arXiv:2303.00335v2 [math.RA] 5 Sep 2023

八元数代数的子代数

Norbert Knarr，Markus J. Stroppel

2023年9月6日

摘要

对于任意八元数代数，我们确定其所有子代数。结果表明，每个维数小于四的子代数都是结合的，而每个维数大于四的子代数都是非结合的。在任何分裂八元数代数中，都存在维数为四的结合子代数和非结合子代数。除由幂等元张成的一维子代数外，任意两个同构的子代数在自同构作用下都属于同一轨道。

数学主题分类（MSC 2000）： 17A75, 17A36, 17A45。**关键词：** 八元数、四元数、合成代数、子代数、自同构

引言

八元数代数是合成代数中最复杂的例子。合成代数是赋有乘性二次型的（不一定是结合的）代数，并且该二次型所对应的极化形式非退化。作为研究二次型的工具，它们源于数论。四维合成代数（也称为四元数代数）在二次型理论中无处不在。在本文中，我们主要关注维数为 8 的合成代数，也称为八元数代数（或八度数）。

众所周知（见 [22, 1.6.2]），合成代数只存在于维数为 $d \in \{1, 2, 4, 8\}$ 的情形。若二次型是各向同性的，则称合成代数为分裂。在任意域 F 上，都存在维数为 2 的分裂合成代数（与 $F \times F$ 同构，其二次型将 (x, y) 映射为 xy）、维数为 4 的分裂合成代数（与 $F^{2\times 2}$ 同构，其二次型为行列式）以及维数为 8 的分裂合成代数（通过对分裂四元数代数 $F^{2\times 2}$ 作倍增构造得到，见下文 1.4(i)）。这些分裂合成代数由其维数和底层域 F 唯一确定（见 [22, 1.8.1]）。

©by the authors

非分裂合成代数是否存在，本质上取决于基域 F 的性质。特别地， F 上维数为 2 的非分裂合成代数是一个可分二次扩张域。非分裂四元数代数存在，当且仅当存在一个可分二次扩张域，且该扩域上存在一个二变量各向异性厄米形式（参见 [15]）。特别地，有限域上的每个维数大于二的合成代数都是分裂的。 F 上存在四元数域（即非分裂四元数代数），当且仅当存在一个定义在 F^3 上的非奇异二次型，其极化形式不为零（见 [13, 定理 3.1.1]）。在 F 上存在非分裂八元数代数的一个必要（但不充分，见 [13, 定理 3.1.6]）条件，当然是存在一个定义在 F^8 上的非奇异二次型。

八元数代数在群论中发挥着重要作用：例如，八元数代数的自同构群是 G_2，型群；超平面 1 的正交补的作用给出了该群在一个 7 维向量空间上的表示。该群的若干重要子群可方便地视为八元数代数中某些元素或子空间的稳定子（见 [3]），而经典群之间各种例外同构也可通过将表示理解为此类稳定子来阐明。

我们还指出，维数为 8 的非分裂八元数代数可作为非笛沙格 Moufang 平面的坐标代数，而每个非笛沙格 Moufang 平面都可由此方式得到（[16]，[18, Satz50，第 106 页及 Abschnitt 6，第 157–186]，[23,Ch. 19] 页）。分裂八元数代数可用于构造广义六边形（即分裂凯莱六边形，见 [21, 第 207] 页）。

本文研究八元数代数的子代数。分裂情形尤其值得关注；我们在分裂八元数代数中发现了许多在非分裂代数中没有对应物的子代数类型。我们还证明，作为抽象代数同构的子代数，在八元数代数的自同构作用下属于同一轨道（但若它们是一维的，且分别由 1 和一个幂等元$p \neq 1$张成，则不适用此结论）。下文第 8 节的图 1 展示了子代数（轨道）之间的相对位置。作为一个推论，我们得出，合成代数中每个维数小于 4 的子代数都是结合的（见 7.1）。在分裂八元数代数中，确实存在不结合的 4 维子代数（见 2.3），以及维数分别为 5 和 6 的子代数（见 2.2）；没有维数大于 4 的子代数是结合的（见 7.1）。

利用我们的子代数列表，我们可以找出交换子代数，见 7.3。结果表明，每个交换子代数都是结合的。

八元数代数的极大子代数已在 [19], 中研究；该论文中的一个缺漏在 [6] 中被指出，并在 [17]中得到弥补。 [8]中已确定有限八元数代数的一元子代数（即包含乘法单位元的子代数）。本文的研究不依赖于上述结果。

©by the authors

1 合成代数

1.1 定义。设 F是一个域，且 $(A,+,\cdot)$ 是 F上的任意代数（不一定是一元子代数，也不一定是结合的）。若二次型 $q\colon A\to F$满足对所有 $x,y\in A$均有 $q(x\cdot y)=q(x)q(y)$，则称其为乘法的。

1.2 引理：乘法型。设$(A,+,\cdot)$ 是 F 上的任意代数。假设$a,b\in A$使得映射 $\rho_a\colon A\to A\colon x\mapsto xa$和 $\lambda_b\colon A\to A\colon x\mapsto bx$均为双射，并在 A 上定义乘法 $*\colon x*y:=\rho_a^{-1}(x)\cdot\lambda_b^{-1}(y)$。

(a) 元素 $b\cdot a$ 是乘法 $*$的单位元。

(b) 三元组 $(\lambda_b^{-1}|\mathrm{id}|\rho_a^{-1})$ 是从$(A,+,*)$ 到$(A,+,\cdot)$的同位。

(c) 假设在$(A,+,\cdot)$上存在一个非零乘性二次型 q。那么 $s:=q(b\cdot a)$ 非零，并且对所有 $x,y\in A$，$sq(x*y)=q(x)q(y)$ 成立。因此，$s^{-1}q$是$(A,+,*)$上的非零乘法型。

证明。 我们计算 $(b\cdot a)*y=\rho_a^{-1}(b\cdot a)\cdot\lambda_b^{-1}(y)=b\cdot\lambda_b^{-1}(y)=\lambda_b(\lambda_b^{-1}(y))=y$ 以及 $x*(b\cdot a)=\rho_a^{-1}(x)\cdot\lambda_b^{-1}(b\cdot a)=\rho_a^{-1}(x)\cdot a=\rho_a(\rho_a^{-1}(x))=x$。这表明 $b\cdot a$ 是乘法 $*$的单位元。

对于 $x,y\in A$，我们注意到 $\mathrm{id}(x*y)=x*y=\rho_a^{-1}(x)\cdot\lambda_b^{-1}(y)$。这就是从 $(A,+,*)$ 到 $(A,+,\cdot)$ 的同位的定义性质，参见 [12, 第 1]节。

取 $u\in A$ 使得 $q(u)\neq 0$，并令 $v:=\lambda_b^{-1}(\rho_a^{-1}(u))$。于是 $0\neq q(u)=q((b\cdot v)\cdot a)=q(b\cdot v)q(a)=q(b)q(v)q(a)=q(b)q(a)q(v)=q(b\cdot a)q(v)$，得到 $q(b\cdot a)\neq 0$。我们计算得 $sq(x*y)=sq\left(\rho_a^{-1}(x)\cdot\lambda_b^{-1}(y)\right)=\left(q(a)q(b)\right)q\left(\rho_a^{-1}(x)\right)q\left(\lambda_b^{-1}(y)\right)=q\left(\rho_a^{-1}(x)\right)q(a)q(b)q\left(\lambda_b^{-1}(y)\right)=q\left(a\cdot\rho_a^{-1}(x)\right)q\left(b\cdot\lambda_b^{-1}(y)\right)=q(x)q(y)$。这就推出了最后一个断言。 □

1.3 定义。 域 F 上的合成代数是一个（不一定是结合的）C代数 F，带有一个乘性二次型 $\mathrm{N}:=\mathrm{N}_C\colon C\to F$（称为范数型），使得 N 的极化形式不退化。该极化形式记作 $(x|y):=\mathrm{N}(x+y)-\mathrm{N}(x)-\mathrm{N}(y)$。我们还假设该代数包含其乘法的一个单位元，记作 1。（不过，对于没有 1 的同位代数情形，见 1.2。）

按照惯例，基域 F 作为 $F1$ 嵌入到 C中。如果合成代数含有零因子（即范数为零的非零元素，见下文 1.4(f)），则称其为分裂的。如果不会引起混淆，我们就用并置表示乘法。

©by the authors

[22] 的第一章全面介绍了任意域上的合成代数，包括特征二的情形。我们汇总了本文所需的基本事实（证明请参见 [22]）：

1.4 合成代数的性质。设 C 是 F上的合成代数。

(a) 映射 $\kappa\colon\ C \to C\colon\ x \mapsto \overline{x}\colon = (x|1)1 - x$是一个对合反自同构，称为 C的标准对合。

(b) 范数及其极化形式可由标准对合恢复为$\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = \overline{x}x$ 以及$(x|y) = x\overline{y} + y\overline{x}$。特别地，我们有由 $1^{\perp} = \{x \in C \mid \overline{x} = -x\}$ 构成的纯元素超平面。

(c) 对于所有 c、x、$y \in C$，有$(cx|y) = (x|\bar{c}y)$ 以及$(xc|y) = (x|y\bar{c})$，参见 [22, 1.3。2]。

(d) 一般而言，乘法不满足结合律，但结合律的弱形式仍然成立；其中包括Moufang 恒等式 [22, 1.4.1, 1.4.2]

$$(ax)(ya) = a((xy)a), \quad a(x(ay)) = ((ax)a)y, \quad x(a(ya)) = ((xa)y)a.$$

(e) Artin 定理（参见 [22, 命题 1.5。2], [20, 定理 3.1，第 29] 页）：对于任意两个元素x, $y \in C$，C 中由 x 和 y 生成的子代数是结合的。

(f) 元素 $a \in C$ 可逆，当且仅当其范数不为零；此时有 $a^{-1} = $范数$(a)^{-1}\,\overline{a}$。因此，非分裂合成代数是除代数。注意，*Artin* 定理由此推出，对于每个 $x \in C$，$a^{-1}(ax) = x = a(a^{-1}x) = (xa)a^{-1} = (xa^{-1})a$。

(g) 每个元素 $a \in C$ 都是 F上的一个二次多项式的根，即多项式 $X^2 - (a + \bar{a})X + \mathrm{N}(a) \in F[X]$。我们称 $\mathrm{T}(a) := \mathrm{T}_C(a) := a + \overline{a}$ 为 a在 C中的迹 。

(h) [12, 1。3] 每个 F-半线性自同构都与 C 的标准对合交换。若维数$_F\, C \geq 4$，则 C 的每个 $\mathbb{Z}$-线性自同构都是 F-半线性的。因此，这种 C 的每个 $\mathbb{Z}$-线性自同构都是范数型的半相似变换，而每个 F-线性自同构都是正交映射。

我们用 $\mathrm{Aut}(C)$ 表示所有 $\mathbb{Z}$-线性自同构（即所有可加且可乘的双射）构成的群，并用 $\mathrm{Aut}_F(C)$ 表示所有 F-线性自同构构成的群。

©by the authors

(i) [22, 1.5.3] 若 D 是 C 的子代数，且 维数$_F\, C = 2$维数$_F\, D$，并且 $D^\perp \cap D = \{0\}$，则对每个满足 $\mathrm{N}(w) \neq 0$的 $w \in D^\perp$， $D^\perp = Dw$ 成立；$C = D \oplus D^\perp$ 中的乘法由 $(x + yw)(u + vw) = (xu - \mathrm{N}(w)\overline{v}y) + (vx + y\overline{u})w$给出。

(j) [22, 1.6.4] 八元数代数中的每个元素都包含于某个四元数子代数中。事实上，分裂八元数代数中的每个元素都包含于某个分裂四元数代数中，参见 [7, 5。5]。

在此我们采用“子代数”一词最广义的含义：

1.5 定义。给定一个（不一定是一元的，也不一定是结合的）代数 B （在 F 上），其中的一个子代数是一个向量子空间 A （在 F上），并且对乘法封闭。

特别地，即使 B 含有乘法的单位元，我们也不要求该单位元属于此子代数。子代数 A 可能含有其自身乘法的一个单位元；此时该元素是一个被 A中心化的幂等元，但不一定是 B 中的单位元（一般而言，它甚至不会被 B中心化，也不一定可逆）。

我们指出，在 [22, 1.2.1] 中，对合成子代数要求的性质要强得多；也就是说，它是一个包含 1 的子代数（按上述定义），并且范数型的限制具有非退化的极化形式。

还要注意，我们在 [8] 中只考虑包含 1 的子代数。

1.6 引理。 合成代数 C 的向量子空间 V 在标准对合 κ 下封闭，当且仅当它或者包含 1，或者包含于 $1^\perp$ 中。

证明。 当 $V \subseteq 1^\perp$ 时，该断言是显然的。若 $1 \in V$，则对于每个 $v \in V$， $\overline{v} = \mathrm{T}(v) - v$ 属于 V。反之，若 $v \in V \smallsetminus 1^\perp$，则 $0 \neq \mathrm{T}(v) \in V \cap F$ 导出 $1 \in V$。 □

注意，一个子代数一般并不是合成代数，因为范数 N 在该子代数上的限制的极化形式可能是退化的。

1.7 四元数代数。在 F 上的抽象代数语境中，分裂四元数代数是指一个在 F 上、与矩阵代数 $F^{2\times 2}$ 同构的代数 H 。四元数域可定义为一个以 F 为中心、在 F 上维数为 4 的斜域（即结合除代数）；我们称其为 F 上的非分裂四元数代数。

两类四元数代数都完全包含在合成代数这一类中；它们的成员恰好是维数为4的合成代数。所需的（乘法）范数在分裂情形下由行列式得到。在非分裂情形下，则使用一个二维子代数，并利用与该子代数的张量积会得到一个分裂四元数代数这一事实。另请参见 [15]。

©by the authors

F 上的八元数代数的一个四元数子代数 是一个子代数 H，它（作为抽象代数）同构于某个 F上的四元数代数。

对于八元数代数 $\mathbb{O}$ 的一个四元数子代数 H，我们不要求范数 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}}$ 在 H 上的限制满足任何非退化条件，也不先验地要求 H 包含 $\mathbb{O}$ 的单位元 1。然而，事实证明，该四元数代数的嵌入可以说是再好不过，见下文 4.1。

1.8 引理。 设 $\mathbb{O}$ 是域 F 上一个非分裂的八元数代数，且 $\operatorname{char} F \neq 2$。则 $\mathbb{O}$ 的任意两个元素都包含在 $\mathbb{O}$ 的某个四元数子代数中。

证明。考虑 $a,b \in \mathbb{O}$。若 $a \in F + Fb$（特别地，若 $a \in F$），则由每个单独元素 b 都包含在 $\mathbb{O}$ 的某个四元数代数中的结果可知，该断言显然成立（即使 $\mathbb{O}$ 是分裂的，或 $\operatorname{char} F = 2$，这也成立，见 [22, 1.6.4]）。因此设 $a \notin F + Fb$。则 $A := F + Fa$ 是 F 的二次扩张域，且 $\mathbb{O}$ 是 A 上的向量空间。因此， Ab 与 A 的交集是平凡的，并且 $H := A + Ab = F + Fa + Fb + Fab$ 是 F 上一个 4维向量空间。显然，该向量空间恰好与 $\mathbb{O}$ 中由 $\{a,b\}$ 生成的（结合的）子代数重合。范数型 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}}$ 的限制 $\mathrm{N}|_H$ 是非奇异的，且由于 $\operatorname{char} F \neq 2$，它还是非退化的。因此 H 是一个（非分裂的）合成代数（维数为 4），从而是一个四元数域。 □

1.9 注。 若 $\mathbb{O}$ 是特征 2 的非分裂八元数代数，则 $\mathbb{O}$ 含有维数为 4 的交换（且结合）子代数（由对合自同构的不动点集得到，见 [11, 4.5]）。事实上，这样的子代数构成了 F 上次数为 4、指数为 1 的全不可分域扩张。显然，生成这种子代数的两个元素不属于任何共同的四元数域，因此 1.8 不适用于特征二的情形。

1.10 注。 在分裂八元数代数中，任意两个元素都属于某个四元数子代数这一点不再成立。例如，若 a、b 是两个幂零元，且 $ab \neq 0$，则由它们生成的代数$A_{a,\,b}$是一个海森堡代数（见下文 2.7）。这样的海森堡代数含有乘法平凡的二维子代数（例如 $Fa + Fab$），因此不包含于任何四元数代数中。所以 1.8 不适用于分裂情形。

2 子代数的例子

本节汇集了各种例子，这些例子将作为 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下子代数轨道的代表。见下文 5.11、6.2 和 6.4。

©by the authors

2.1 引理。设 $\mathbb{H}$ 是一个分裂四元数代数，并构造（分裂）八元数代数$\mathbb{O} := \mathbb{H} + \mathbb{H}w$ 其乘法为 $(a+xw)\,b+yw = ab+\overline{y}x+(ya+x\overline{b})\,w$. 设 A 是 $\mathbb{H}$ 的一个子代数，并设 R 是 $\mathbb{H}$ 的一个向量子空间，使得 $RA \subseteq R$ 且 $\overline{R}R := \{\overline{y}x \mid x,y \in R\} \subseteq A$。则 $A + Rw$ 是 $\mathbb{O}$ 的一个子代数。

*T*若 A 是一个子代数，且 $\overline{A} = A$ 和 R 是 A中的右理想，则这些条件成立。

证明。对于 (a,x)、$(b,y) \in A \times R$，我们使用 $\overline{R}R \subseteq A$和 $RA \subseteq R$可知，乘积 $(a+xw)(b+yw) = ab+\overline{y}x+(ya+x\overline{b})w$ 具有 $c+zw$ 的形式，且 $(c,z) \in A \times R$。若 $R \subseteq A = \overline{A}$，则 $\overline{R}R \subseteq A$。 □

$\mathbb{O}$ 的向量子空间 A 满足 $\overline{A} = A$，当且仅当 $1 \in A$ 或 $A \subseteq 1^{\perp}$，参见 1.6。

2.2 例子。回顾一下，F 上的每个分裂四元数代数都与 $F^{2\times 2}$同构。我们将 $n_0 = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$和 $p_0 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$简记为。

(a) 除了 $F^{2\times 2}$ 和 $\{0\}$ 之外，$F^{2\times 2}$ 的每个右理想的维数都是 2，并且具有如下形式：$R_v := \left\{X \in F^{2\times 2} \,\middle|\, vX = 0\right\}$，其中 $v =$ 是行向量 $v_1, v_2 \neq (0,0)$。对于任意这样的 R_v，子代数 $F^{2\times 2} + R_v w$ 的维数为 6。我们将证明，每个 6 维子代数都位于该子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下的轨道中，见 6.2。注意，$F^{2\times 2} + R_{(0,1)}w = \mathbb{O}(n_0 w) + \mathbb{O}(p_0 w)$。

(b) $F^{2\times 2}$ 的每个 3 维子代数都是子代数 $U := \left\{\left(\begin{smallmatrix}r&t\\0&s\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, r,s,t \in F\right\}$ 的一个共轭元，其中涉及上三角矩阵。U 中的右理想（除 $\{0\}$ 和 U 外）为 $L := \left\{\left(\begin{smallmatrix}r&t\\0&0\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, r,t \in F\right\}$，$\kappa(L) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}0&t\\0&s\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, t,s \in F\right\}$，以及 $M_y := \left\{\left(\begin{smallmatrix}0&y_1 s\\0&y_2 s\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, s \in F\right\}$（$y = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) \in F^{2\times 1}$）。根据 2.1，这给出了 5 维子代数的例子。我们将证明，每个 5 维子代数都位于 $U + Lw$ 在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下的轨道中，见 6.2。注意，$U + Lw = n_0\mathbb{O} + \mathbb{O}n_0$。(c) 设 A 是 $\mathbb{H}$ 的任意子代数，并设 $R := \left\{\left(\begin{smallmatrix}r&t\\0&0\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, r,t \in F\right\}$。则 $\overline{R}R = \{0\}$，且根据 2.1，$A + Rw$ 是一个子代数。通过这种方式，可以找到维数为 $\dim A + 2 \in \{3,4,5\}$ 的子代数例子。见 6.4(d)(ii)。(d) 集合 $A := \left\{\left(\begin{smallmatrix}r&t\\0&0\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, r,t \in F\right\}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个子代数，并且 $\overline{A} \neq A$。利用 $R := F\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 2.1，我们在 $\mathbb{O}$ 中得到一个三维子代数 $A + Rw$。见 5.11(c)(ii)。注意，$A + Rw = n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}(n_0 w)$。

2.3 例。在 $\mathbb{O} = F^{2\times 2} + F^{2\times 2}w$ 中，取 $w^2 = 1$，考虑 $n_0 := \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $p_0 := \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$。四维子代数 $n_0\mathbb{O} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r&s\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0&t\\0&u\end{smallmatrix}\right) w \,\middle|\, r,s,t,u \in F\right\}$（按照 2.1 的方法，由 $A = Fp_0 + Fn_0$和 $R = Fn_0 + F\overline{p_0}w$得到）不是结合的。事实上，我们有 $p_0\big((\overline{p_0}w)(n_0 w)\big) = p_0(\overline{n_0}\,\overline{p_0}) = -n_0$，而 $\big(p_0(\overline{p_0}w)\big)(n_0 w) = \big((\overline{p_0}p_0)w\big)(n_0 w) = 0$。

©by the authors

本文将证明，任意八元数代数的每个三维子代数都是结合的（对于不含 1 的代数，见 5.11；在 $1 \in A$ 且 dim $A = 3$ 的情形，取 A的一组基 $1, a, b$，注意到 a, b 由 1.4(e) 生成一个结合子代数 B，并且 $A = F + B$ 是结合的），而维数大于 4 的每个子代数都不是结合的（见 5.11 和 6.2）。

2.4 引理。一个 $\mathbb{O}$ 子代数包含 1，当且仅当它包含一个可逆元 *t.*

证明。假设 A 包含一个可逆元 a。那么 $\bar{a}a = (a + \bar{a})a - a^2$ 是 $F \cap A$中的一个非平凡元素，结论由此得出。 □

2.5 推论。每个维数大于四的子代数都包含 1。 □

对于任意 x、$y \in \mathbb{O}$，$\mathbb{O}$ 中由 $\{1, x, y\}$ 生成的子代数是结合的（根据 Artin 定理，见 1.4(e)）。我们将更详细地考察结合子代数与非结合子代数之间的临界情况：

2.6 引理。设 A 是域 F 上八元数代数 $\mathbb{O}$ 的子代数。若 A 由两个元素生成，则维数 $A \leq 4$；事实上，若 A 由 $\{x, y\}$ 生成，则有 $A \subseteq F + Fx + Fy + Fxy$。

证明。简记 $\xi := x + \bar{x}$ 和 $\eta := y + \bar{y}$。于是 ξ 和 η 属于 F，而 $yx = (yx + \overline{yx}) - \overline{yx}$ 属于 $F + F(\overline{yx})$。因此，只需注意到 $\overline{yx} = \bar{x}\,\bar{y} = (\xi - x)(\eta - y) = \xi\eta - \xi y - \eta x + xy$ 属于 $F + Fx + Fy + Fxy$。 □

2.7 海森堡子代数。取一个幂零元 $a \neq 0$（即任意一个范数和迹均为 0 的非零元素 a），再取一个幂零元 $b \in a^{\perp} \setminus (F + Fa)$。于是 $\mathrm{N}(ab) = 0$，且 $(ab|1) = (b|\bar{a}) = (b|-a) = 0$（见 1.4(c)）给出 $ba = -ab$。此外，在由 a 和 b 生成的（结合）子代数中计算可得 $a(ab) = -\mathrm{N}(a)b = 0$，$(ab)a = -(ba)a = 0$。类似地，我们得到 $b(ab) = 0 = (ab)b$ 和 $(ab)(ab) = 0$。因此，$\{a, b, ab\}$ 的线性张成对乘法封闭，并构成一个子代数 $A_{a,\,b}$。

有两种情况：

(a) 如果 $ab = 0$ 那么 $ba = \overline{ab} = 0$，且 $A_{a,\,b} = Fa + Fb$ 是一个二维子代数，使得限制 $\mathrm{N}|_{A_{a,\,b}}$ 是平凡的。由此我们得出，$A_{a,\,b}$ 上的乘法是平凡的（即，$A_{a,\,b}$ 中任意两个元素的乘积都等于 0）。

(b) 若 $ab \neq 0$，则 $ab \notin Fa + Fb$，因为 $ab = ra + sb$ 且 r，$s \in F$意味着 $0 = a(ab) = ra^2 + s(ab) = s(ab)$ 以及 $0 = (ab)b = r(ab) + sb^2 = r(ab)$，从而导致矛盾 $s = 0 = r$。在这种情况下，代数$A_{a,\,b}$ 的维数为 3，且同构于 F 上的海森堡代数。

©by the authors

关于 $\mathbb{O}$ 中海森堡代数的刻画，以及海森堡子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下构成单一轨道的证明，见下文 5.6。

2.8 例子。在 $\mathbb{O} = F^{2\times 2} + F^{2\times 2}w$ with $w^2 = 1$ 中，元素 $p_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是一个幂等元（即 $p_0^2 = p_0$），元素 $n_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $n_0 w$ 是幂零元，$p_0 w$ 也是如此。

计算 $n_0(p_0 w) = n_0 w$ 和 $n_0(n_0 w) = 0$，我们得到 $Fn_0 + Fn_0 w = A_{n_0, n_0 w}$ 是一个如 2.7(a) 所示的二维代数，而三维代数 $A_{n_0, p_0 w} = Fn_0 + Fp_0 w + Fn_0 w$ 是一个如 2.7(b) 所示的海森堡代数例子。这些代数是使用 $A = Fn_0$ 和 $R \in \{Fn_0, Fn_0 + Fp_0\}$，通过 2.1 中给出的方法得到的。

3 中心化子

3.1 引理。设 $\mathbb{O}$ 是 F 上的八元数代数，并考虑 $v \in \mathbb{O} \setminus F$。

(a) 若 $\overline{v} = v$，则 *char* $F = 2$，且 v 在 $\mathbb{O}$ 中的中心化子 $C_{\mathbb{O}}(v)$ 的维数为 *6*。此时，该中心化子在乘法下不封闭。该中心化子由纯元素组成；事实上，我们有 $C_{\mathbb{O}}(v) = \{1, v\}^{\perp}$。*(b)* 若 $\overline{v} \neq v$（特别地，若 *char* $F \neq 2$），则当 $N(v - \overline{v}) \neq 0$ 时，*dim* $C_{\mathbb{O}}(v) = 2$；当 $N(v - \overline{v}) = 0$ 时，*dim* $C_{\mathbb{O}}(v) = 4$。*(c)* 若 *dim* $C_{\mathbb{O}}(v) = 4$，则 *char* $F \neq 2$，存在 $n \in F + Fv$ 使得 $n^2 = 0 \neq n$（因此 $\mathbb{O}$ 是分裂的），且 $C_{\mathbb{O}}(v)$ 是一个子代数。

证明。首先，我们选取一个包含 v 的四元数子代数 H（见 1.4(j)），并将 $\mathbb{O} = H + Hw$ 写成 H 的倍，其乘法为

$$(a + xw)(b + yw) = ab - \mathrm{N}(w)\overline{y}x + (ya + x\overline{b})w\,.$$

现在，当且仅当 $av = va$ 和 $x(v - \overline{v}) = 0$ 时，$a + xw$ 中心化 v。无论如何，这意味着 a 属于 H 中 v 的二维中心化子 $F + Fv$。

若 $\overline{v} = v$，则 $v \notin F$ 蕴含 char $F = 2$。在此情形下，$a \in F + Fv$，但我们对 x 没有限制，且中心化子的维数为 6。然而，只有当 $\overline{y}x$ 属于 $F + Fv$ 时，中心化子中元素（$a + xw$）和（$b + yw$）的乘积 $ab - \mathrm{N}(w)\overline{y}x + (ya + x\overline{b})w$ 才属于该中心化子。

现在假设 $\overline{v} \neq v$。若 $\mathrm{N}(v - \overline{v}) \neq 0$ 则 $a + xw \in \mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$ 推出 $x = 0$，且 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v) = F + Fv$ 的维数为 2。若 $\mathrm{N}(v - \overline{v}) = 0$ 则 H 是一个分裂四元数代数（同构于 $F^{2\times 2}$），且湮灭子 $\mathbb{O}\{x \in H \mid x(v - \overline{v}) = 0\}$ 的维数为 2。则 $\mathrm{C}(\,)(\,)$ 的维数为 4。由 2.1 可知，该中心化子是一个子代数。 □

3.2 例。 考虑 $\mathbb{O} = F^{2\times 2} + F^{2\times 2}w$ 中的 $n_0 = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $p_0 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$，其中 $w^2 = 1$。若 char $F \neq 2$ 则 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(n_0) = F + Fn_0 + Fn_0w + F\overline{p_0}w$。该中心化子构成 $\mathbb{O}$ 的一个结合子代数，同构于

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in F \right\}.$$

注意，在此情形下，$\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(n_0) = F + (n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0)$ 成立。

若 char $F = 2$，则 $n_0 - \overline{n_0} = 0$，且 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(n_0) = F + Fn_0 + F^{2\times 2}w$ 的维数为 6 .

3.3 推论。**(a)** 若特征 $F = 2$，则中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$ 的维数为6 （若 $v \in 1^{\perp} \smallsetminus F$），而在 $v \in \mathbb{O} \smallsetminus 1^{\perp}$ 时其维数为2 。

(b) 无论如何， $v \in \mathbb{O} \smallsetminus F$ 的中心化子 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$ 的维数为2，当且仅当子代数 $F + Fv$ 是合成代数。于是 $F + Fv = \mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$。

(c) 若特征 $F \neq 2$，则$\dim \mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v) = 4$ 当且仅当 $v \in \mathbb{O} \smallsetminus F$且 $0 = \mathrm{N}(v - \overline{v}) = -(v - \overline{v})^2$时成立。在这种情况下，我们注意到 v的中心化子与 $v - \overline{v} = 2v - \mathrm{T}(v)$ 的中心化子重合，并且 $v - \overline{v}$是幂零元。由于 $\mathbb{O}$ 的每个非平凡幂零元在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下均位于同一轨道中（见下文 *4.4*），所有这些中心化子都位于 *3.2* 中所描述的那个中心化子的轨道内。 □

3.4 注。 若 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$ 的维数为 4，则存在 $n \in (1^{\perp} \cap (F + Fv)) \smallsetminus F$，使得 $v \in F + n$，且 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v) = F + (n\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n) = \mathrm{C}_{\mathbb{O}}(n)$。关于一个明确的例子，见 3.2；另见下文 3.7。这不是合成代数：范数型的限制具有 Witt 指数 3，且是退化的。不可逆元构成一个超平面，它是一个理想。因此，在这种情况下，$\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$ 是一个局部代数。

3.5 推论。 如果 $v \notin F$，那么 $\mathrm{C}_{\mathbb{O}}(v)$中不包含任何四元数子代数。 □

合成代数 C 中的向量子空间 V称为全奇异，如果 $\mathrm{N}_C(V) = \{0\}$。分裂八元数代数中的极大全奇异子空间众所周知：

3.6 定理。 设 $\mathbb{O}$ 是一个分裂八元数代数。

(a) 对于任意 $a \in \mathbb{O}$，我们有 $a\mathbb{O} =$ 核 $\lambda_{\overline{a}}$（见 [24, 引理 1]）。**(b)** 如果 $\mathrm{N}(a) = 0$ 但 $a \neq 0$，那么 $a\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}a$ 是极大全奇异子空间，并且每个极大全奇异子空间都具有这种形式（见 [24, 定理 3]）。**(c)** 对于 a， $b \in \mathbb{O} \smallsetminus \{0\}$，若 $\mathrm{N}(a) = 0 = \mathrm{N}(b)$，则有（见 定理4，定理 5]）

©by the authors

(i) $a\mathbb{O} = b\mathbb{O} \iff Fa = Fb$,

(ii) $\dim(a\mathbb{O} \cap b\mathbb{O}) = 2 \iff (a|b) = 0 \wedge \dim(Fa + Fb) = 2$;
then $a\mathbb{O} \cap b\mathbb{O} = a(\bar{b}\mathbb{O}) = b(\bar{a}\mathbb{O})$,

(iii) $a\mathbb{O} \cap b\mathbb{O} = \{0\} \iff (a|b) \neq 0$,

(iv) $a\mathbb{O} \cap \mathbb{O}b = Fab \iff ab \neq 0$,

(v) $\dim(a\mathbb{O} \cap \mathbb{O}b) = 3 \iff ab = 0$;
then $a\mathbb{O} \cap \mathbb{O}b = \{ay \mid y \in b^{\perp}\} = \{xb \mid x \in a^{\perp}\}$.

由于标准对合将 $\{a\mathbb{O} \mid a \in \mathbb{O}\}$ 与 $\{\mathbb{O}a \mid a \in \mathbb{O}\}$互换，上述列表涵盖了 $\mathbb{O}$中极大全奇异子空间相对位置（即交集大小）的所有可能情形。

□

考虑一个 3 维子空间 T，使得 $\mathbf{N}|_T = 0$。由于当 $a\mathbb{O} \neq a'\mathbb{O}$ 时，交集$a\mathbb{O} \cap a'\mathbb{O}$ 的维数至多为 2，因此恰有一个子空间 $a\mathbb{O}$，且恰有一个子空间 $\mathbb{O}b$，使得 $T \subseteq a\mathbb{O}$ 和 $T \subseteq \mathbb{O}b$（即 $T = a\mathbb{O} \cap \mathbb{O}b$）。

3.7 例子。考虑分裂八元数代数 $\mathbb{O} := F^{2\times 2} + F^{2\times 2}w$ 中的 $p_0 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $n_0 = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$，其中 $w^2 = 1$。

(a) 集合 $(p_0w)\mathbb{O} \cap \mathbb{O}(n_0w) = Fp_0 + Fp_0w + Fn_0w$ 是一个维数为 3 的子代数，且每个元素都可表示为该子代数中元素的乘积。这个子代数同构于结合代数

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in F \right\};$$

它也可以通过 2.1 中使用 $A = Fp_0$ 和 $R = Fp_0 + Fn_0$的构造得到。

(b) 代数 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0 = \{\alpha n_0 + (\beta n_0 + \gamma\overline{p_0})w \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\}$ 的乘法为

n

$$(\alpha p_0 + (\beta p_0 + \gamma n_0)w)(\xi p_0 + (\eta p_0 + \zeta n_0)w) = (\beta\zeta - \gamma\eta)n_0;$$

这是一个海森堡代数，如 2.7(b) 中所示。它既不同构于 $(p_0w)\mathbb{O} \cap \mathbb{O}(n_0w)$，也不反同构于它。这个海森堡代数也可通过 2.1 中的构造得到，其中 $A = Fn_0$ 和 $R = Fn_0 + F\overline{p_0}$。

©by the authors

4 （分裂）合成代数的自同构

以下是著名的 Skolem-Noether定理 的一个变体（例如，参见 [10,4.6，第 222] 页，或 [4, 5.1.7，第 183] 页）。不过请注意，我们讨论的是非结合代数的子代数，并不预先要求这些子代数包含 1。

4.1 引理。 设 $\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}'$ 是 F上的八元数代数，且 $H < \mathbb{O}$ 和 $H' < \mathbb{O}'$ 是四元数子代数。那么， H 和 H' 都分别包含 $\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}'$的单位元1 。此外，有：

(a) 若 $\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}'$ 同构，则每个从 H 到 H' 的非恒定 F-线性乘法映射都可延拓为从 $\mathbb{O}$ 到 $\mathbb{O}'$ 上的同构。**(b)** 若 H 或 H' 是分裂的，则每个从 H 到 H' 的非恒定 F-线性乘法映射都可延拓为从 $\mathbb{O}$ 到 $\mathbb{O}'$上的同构。

证明。 设 e 和 e' 分别是 H 和 H'中乘法的单位元。那么， H 是 $\mathbb{O}$ 的一个四元数子代数，它与幂等元 e对易。由 3.5 可推出 $e \in F$，进而得到 $e = 1$。

现在考虑一个非常值的 F-线性乘法映射 $\beta\colon H \to H'$。由于 H是单代数，理想 $\ker\beta$ 是平凡的，且由维数原因， β 是一个同构。由于四元数子代数同构，范数的限制 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}}|_H$ 和 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}'}|_{H'}$ 等距。根据维特消去定理（[25, 定理 4，第 34],页；[1, 推论，第 160], 页；参见 [5, 第 21 页、第35] 页，或 [9, 5.1，12.12]），范数的限制 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}}|_{H^\perp}$和 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}'}|_{H'^\perp}$ 也等距。我们任取一个元素 $w \in H^\perp$，使得 $\mathrm{N}(w) \neq 0$，并找到 $w' \in H'^\perp$，使得 $\mathrm{N}_{\mathbb{O}}(w') = \mathrm{N}_{\mathbb{O}'}(w)$。由 $\mathbb{O} = H + Hw$ 和 $\mathbb{O}' = H' + H'w'$中的乘法公式（参见 1.4(i)），立即可得，将 $a + xw \in H + Hw$映射为 $\beta(a) + \beta(x)w' \in H' + H'w'$是 $\mathbb{O}$的一个自同构。

如果 H 或 H' 是分裂的，那么四元数代数之间同构的存在性意味着二者都是分裂的，八元数代数 $\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}'$也同样如此。因此，后两者同构，我们的第一个断言也就适用。□

4.2 注。 设 $\mathbb{O} = H + Hw$ 通过对四元数子代数 H进行倍增构造得到，使用 $w \in H^\perp$。保持 H 不变的 F-线性自同构可以明确写出：它们是映射 $\alpha_{s,\,t}\colon H + Hw \to H + Hw$: $a + xw \mapsto sas^{-1} + (txs^{-1})w$，其中 s、 t 是 H 中的可逆元，且 $\mathrm{N}(s) = \mathrm{N}(t)$。

事实上，给定自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 对 $\alpha(H) = H$ 到 H的限制给出了 F-线性自同构 H，根据 Skolem-Noether定理，该自同构是内自同构（例如，参见 [10, 4.6，第 222] 页或 [4, 5.1.7，第183] 页）。因此存在 $s \in H$，使得 $\mathrm{N}(s) \neq 0$，并且对于每个 $x \in H$都有$\alpha(x) = sxs^{-1}$。现在， $\alpha(w)$ 属于 $H^\perp$，并且其形式为 $\alpha(w) = uw$，其中

©by the authors

$u \in H$。由于 α 保持范数不变，我们有 N(u) $= 1$，从而对于每个 $x \in H$得到 $\alpha(xw)$ $= \alpha(y)\,\alpha(w)$ $=(sxs^{-1})(uw)$ $= (usxs^{-1})w$。令 $t := us$ ，即可得到所述描述。

4.3 推论。 在任意八元数代数 $\mathbb{O}$ 中，两个四元数子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下属于同一轨道，当且仅当它们（作为 F-代数）同构。 □

4.4 引理。 设 $\mathbb{O}$ 是域 F 上的八元数代数。那么 $\mathbb{O}$ 的非中心元素在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下属于同一轨道，当且仅当它们具有相同的范数和相同的迹。

证明。 显然，属于同一轨道的元素具有相同的范数和迹。

现在考虑 a_1、 $a_2 \in \mathbb{O} \setminus F$，其中 N($a_1$) $=$ N(a_2) 且 T(a_1) $=$ T(a_2)。应用 Witt 定理，我们得到 $b_j \in a_j^{\perp}$，使得 T(b_1) $=$ T(b_2) $= 1$ 且 N(b_1) $=$ N(b_2) $\neq 0$。

如果 N(a_1) $\neq 0$，那么 $H_j := F + Fb_j + (F + Fb_j)a_j$是一个四元数代数，并且$F$-代数 H_1 和 H_2 同构，因为它们的范数形式是等距的（见 [22,1.7.1]）。根据 4.1(a)，从 H_1 到 H_2 的任意 F-线性同构都可延拓为 $\mathbb{O}$的一个自同构。如果 $\alpha \in \mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 是这样的延拓，那么像 $\alpha(a_1) \in H_2$ 与 a_2具有相同的范数和迹，因而是 H_2中 a_2 的一个共轭元。通过利用 H_2 的某个适当（内）自同构的延拓来调整 α，我们便得到 $\mathbb{O}$的一个 F-线性自同构，将 a_1 映射到 a_2。

如果 N(a_1) $= 0$，那么 a_j 包含于一个分裂四元数子代数 H_j 中（见 1.4(j)）。由于 F 上的任意两个分裂四元数代数都同构，我们可以像上面一样进行。

□

5 全奇异与全各向同性子代数

本节中，我们研究由范数为 0 的元素构成的子代数，也就是说，其底层向量空间相对于二次型 N 是全奇异的。这些子代数恰好是不含 1 的子代数；参见 2.4。本节中，我们始终将$\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}w$ 写作分裂四元数代数 $\mathbb{H} = F^{2\times 2}$ 与一个范数为 -1 的元素 w的倍（即 $w^2 = 1$）；于是

$$(a + xw)(b + yw) = ab + \overline{y}x + (ya + x\overline{b})w$$

对所有 a、 b、 x、 $y \in F^{2\times 2}$均成立；参见 1.4.(i)。

5.1 引理。 若 A 是 $\mathbb{O}$ 的一个子代数，且 $A \subseteq 1^{\perp}$，则 A 是全各向同性的（相对于范数的极化形式），并且 维数 $A \leq 4$。

证明。 对于 $a, b \in A$，我们计算 $(a|b) = (1|\overline{a}b) = (1|ab) = 0$，使用 $ab \in A \subseteq 1^{\perp}$。 □

注意，包含在 $1^\perp$ 中的子代数不一定是完全奇异的，如果 $\operatorname{char} F = 2$；例如，考虑 $F + Fn_0$，或特征二的域 F 上的一个次数为 4、指数为 1 的完全不可分域。

5.2 引理。 设 p 是任意一个满足 $\mathrm{N}(p) = 0$ 但 $\mathrm{T}(p) \neq 0$ 的元素。那么，对于包含在 $p\mathbb{O}$ 中或 $\mathbb{O}p$ 中的每个子代数，维数 $A \leq 2$ 都成立；而 $p\mathbb{O}$ （或 $\mathbb{O}p$ ）中的每个二维代数都包含 p。

证明。 将 p 替换为 $\mathrm{N}(p)^{-1}p$ 不会改变 $p\mathbb{O}$。因此，利用 4.4，我们可以假设 $p = (1\,0\,0\,0)$。于是 $p\mathbb{O} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) w \;\middle|\; a_1, a_2, x_1, x_2 \in F \right\}$。

设 A 是 $p\mathbb{O}$ 中的一个子代数，并考虑 A 中任意两个元素的乘积。那么

$$\begin{aligned}&\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} w\right)\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} w\right) \\ &\quad = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 a_1 & y_1 a_2 - x_1 b_2 \\ y_2 a_1 & y_2 a_2 - x_2 b_2 \end{pmatrix} w \quad \in p\mathbb{O}\end{aligned}$$

得到条件 $y_1 x_2 - y_2 x_1 = 0$、 $y_1 a_2 - x_1 b_2 = 0$ 和 $y_2 a_2 - x_2 b_2 = 0$。这意味着矩阵

$$\begin{pmatrix} a_2 & x_1 & x_2 \\ b_2 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

ha的秩至多为一。因此，商空间 $(A + Fp)/Fp$ 的维数至多为一。

关于 $\mathbb{O}p$ 的断言可通过应用反自同构 κ得到。 □

$\mathbb{O}$ 中的极大全奇异子空间（关于二次型 $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbb{O}}$）恰好是集合 $a\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}a$，其中 $a \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ 满足 $\mathrm{N}(a) = 0$；并且已知$a\mathbb{O} = \ker(\lambda_{\bar{a}})$ 和 $\mathbb{O}a = \ker(\rho_{\bar{a}})$（见 3.6(a)、(b)）。

我们刻画这些子空间中的子代数：

5.3 引理。 设 $a \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ 且 $\mathrm{N}(a) = 0$。则以下命题等价。

(a) $a\mathbb{O}$ 是一个子代数。

(b) $\mathbb{O}a$ *is a subalgebra.*

(c) $\mathrm{T}(a) = 0$.

(d) $a^2 = 0 \neq a$.

(e) 将 $\mathbb{O}$ 同一化为 $F^{2\times 2}$的一个倍后，我们有 a 属于 n_0的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$轨道。

©by the authors

如果这些条件中有一个（进而任意一个）成立，那么代数 $a\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}a$ 反同构（通过 κ），但不同构。

这些子代数的维数为4，并且完全不包含可逆元。这些子代数均不具有结合性（见 *2.3*），且其中没有任何一个包含于 $1^\perp$ 中。

证明。由于限制 $\mathsf{N}|_{1^\perp}$ 是非退化二次型，$1^\perp$ 的每个全奇异子空间的维数至多为 3。因此，对于每个 $a \neq 0$，都有 $a\mathbb{O} \not\subseteq 1^\perp$。如果 $\mathsf{T}(a) \neq 0$，则应用 5.2 可知，$a\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}a$ 均不是子代数。

因此现在假设 $\mathsf{T}(a) = 0$。于是 $\ker(\lambda_a) = \ker(\lambda_{\bar{a}}) = a\mathbb{O}$。利用 $a^2 = -\bar{a}a = 0$ 以及 Moufang 恒等式之一（见 1.4(d)），通过计算 $a\big((ax)(ay)\big) = \big((a(ax))a\big)\,y = \big((a^2x)a\big)\,y = 0$，我们验证了 $(a\mathbb{O})(a\mathbb{O})$ 包含于 $\ker(\lambda_a)$ 中。因此，$a\mathbb{O}$ 是一个子代数。应用反自同构 κ，我们将这一观察转用于 $\mathbb{O}a$。此外，我们看到，当 $\mathsf{T}(a) = 0 = \mathsf{N}(a)$ 时，$a\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}a$ 反同构。

尚需证明代数 $a\mathbb{O}$ 与 $\mathbb{O}a$ 不同构。为此，我们注意到，a 是 $a\mathbb{O}$ 中的一个非平凡元素，满足 $a(a\mathbb{O}) = \{0\}$，而 $a\mathbb{O} \smallsetminus \{0\}$ 中没有元素 b满足$(a\mathbb{O})b = \{0\}$；事实上，ρ_b 的核 $\mathbb{O}\bar{b}$ 从不与 $a\mathbb{O}$重合（见 3.6(c)）。 □

5.4 推论。并非每个极大全奇异子空间都是 $\mathbb{O}$的子代数。群$\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ 在所有极大全奇异子空间的集合上并非传递的。 □

5.5 引理。若 A 是 $\mathbb{O}$ 的一个子代数，且包含元素 e，使其成为 A 中乘法的单位元，那么要么 $e \in \{0,1\}$，要么 $\mathbb{O}$ 是分裂的，并且 e 属于迹为1 且范数为0的元素的唯一$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道。在后一种情况下，有 $A = Fe$。

证明。无论如何，子空间 $F + Fe$ 是 $\mathbb{O}$ 的结合交换子代数。假设 $e \notin \{0,1\}$。

元素 e 是一个幂等元，且与 A 对易。由 $e^2 = e$ 和 $e \notin \{0,1\}$ 可知，$F + Fe$ 中 e 的最小多项式为 $X^2 - X$。将其与任意元素 $a \in \mathbb{O}$ 的最小多项式的一般形式 $X^2 - \mathsf{T}(a)X + \mathsf{N}(a)$ 比较，可得 $\mathsf{T}(e) = 1$，$\mathsf{N}(e) = 0$。这意味着 $e \notin F$，并且 $\mathbb{O}$ 中的 e 是一个范数为 0 的非平凡元素。特别地，代数 $\mathbb{O}$ 是分裂的。由 4.4 可知，给定范数和迹的非中心元素在 $\mathsf{Aut}_F(\mathbb{O})$ 的作用下构成单一轨道。

现在，A 包含于范数为 0、迹为 1 的元素 e 的中心化子中。我们计算 $\mathsf{N}(e - \bar{e}) = -1$，并利用 3.1 得到 $\dim \mathsf{C}_{\mathbb{O}}(e) = 2$。由此可得 $A \leq \mathsf{C}_{\mathbb{O}}(e) = F + Fe$，而 $A = Fe$成立是因为 $A = Ae \leq (F + Fe)e = Fe$。 □

©by the authors

5.6 命题。设 A 是 $\mathbb{O}$ 的一个 *3* 维子代数，并假设 $A \subseteq 1^\perp$。则 $\mathbb{O}$ 是分裂的；我们将 $\mathbb{O} = F^{2\times 2} + F^{2\times 2}w$ 写为分裂四元数代数 $F^{2\times 2}$ 的倍，其中$w^2 = 1$。

(a) 若特征 $F \neq 2$，则 A 是海森堡代数。**(b)** 若特征 $F = 2$，则 A 要么是海森堡代数，要么是 $A = F + V$，其中有一个二维子代数 V，使得对所有 $v', v \in V$，$v'v = 0$ 成立。**(c)** 海森堡代数在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下构成单一轨道，其代表为 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0$。**(d)** 形如 $F + V$且具有平凡乘法的二维子代数 V的子代数，在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下构成单一轨道，其代表为 $F + Fn_0 + Fn_0w$。

证明。 在以下每种情形中，我们将看到 $A \smallsetminus \{0\}$ 含有范数为 0 的元素。因此 $\mathbb{O}$ 是分裂的。

首先假设特征为 $F \neq 2$。由 5.1 可知， A 是全各向同性的，并推断出 A 是全奇异的。若存在 a、$b \in A$ 使得 $ab \neq 0$，则 A =$Fa + Fb + Fab$是海森堡代数，见 2.7。因此假设对于所有 a、$b \in A$，均有 $ab = 0$。在 $\mathbb{O}$ 的某个自同构下（见 4.4），不妨设 $n_0 =$（0 10 0）属于 A。于是

A $\{c + xw \mid cn_0 = 0, x\overline{n_0} = 0\} =$ 包含 $F\overline{p_0}+Fn_0+ F\overline{p_0}+Fn_0\ w = \mathbb{O}n_0$ $\{c + xw \mid n_0c = 0, xn_0 = 0\} =$

于左湮灭子（ ）与右湮灭子 $Fp_0 + Fn_0 +$（$F\overline{p_0} + Fn_0$）$w = n_0\mathbb{O}$的交集内，见 3.6(a)。该交集是 3 维子空间 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0 = Fn_0 +$（$F\overline{p_0} + Fn_0$）$w$，并且必与 A重合。然而，乘积（n_0w）（$\overline{p_0}w$）$= p_0n_0 = n_0$ 不为零。这个矛盾表明， A 是海森堡代数。

如果 $\mathrm{char}\, F = 2$，则 1 属于 $1^\perp$，因此可以是 A 的一个元素。在这种情况下，N 在 A 上的限制不可能是非奇异的，否则 A 将包含一个次数为二的扩域，并且 $\dim_F A$ 将是偶数。如果 $1 \notin A$，那么无论如何都有 $\mathsf{N}(A) = \{0\}$，参见 2.4。因此，我们可以假设 $n_0 \in A$（见 4.4）。我们还注意到，如果 $\mathrm{char}\ F = 2$，则 $A \subseteq 1^\perp$ 是交换的，因为对于所有 x、$y \in A$，都有 $xy = \overline{xy} = \overline{yx} = yx$。如果 $1 \notin A$，那么 $\mathsf{N}(A) = \{0\}$，我们便像上文那样应用 2.7，得到 A 是一个海森堡代数。如果 $1 \in A$，那么 $A \subseteq \mathsf{C}_{\mathbb{O}}(n_0) = F + Fn_0 + F^{2\times 2}w$，并且存在满足 $yn_0 \in Fy$ 的 $y \in F^{2\times 2} \smallsetminus \{0\}$，使得 $A = F + Fn_0 + Fyw$。于是$y \in Fn_0 + F\overline{p_0}$，并且我们得到$0 = n_0^2 = (yw)^2 = n_0(yw) = (yw)n_0$。特别地，子空间 $Fn_0 + Fyw$ 构成一个具有平凡乘法的子代数。

还需证明，所讨论子代数的同构类型决定了它们在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下的轨道。若 A 是海森堡代数，则（在 $\mathbb{O}$ 的某个自同构作用下）不妨设 n_0 位于 A 中，且 $n_0A = \{0\} = An_0$。于是我们

©by the authors

发现 A 与双侧湮灭子 $n_0\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n_0 = Fn_0 + (F\overline{p_0} + Fn_0)w$ 重合，见 3.6(a)。因此，这些海森堡代数属于单一轨道。

最后，考虑一个乘法平凡的二维子代数 V。 $V \smallsetminus \{0\}$ 中的每个元素都属于 n_0 的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道，因此我们可以（并且将会）假设 $n_0 \in V$。于是 $V = Fn_0 + Fy$，其中 y 属于 n_0 的双侧湮灭子 $n_0\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n_0 = Fn_0 + (F\overline{p_0} + Fn_0)w$。如果 $n_0 \in V \not\subseteq Fn_0 + Fn_0w$，那么 V 包含一个形如 $(\overline{p_0} + rn_0)w$ 的元素，其中 $r \in F$。利用 $s = 1$ 和 $t := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & r \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}$，我们得到 $\mathbb{O}$ 的一个自同构 $\alpha_{1,t}$：$a + xw \mapsto a + (tx)w$，满足 $\alpha_{1,t}(n_0) = n_0$ 且 $\alpha_{1,t}((\overline{p_0} + rn_0)w) = n_0w$，正如所需。 □

5.7 引理。 设 p, n 是两个非平凡元素（其范数必为 0），且 $p^2 = p \neq 1, pn = n$，$n^2 = 0 = np$。则 $Fp + Fn$ 是一个子代数。这些子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 作用下构成单一轨道。

证明。 向量子空间 $E := F + Fp$ 是一个（分裂）合成代数。子空间 $\{1, p, n\}^\perp$ 的维数为 5，且包含一个元素 u，使得 $\mathrm{N}(u) \neq 0$。因此 $H := E + Eu$ 是一个（分裂）四元数代数。注意到 $(pu|n) = (u|\bar{p}n) = (u|(1-p)n) = (u|0) = 0$，由此推得 n 属于 $H^\perp$。

由 4.1 可知，存在 $\alpha \in \mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$，使得 $\alpha(H) = \mathbb{H}\,(= F^{2\times 2})$。于是 $\alpha(p)$ 是 $\mathbb{H}$ 中 $p_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 的一个共轭元，而 $\mathbb{H}$ 的相应内自同构可扩张为 $\mathbb{O}$ 的一个自同构 β。因此我们可以假设 $p = p_0$ 和 $H = \mathbb{H}$，而 $n \in \mathbb{H}^\perp$。于是存在 $y \in \mathbb{H}$，使得 $n = yw$，并且 $0 = np = (yw)p = (y\bar{p})w$ 推出 $y\bar{p} = 0$。这意味着 $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。存在 $s \in \mathrm{SL}_2(F) \subseteq \mathbb{H}$，使得 $s\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$，且 $a + xw \mapsto a + (sx)w$ 是 $\mathbb{O}$ 的一个自同构，它将 $n = yw$ 映射到 p_0w。 □

5.8 示例。 p_0 中的元素 $= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $n_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 满足 5.7 中的假设；它们生成 $F^{2\times 2}$ 的子代数 $L := Fp_0 + Fn_0 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; r,\ s \in F\right\} \; F^{2\times 2}$。

这个子代数 L 在标准对合下不保持不变；它在 κ 下的像为 $\overline{L} = \overline{Fp_0 + Fn_0} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & s \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; r,\ s \in F\right\}$。代数 L 和 $\overline{L}$ 不同构。

5.9 引理。 </style}设， n 是 $1^\perp$ 中的两个非平凡元素，且满足 $\mathrm{N}(m) = 0 = \mathrm{N}(n)$ $mn = 0$。则 $nm = 0$，且 $Fm + Fn = m\mathbb{O}\cap n\mathbb{O}$ 是一个维数为2的子代数。这些子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下构成单一轨道；对于任意这样的代数 A，A 在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 中的稳定子在 A 的一维子空间集合上二重传递地作用。

证明。 由 5.3 可知，$m\mathbb{O}$ 和 $n\mathbb{O}$ 是子代数，因此 $m\mathbb{O}\cap n\mathbb{O}$ 也是子代数。由于 m、n 属于 $1^\perp$，我们有 $nm = \overline{mn} = 0$。

利用 4.4，我们可以假设 $n = n_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}$。存在 b、$y \in \mathbb{H}$ 使得 $m = b + yw$，并且 $0 = mn_0 = bn_0 - (yn_0)w$ 得出 $bn_0 = 0$ 和 $yn_0 = 0$。另一方面

，我们有 $0 = n_0m = n_0b + (yn_0)w$，同样得到 $n_0b = 0$。这给出 $b \in Fn_0$ 和 $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$，其中 y_1、$y_2 \in F$。现在 $Fm + Fn_0 = F(m-b) + Fn_0$，存在 $s \in \mathrm{SL}_2(F) \subseteq \mathbb{H}$ 使得 $sy = n_0$，并且 $a + xw \mapsto a + (sx)w$ 是 $\mathbb{O}$ 的自同构，将 $m - b = yw$ 映射到 n_0w。

对于最后一个断言，现在只需考虑 $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) w \,\middle|\, r, s \in F \right\}$。$A$ 在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 中的稳定子群包含映射 $a+xw \mapsto s^{-1}as+(xs)w$，其中 $s \in \mathrm{SL}_2(F) < \mathbb{H}$。显然，这些映射构成一个群，并且在 A 的一维子空间集合上传递地二重传递，正如所断言的那样。 □

5.10 推论。群 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 在由 $\mathbb{O}$ 中的非平凡元素 m、n 张成的所有不同子空间对 (Fm, Fn)的集合上传递地作用，并满足 $\mathrm{N}(m) = \mathrm{N}(n) = \mathrm{T}(m) = \mathrm{T}(n) = 0$ 以及 $mn = 0$。 □

5.11 全奇异子代数。设 A 是 $\mathbb{O}$的子代数，并假设 $1 \notin A$。则 A 是全奇异的，且维数 $A \leq 4$。为了给出子代数轨道的代表元，我们将 $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}w$ 写成分裂四元数代数 $\mathbb{H}$ 的倍：$= F^{2\times 2}$，其中 w 满足 $w^2 = 1$，并使用 $p_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $n_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。

(a) 若维数 $A = 1$，则 $A = Fa$，其中 $a \in \mathbb{O}$ 满足范数$(a) = 0$。这些子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下形成两个轨道，分别由 Fp_0和 Fn_0代表。注意，F 和 Fp_0 作为代数同构，且存在一个将 $1 \in F$映射到 $p_0 \in \mathbb{O} \setminus \{1\}$的同构。

(b) 维数为2 的全奇异子代数在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下形成三个轨道：

(i) 具有乘法左单位元的代数，例如 $Fp_0 + Fn_0$（见 *5.7*）。**(ii)** 对具有左单位元的代数应用某个反自同构（例如 κ）得到的具有乘法右单位元的代数（见 *5.7*）。**(iii)** 具有平凡乘法的代数，例如 $(Fp_0 + Fn_0)w$（见 *5.9*）。后一个轨道中的每个代数都包含于 $1^\perp$ 中，而前两个轨道中的代数均不包含于 $1^\perp$ 中。

(c) 维数为3 的全奇异子代数在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下形成两个轨道，即：

(i) 海森堡代数 $Fx + Fy + Fn$，其中 $xy = n = -yx$，对于满足 $n^2 = 0 \neq n$ 的 $n \in \mathbb{O}$，取 $n\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n$ 得到。这些子代数包含于 $1^\perp$ 中。**(ii)** 形如 $m\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n$ 的代数，其中 m，$n \in \mathbb{O}$ 线性无关，且 $m^2 = 0 = n^2 = 0 = mn = nm$。这些子代数均不包含于 $1^\perp$ 中。

(d) 维数为4 的全奇异子代数在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下分成两个轨道，即 :

©by the authors

(i) $n\mathbb{O}$ 对于满足 $n^2 = 0 \neq n$ 的 $n \in \mathbb{O}$。

(ii) $\mathbb{O}n$ 对于满足 $n \in \mathbb{O}$ 使得 $n^2 = 0 \neq n$。

特别地， $\mathbb{O}$ 的两个全奇异子代数同构，当且仅当它们在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下属于同一轨道。

维数至多为 3 的全奇异子代数是结合的。维数为 4 的全奇异子代数不是结合的。

证明。由 2.4 可知，我们的假设 $1 \notin A$ 蕴含 $\mathrm{N}(A) = \{0\}$，且 A 是全奇异的。由于二次型 N 非退化，我们有 $\dim A \leq \frac{1}{2}\dim \mathbb{O} = 4$。

若 $\dim A = 1$，则 $A = Fa$，其中 $a \in \mathbb{O}$，且 $\mathrm{N}(a) = 0$。若 $\mathrm{T}(a) \neq 0$，则 $\mathrm{T}(a)^{-1}a$ 的迹为 1，并根据 4.4，属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 p_0 的轨道。若 $\mathrm{T}(a) = 0$，则 a 属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 n_0 的轨道。

现在假设 $A = Fx + Fy$ 的维数为 2。则 A 是结合的，并且存在 r、$s \in F$ 使得 $xy = rx + sy$。不失一般性，可假设 $y \in 1^\perp$。于是 $y^2 = 0$，且 $0 = xy^2 = (xy)y = rxy + sy^2 = rxy$ 得出 $xy \in Fy$。

若 $A \subseteq 1^\perp$，我们还有 $x^2 = 0$，并可得出 $xy = 0$。在此情形下，代数 A 属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 $(Fp + Fn)w = Fpw + Fnw$ 的轨道，见 5.9。

若 $A \not\subseteq 1^\perp$，我们可以假设 $\mathrm{T}(x) = 1$。于是 $x^2 = x$ 推出 $sy = xy = x(xy) = s^2y$，并且 $s \in \{0, 1\}$ 随之成立。由 $0 = (x|y) = \overline{x}y + \overline{y}x = (1 - x)y - yx$，我们进而推得 $yx = y - xy = y - sy$。因此，若 $s = 1$，则 A 属于 $Fp + Fn$ 的轨道；若 $s = 0$，则属于 $F\overline{p} + Fn$ 的轨道，见 5.9。

现在假设 $\dim A = 3$。那么存在 x、$y \in \mathbb{O}$，使得 $\mathrm{N}(x) = 0 = \mathrm{N}(y)$，并且存在 $xy = 0$使得 $A = x\mathbb{O} \cap \mathbb{O}y$。由 5.2 可推得 x、$y \in 1^\perp$。

若 $Fx = Fy$，则根据 4.4，A属于 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0$的轨道，并且 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0 = Fn_0 + (F\overline{p_0} + Fn_0)w \subseteq 1^\perp$。若 $Fx \neq Fy$，则由 5.10 可得，A属于 $(p_0w)\mathbb{O} \cap \mathbb{O}(n_0w) = Fp_0 + (Fp_0 + Fn_0)w$的轨道，参见 3.7(a)。该子代数包含 $p_0 \notin 1^\perp$。由 3.7 可知，这些子代数是结合的。

最后，假设 $\dim A = 4$。那么，对于某个满足 $\mathrm{N}(x) = 0$ 的 $x \in \mathbb{O}$，$A = x\mathbb{O}$ 或 $A = \mathbb{O}x$ 必有其一成立，由 5.2 可得 $\mathrm{T}(x) = 0$。因此，A 或属于 $n_0\mathbb{O}$ 的轨道，或 A 属于 $\mathbb{O}n_0$ 的轨道，见 4.4。由 2.3 可知，这些子代数不是结合的。 □

6 非全奇异的子代数

6.1 引理。假设 A 是 $\mathbb{O}$ 的子代数。分别考虑极化形式限制的根基 $R := A^\perp \cap A$，以及二次型限制$\mathrm{N}|_A$ 的根基 $Q := \{x \in R \mid \mathrm{N}(x) = 0\}$。

(a) 我们有 $AR \subseteq R$，以及 $RA \subseteq R$。

(b) 无论如何， Q 和 R 都是 $\mathbb{O}$的子代数。

(c) 如果极化形式限制在 A 上不是平凡的，则 R 是全奇异的。因此$R = Q$，且 A/R 是一个合成代数。

(d) 如果极化形式限制在 A 上是平凡的，则 $A = R$。因此， $A = Q$ 要么是全奇异的，要么 $R \neq Q$。在后一种情形中，我们有特征 $F = 2$，代数 A 是交换的，并且包含 F。

证明。 如果 A 不包含可逆元，则范数型限制在 A 上为零，极化形式的限制也为零。于是 $R = A$ ，且断言(a)是平凡的。

因此假设 A 包含可逆元；那么根据 1.6， $1 \in A$ 和 A 在 κ下封闭。对于 $x \in R$ 和 a， $b \in A$，我们计算 $(ax|b) = (x|\overline{a}b) = 0$。因此 $ax \in R$，并且$AR \subseteq R$ 随之成立。关于 $RA \subseteq R$ 的论证与刚才给出的论证完全对称。因此断言 (a) 得证，并且我们知道 R 是一个子代数。

无论如何，集合 Q 在乘法下封闭。如果 $\operatorname{char} F \neq 2$ ，则 $Q = R$。如果 $\operatorname{char} F = 2$，则限制 $\mathrm{N}|_R\colon R \to F$是一个半线性映射（相对于 Frobenius自同态），而 Q 是该映射的核。因此 Q 是一个向量子空间，进而是一个子代数。

现在假设极化形式在 A 上的限制并非平凡。我们首先证明 R 由范数为 0 的元素组成；即 $R = Q$。根据我们的假设，存在a、$b \in A$，使得 $(a|b) \neq 0$。对于 $x \in R$，我们使用 $\overline{x}$、$b\overline{x}$、$b\overline{x}x \in R$并计算 $0 = (a|b\overline{x}x) = (a|b)x\overline{x}$。这就得到 $\mathrm{N}(x) = 0$，如所声称。

利用断言 (a)，按照结合代数中熟知的常规论证，很容易验证 A/R 上的加法和乘法由 $(a + R)(b + R) = (a + b) + R$ 和 $(a + R)(b + R) = (ab) + R$ 良定义。诱导范数$M(a + R) :=$ 范数(a) 良定义，且在 A/R 上具有乘法性。 M的极化形式非退化，而 $1 \in A$ 是由子代数 A 非全奇异这一事实推出的（见 2.4）。因此， A/R 确实是一个合成代数。

最后，假设极化形式在 A 上的限制为零，即 $R = A$。若 $Q \neq R$ ，则 R 含有一个可逆元 b。于是 $0 = (b|b) = 2$范数(b) 得出 $\operatorname{char} F = 2$，而 $b^2 =$范数$(b) \in (F \cap R) \setminus \{0\}$ 表明 $F \subseteq R$。对于 x、$y \in R$，现在有$0 = (x|y) = \overline{x}y + \overline{y}x = -xy - yx$，并利用 $\operatorname{char} F = 2$ 推知 R 是交换的。

□

6.2 维数大于四的子代数。设 A 是 $\mathbb{O}$ 的子代数。若维数 $A > 4$ ，则要么 $A = \mathbb{O}$，要么 $\mathbb{O}$ 是分裂的，且出现以下情形之一：

(a) 维数 $A = 5$，且存在一个幂零元 n 使得 $A = n\mathbb{O} + \mathbb{O}n$。这些子代数在 自同构群$_F(\mathbb{O})$ 的作用下构成单一轨道。

©by the authors

(b) 维数 $A = 6$，且存在两个线性无关的幂零元 m，n，满足$mn = 0$ 使得 $A = \{m, n\}^\perp$。于是 $A = m\mathbb{O}+n\mathbb{O} = \mathbb{O}m+\mathbb{O}n$。这些子代数在 自同构群$_F(\mathbb{O})$ 的作用下构成单一轨道。

证明。 我们知道，由于 $\dim A > 4$， A 不是全奇异的。由 5.1 可知 $A \not\subseteq 1^\perp$。我们先证明存在一个二维子代数$B \subseteq A$，使极化形式在 B 上的限制非退化；于是 B 是一个合成代数。

若 $\mathrm{char}\, F = 2$，我们只需取 $b \in A$ 使得 $b \notin 1^\perp$。于是 $b \notin F \subseteq 1^\perp$，并且 $B := F + Fb \subseteq A$ 是一个二维合成代数，符合要求。

若 $\mathrm{char}\, F \neq 2$，我们首先注意到 $1^\perp \cap A$ 不是全奇异的。事实上，该交集的维数至少为 4。极化形式在 $1^\perp$ 上的限制非退化（此处用到 $\mathrm{char}\, F \neq 2$），且不包含维数大于 3 的全各向同性子空间。因此存在 $a \in 1^\perp \cap A$ 使得 $\mathsf{N}(a) \neq 0$，并且 $B := F + Fa \subseteq A$ 是一个合成代数，符合要求。

现在考虑 $B^\perp \cap A$。若存在可逆元 $u \in B^\perp \cap A$，则 $H :=B+Bu$ 是 A 中的四元数子代数。若仍存在可逆元 $v \in H^\perp \cap A$，则 $\mathbb{O} = H + Hv$ 与 A 重合。因此我们可以假设 $H^\perp \cap A$ 由幂零元组成。于是极化形式在该交集上为零，并且我们发现 $H^\perp \cap A$ 等于 A 的根基 $R := A^\perp \cap A$。取满足 $\mathsf{N}(w) = -1$ 的 $w \in H^\perp$。那么 $\mathbb{O} = H + Hw$ 由倍增构造得到，并且 $R \subseteq Hw$。对于 a，$x \in H$，我们发现 $a(xw) = (xa)w$，而 R 是 $H \cong F^{2\times 2}$ 的反代数上的非平凡模。这推出 $\dim R \geq 2$，任意二维子空间 $L \subseteq R$ 都给出 $A \leq R^\perp \leq L^\perp$。因此，出于维数原因，$A = L^\perp$ 和 $L = R$ 成立。乘法公式 1.4.(i) 表明 $H^\perp H^\perp \subseteq H$，而 6.1(a) 推出 $RR \subseteq R \cap H \subseteq H^\perp \cap H = \{0\}$。所以 R 中的乘法是平凡的，并且 R 位于 $(Fp_0 + Fn_0)w$ 的轨道中，见 5.9 和 5.11。由此得到 A 位于 $((Fp_0 + Fn_0)w)^\perp = H +(Fp_0 + Fn_0)w$ 的轨道中；根据 2.1（见 2.2），它是一个子代数。

剩下的情况是考察 $B^\perp \cap A$ 由幂零元组成的情形。此时，范数在该子空间上恒为零，而 $Q := B^\perp \cap A$ 是二次型 $\mathsf{N}|_A$的根基。由于 Q 是 $1^\perp$的全奇异子空间，因此 $\dim Q \leq 3$，进而 $\dim Q = 3$，且 $\dim A = 5$。子空间 Q 构成一个维数为 3 的全奇异子代数，且包含于 $1^\perp$中。由 5.11 可知，Q 属于$n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0$的轨道，而 $A = Q^\perp$ 属于 $(n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0)^\perp = n_0\mathbb{O} + \mathbb{O}n_0$的轨道。 □

6.3 引理。 设 A 是一个维数为 3的子代数，且 $1 \in A$ 并且 维数 $R \geq 2$。那么维数 $Q \geq 2$。

证明。 首先注意，A 不包含任何二维向量子空间 V，使得范数型的限制 $\mathsf{N}|_V$ 是非奇异的：对于任意 $v \in V \setminus \{0\}$,

子空间 $v^{-1}V$将是一个没有零因子的子代数（即 F的二次扩张域），而 A 的维数将是偶数。

若 $\dim Q < 2$，则 $Q \neq R$，并且 $\mathrm{char}\ F = 2$随之成立。考虑 $y \in R \setminus Q$。若 $y \in R$，则 $A \subseteq 1^\perp$，且由 5.1 可得 $A = R$。若 $y \notin F$，则 $\mathrm{char}\, F = 2$ 推出 $1 \perp 1$，于是再次得到 $A = R$。现在， A 的每个奇异元素都属于 Q。我们取向量空间补空间 V，使其为 Q 在 A 中的补空间，从而得出矛盾： $N|_V$是非奇异的。 □

根据 5.11 和 6.2，接下来只需处理那些不是全奇异（因此包含 1）且维数至多为 4 的子代数。

6.4 维数至多为四的一元子代数。 设 A 是八元数代数 $\mathbb{O}$的一个子代数，且满足 $1 \in A$。若 $\mathbb{O}$ 是分裂的，则记作 $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}w$，其中 $\mathbb{H} = F^{2\times 2}$ 且 $w^2 = 1$。

(a) 若维数 $A = 1$，则 $A = F$。

(b) 若维数 $A = 2$，则有以下情况之一：**(i)** A 是 F上的可分二次扩张域。**(ii)** A 是 F 上的不可分二次域扩张（且特征 $F = 2$）。**(iii)** $A \cong F[X]/(X^2 - X) \cong F \times F$是分裂合成代数。**(iv)** $A \cong F[X]/(X^2)$ 是局部代数。

(c) 若维数 $A = 3$，则根基 $R := A^\perp \cap A$ 非平凡，并且以下情况之一成立。

(i) 维数 $R = 1$，且 A属于自同构$_F(\mathbb{O})$轨道中的子代数 $F + Fp_0 + Fn_0$，即 $\mathbb{H}$ 中的上三角矩阵子代数（见 *5.7*）。**(ii)** 维数 $R \geq 2$，且 A属于子代数 $F + (Fp_0 + Fn_0)w$ 的轨道（见 *5.9*）。

（d）如果维数 $A = 4$，则会出现以下情况之一：

(i) A 是四元数代数（分裂或非分裂）。**(ii)** A属于 $B + (Fp_0 + Fn_0)w$的轨道，其中 $B \subseteq \mathbb{H}$或者是二维合成代数，或者是不可分二次域扩张。**(iii)** 限制二次型 $\mathrm{N}|_A$ 的根基 $Q := \left\{x \in A^\perp \cap A \,\middle|\, \mathrm{N}(x) = 0\right\}$ 的维数为 3。则 Q 同构于海森堡代数，且 A 属于 $F + (n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0)$的轨道。**(iv)** $A = A^\perp$ 是次数为 4 且指数为1的全不可分域扩张（并且特征 $F = 2$）。当然，此情形只有在特征 $F = 2$时才可能发生。两个这样的子域在

©by the authors

同一 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 轨道中，当且仅当它们作为 F-代数同构，见 [7, 5。7]。

在上述每种情形中，子代数在$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下属于同一轨道，当且仅当它们作为 F-代数同构（并且如本文所假设的那样包含1）。

每个满足 A *with* $1 \in A$ 且$\dim A \leq 4$ 的子代数都是结合的。

证明。如果 $\dim A = 2$，取 $a \in A \setminus F$。则 $1, a$ 是 A的一个基，而 a 的最小多项式为 $m_a(X) = X^2 - \mathrm{T}(a)X + \mathrm{N}(a)$。断言 (b) 中的四种情形现在分别属于以下情形：$m_a(X)$ 不可约且可分（即 $\mathrm{char}\, F \neq 2$ 或 $\mathrm{T}(a) \neq 0$）；$m_a(X)$ 不可约且不可分（即 $\mathrm{char}\, F = 2$ 且 $\mathrm{T}(a) = 0$）；$m_a(X)$ 可约且在 F 中有两个不同的根；或者 $m_a(X)$ 在 F 中有一个二重根。两个这样的代数 A 和 A' 在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下属于同一轨道，当且仅当存在元素 $a \in A \setminus F$和 $a' \in A' \setminus F$，使得 a和 a'具有相同的范数和迹（见 4.4）。在这种情况下，代数 A 和 A' 都同构于 $F[X]/(m_a(X))$。

如果 $\dim A = 3$，那么 A 不是合成代数。因此，极化形式的限制是退化的，且根基 $R := A^{\perp} \cap A$ 并非平凡。由 6.1(a) 可知 $AR = R = RA$。

假设 $\dim R = 1$，并选择 R 在 A 中的一个向量空间补空间 B，使得 $1 \in B$。那么 B 是一个子代数，且极化形式在 B 上的限制并不退化。因此，B 是一个合成代数，而 R 是一个 B-模。由于 $\dim R = 1$，湮灭子 $\{a \in B \mid aR = \{0\}\}$ 并非平凡。因此，代数 B 不是域，而是一个分裂合成代数，并且 R 不包含可逆元（另见 6.1）。于是 $B \cong F \times F$，且 $1^{\perp} \cap B$ 中的每个非平凡元素都是可逆的。在 B中选择 $a \neq 0$，使其属于 R的湮灭子。于是 $\mathrm{N}(a) = 0 \neq \mathrm{T}(a)$，且 $M := Fa + R$是一个包含幂等元的全奇异子代数。由 5.11，我们现在推断 M属于 $Fp_0 + Fn_0$或 κ的轨道（$Fp_0 + Fn_0$）。无论哪种情况，代数 $A = F + M$ 都属于上三角矩阵代数 $F + Fp_0 + Fn_0 = F + \kappa$（$Fp_0 + Fn_0$）的轨道，证毕。

现在假设 $\dim R \geq 2$（且仍有 $\dim A = 3$）。根据 6.3，$\mathrm{N}|_A$ 的根基 Q 的维数为 2；根据 6.1，它构成一个全奇异子代数。由 5.11 可知，Q 属于 $(Fp_0 + Fn_0)w$ 的轨道。因此，正如所声称的，$A = F + Q$ 属于 $F + (Fp_0 + Fn_0)w$ 的轨道。

最后，考虑 $\dim A = 4$ 的情形。由 6.1 可知，若 $R \neq A$，则 A/R 是一个合成代数。因此 $\dim R = 4 - \dim(A/R) \in \{0, 2, 3, 4\}$。若 $\dim R = 0$，则 A 是一个合成代数，进而是一个四元数代数。

若 $\dim R = 2$，则全奇异子代数 R位于 $(Fp_0 + Fn_0)w$的轨道中，见 5.11；不失一般性，我们假设 $R = (Fp_0 + Fn_0)w$。我们有 $A \subseteq \{p_0 w, n_0 w\}^{\perp} = \mathbb{H} + R$，且 $B := A \cap \mathbb{H}$ 的维数为 2。由于 A 含有可逆元，因此 $1 \in B$。所以 B 是一个子代数。由 $B \cap R = \{0\}$ 我们推知

©by the authors

极化形式在 B 上的限制非退化。因此， B 是一个合成代数（要么是 F的可分二次扩张域，要么同构于 $F \times F$），并且 $A = B + (Fp_0 + Fn_0)w$。

考虑一个四维子代数 A' 及其 $R \subseteq A' \subseteq \mathbb{H} + R$。那么 A 和 A'作为 F-代数同构，当且仅当子代数 B 和 $B' := A' \cap \mathbb{H}$ 同构。在这种情况下，我们找到 $b \in B \setminus F$ 和 $b' \in B' \setminus F$，它们具有相同的范数（即相同的行列式）和相同的迹。因此，存在一个 $s \in \mathrm{GL}_2(F) = \mathbb{H}^\times$，使得 $sbs^{-1} = b'$。取一个上三角矩阵 $t \in \mathbb{H}(= F^{2\times 2})$，使 $\det t = \det s$。映射 $\alpha_{s,t}\colon a + xw \mapsto sas^{-1} + (txs^{-1})w$ 是 F-线性自同构，见 4.2。现在 $\alpha_{s,t}(b) = b'$，并且容易验证 $\alpha_{s,t}(R) = R$。因此$\alpha_{s,t}(A) = A'$。这就解决了断言 (d)(ii) 中 $\dim R = 2$ 的情形。属于断言 (d)(ii) 的其余情形将在下文讨论；这些情形满足 $R = A$，但 $\dim Q = 2$。

现在假设 $\dim R \geq 3$，并考虑二次型的限制 $\mathrm{N}|_A$ 的根基 $Q := \{x \in A^\perp \cap A \mid \mathrm{N}(x) = 0\}$。由 6.1 可知， Q 是一个子代数。由于 $1 \notin Q$，我们有 $\dim Q \leq 3$。

若 $\dim Q = 3$，则全奇异子代数 Q 属于海森堡代数 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0$ 的轨道（见 5.11），断言 (d)(iii) 得证。

若 $\dim Q < 3$，则 $Q \neq R$，且 $\mathrm{char}\ F = 2$。特别地，极化形式是交替的，并且 $R = A$，因为 R 在 A 中的余维是偶数。由 6.1 可知， A 是交换的。

若 $\dim Q = 0$，我们取 $b \in A \setminus F$，并注意到 $B := F + Fb$ 是 F 的一个不可分二次域扩张。对于任意 $c \in A \setminus B$，于是有 $B \cap Bc = \{0\}$，而 $A = B + Bc$ 表明代数 A 由 $\{1, b, c\}$ 生成。因此 A 是结合的、交换的，因而是 F 的一个全不可分域扩张（次数为 4，指数为 1），如 (d)(iv) 所述。

如果 $\dim Q \neq 0$，那么存在 u、$v \in A \setminus Q$，使得 $F + Fu + Fv$包含 A中 Q的一个向量空间补空间。由 $\{1, x, y\}$ 张成的子代数是结合的，而商 A/Q 是 F的全不可分域扩张。特别地，该扩张的次数是 2 的幂，因此剩下的情形是 $\dim Q = 2$。现在，由 5.11 可知， Q 属于 $(Fp_0 + Fn_0)w$的轨道，因此我们可以假设 $Q = (Fp_0 + Fn_0)w$。于是， $A \subseteq \mathbb{H} + Q$，并且 $B := A \cap \mathbb{H}$ 是一个二维子代数，尽管它不是合成代数，而是一个不可分二次域扩张。

若 A' 是另一个这样的代数（包含于 $\mathbb{H} + Q$中），我们注意到， A 同构于 A' 当且仅当 A/Q 同构于 A'/Q。因此， $A \cong A'$ 表示 $B \cong B' := A' \cap \mathbb{H}$。如上所述， B 与 B' 之间的任意代数同构都可扩张为 $\mathbb{H}$的一个代数自同构 $a \mapsto sas^{-1}$；任何这样的自同构都可扩张为 $\mathbb{O}$ 的一个自同构 $\alpha_{s,\ t}$，使得 $\alpha_{s,\ t}(Q) = Q$，并且由此可得 $\alpha_{s,\ t}(A) = A'$。至此，我们也完成了断言 (d)(ii) 的证明。

©by the authors

还需验证每个满足 $1 \in A$ 且 $\dim A \leq 4$ 的子代数 A 都是结合的。对于 (a) 和 (b) 中的情形，这显然成立。对于 (c) 中的情形，我们注意到， A 具有 $A = F + X$ 的形式，其中 X 是由两个元素生成的子代数。因此，根据 Artin 定理（见 1.4(e)）， X 是结合的， A 也同样是结合的。

在 (d) 中，四元数代数和域扩张都是结合的。对于代数$F + (n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0)$，我们利用子代数 $n_0\mathbb{O} \cap \mathbb{O}n_0$ 是结合的这一事实（它是一个海森堡代数，由 n_0w 和 $\overline{p_0}w$生成，见 3.7）。

在最后一个剩余情形中，我们必须考察 $A = B + X$，其中 $B = F + Fb \subseteq \mathbb{H}$是 $\mathbb{H} = F^{2\times 2}$ 的一个二维（结合且交换的）子代数，并且 $X =(Fp_0 + Fn_0)w$。由于对于所有的 x、$y \in X$，均有 $(\overline{yw})(xw) = 0$成立， A中的乘法由 $(a + xw)(b + yw) = ab + (ya + x\bar{b})w$给出，其中 a、$b \in B$以及 x、$y \in Fp_0 + Fn_0$。利用 B中的结合律和交换律，我们发现 A 是结合的。

□

6.5 注。 6.4(d)(ii)中的例子表明，并非每个分裂八元数代数的结合子代数都包含于某个四元数代数中。

7 结合且交换的子代数

7.1 子代数的结合性。 设 $\mathbb{O}$ 为一个八元数代数。

(a) 每个维数小于4 的子代数都是结合的。**(b)** 若 $\mathbb{O}$ 是分裂的，则确实存在维数为4 的非结合子代数，即全奇异子代数（形式为 $n\mathbb{O}$ 或 $\mathbb{O}n$，其中 $n^2 = 0 \neq n \in \mathbb{O}$）。其他所有维数为$4$ 的子代数都是结合的。**(c)** 每个维数大于4 的子代数都包含一个维数为4的非结合子代数。**(d)** 若 $\mathbb{O}$ 是分裂的，则一个给定的子代数非结合，当且仅当它包含一个极大全奇异子空间。**(e)** 若 $\mathbb{O}$ 不是分裂的，则每个真子代数都是结合的。

证明。 如果一个子代数不是全奇异的，那么它就包含 1。我们在 6.4 中已经看到，每个满足 $1 \in A$ 且维数为 $A \leq 4$ 的子代数 A 都是结合的。全奇异子代数是结合的，当且仅当其维数小于 4；见 5.11。根据 5.11.(d)，维数为 4 的全奇异子代数分别具有 $n\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O}n$ 的形式，且满足 $n^2 = 0 \neq n$。因此，断言 (a) 和 (b) 得证。

©by the authors

每个维数大于 4 的真子代数都包含一个维数为 4 的全奇异子代数（其形式为 $n\mathbb{O}$，其中 n 是某个幂零元，见 6.2）。这些子代数不是结合的。由此得到断言 (c) 和 (d)。

如果 $\mathbb{O}$ 不是分裂的，那么每个真子代数的维数至多为 4，并且除了 0 之外不存在幂零元。因此，断言 (a) 和 (b) 导出断言 (e)。 □

7.2 推论。 $\mathbb{O}$ 的一个4维子代数是结合的，当且仅当它包含一个关于其乘法的单位元。根据 *5.5*，4维子代数中的这种单位元必然等于1。

□

7.3 子代数的交换性。 设 $\mathbb{O}$ 为一个八元数代数，A 为一个子代数。如果 $\mathbb{O}$ 是分裂的，我们记为 $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}w$，其中 $\mathbb{H} = F^{2\times 2}$ 和 $w^2 = 1$。子代数 A在以下情形中是交换的：

(a) 维数 $A = 1$。

(b) 维数 $A = 2$，且 $A = F + Fa \cong F[X]/(X^2 - \mathrm{T}(a)X + \mathrm{N}(a))$。

(c) 维数 $A = 2$，且 A 属于$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道，其中代表元为$(Fp_0 + Fn_0)w$。

(d) 维数 $A = 3$，且 A 属于$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道，其中代表元为 $F + (Fp_0 + Fn_0)w$。

若特征 $F \neq 2$，则这些就是仅有的交换子代数。
若特征 $F = 2$，则还有以下情形（且无其他情形）：

(e) 维数 $A = 3$，且 A 属于$\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道，其代表元为海森堡代数 $Fn_0 + (Fp_0 + Fn_0)w$。

(f) 维数 $A = 4$，且 A 位于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 的 $B + (Fp_0 + Fn_0)w$ 轨道中，其中 $B = F + Fb$满足 $b \in (1^\perp \cap \mathbb{H}) \setminus F$。

(g) 维数 $A = 4$，且 A 是指数为 1 的全不可分域扩张。

无论如何，$\mathbb{O}$ 的每个交换子代数也都是结合的。

证明。 我们使用子代数分类，见 5.11、6.4 和 6.2。注意，$Fp_0 + Fn_0$不是交换的，事实上 $p_0n_0 = n_0 \neq 0 = n_0p_0$。因此，我们可以从子代数列表中排除每个包含与 $Fp_0 + Fn_0$ 同构的子代数，或与 $\kappa(Fp_0 + Fn_0) = F\overline{p_0} + Fn_0$ 同构的子代数的代数。特别地，注意到根据观察 $p_0 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in n_0\mathbb{H} \subseteq n_0\mathbb{O}$，$n_0\mathbb{O}$ 被排除。这就得到以下列表：

- 1维子代数：显然是交换的。

©by the authors

- 属于 Q 轨道的子代数：$=(Fp_0+Fn_0)w$：这里的乘法是平凡的，因此是交换的。

- 属于 $F+Q$轨道的子代数：这些代数是交换的，因为 Q 是交换的。

- 海森堡代数（属于 $Fn_0+Q=(n_0w)\mathbb{O}\cap\mathbb{O}(n_0w)$的轨道，见 2.7(b)）；$\{n_0,p_0w,n_0w\}$ 中元素的唯一非平凡乘积是 $n_0(p_0w)=n_0w$ 和 $(p_0w)n_0=-n_0w$。因此，当且仅当域 F 具有特征二时，海森堡代数才是交换的。

- 属于 $F+Fn_0+Q$轨道的子代数：当且仅当海森堡代数 Fn_0+Q 是交换的时，此类代数才是交换的；我们已经知道，当且仅当 $\operatorname{char}F=2$ 时，这一情况成立。

- 次数为 4 的全不可分扩张域（仅在 $\operatorname{char}F=2$ 时可能）是交换的。

- 位于 $B+Q$ 的轨道中的子代数，其中 $B\subseteq\mathbb{H}$ 或为二维合成代数，或为不可分二次域扩张。

  对于 $b\in B$ 和 $x\in Fp_0+Fn_0$，我们计算 $b(xw)=(xb)w$ 以及 $(xw)b=(x\bar{b})w$。若 $B\subseteq 1^\perp$，则对每个 $b\in B$，$\bar{b}=b$ 都成立，并且 $B+Q$ 是交换的。若 $B\not\subseteq 1^\perp$，则 B 是合成代数。因此，要么 $B\cong F\times F$，要么 B 是可分二次扩张域。在这两种情况下，我们都能找到 $b\in B$，使得 $b-\bar{b}$ 可逆，而 $b(xw)=(xw)b$ 蕴含 $x=0$。所以在这些情况下，代数 $B+Q$ 不是交换的。

我们的讨论表明，$\mathbb{O}$ 的交换子代数恰好就是定理陈述中给出的那些。由 7.1 可知，这些交换子代数实际上都是结合的。

□

8 极大子代数

8.1 子代数同构类型格。设 p,n,m 是八元数代数 $\mathbb{O}$ 中的元素（该代数必然是分裂的），满足 $p^2=p\notin\{0,1\}$, $n^2=0=m^2$，且 m,n 线性无关。此外，假设 $pn=n$ 和 $np=0=nm$（那么$mn=0$）。我们将 $S:=F+Fp\cong F\times F$ 和 $Q:=Fm+Fn$ 简记为。注意，S是分裂二维合成代数，而 Q 上的乘法是平凡的。另请注意，$T:=F+Fp+Fn$ 同构于 $F^{2\times 2}$中的上三角矩阵代数，而 $n\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n$ 是海森堡代数（见 2.7）。

设 X 是 $\mathbb{O}$中任意一个维数为 d 的子代数。我们的子代数分类（见 5.11、6.2 和 6.4）可以改述如下。

$d=1$: 那么， X属于$_F(\mathbb{O})$下 $Y\in\{F,Fp,Fn\}$ 的轨道。

$d=2$: 要么 X属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 $Y\in\{S,F+Fn,Fn+Fp,Fn+F\overline{p},Q\}$ 的轨道，要么 X是 F上的可分扩域 E，要么 char $F=2$ 且 X是 F的不可分扩域 D 。此外，任何与 E 或 D 同构的子代数，分别属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 E 或 D的轨道。

$d=3$: 那么， X属于 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 下 $Y\in\{T,F+Q,m\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n,n\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n\}$的轨道。

$d=4$: 那么， X属于 Y的轨道，使得以下任一条件成立: $Y\in\{F+(n\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n)\ n\mathbb{O}、\ \mathbb{O}n\}$, 或者以下条件之一成立:

- $Y\cong F^{2\times 2}$ 是分裂四元数代数,
- 存在一个包含于 $Q^\perp$ 中的子代数 $S\cong F\times F$，使得 $Y=S+Q$,
- Y是四元数域（在图 1 中记作 H），
- 存在一个包含于 $Q^\perp$ 中、次数为 2 的可分扩域 E，使得 $Y=E+Q$,
- 特征为 $F=2$，且存在一个包含于 $Q^\perp$ 中、次数为 2 的不可分扩域 D，使得 $Y=D+Q$,
- 特征为 $F=2$，且 Y 是一个次数为 4、指数 1 的全不可分扩域（在图 1 中记作 K）。

$d=5$: 那么 X属于 $n\mathbb{O}+\mathbb{O}n$的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道。

$d=6$: 那么 X属于 $Q^\perp=m\mathbb{O}+n\mathbb{O}=\mathbb{O}m+\mathbb{O}n$的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道。

代数 F和 Fp同构，但不在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下的同一轨道中。在其他任何情况下， $\mathbb{O}$ 的两个子代数在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$作用下处于同一轨道，当且仅当这两个子代数同构（作为抽象的 F-代数）。

考虑子代数 $X\neq F$ 和 Y^*，其中 $\dim Y^*>1$。由于每个与 Y^* 同构的子代数都位于 Y^*的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道中，当且仅当代数 Y^* 含有一个与 X 同构的子代数 Y 时，存在一个与 Y^*同构且满足 $X\subseteq X^*$ 的子代数 X^*。因此，我们可以用一个图来描述子代数之间的包含关系，其中子代数的 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$-轨道作为顶点，边表示嵌入。在图 1 中，我们进一步通过识别包含扩张域的子代数轨道来简化该图；相应顶点的标签处以双重边界标示（即 E,

©by the authors

H、 $E+Q$、 D、 K、 $D+Q$）。回顾一下，此类扩张的存在在很大程度上取决于 F 的结构（例如，若 F 是代数闭的，则不存在此类扩张）；相应的嵌入（在图 1 中以虚线表示）仅当所讨论的子代数存在时才存在。不可分扩张仅在 $\mathrm{char}\, F = 2$ 时存在，这一点以虚线边界标示（表示嵌入的边也用虚线表示）。

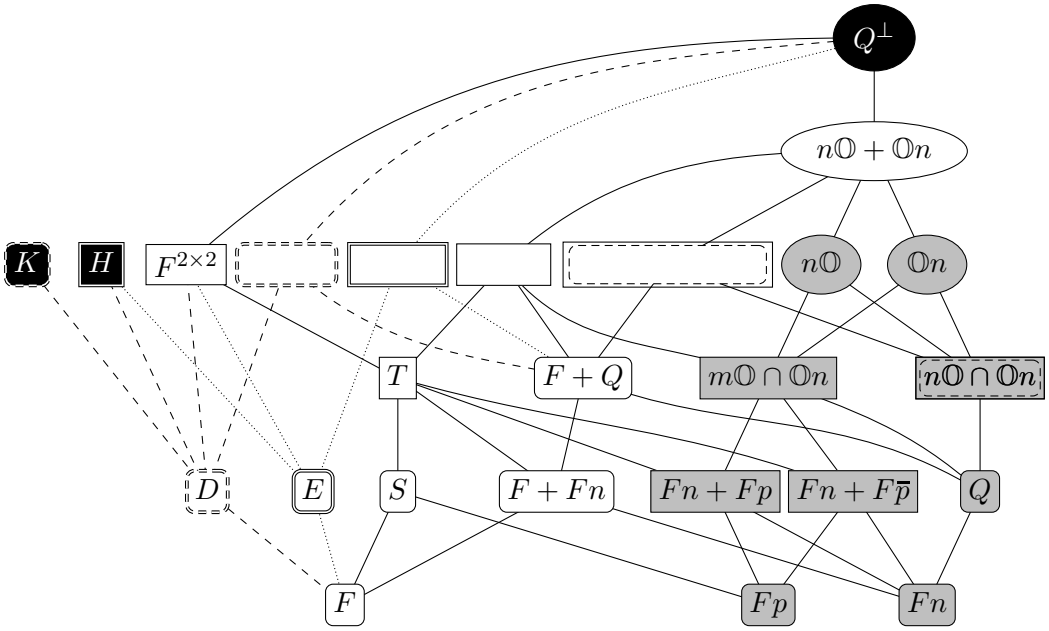

图 1：子代数轨道的格，见 8.1。

图 1 中省略了极大元 $\mathbb{O}$。极大真子代数属于带黑色标签的轨道，即由非分裂四元数子代数、次数为 4 且指数为 1 的全不可分扩张以及 $Q^\perp$所代表的轨道。灰色标签表示不含 1 的子代数（即全奇异子代数），矩形标签（相对于椭圆形标签）表示结合代数。圆角矩形标签表示交换代数（它们全都是结合的）。双线边框用于表示其存在取决于基域的子代数，虚线表示仅当 $\mathrm{char}\, F = 2$ 时才存在的子代数。最后，代数 $n\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n$和 $F+(n\mathbb{O}\cap\mathbb{O}n)$恰在 $\mathrm{char}\, F = 2$ 时为交换代数。

图 2 和图 3 给出了 $\mathrm{char}\, F \neq 2$ 的情形，以及 $\mathrm{char}\, F \neq 2$ 且 F 不允许二次域扩张的情形的较简单图。如果 F 是有限的，则必须从图 1 中省略标记为“K”或“H”的顶点。

©by the authors

8.2 注。设 $\mathbb{O}$ 为 F 上的分裂八元数代数；我们知道 $\mathbb{O}$ 在同构意义下唯一。

若 F 上确实存在一个二次扩张域（可分或不可分），则分裂四元数代数 $F^{2\times 2}$（其定义在 F 上）含有与该扩张域同构的子代数。通过对 $F^{2\times 2}$ 进行倍增构造，我们得到一个分裂八元数代数，因此可知 $\mathbb{O}$ 含有与 F 的任意二次扩张域同构的子代数。

若 F 上存在一个四元数域 H，则对 H 作适当的倍增构造可得到一个分裂八元数代数，由此可知 $\mathbb{O}$ 含有与 H 同构的子代数。然而，利用 Kaplansky 根基（参见 [14, 第 XII 章命题 6.1，第 450 页及后续页]）可以看出，确实存在一些域 F，其二次扩张并不包含于 F 上的任何四元数域之中，尽管 F 上确实存在四元数域（见 [14, 第 461] 页或 [2, 2.4]）。若 F 是这样的域，那么 F 上的分裂八元数代数既含有四元数域，也含有不包含于任何四元数域中的二次扩张，因此图 1 中 E 与 H 之间的包含关系必须谨慎解读。

最后，假设存在一个在 F 上次数为 4、指数 1 的全不可分扩域 K。那么 [7, 4.3, 4.6] 表明，存在一个包含与 K 同构的子代数的分裂八元数代数。

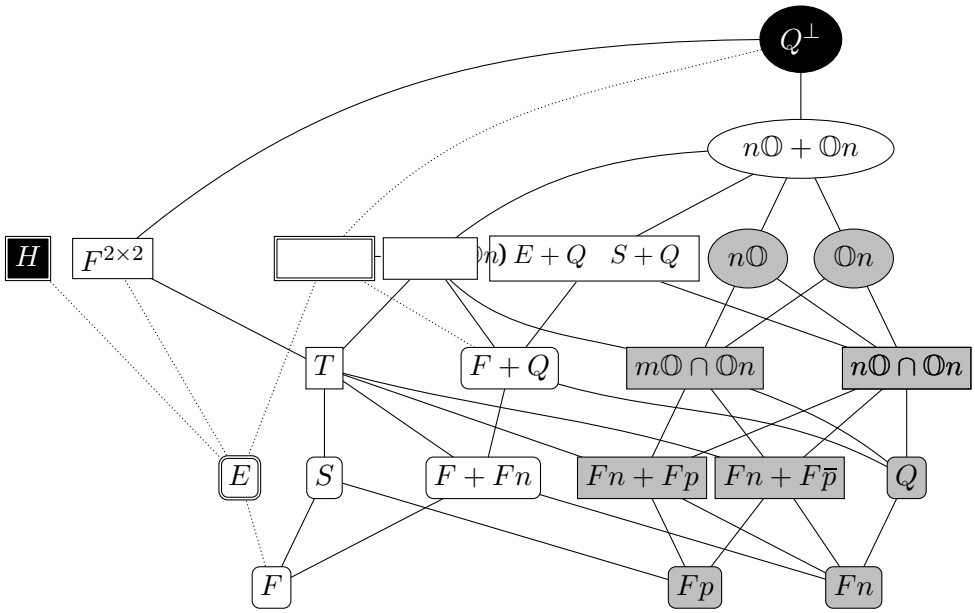

图 2：当 $\operatorname{char} F \neq 2$ 时的子代数轨道格，见 8.1。

©by the authors

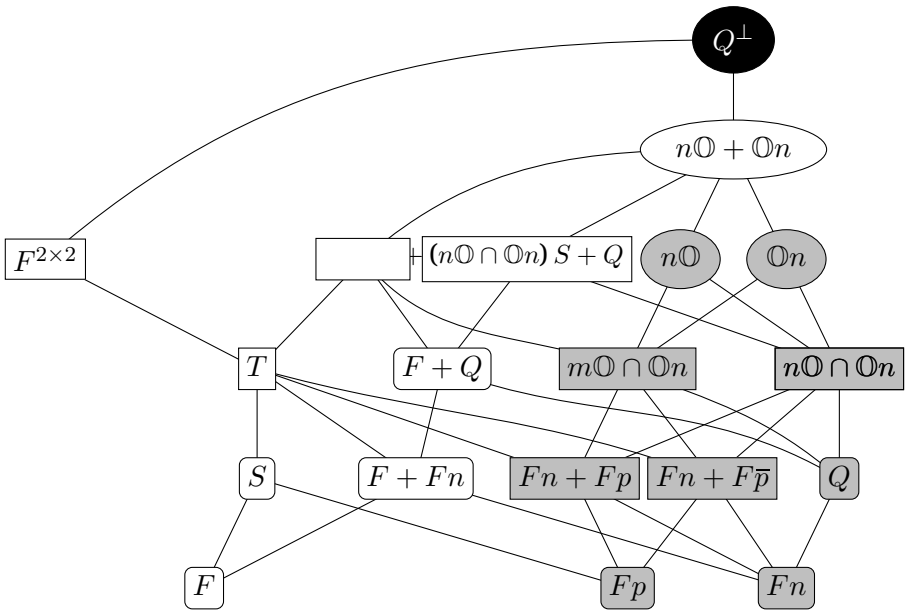

图3：当 F 为二次闭且 char $F\neq 2$ 时的子代数轨道格，参见 8.1。

8.3 开放问题。对于给定域 F 上的八元数代数 $\mathbb{O}$ 中的每个子代数 X：

(a) 确定 Aut(X) 的完整群，即 X 的所有 $\mathbb{Z}$-线性自同构组成的群，以及 $\mathrm{Aut}_F(X)$，即 X 的所有代数自同构组成的群。**(b)** 分别确定 X 在 Aut($\mathbb{O}$) 和 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})$ 中的稳定子 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})_X$ 和 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})_X$。**(c)** 分别确定由 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})_X$ 和 $\mathrm{Aut}_F(\mathbb{O})_X$ 在 Aut(X) 中诱导的子群。

©by the authors

参考文献

[1] C. Arf，关于特征 *2* 的 *K* ¨域上的二次型的研究¨，J. Reine Angew. Math. **183** (1941), 148–167, doi:10.1515/crll.1941.183.148. MR 0008069. Zbl 0025.01403. JfM 67.0055.02.[2]K. J. Becher 和 D. B. Leep，二次域扩张的 *Kaplansky* 根基，J. Pure Appl. Algebra**218** (2014), no. 9, 1577–1582, doi:10.1016/j.jpaa.2013.12.009. MR 3188856. Zbl 1346.11031.[3] A. Blunck、N. Knarr、B. Stroppel 和 M. J. Stroppel，由八元数生成的相似变换传递群，J. Group Theory **21** (2018), no. 6, 1001–1050, doi:10.1515/jgth-2018-0018. MR 3871471. Zbl 1439.20059.[4] P. M. Cohn，进阶代数及其应用，Springer-Verlag London Ltd.，伦敦，2003，doi:10.1007/978-1-4471-0039-3. MR 1953987. Zbl 1006.00001.[5]J. A. Dieudonn´e，经典群的几何´´，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.) 5，Springer-Verlag，柏林，1955，doi:10.1007/978-3-662-59144-4. MR 0072144. Zbl 0221.20056.[6] S. M. Gagola, III，八元数的极大子代数，J. Pure Appl. Algebra**217** (2013), no. 1, 20–21, doi:10.1016/j.jpaa.2012.03.015. MR 2965899. Zbl 1323.17004.[7]S. Garibaldi 和 H. P. Petersson，*Hensel* 域上的野 *Pfister* 型，KK 理论与圆锥除代数，J. Algebra**327** (2011), 386–465, doi:10.1016/j.jalgebra.2010.07.039. MR 2746044. Zbl 1222.17009.[8] A. N. Grishkov、M. d. L. M. Giuliani 和 A. V. Zavarnitsine，有限域上 *Cayley* 代数的子代数分类，J. Algebra Appl. **9** (2010), no. 5, 791–808, doi:10.1142/S0219498810004233. MR 2726555. Zbl 1209.17026.[9]L. C. Grove，经典群与几何代数，Graduate Studies in Mathematics 39，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002，doi:10.1090/gsm/039. MR 1859189. Zbl 0990.20001.

[10] N. Jacobson，《基础代数》第二卷，W. H. Freeman and Company，纽约，第二版，1989 年。MR1009787。Zbl 0694.16001。

©by the authors

[11]N. Knarr 和 M. J. Stroppel，《特征二 Mou-fang 平面中的 Baer 对合与极性》，Adv. Geom. **13** （2013），第 3 期，533–546，doi:10.1515/advgeom-2012-0016。MR 3100925。Zbl 06202450。

[12]N. Knarr 和 M. J. Stroppel，*Moufang* 平面的极性和平面共线变换，Monatsh. Math. **169** (2013)，第 3-4 期，383–395，doi:10.1007/s00605-012-0409-6。MR 3019290。Zbl 06146027。[13] N. Knarr 和 M. J. Stroppel，八元数域的范数形式的子型，Arch. Math. (Basel) **110** (2018)，第 3 期，213–224，doi:10.1007/s00013-017-1129-x。MR 3761133。Zbl 06844626。[14]T. Y. Lam，域上二次型引言，Graduate Studies in Mathematics 67，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005，doi:10.1090/gsm/067。MR 2104929。Zbl 1068.11023。[15] H. M¨ aurer，四元数除环¨，Math. Semesterber.**46** (1999)，第 1 期，93–96，doi:10.1007/s005910050055。MR 1681303。Zbl 0937.11055。[16] R. Moufang，替代域¨及完全四边形定理¨ (D_9)，Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933)，207–222，doi:10.1007/BF02940648。Zbl 0007.07205。JfM 59.0551.03。[17]H. P. Petersson，八元数的极大子代数，J. Pure Appl. Algebra **217**(2013)，第 9 期，1700–1701，doi:10.1016/j.jpaa.2012.12.004。MR 3042630。Zbl 1323.17005。[18] G. Pickert，射影平面，Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften i n Einzeldarstellungen mit besonderer Ber¨ücksichtigung der Anwendungsgebiete LXXX，Springer-Verlag，柏林，1955。MR 0073211。Zbl 0066.38707。[19]M. L. Racine，关于极大子代数，J. Algebra **30** (1974)，155–180，doi:10.1016/0021-8693(74)90198-7。MR 349771。Zbl 0282.17009。[20] R. D. Schafer，非结合代数导论，Pure and Applied Mathe- matics 22，Academic Press，纽约，1966。MR 0210757。Zbl 0145.25601。[21] G. J. Schellekens，关于一种六边形结构。*I*，Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A65 = Indag. Math. **24** (1962)，201–217。doi:10.1016/S1385-7258(62)50019-X，MR 0143075。Zbl 0105.13001。

©by the authors

[22] T. A. Springer 和 F. D. Veldkamp，八元数、*Jordan*代数和例外群，Springer数学专著，Springer-Verlag，柏林，2000，doi:10.1007/978-3-662-12622-6。MR1763974。Zbl 1087.17001。

[23] J. Tits 和 R. M. Weiss，*Moufang*多边形，Springer数学专著，Springer-Verlag，柏林，2002。MR1938841。Zbl 1010.20017。

[24] F. van der Blij 和 T. A. Springer，八度数与三元性，Nieuw Arch. Wisk. (3) **8**(1960)，158–169。MR0123622。Zbl 0127.11804。

[25]E. Witt，任意域上的二次型理论¨*orpern*，J. Reine Angew. Math. **176** (1937)，31–44，doi:10.1515/crll.1937.176.31，https://gdz.sub.uni-goettingen.de/download/pdf/PPN243919689_0176/LOG_0008.pdf。MR 1581519。Zbl 0015.05701。JfM 62.0106.02。

Norbert Knarr、
Markus J. Stroppel

LExMath 学院¨ 8 斯图加特大学¨ 70550 斯图加特
stroppel@mathematik.uni-stuttgart.de

©by the authors