其应用于这些关联问题时，局限性仍然相同。

如上所述，为了证明定理 1.2，我们首先证明 1.4 中关于$\mathbb{F}_q^3$ 中的点和平面的定理，然后利用这样一个事实：如果点集具有笛卡尔积结构，那么点-直线关联可以化归为点-平面关联。为了证明定理 1.4，我们首先定义图 G，其中 $V(G)=\mathbb{F}_q^3$；如果两个顶点之间的乘积为 1，则在它们之间连接一条边。不难验证，该图的 VC 维数至多为 3。于是，引理 2.1可以改写为：富平面的数量，即至少包含某个给定数量点的平面的数量，是有界的。有了这一信息，我们的定理便可得证。

2 预备知识

本节回顾与 VC 维数相关的结果，这些结果可见于 [3]。设 U 为一个集合， $\mathcal{F}$ 为 U的子集族。若对于任意子集 $S'\subset S$，都存在某个 $A\in\mathcal{F}$使得 $A\cap S=S'$，则称子集 $S\subset U$ 被 $\mathcal{F}$ 打散。集合 $(U,\mathcal{F})$ 的 VC 维数，是满足存在一个 d元素子集 S 且该子集被 $\mathcal{F}$打散的最大整数 d。我们还回顾 $(U,\mathcal{F})$ 的原始打散函数的定义，即

$$\pi_{\mathcal{F}}(z)=\max_{U'\subset U,\ |U'|=z}\#\{A\cap U':A\in\mathcal{F}\}.$$

Sauer、Shelah 等人（例如参见 [15],）证明，若 $\mathcal{F}$ 是 VC 维数为 d 的集合系统，则

$$\pi_{\mathcal{F}}(z)\le\sum_{i=1}^{d}\binom{z}{i}. \tag{7}$$

为了引入下一个概念，我们需要度量两个集合 F_1、$F_2\in\mathcal{F}$ 的对称差的大小。我们用 $|F_1\triangle F_2|$ 表示它们的对称差的大小，其定义为

$$F_1\triangle F_2=(F_1\cup F_2)\setminus(F_1\cap F_2).$$

若集合系统 $\mathcal{F}$ 满足：对于任意 k 个集合 F_1，……，$F_k\in\mathcal{F}$，都有

$$|(F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k)\setminus(F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_k)|\ge\delta.$$

[3] 中将我们使用的结果称为引理 2.5，它也被称为装填引理。

引理2.1. 设 $\mathcal{F}$是一个(k,δ)-分离系统，并且对所有 z， $\pi_{\mathcal{F}}(z)\le cz^d$。则有 $|\mathcal{F}|\le c'(|U|/\delta)^d$，其中 $c'=c'(k,d,c)$。

定理1.3的证明

回顾一下，根据假设，$|\Pi| \geq 2q^{1+\alpha}$. 现在令 $U = P$和 $V = \{a\colon \{a \cdot x = 1\} \in \Pi\}$。对每个$u \in U$，令 $N(u)$为满足 $u \cdot v = 1$的 $v \in V$的集合。

于是，我们可以将 $I(P,\Pi)$ 写成

$$\begin{aligned}\sum_{u\in U}|N(u)| =& I(P,\Pi) = \sum_{u\colon |N(u)|\leq 2|V|q^{-\alpha}}|N(u)| + \sum_{u\colon |N(u)|\geq 2q^{-\alpha}|V|}|N(u)| \\ &\leq \frac{2|U||V|}{q^{\alpha}} + \sum_{i}\sum_{2^i|V|q^{-\alpha}\leq|N(u)|<2^{i+1}|V|q^{-\alpha}}|N(u)|.\end{aligned}$$

现在我们证明，使 $|N(u)| \geq 2^i|V|q^{-\alpha}$ 成立的 $u \in U$ 的数量至多为 $(q^{\alpha}2^{-i})^3$。事实上，设 $X_{\alpha}(U)$ 为这类 u 的集合。设 $\mathcal{G}$ 为由 $\mathcal{G}$ 定义的集合系统（底集为 V）：$= \{N(u)\colon u \in X_{\alpha}(U)\}$。由于 $\mathbb{F}_q^3$ 中的两个平面要么不相交，要么相交于一条直线，且一条直线上至多有 q 个点，因此可得

$$N(u_1) \cap N(u_2) \leq q, \ \forall\ u_1, u_2 \in U.$$

现在结合 $|V| > 2q^{1+\alpha}$ 这一事实，我们得到

$$|N(u_1) \triangle N(u_2)| \geq \frac{2^i|V|}{q^{\alpha}} - q \geq \left(2^i - \frac{1}{2}\right)\frac{|V|}{q^{\alpha}}.$$

通过直接计算，不难看出 $\mathcal{G}$ 的 VC 维数至多为 3：如果有 4 个平面包含同一个点，那么任何属于其中 3 个平面的点都必须属于全部 4 个平面。因此，不等式（7）在 $d = 3$ 时成立。因此，我们现在应用引理 2.1 ，取 $\delta = c2^i|V|q^{-\alpha}$，其中 是某个常数 c，从而得到

$$|X_{\alpha}(U)| \ll \left(\frac{|V|}{\delta}\right)^3 \ll \left(q^{\alpha}2^{-i}\right)^3.$$

So,

$$I(P,\Pi) \ll \frac{|U||V|}{q^{\alpha}} + \sum_i |V|q^{2\alpha}\frac{1}{2^{2i}} \leq \frac{|U||V|}{q^{\alpha}} + |V|q^{2\alpha}.$$

由对称性，我们还可以得到

$$I(P,\Pi) \ll \frac{|U||V|}{q^{\alpha}} + |U|q^{2\alpha}.$$

定理4 的证明1.4

该证明与定理 1.3 的证明非常相似。令 $U = P$ 和 $V = \{a\colon \{a \cdot x = 1\} \in \Pi\}$。对于每个 $v \in V$，令 $N(v)$ 为满足 $u \in U$ 的 $u \cdot v = 1$。

那么我们可以将 $I(P,\Pi)$ 写成

$$\sum_{v\in V}|N(v)| = I(P,\Pi) = \sum_{v:\ |N(v)|\le 2|U|q^{-\alpha}}|N(v)| + \sum_{v:\ |N(v)|\ge 2q^{-\alpha}|U|}|N(v)|$$
$$\le \frac{2|U||V|}{q^{\alpha}} + \sum_{i}\sum_{2^i|U|q^{-\alpha}\le|N(v)|<2^{i+1}|U|q^{-\alpha}}|N(v)|.$$

如前所述，我们证明满足 $|N(v)|\ge 2^i|U|q^{-\alpha}$ 的 $v\in V$ 的数量至多为 $(q^{\alpha}2^{-i})^3$。事实上，令 $X_{\alpha}(V)$ 表示所有这类 v 构成的集合。令 $\mathcal{G}$ 表示由 $\mathcal{G}:=\{N(v):\ v\in X_{\alpha}(V)\}$ 定义的集合系统。由于 V 中的两个平面要么不相交，要么相交于一条直线，且 U 中至多有 k 个共线点，这说明

$$|N(v_1)\cap N(v_2)|\le k,\ \forall\ v_1,v_2\in V.$$

因此，

$$|N(v_1)\triangle N(v_2)|\ge \frac{2^i|U|}{q^{\alpha}}-k\ge\left(2^i-\frac{1}{2}\right)\frac{|U|}{q^{\alpha}},$$

由于 $|U|>2kq^{\alpha}$。同样，通过直接计算不难看出，$\mathcal{G}$ 的 VC 维数至多为 3：若要打散一个含有 4 个点的集合，这些点必须位于同一个平面内，而在这种情况下，任何包含其中 3 个点的平面都必须包含全部 4 个点。因此，不等式（7）对$d=3$成立。于是，我们现在应用引理 2.1 得到

$$|X_{\alpha}(V)|\ll\left(q^{\alpha}2^{-i}\right)^3.$$

So,

$$I(P,\Pi)\ll\frac{|U||V|}{q^{\alpha}}+\sum_i|U|q^{2\alpha}\frac{1}{2^{2i}}\le\frac{|U||V|}{q^{\alpha}}+|U|q^{2\alpha}.$$

定理得证。

定理 5 的证明1.2

不失一般性，我们假设这些直线由方程 $y=ax+b$ 定义。因为其他直线至多会贡献 $2|P|$ 个关联。

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$I(A\times B,L)\le|B|^{1/2}\left(\#\{(a,b,x,a',b',x')\in L\times A\times L\times A:\ ax+b=a'x'+b'\}\right)^{1/2}.$$

注意，这一步柯西-施瓦茨不等式也曾用于证明 [17]中的 Stevens-De Zeeuw点线关联结果。

方程 $ax+b=a'x'+b'$ 可视为点（x，a'，b'）与由 $aX-x'Y+Z=-b$ 在 $\mathbb{F}_q^3$中定义的平面之间的一种关联。设 P和 Π 分别为 $\mathbb{F}_q^3$中对应的点集和平面集。注意， Π 中的任意平面都不包含任何竖直线，因此，当我们将其投影到

Oxy 平面上时。注意 $|P| = |\Pi| = |L||A|$。因此，如果 $|L||A| \geq 2kq^{\alpha}$，则根据定理 1.4，有

$$\#\{(a,b,x,a',b',x') \in L \times A \times L \times A \colon ax + b = a'x' + b'\} \lesssim \frac{|L|^2|A|^2}{q^{\alpha}} + |L||A|q^{2\alpha}.$$

证明至此完成。

定理1.5 的证明

为了证明定理1.5，我们需要以下引理。其证明是标准的，但为完整起见，我们将其列出。

引理 6.1. 设 U 是 $\mathbb{F}_q^3$ 中一个满足 $|U| \geq 8q^2$ 的集合。那么存在一个子集 U_1，满足 $|U_1| \gg |U|$，并且对于任意 $u \in U_1$，满足 $u \cdot u' = 1$ 的 $u' \in U$ 的数量为 $\Theta\left(\frac{|U|}{q}\right)$。

证明。对于 $u \in U$，令 $N(u)$ 为满足 $u \cdot u' = 1$ 的 $u' \in U$ 的集合。定义

$$L := \left\{u \colon |N(u)| \geq \frac{2|U|}{q}\right\}, \; R := \left\{u \colon |N(u)| \leq \frac{|U|}{2q}\right\}.$$

我们将每个点 $u \in L$ 与由 $x \cdot u = 1$ 定义的平面对应。我们滥用记号，用 L 表示相应平面的集合。于是显然有 $I(U,L) \geq 2|U|^2/q$。利用点-平面关联界（5），我们得到

$$\frac{2|U||L|}{q} \leq I(U,L) \leq \frac{|U||L|}{q} + 2q\sqrt{|U||L|}.$$

这意味着 $|U||L| \leq 4q^4$。因此，如果 $|U| \geq 8q^2$，那么 $|L| \leq q^2/2 \leq |U|/16$。

类似地，我们有

$$\frac{|R||U|}{q} - 2q\sqrt{|R||U|} \leq I(R,U) \leq \frac{|R||U|}{2q}.$$

由此可得 $|R||U| \leq 16q^4$，因此 $|R| \leq 2q^2 \leq |U|/4$。

令 $U_1 = U \setminus (L \cup R)$，则有 $|U_1| \gg |U|$，且它满足所需性质。 □

定理 1.5 的证明。设 U_1 为引理 6.1 中定义的集合，即对所有 $u \in U_1$，都有$|N(u)| = \Theta\left(|U|q^{-1}\right)$。令 $\mathcal{F} \colon = \{N(u) \colon \; u \in U_1\}$。注意到 $|\mathcal{F}| = |U_1| \gg |U|$。

根据 $\pi_{\mathcal{F}}(|U'|)$ 和 (7) 的定义可得

$$|\mathcal{F} \cap U'| = \#\{A \cap U' \colon A \in \mathcal{F}\} \leq \pi_{\mathcal{F}}(|U'|) \ll |U'|^3 \tag{8}$$

对于每个 $S \in \mathcal{F} \cap U'$，令 $m(S)$ 表示满足 $S = A \cap U'$ 的集合 $A \in \mathcal{F}$ 的数量。我们有 $\sum_S m(S) = |\mathcal{F}|$。根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$|\mathcal{F}|^2 \leq |\mathcal{F} \cap U'| \cdot \sum_S m(S)^2. \tag{9}$$

结合（8）、（9）以及 $|\mathcal{F}|$ 的下界，我们得到

$$\sum_S m(S)^2 \gg \frac{|U|^2}{|U'|^3},$$

这正是我们要证明的。

□

7 定理1.6 的证明

对于任意 $\gamma \in \mathbb{F}_q$，令 $R_\gamma = \{(e,f) : e \in E, f \in F, ||e-f|| = \gamma\}$，并且对每个 $f \in F$，令 $R_\gamma(f) = \{e : e \in E, ||e-f|| = \gamma\}$。此外，令 $T(E,F)$ 表示由满足 $||x-u|| = ||x-v|| \neq 0$ 的三元组 $(u,v,x) \in E \times E \times F$ 构成的集合。根据零距离点对数量的假设，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{|E|^2|F|^2}{4} &\leq \left|\bigcup_{\gamma\neq 0} R_\gamma\right|^2 = \left(\sum_{\gamma\neq 0}|R_\gamma|\right)^2 \\
&\leq |\Delta(E,F)|\sum_{\gamma\neq 0}|R_\gamma|^2 = |\Delta(E,F)|\sum_{\gamma\neq 0}\left(\sum_f |R_\gamma(f)|\right)^2 \\
&\leq |\Delta(E,F)|\sum_{\gamma\neq 0}\left(|F|\sum_f |R_\gamma(f)|^2\right) = |\Delta(E,F)|\cdot|F|\cdot|T(E,F)|,
\end{aligned}$$

其中两个不等式均由柯西-施瓦茨不等式得出。因此，我们有

$$|\Delta(E,F)| \gg \frac{|E|^2|F|}{|T(E,F)|}.$$

固定 $u \in E$，我们注意到，对每个 $v \in E$，方程 $||x-u|| = ||x-v||$ 在 $\mathbb{F}_q^3$ 中确定一个垂直平分平面。令 Π_u 为对应于 $v \in E$ 的这些平面构成的集合。我们现在要证明，v 的每一种不同取法都会在 Π_u. 中对应一个不同的平面。注意，由于 $q \equiv 3$ 模 4，任何非零半径的球面都不包含直线，也就是说，它与一条直线至多相交于两个点。这意味着 Π_u 中的平面互不相同。因此

$$|T(E,F)| = \sum_{u\in U} I(F,\Pi_u).$$

在假设 $|F| > 2kq^\alpha$，且 k 是 F中任意一对点之间具有非零距离的共线点的最大数量 $E \times E$的情况下，如定理 1.4的证明中所示，我们有

$$I(F,\Pi_u) \leq \frac{|F||\Pi_u|}{q^\alpha} + q^{2\alpha}|F|.$$

因此，

$$|T(E,F)| \ll \frac{|E|^2|F|}{q^\alpha} + q^{2\alpha}|E||F|.$$

So,

$$|\Delta(E,F)| \gg \min\left\{q^{\alpha}, \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}.$$

由于 k 是在 $E \times E$中一对点的非零距离处、位于 F 内的共线点的最大数量，我们还有 $|\Delta(E,F)| \geq k/2$。因此，若 $|E| \geq q^{3\alpha}$，则有

$$|\Delta(E,F)| \gg \max\{k, q^{\alpha}\}.$$

如果 $|E| \leq q^{3\alpha}$，那么

$$|\Delta(E,F)| \gg \max\left\{k, \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}.$$

定理1.7 的证明

由于假设 $E \times F$ 中正交对的数量至多为 $|E||F|/2$，通过平均法可知，存在某个非零的 $\lambda \in \mathbb{F}_q$，使得 $E \times F$ 中满足 $u \cdot v = \lambda$ 的点对数量至少为 $|E||F|/|D(E,F)|$。令 $M(E,F)$ 表示满足 $u \cdot v = \lambda$ 的点对 $(u,v) \in E \times F$ 的集合。因此我们有

$$|D(E,F)| \gg \frac{|E||F|}{|M(E,F)|},$$

将 E 视为一个平面集合，将 F 视为一个点集，应用定理 1.4 可得

$$|M(E,F)| \ll \frac{|E||F|}{q^{\alpha}} + q^{2\alpha}|F|.$$

这就得到

$$|D(E,F)| \gg \min\left\{q^{\alpha}, \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}.$$

现在我们说明，若有一条直线 ℓ_0，其上有 F 中的 k 个点，记为 $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \ell_0$，则 $|D(E,F)| \geq k$。与距离函数的情形相比，这种情况要复杂得多。

我们首先注意到，对于任意 $\lambda \neq 0$，由 $u_i \cdot x = \lambda$ 定义的平面的交集是一条直线。为此，考虑平面 $u_1 \cdot x = \lambda$ 和 $u_2 \cdot x = \lambda$ 的交集，并将这条直线记为 ℓ_λ。令 $w \in \ell_\lambda$，那么显然 u_1、u_2 属于由 $w \cdot x = \lambda$ 定义的平面。于是，这个平面包含整条直线 ℓ_0。因此，直线 ℓ_λ 正是我们要找的。

第二个观察是，如果 $v \in E$ 和 $u_i \cdot v = u_j \cdot v = \lambda$，那么对于所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $u_i \cdot v = \lambda$。这对 ℓ_0 中的任意一对 $i \neq j$ 都成立。

根据定义，对于互不相同的 λ、$\beta \neq 0$，直线 ℓ_λ 和 ℓ_β 平行。考虑这些直线中至少有一个 E 上的点落在其上的直线。将这些直线记为 ℓ_{λ_1}、$\cdots \ell_{\lambda_t}$。于是 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_t\} \in D(E, F)$，因此若 $t \geq k$，我们便完成了证明。若 $t < k$，则必定存在一个 $w \in E$ 以及互不相同的 u_i 和 u_j，使得对于某个 $\lambda \neq 0$，有 $w \cdot u_i = w \cdot u_j = \lambda$。根据上述观察，整条直线 ℓ_0 都包含在平面 $w \cdot x = \lambda$ 中。由于 E 不包含在任何单个平面内，因此存在某个 $w' \in E$ 不在这个平面内，于是 $|D(w', \ell_0)| = k$。

换言之，

$$|D(E,F)| \gg \max\left\{k, \min\left\{q^{\alpha}, \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}\right\}.$$

若 $|E| \geq q^{3\alpha}$，则有

$$|D(E,F)| \gg \max\{k, q^{\alpha}\}.$$

如果 $|E| \leq q^{3\alpha}$，那么

$$|D(E,F)| \gg \max\left\{k, \frac{|E|}{q^{2\alpha}}\right\}.$$

9 致谢

A. Iosevich 部分获得了 HDR Tripods NSF 资助和 NSF DMS 2154232 资助。T. Pham 谨向越南高等数学研究所致谢，感谢其提供的热情款待和优良工作条件。M. Tait 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2011553 资助。

参考文献

[1] Jean Bourgain、Nets Katz 和 Terence Tao，《有限域中的一个和积估计及其应用》，《几何与泛函分析》GAFA 14 (2004)，第 1 期，27–57。[2] Javier Cilleruelo，《有限域中的组合问题与 Sidon 集》，Combinatorica 32 (2012)，第 5 期，497–511。[3] Jacob Fox、J´anos Pach、Adam Sheffer、AndrewSuk 和 Joshua Zahl，《Zarankiewicz 问题的半代数版本》，《欧洲数学会杂志》19 (2017)，第 6 期，1785–1810。[4] Harald Andr´es Helfgott 和 Misha Rudnev，《$\mathbb{F}_p$中的一个显式关联定理》，Mathematika 57 (2011)，第 1 期，135–145。[5] Alex Iosevich 和 Misha Rudnev，《有限域上向量空间中的 Erdős 距离问题》，《美国数学会汇刊》359 (2007)，第 12 期，6127–6142。[6] Oliver Janzer 和 Cosmin Pohoata，《关于 VC 维数有界的图的 Zarankiewicz 问题》，arXiv 预印本 arXiv:2009.00130 (2020)。[7] Timothy Jones，《一般有限域上的显式关联界》，《算术学报》3 (2011)，第 150 卷，241–262。[8] Timothy GF Jones，《素数阶域上的一个改进关联界》，European Journal of Combinatorics 52 (2016)，136–145。[9] Doowon Koh 和 Hae-Sang Sun，《有限域上向量空间中两个子集的距离集》，《美国数学会会刊》143 (2015)，第 4 期，1679–1692。[10] Brendan Murphy 和 Giorgis Petridis，《有限域中的一个点线关联恒等式及其应用》，arXiv 预印本 arXiv:1601.03981 (2016)。[11] Brendan Murphy、Giorgis Petridis、Thang Pham、Misha Rudnev 和 Sophie Stevens，《关于正特征下的固定点距离问题》，《伦敦数学会杂志》105 (2022)，第 1 期，469–499。

[12] Giorgis Petridis、Oliver Roche-Newton、Misha Rudnev 和Audie Warren，《仿射群中的一个能量界》，International Mathematics Research Notices 2022 (2022)，第 2 期，1154–1172。[13] Misha Rudnev，《三维空间中点与平面之间的关联数》，Combinatorica 38 (2018)，第 1 期，219–254。[14] Misha Rudnev 和 Ilya D Shkredov，《 $SL_2(\mathbb{F}_p)$、仿射群中的增长率及和积型推论》，Mathematika 68 (2022)，第 3 期，738–783。[15] N. Sauer，《关于集合族的密度》，组合理论杂志 A 辑 13 (1972)，145–147。[16] Igor E. Shparlinski，《关于有限域上两个集合间的距离集》，International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2006 (2006)。[17] Sophie Stevens 和 Frank De Zeeuw，《任意域上的一个改进点线关联界》，伦敦数学会会报 49 (2017)，第 5 期，842–858。[18] Le Anh Vinh，《有限域中的 Szemer ´edi–Trotter 型定理与和积估计》，European Journal of Combinatorics 32 (2011)，第 8 期，1177–1181。[19] Josh Zahl，《点数与直线数不等的有限域 Szemeredi-Trotter 定理》，MathOverflow，网址：https://mathoverflow.net/q/157976（版本：2022-02-25）。