arXiv:2303.00336v1 [math.DS] 1 Mar 2023

带有相对论修正的开普勒问题的给定能量周期解

Alberto Boscaggin、Walter Dambrosio 和 Guglielmo Feltri n

摘要。 我们研究平面上两种不同的相对论版本的开普勒问题：第一种涉及相对论微分算子，第二种涉及 Levi-Civita 对通常引力势所作的修正。在此类方程中加入小的外部扰动后，我们考察是否存在给定能量的周期解，这些解从未扰动问题的周期不变环面处分岔而来。我们的主要工具是 Weinstein 提出的周期流形分岔理论，并将其应用于满足通常 KAM 等能非退化条件的近可积哈密顿系统。

数学主题分类（2020）。 34C25,70H08, 70H12, 83A05,83C10.

关键词。 相对论开普勒问题、周期解、分岔、近可积哈密顿系统、等能 KAM 理论。

1. 引言

经典力学中的开普勒问题研究质量为 m 的非吸引体在第二个固定物体的引力场中的运动。根据牛顿定律，该问题可由以下方程描述：

$$m\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^3}, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.1}$$

其中 $\alpha = GMm$， G 为引力常数， M 为第二个物体的质量（为简便起见，将其置于原点）， $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，例如参见 [11, 21]。

本文是在国家数学分析、概率及其应用小组（GNAMPA）和意大利高等数学研究所（INdAM）的支持下完成的。**预印本 – 2023年3月**。

为将相对论效应纳入上述问题，人们提出了方程 (1.1) 的若干变体。第一个变体是在狭义相对论的理论框架下提出的，源于对相对论动能的使用

$$K(\dot{x}) = mc^2\big(1 - \sqrt{1 - |\dot{x}|^2/c^2}\big)$$

而非通常的形式，其中 $c > 0$ 是光速（注意，对于 $c \to +\infty$， $K(\dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + o(c^{-2})$）；牛顿引力能保持不变，因此相应的欧拉–拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - |\dot{x}|^2/c^2}}\right) = -\alpha\,\frac{x}{|x|^3}, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.2}$$

另见文献 [2, 9, 14, 16, 19] 等。方程 (1.1) 的第二种相对论修正形式，则是在保留通常的动能的同时，对引力势进行修正：具体而言，

$$V(x) = -\frac{\kappa(c)}{|x|} - \frac{\lambda(c)}{|x|^2},$$

其中 $\kappa(c)$ 和 $\lambda(c)$ 是适当的正数常数，满足如下性质： $\kappa(c) \to \alpha$，且当 $c \to +\infty$ 时， $\lambda(c) \to 0$ 。这种对牛顿势进行的临时修正最初由 Levi-Civita [17] 提出，其原因在于相应的方程

$$m\ddot{x} = -\kappa(c)\frac{x}{|x|^3} - 2\lambda(c)\frac{x}{|x|^4}, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.3}$$

结果与广义相对论的理论相符，例如参见 [13,第 12.3 B 章]。

除了在物理学界广受认可之外，方程 (1.2) 和 (1.3) 也引起了动力系统和非线性分析领域数学家的关注：在这一背景下，主要问题是要理解，当允许某个系数随时间变化，和／或假设除牛顿引力之外还有外力作用于物体时，未受扰动的动力学有哪些方面得以保留。关于方程 (1.3) 的这方面研究历史更为悠久，其中包括 [1, 12, 15, 20]。另一方面，或许由于所涉及的微分算子 [18], 具有非线性，方程 (1.2) 受到关注的时间似乎较晚，我们可以列举论文[6, 8, 7, 22, 26]。

沿着这一研究思路，本文在维数为 $d = 2$ 的情形下，考虑上述方程的以下扰动形式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - |\dot{x}|^2/c^2}}\right) = -\alpha\,\frac{x}{|x|^3} + \varepsilon\,\nabla U(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \tag{1.4}$$

and

$$m\ddot{x} = -\kappa(c)\frac{x}{|x|^3} - 2\lambda(c)\frac{x}{|x|^4} + \varepsilon\,\nabla U(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \tag{1.5}$$

其中， ε 是一个小的实参数， U 是一个 $\mathcal{C}^\infty$ 外势。在这种设定下，我们关注的是：从相应的未扰动问题（$\varepsilon = 0$）的非圆形周期解分岔而来的周期解是否存在。

值得注意的是，[6, 5]最近研究了一个密切相关的问题：然而，该研究要求分岔解具有给定周期$T > 0$，而我们在此关注与之互补且更为微妙的情形，即解具有给定能量 $H \in \mathbb{R}$。这意味着

$$\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\kappa(c)}{|x(t)|} - \frac{\lambda(c)}{|x(t)|^2} - \varepsilon U(x(t)) = H,$$

当 $x(t)$ 是较为经典的 (1.5) 的一个解时；另一方面，鉴于 (1.4) 的拉格朗日结构，这意味着

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}} - 1\right) - \frac{\alpha}{|x|} - \varepsilon U(x) = H,$$

每当 $x(t)$ 是 (1.4) 的解时，情况亦然。原则上，能够产生非圆形周期解的 H 值并不为人所知，必须通过相平面分析论证来刻画。

完成这一初步步骤后，证明我们结果的主要工具是 A. Weinstein 在一系列论文 [23, 24, 25] 中提出的一种抽象的周期流形分岔理论。粗略地说，该理论保证：对于辛流形 M 上的哈密顿系统 $\dot{z} = X_{\mathcal{K}_0}(z)$，只要存在一个具有能量 H 的非退化周期解流形 Σ，那么该系统就存在有限个能量为 $\mathcal{H}_\varepsilon = H$ 的周期解

$$\dot{z} = X_{\mathcal{H}_\varepsilon}(z)$$

只要受扰哈密顿量 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 足够接近未受扰哈密顿量 $\mathcal{K}_0$。我们指出，在这一固定能量背景下，非退化性的概念相当微妙，文献中已有若干彼此不等价的定义，见注 2.1。

在本文中，我们将 Weinstein 理论与哈密顿动力学中的工具结合起来。事实上，方程 (1.2) 和 (1.3) 都可视为具有两个自由度 x和 p的哈密顿系统，其中，在较经典的方程 (1.3) 情形下，动量 p 由$p = m\dot{x}$ 给出，而对于方程 (1.2)，则有 $p = m\dot{x}/\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}$。由于系统具有时间平移和空间旋转不变性，可以找到两个相互独立的积分：能量和角动量 $x \wedge p$。因此，假设存在一个能量为 H的周期解 x，那么用于应用抽象分岔理论的周期流形 Σ，就是包含 x 及其所有时间平移和空间旋转像的二维环面。转换为作用-角变量后，非退化条件就成为 KAM 理论的等能版本中使用的标准非退化条件，参见例如 [3, 10]。通过显式计算，很容易验证该条件在 (1.2) 和 (1.3) 两种情形下均成立，从而完成证明。

本文的安排如下。第 2 节回顾 Weinstein 理论，重点讨论我们应用所需的近可积哈密顿系统情形。随后，第 3 节陈述并证明关于方程 (1.4) 和 (1.5) 的主要结果。

2. 预备知识

本节陈述并证明一个结果：对于近可积哈密顿系统，可积未扰动问题的周期环面会分岔出给定能量的周期解。该结果是 A. Weinstein [23, 24, 25] 提出的周期流形一般分岔理论的一个推论。为方便读者，我们先在第 2.1 节简要回顾这一理论，再在第 2.2 节给出我们的结果（定理 2.2）。

2.1. Weinstein 的一个抽象分岔结果

设 (M,ω) 是一个辛流形。给定 $\mathcal{K}_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$，我们考虑如下哈密顿系统

$$\dot{z} = X_{\mathcal{K}_0}(z), \tag{2.1}$$

其中，按照惯例，$X_{\mathcal{K}_0}$ 表示与 $\mathcal{K}_0$ 相关联的哈密顿向量场（即，对于 M 上的每个向量场 Y，都有 $\omega(X_{\mathcal{K}_0}, Y) = \mathrm{d}\mathcal{K}_0(Y)$）。对于每个 $\xi \in M$，满足 $z(0) = \xi$ 的方程 (2.1) 的唯一（局部）解记为 $z(t;\xi)$；众所周知，哈密顿量 $\mathcal{K}_0$ 的值沿着 $z(t;\xi)$ 保持不变，即

$$\mathcal{K}_0(z(t;\xi)) = H, \quad \text{for every } t,$$

其中 $H = \mathcal{K}_0(\xi)$。

我们关注满足条件 H 的取值，使得水平集 $\mathcal{K}_0^{-1}(H)$ 包含式（2.1）的非恒定周期解。更确切地说，定义能量为 H 的周期点集 $\mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$ 为由满足以下条件的有序对 $(\xi,\tau) \in M \times (0,+\infty)$ 构成的集合：$z(t;\xi)$ 是式（2.1）的能量为 H 的非恒定 τ-周期解，即

$$z(\tau;\xi) = \xi, \qquad \mathcal{K}_0(\xi) = H, \qquad X_{\mathcal{K}_0}(\xi) \neq 0.$$

顺便指出，τ 不必是最小周期；事实上，如果 (ξ,τ) 属于 $\mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$，那么对于每个整数 $N \geq 1$，$(\xi, N\tau)$ 也属于 $\mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$。此外，显然，如果 (ξ,τ) 属于 $\mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$，那么一维环面 $\{(z(t;\xi)\ \tau)\colon\ t \in [0,\tau)\}$ 也属于 $\mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$。

如果集合 $\Sigma \subset \mathrm{Per}_{\mathcal{K}_0}^H$ 满足以下条件，我们就称其为 周期流形：

（i） Σ 是 $M \times \mathbb{R}$的闭子流形，（ii）投影 π在 Σ 上的限制 $M \times \mathbb{R} \to M$ 是一个嵌入。

请注意，大致而言，条件（ii）确保对于周期点（ξ，τ）$\in \Sigma$，其周期必须唯一确定（尽管不一定是最小周期，并且一般而言会光滑地依赖于 ξ）。

为确保能量为 H的周期解从周期流形 Σ 发生分岔，还需施加一个至关重要的附加假设，即非退化条件。为引入这一条件，对于任意（ξ，τ）$\in \Sigma$，我们考虑 ξ 处所谓的单值算子，即由下式给出的线性算子 P：$T_\xi M \to T_\xi M$

$$P\eta = \partial_\zeta z(\tau;\zeta)|_{\zeta=\xi}\,\eta.$$

众所周知，$X_{\mathcal{K}_0}(\xi)$ 和 $T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$ 在 P 下均保持不变；此外，$X_H(\xi) \in T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$（顺便指出，由于 $X_{\mathcal{K}_0}(\xi) \neq 0$，水平

集 $\mathcal{K}_0^{-1}(H)$ 在 ξ 周围是一个子流形，因此切空间 $T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$ 有明确定义）。基于此，若周期流形 Σ 满足以下条件，则称其为非退化：

(iii) 对每个 $(\xi,\ \tau) \in \Sigma$ 以及每个 $\eta \in T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$，都有

$$\eta \in T_\xi\pi(\Sigma) \quad \Longleftrightarrow \quad \eta = P\eta + \lambda X_H(\xi), \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{R},$$

（参见 [23, 引理 1.1]）。

注 2.1. 乍看之下，上述非退化条件似乎相当神秘，因为原则上，人们可能会认为不动点 P 的特征子空间 $\mathcal{E}' \subset T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$ 会发挥作用。之所以必须考虑更大的空间

$$\mathcal{E} = \left\{\eta \in T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H)) \colon \eta = P\eta + \lambda X_H(\xi),\ \text{for some } \lambda \in \mathbb{R}\right\} \supset \mathcal{E}'$$

是因为我们讨论的是周期未预定的周期解。事实上，若 $(\xi(s)\ \tau(s))$ 是 Σ 中的一条光滑曲线，且 $(\xi(0)\ \tau(0)) = (\xi,\ \tau)$，那么对 s 求导并取 $s = 0$，得到

$$\xi'(0) = P\xi'(0) + \tau'(0)X_H(\xi(0)),$$

其中，一般而言，$\tau'(0)$ 不必为零。这表明

$$T_\xi\pi(\Sigma) \subset \mathcal{E}$$

因此，非退化条件要求 $\mathcal{E}$ 中的所有向量都属于 $T_\xi\pi(\Sigma)$。我们强调，另一方面，由于要求周期解具有给定能量，因此考虑的单值算子 P 并非作用于整个 $T_\xi M$，而是作用于其不变子空间 $T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H))$ 上。

不过，我们指出，文献中还考虑了其他关于具有给定能量的周期问题的非退化条件。例如，在 [24] 中，要求 1 作为 P 的特征值时的代数重数等于 Σ 的维数。正如我们将在备注 2.3 中看到的，这一更强的假设在我们将在第 2.2 节中展开的应用中并不满足。$\triangleleft$

现在我们可以陈述关于从系统（2.1）的非退化周期流形分岔出周期解（具有给定能量）的结果；在 $n = 1$ 的情形下，该结果对应于 $\mathbb{Z}_n$ 群作用的 [23, 定理 1。4]

定理 2.1。设 (M, ω) 是一个辛流形，且形式 ω 是恰当的，设 $\mathcal{K}_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$，并设 $\Sigma \subset \mathrm{Per}^H_{\mathcal{K}_0}$ 是一个非退化周期流形，其中某个 $H \in \mathbb{R}$ 成立。最后，考虑函数 $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R})$，使得 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{K}_0$，其中 $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}(\cdot, \varepsilon)$。然后，令 m 表示大于或等于 $\mathrm{Cat}(\Sigma)/2$ 的最小整数，对于 Σ 的任意邻域 $\mathcal{U} \subset M \times (0, +\infty)$，存在 $\varepsilon^* > 0$，使得当 $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ 时，存在 τ_1、……、$\tau_m > 0$，并且存在 z_1、……、z_m 个彼此不同的哈密顿系统周期解

$$\dot{z} = X_{\mathcal{H}_\varepsilon}(z)$$

使得，对于每个 $i = 1$、……、m：

(I) $\mathcal{H}_\varepsilon(z_i(t)) = H$，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，(II) τ_i 都是 z_i 的一个周期，

(III) $\{(z_i(t), \tau_i) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{U}$.

注意，(III)为轨道 $\{z_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 M 上的位置以及周期 τ_i 提供了局部化信息，因此可以任意选取接近未扰动问题解的轨道和周期。我们还指出，实际上，辛形式 ω 上的恰当性条件可以去除，正如稍后在 [25] 中所示。

2.2. 从周期不变环面分岔

设 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 为一个开集，并设 $\mathcal{K}_0 \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R} \colon \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为$\mathcal{C}^\infty$ 函数；此外，我们假设 $\mathcal{R}$ 关于每个变量 φ_i 均为 2π-周期的，其中$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$。定义辛形式

$$\omega = \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}I \tag{2.2}$$

并且，对每个 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，函数 $\mathcal{H}_\varepsilon \colon \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{H}_\varepsilon(I, \varphi) = \mathcal{K}_0(I) + \varepsilon \mathcal{R}(I, \varphi),$$

相对于由形式 ω 诱导的辛结构，与哈密顿量 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 相关联的哈密顿系统可写为

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon \nabla_\varphi \mathcal{R}(I, \varphi), \\ \dot{\varphi} = \nabla \mathcal{K}_0(I) + \varepsilon \nabla_I \mathcal{R}(I, \varphi). \end{cases} \tag{2.3}$$

对于 $\varepsilon = 0$，系统 (2.3) 退化为作用-角变量中的完全可积系统

$$\begin{cases} \dot{I} = 0, \\ \dot{\varphi} = \nabla \mathcal{K}_0(I), \end{cases} \tag{2.4}$$

其解表示为

$$I(t) = I^*, \quad \varphi(t) = \varphi^* + t \nabla \mathcal{K}_0(I^*), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

其中 $(I^*, \varphi^*) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$ 初始数据。

下文中，(2.3) 表示相应流形上的哈密顿系统在覆盖空间中的提升

$$M = \mathcal{D} \times \mathbb{T}^n, \tag{2.6}$$

其中 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ 是 n 维环面。因此，如果 (2.3) 的解在 M 上的投影是周期的，也就是说，如果存在 $\tau^* > 0$ 使得

$$I(\tau^*) = I(0), \qquad \varphi(\tau^*) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}^n.$$

因此，如果 $I^* \in \mathcal{D}$ 和 $\tau^* > 0$ 满足

$$\tau^* \nabla \mathcal{K}_0(I^*) \in 2\pi\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \tag{2.7}$$

and 如果 τ^* 是具有上述性质的最小正数，那么环面 us

$$\mathcal{T}_{I^*} = \{I^*\} \times \mathbb{T}^n \tag{2.8}$$

被填 满了系统 (2.4) 的最小周期为 τ 的非恒定周期解 *.

在此设定下，我们关注方程 (2.3) 的给定能量周期解的存在性，这些解从环面 $\mathcal{T}_{I^*}$分岔而来。我们的结果如下。

定理 2.2。 设条件(2.7) 成立，并且

$$\det\begin{pmatrix}\nabla^2\mathcal{K}_0(I^*) & \nabla\mathcal{K}_0(I^*)^\intercal\\ \nabla\mathcal{K}_0(I^*) & 0\end{pmatrix}\neq 0, \tag{2.9}$$

其中 $\nabla\mathcal{K}_0(I^*)$ 表示一个行向量。令 $H^*=\mathcal{K}_0(I^*)$，并令 m 为大于或等于$(n+1)/2$的最小整数。那么，对于每个 $\varsigma>0$，都存在 $\varepsilon^*>0$，使得如果 $|\varepsilon|\le\varepsilon^*$，则存在 τ_1、……、$\tau_m>0$，并存在(I_1,φ_1)……、(I_n,φ_n)个彼此不同的周期解，它们都是哈密顿系统(2.3) 的解，并且对于每个 i =1、……、m:

(I) $\mathcal{K}_\varepsilon(I_i(t)\ \varphi_i(t))=H^*$，对于每个 $t\in\mathbb{R}$，

(II) τ_i 是(I_i,φ_i)的最小周期，(III) 条件

$$|\tau_i-\tau^*|<\varsigma \tag{2.10}$$

and

$$|I_i(t)-I^*|<\varsigma,\quad |\varphi_i(t)-\varphi_i(0)-t\,\nabla\mathcal{K}_0(I^*)|<C_*\varsigma,\quad \forall\, t\in[0,\tau_i], \tag{2.11}$$

均成立，其中 $C_*>0$ 是一个仅依赖于 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{R}$的常数。

证明。 将 (2.3) 视为辛流形 (M,ω) 上的哈密顿系统，其中 M 和 ω 分别如 (2.6) 和 (2.2) 所示，并注意到 ω 在 M 上是恰当的，我们将采用如下选择应用定理 2.1:

$$\Sigma=\mathcal{T}_{I^*}\times\{\tau^*\}\subset \mathrm{Per}^{H^*}_{\mathcal{K}_0},$$

$\mathcal{T}_{I^*}$ 如 (2.8) 所示。当然， Σ 与一个 n 维环面微分同胚，因此条件 (i) 成立；此外，由于每个在 $\mathcal{T}_{I^*}$ 上的解的周期都恒等于 τ^*，条件 (ii) 显然满足。

因此，只需检查非退化条件 (iii) 是否成立。为此，固定 $(\xi,\tau)\in\Sigma$，即 $\tau=\tau^*$ 和 $\xi=(I^*,\varphi)$，其中某个 $\varphi\in[0,2\pi)$。于是，

$$T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H^*))=\big\{\eta=(v,\phi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\colon\langle\nabla\mathcal{K}_0(I^*),v\rangle=0\big\}$$

当然，

$$T_\xi\pi(\Sigma)=\{0\}\times\mathbb{R}^n.$$

另一方面，

$$X_{\mathcal{K}_0}(\xi)=(0,\nabla\mathcal{K}_0(I^*)),$$

而 回顾（2.5），我们很容易推得单值算子 P 由 b 给出 y

$$P\eta=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} & 0\\ \tau^*\nabla^2\mathcal{K}_0(I^*) & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\end{pmatrix}\eta=(v,\tau^*\nabla^2\mathcal{K}_0(I^*)v+\phi), \tag{2.12}$$

对每个 $\eta=(v,\phi)\in T_\xi(\mathcal{K}_0^{-1}(H^*))$。因此

$$(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}-P)\eta=(0,\tau^*\nabla^2\mathcal{K}_0(I^*)v)$$

因此，条件（iii）成立当且仅当，给定 $\lambda\in\mathbb{R}$，满足以下条件的唯一向量$v\in\mathbb{R}^n$

$$\tau^*\nabla^2\mathcal{K}_0(I^*)v=\lambda\nabla\mathcal{K}_0(I^*)$$

并且满足 $\langle\nabla\mathcal{K}_0(I^*)\ v\rangle=0$ 是向量 $v=0$。

反设情况并非如此。因此，令 $\lambda' = -\lambda/\tau^*$，我们找到了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中线性齐次系统的一个非平凡解 $(v,\ \lambda')$，其系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 \mathcal{K}_0(I^*) & \nabla \mathcal{K}_0(I^*)^\intercal \\ \nabla \mathcal{K}_0(I^*) & 0 \end{pmatrix},$$

从而与假设 (2.9) 矛盾。

综上，定理 2.1 的所有假设均得到满足。因此，记 m 为大于或等于 $\mathrm{Cat}(\Sigma)/2 = \mathrm{Cat}(\mathbb{T}^n)/2 = (n+1)/2$的最小整数，给定任意 $\varsigma > 0$，我们可以考虑由下式给出的 U 的开邻域 Σ

$$U = B_\varsigma(I^*) \times \mathbb{T}^n \times (\tau^* - \varsigma, \tau^* + \varsigma)$$

并应用定理 2.1，找到满足 (2.10) 的 $|\varepsilon| \le \varepsilon^*$、$m$ 个数 $\tau_i > 0$ 以及系统 (2.3) 的 m 个解 (I_i, φ_i)，其周期为 τ_i，能量为 H，并满足 (2.11) 中的第一个条件。现在我们还要证明条件 (2.11) 得到满足。为此，不妨设 $\varepsilon^* \le \varsigma$，首先注意到，(2.11) 中的第一个条件，结合 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{R}$ 的正则性，可推出

$$|\nabla \mathcal{K}_0(I_i(t)) - \nabla \mathcal{K}_0(I^*)| < \frac{C_*}{2\tau_i}\varsigma, \quad \text{for every } t \in [0, \tau_i],$$

并且

$$|\nabla_I \mathcal{R}(I_i(t), \varphi_i(t))| < \frac{C_*}{2\tau_i}, \quad \text{for every } t \in [0, \tau_i],$$

其中，$C_* > 0$ 是仅取决于 $\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{R}$的常数。由于

$$\begin{aligned} &\varphi_i(t) - \varphi_i(0) - t\,\nabla \mathcal{K}_0(I^*) = \\ &= \int_0^t \big(\dot\varphi_i(s) - \nabla \mathcal{K}_0(I^*)\big)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \big(\nabla \mathcal{K}_0(I_i(s)) - \nabla \mathcal{K}_0(I^*)\big)\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^t \nabla_I \mathcal{R}(I_i(s), \varphi_i(s))\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

因此我们有

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(0) - t\,\nabla \mathcal{K}_0(I^*)| \le C_* \varsigma, \quad \text{for every } t \in [0, \tau_i],$$

如所愿。

因此，剩下要证明的是，τ_i 是$(I_i,\ \varphi_i)$的最小周期。为此，我们首先注意到，(2.10)和(2.11)表明，当 ς 足够小时，

$$\varphi_i(\tau_i) - \varphi_i(0) = \tau^* \nabla \mathcal{K}_0(I^*).$$

现在，反设周期 τ_i 不是最小周期，即对于某个整数 $\ell \ge 2$，τ_i/ℓ也是一个周期。因此，向量$\varphi_i(\tau_i) - \varphi_i(0)$的两个分量都必须是 ℓ的倍数，从而

$$\frac{\tau^*}{\ell} \nabla \mathcal{K}_0(I^*) \in 2\pi\,\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

这与以下事实相矛盾：τ^* 是满足 (2.7) 的最小数（也就是说，τ^* 不是未扰动环面 $\mathcal{T}_{I^*}$ 上解的最小周期）。□

注 2.2。在第 3 节中，我们将把定理 2.2 应用于两个自由度的情形，即 $n = 2$。很容易看出，在这种情况下，非退化条件 (2.9) 等价地写为

$$\langle \nabla^2 \mathcal{K}_0(I^*)(\partial_2 \mathcal{K}_0(I^*), -\partial_1 \mathcal{K}_0(I^*)), (\partial_2 \mathcal{K}_0(I^*), -\partial_1 \mathcal{K}_0(I^*)) \rangle \neq 0. \tag{2.13}$$

我们还明确指出，方程 (2.3) 的分岔周期解数量为 2。

◁

注 2.3. 由 (2.12) 可立即得出，P 的唯一特征值是 1；因此，其代数重数为 $2n - 1$，该数值（对于 $n \geq 2$）严格大于流形 Σ的维数 n。因此，在我们的设定下，[24] 的非退化条件不成立，参见注 2.1。◁

3. 主要结果

本节中，我们应用定理 2.2，研究引言中描述的两个相对论问题的周期解分岔：带有列维-奇维塔修正的开普勒问题 (1.5)，以及带有相对论微分算子 (1.4) 的开普勒问题。

这两个问题具有一些共同的结构特征，因此我们可以采用统一的策略来处理。事实上，它们都有哈密顿形式，而且由于存在两个对合的独立第一积分（能量和角动量），未扰动问题都是可积的。

在这两种情况下，构造作用-角变量都基于对极坐标下解的径向分量进行相平面分析。

为了应用定理 2.2，我们首先刻画存在周期解的能量/角动量组合，然后直接证明非退化条件 (2.13) 成立。

3.1. 带有 Levi-Civita 修正的开普勒问题

本节讨论如下问题

$$m\ddot{x} = -\kappa \frac{x}{|x|^3} - 2\lambda \frac{x}{|x|^4} + \varepsilon \nabla U(x), \tag{3.1}$$

其中 $m > 0$、$\kappa > 0$、$\lambda > 0$、$U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，且 $\varepsilon \in \mathbb{R}$。

我们的结果如下（目前，我们不对常数 κ 和 λ作任何物理解释：这一方面将在引出推论 3.1 的讨论中处理）。

定理 3.1. 设 $H^* < 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$。那么，对每个 $\varsigma > 0$，都存在 $\varepsilon^* = \varepsilon^*(N, \varsigma) > 0$，使得对每个 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，在 $|\varepsilon| \leq \varepsilon^*$ 的条件下，方程 (3.1) 至少有 $2N$个能量为 H^*的周期解 $x_1^i, \ldots, x_N^i$, $i = 1, 2$。

此外，对于每个 $j = 1, \ldots, N$和 $i = 1, 2$，解 x_j^i 的最小周期为$T_{i,j}$，满足

$$\left| T_{i,j} - \frac{\pi\kappa\sqrt{m}}{\sqrt{2}(-H^*)^{3/2}} \right| < \varsigma$$

且其最小周期内的绕数为

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{-2H^*}}{\kappa}\sqrt{2\lambda+\frac{\kappa^2}{-2H^*}}\right\rfloor + j,$$

其中，$\lfloor\cdot\rfloor$ 表示整数部分。

定理 3.1 是将定理 2.2 应用于与（3.1）相关的哈密顿系统所得出的。事实上，我们首先回顾一下，（3.1）可以写成一个关于变量（x,p）$=$（$x,m\dot{x}$）的哈密顿系统。哈密顿量为

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x,p)=\frac{1}{2m}|p|^2-\frac{\kappa}{|x|}-\frac{\lambda}{|x|^2}-\varepsilon\,U(x),$$

其取值对应于能量的取值

$$E_\varepsilon(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2-\frac{\kappa}{|x|}-\frac{\lambda}{|x|^2}-\varepsilon\,U(x). \tag{3.2}$$

现在我们注意到，与 $\mathcal{H}_\varepsilon$ 相关的哈密顿系统是近可积的，并且通过转到作用-角变量，可以将其变换为形式（2.3）。这一构造相当标准（参见 [5, 第 2]节），其依据是：与 $\mathcal{H}_0$ 相关的未扰动哈密顿系统具有一个独立于 $\mathcal{H}_0$ 且与之对合的第二个第一积分，即由下式定义的角动量

$$\mathcal{L}_0(x,p)=\langle x,Jp\rangle,\qquad \text{where } J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

为了 定义变量替换，我们关注未扰动问题

$$m\ddot{x}=-\kappa\frac{x}{|x|^3}-2\lambda\frac{x}{|x|^4} \tag{3.4}$$

并转到极坐标 $x=re^{i\vartheta}$。

定义

$$\Lambda=\left\{(H,L)\in\mathbb{R}^2\colon L^2\in\left(\frac{2\lambda}{m},+\infty\right),\ H\in\left(-\frac{\kappa^2}{2(mL^2-2\lambda)},0\right)\right\}.$$

根据 [5], ，我们知道方程 (3.4) 的解的径向分量 r 满足 s

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mL^2}{2r^2}-\frac{\kappa}{r}-\frac{\lambda}{r^2}=H.$$

根据上述关系，我们推知，对于每个 $L\in\mathbb{R}$，径向分量都相应地表现为受有效势驱动的非线性振子运动

$$W(r;L)=\frac{mL^2-2\lambda}{2r^2}-\frac{\kappa}{r}.$$

当 $mL^2>2\lambda$ 时，该势满足

$$\lim_{r\to0^+}W(r;L)=+\infty,\qquad \lim_{r\to+\infty}W(r;L)=0,$$

并且它在 (0，$(mL^2-2\lambda)/\kappa$) 上严格递减，在 ($(mL^2-2\lambda)/\kappa$，$+\infty$) 上严格递增。$W(\cdot;\ L)$ 的全局最小值为

$$w_{\min}(L)=-\frac{\kappa^2}{2(mL^2-2\lambda)}. \tag{3.5}$$

因此，对于每个 $(H,L)\ \in\ \Lambda$，$(r,\dot r)$ 平面中的轨道都是闭曲线。

In [5，第 4 节证明了相应的径向周期为 y

$$T(H,L)=\frac{\pi\kappa\sqrt{m}}{\sqrt{2}(-H)^{3/2}} \tag{3.6}$$

并且在此周期内的角位移（所谓的拱点角）为

$$\Theta(H,L)=\frac{2\pi\sqrt{m}L}{\sqrt{mL^2-2\lambda}}.$$

对于每个 $(H,L)\ \in\Lambda$，集合

$$\mathcal{T}_{(H,L)}=\left\{(x,p)\in(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^2\colon \mathcal{H}_0(x,p)=H,\ \mathcal{L}_0(x,p)=L\right\}$$

于是与二维环面 $\mathbb{T}^2$ 微分同胚（参见 [3, 4]）。

对于每个固定的 $(H^*,L^*)\ \in\ \Lambda$，都可以在$\mathcal{T}_{(H^*,L^*)}$的邻域内构造作用-角变量。事实上，给定 $(H^*,L^*)\ \in\ \Lambda$，对于 (H,L) 的某个邻域 Υ^* 内的每个点 (H^*,L^*)，令 $\mathcal{A}(H,L)$ 表示 (H,L) 对应的轨道在 $(r,\dot r)$ 平面上围成的有界区域的面积，并定义 $\Pi\colon\ \Upsilon^*\to\mathbb{R}^4$ 为

$$\Pi(H,L)=\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}(H,L)+L,L,2\pi\frac{\mu}{T(H,L)},(\Theta(H,L)-2\pi)\frac{\mu}{T(H,L)}+\psi\right), \tag{3.7}$$

对于每个 $(H,L)\ \in\Upsilon^*$，其中 $\mu\in[0,T(H,L))$ 是沿着从近心点出发的轨道到达 $(r,\dot r)$ 点所需的时间，该点位于 $(r,\dot r)$ 平面上；$\psi\in[0,2\pi)$ 是一个角度，以逆时针方向从 $\vartheta=0$ 起测量，表示 x 位于近心点时刻中最大的非正时刻。

映射

$$\Xi\colon(x,p)\mapsto\Pi(\mathcal{H}_0(x,p),\mathcal{L}_0(x,p))$$

在不变环面 $\mathcal{T}_{(H^*,L^*)}$ 邻域内对 (x,p) 有良好定义，并且众所周知，它给出了从该集合到其像的一个辛微分同胚。

在新变量下，哈密顿系统具有形式 (2.3)，其中

$$\mathcal{K}_0(I_1,I_2)=\mathcal{H}_0(\Xi^{-1}(I_1,I_2,\varphi_1,\varphi_2)). \tag{3.8}$$

现在我们可以证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。根据前面的讨论，我们知道，在作用–角变量 $(I_1,I_2,\varphi_1,\varphi_2)$ 下，与 (3.1) 对应的哈密顿系统是对由哈密顿量 $\mathcal{K}_0$在 (3.8) 中定义的哈密顿系统的光滑扰动。

现在，固定 $H^*<0$、$N\in\mathbb{N}$、$j\in\{1,\dots N\}$，并令

$$k_j^*=\left\lfloor\frac{\sqrt{-2H^*}}{\kappa}\sqrt{2\lambda+\frac{\kappa^2}{-2H^*}}\right\rfloor+j.$$

Let

$$L^*_{\max} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{2\lambda + \frac{\kappa^2}{-2H^*}}.$$

注意， $L^*_{\max}$ 是.....的唯一解

$$H^* = -\frac{\kappa^2}{2(mL^2 - 2\lambda)}$$

并且对于每个 $L^* \in (\sqrt{2\lambda/m},\ L^*_{\max})$，$(H^*,\ L^*) \in \Lambda$。此外，由于

$$2\pi \frac{\sqrt{-2H^*}}{\kappa} \sqrt{2\lambda + \frac{\kappa^2}{-2H^*}} = \Theta(H^*, L^*_{\max}),$$

由 $\Theta(H^*,\ \cdot)$ 的单调性以及 k^*_j 的选取，我们推得存在唯一的 $L^*_j \in (\sqrt{2\lambda/m},\ L^*_{\max})$，使得

$$\Theta(H^*, L^*_j) = 2\pi\, k^*_j. \tag{3.9}$$

由于 $(H^*,\ L^*_j) \in \Lambda$，正如已经观察到的，我们推得：具有能量 H^* 和角动量 L^*_j 的未受扰方程（3.4）的解是周期为 $T(H^*,\ L^*_j)$ 的周期解，其中 T 如（3.6）所示，并且它在一个周期内的绕数为 $2\pi k^*_j$。

至于（2.13），对于（3.8）中给定的 $\mathcal{K}_0$，我们证明它对 $\mathcal{K}_0$ 的定义域中的每个 $(I_1,\ I_2)$ 都成立，该定义域记为 $\mathcal{O}^*$。事实上，首先注意到，根据作用角变量的构造，我们有 $\mathcal{K}_0(I_1,\ I_2) = H(I_1,\ I_2)$，其中 $(H,\ L) = (H(I_1,\ I_2)\ L(I_1,\ I_2))$ 满足

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{A}(H, L) + L, \qquad I_2 = L$$

（回顾（3.7））。由这些关系我们立即推得 $L(I_1, I_2) = I_2$，并且 $H = H(I_1, I_2)$ 满足

$$\frac{1}{2\pi}\, \mathcal{A}(H, I_2) = I_1 - I_2. \tag{3.10}$$

现在，让我们回顾一下，对于每个 $(H, L) \in \Lambda$（见 [3, 第 282] 页），$\mathcal{A}(H, L) = \partial_H T(H, L)$。考虑到（3.6），我们推得

$$\mathcal{A}(H, L) = \frac{2\pi\kappa}{\sqrt{-2H}} + \zeta(L), \quad \text{for every } (H, L) \in \Lambda, \tag{3.11}$$

对于某个可微函数 $\zeta\colon (-\infty, -\sqrt{2\lambda/m}) \cup (\sqrt{2\lambda/m}, +\infty) \to \mathbb{R}$。对于每个 $L \in (-\infty, -\sqrt{2\lambda/m}) \cup (\sqrt{2\lambda/m}, +\infty)$，通过回顾能量的最小允许值 $w_{\min}(L)$（参见（3.5）），可以轻易得到 $\zeta(L)$ 的值，我们有

$$\lim_{H \to w_{\min}(L)} \mathcal{A}(H, L) = 0.$$

由（3.11）可推得

$$\zeta(L) = -\frac{2\pi\kappa}{\sqrt{-2w_{\min}(L)}} = -2\pi\sqrt{m}\sqrt{mL^2 - 2\lambda},$$

由此得出

$$\mathcal{A}(H,L)=2\pi\sqrt{m}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{-2H}}-\sqrt{mL^2-2\lambda}\right),\quad \text{for every } (H,L)\in\Lambda.$$

因此，(3.10) 化简为

$$\frac{\kappa\sqrt{m}}{\sqrt{-2H}}-\sqrt{m}\sqrt{mI_2^2-2\lambda}=I_1-I_2.$$

通过标准计算，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(I_1,I_2)=H(I_1,I_2)&=-\frac{m\kappa^2}{2}\left(I_1-I_2+\sqrt{m}\sqrt{mI_2^2-2\lambda}\right)^{-2}\\&=-\frac{m\kappa^2}{2}\gamma(I_1,I_2)^{-2},\quad \text{for every } (I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*,\end{aligned}$$

其中 $\gamma(I_1,I_2)=I_1-I_2+\sqrt{m}\sqrt{mI_2^2-2\lambda}$。接着我们推得

$$\begin{aligned}\partial_1\mathcal{K}_0(I_1,I_2)&=m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-3}\\\partial_2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)&=m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-3}\left(m\sqrt{m}I_2\left(mI_2^2-2\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\partial_{11}^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)&=-3m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-4}\\\partial_{12}^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)&=-3m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-4}\left(m\sqrt{m}I_2\left(mI_2^2-2\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)\\\partial_{22}^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)&=-3m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-4}\left(m\sqrt{m}I_2\left(mI_2^2-2\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)^2\\&\quad-2\lambda m^2\sqrt{m}\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-3}\left(mI_2^2-2\lambda\right)^{-\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

对每个 $(I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*$ 均成立。因此，我们得到

$$\det\mathcal{K}_0(I_1,I_2)=6\lambda m^3\sqrt{m}\kappa^4\gamma(I_1,I_2)^{-7}\left(mI_2^2-2\lambda\right)^{-\frac{3}{2}}>0,$$

对每个 $(I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*$ 均成立。另一方面，由于

$$\partial_{11}^2\nabla^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)=-3m\kappa^2\gamma(I_1,I_2)^{-4}<0,\quad \text{for every } (I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*,$$

我们推得，对于每个 $(I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*$，$\nabla^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)$ 的迹均为负。因此，对于每个 $(I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*$，$\nabla^2\mathcal{K}_0(I_1,I_2)$ 均为负定。于是，对于每个 $I=(I_1,I_2)\in\mathcal{O}^*$，条件 (2.13) 均成立。

现在可以得出结论。事实上，设 $(I_j^*,\varphi_j^*)=\Pi(H^*,L_j^*)$，其中 Π 在 (3.7) 中定义。由定理 2.2 可知，对于每个 $\varsigma>0$，存在 ε_j^*，使得对每个满足 $|\varepsilon|\le\varepsilon_j^*$ 的 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，方程 (3.1) 都有两个周期解 x_j^i, $i=1,2$，它们的能量为 H^*，且满足最小周期的所需性质。此外，考虑到 (2.11) 以及绕数的连续性（参见定理 3.2的证明中的论证），由 (3.9) 可得 x_j^i 的绕数条件。于是，取 $\varepsilon^*=\min\{\varepsilon_j^*:\ j=1,\dots,N\}$，即可得出结果。□

注 3.1。我们指出，方程 (3.4) 的等能非退化性已在 [20] 中得到证明，所用的是另一组作用角坐标。因此，我们的结果可以看作 [20] 的一个周期对应物；后者讨论了拟周期不变环面的持久性。◁

我们以定理 3.1 的一个推论结束本节，该推论涉及 Levi-Civita 在第 1 章第 11 节、第 2] 章第 9 节中引入的原始相对论问题 [17,。

在 Levi-Civita 的相对论方法框架下，参数 κ 和 λ 与光速 c 以及爱因斯坦能量 $E<0$ 的关系为

$$\kappa(E,c)=mGM+\frac{4EGM}{c^2},\quad 2\lambda(c)=\frac{6G^2M^2}{c^2}, \tag{3.12}$$

其中，G 是引力常数，M 是黑洞的质量。此外，具有物理意义的解具有近似能量（就 (3.2) 而言），仍等于 E。因此，我们转而研究以下问题

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\left(mGM+\dfrac{4EGM}{c^2}\right)\dfrac{x}{|x|^3}-\dfrac{6G^2M^2}{c^2}\dfrac{x}{|x|^4}+\varepsilon\,\nabla U(x),\\ \dfrac{1}{2}m|\dot{x}|^2-\left(mGM+\dfrac{4EGM}{c^2}\right)\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{3G^2M^2}{c^2}\dfrac{1}{|x|^2}-\varepsilon\,U(x)=E. \end{cases} \tag{3.13}$$

只要 (3.12) 中给出的参数 $\kappa(E,\ c)$ 为正，即当 $E>-mc^2/4$ 时，就可以直接应用定理 3.1 得到该问题的周期解。事实上，固定取该范围内的任意能量 E，定理 3.1 可给出任意能量 $E'<0$ 下的解，因此特别地，也能得到能量为 E 的解。于是我们得到以下结果。

推论 3.1。设 $E\in(-mc^2/4,0)$ 且 $N\in\mathbb{N}$。那么，对每个 $\varsigma>0$，都存在 $\varepsilon^*=\varepsilon^*(N,\varsigma)>0$，使得对每个 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，当 $|\varepsilon|\le\varepsilon^*$ 时，问题 (3.13) 至少有 $2N$ 个周期解 x_1^i、.....、x_N^i、$i=1,\ 2$。

此外，对每个 $j=1$、.....、N 以及 $i=1,\ 2$，解 x_j^i 的最小周期为 $T_{i,\ j}$，满足

$$\left|T_{i,j}-\frac{\pi\kappa(E,c)\sqrt{m}}{\sqrt{2}(-E)^{3/2}}\right|<\varsigma$$

且其最小周期内的绕数

$$\left\lfloor\frac{\sqrt{-2E}}{\kappa(E,c)}\sqrt{2\lambda(E,c)+\frac{\kappa(E,c)^2}{-2E}}\right\rfloor+j.$$

3.2. 具有相对论微分算子的开普勒问题本节讨论问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}\right)=-\alpha\,\frac{x}{|x|^3}+\varepsilon\,\nabla U(x),\qquad x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \tag{3.14}$$

其中 $m>0$, $\alpha>0$, $U\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$，以及 $\varepsilon\in\mathbb{R}$。请注意，在 (3.14) 的物理解释中，常数 α 等于 mGM，其中 M 同样是吸引体的质量。

我们首先回顾一下，对于 (3.14) 的解，能量守恒定律成立：事实上，(3.14) 的每个解 x 都满足

$$E_\varepsilon(x,\dot{x}) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}}-1\right) - \frac{\alpha}{|x|} - \varepsilon U(x) = H, \tag{3.15}$$

对于某些 $H \in \mathbb{R}$。

现在，我们可以陈述并证明关于（3.14）的结果。

定理 3.2。令 $H^* \in (-mc^2, 0)$ 且 $N \in \mathbb{N}$。那么，对于每个 $\varsigma > 0$，存在$\varepsilon^* = \varepsilon^*(N, \varsigma) > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，当 $|\varepsilon| \le \varepsilon^*$ 时，方程 (3.14) 至少有 $2N$ 个周期解 x_1^i、……、x_N^i、$i = 1, 2$，其能量为 H^*。

此外，对于每个 $j = 1$、……、N 和 $i = 1, 2$，解 x_j^i 的最小周期为 $T_{i,j}$ 满足

$$\left| T_{i,j} - \frac{2\pi m^2 c^3}{(-2mc^2H^* - (H^*)^2)^{3/2}} \right| < \varsigma$$

并且在其最小周期内的绕数为 $\lfloor mc^2/(H^* + mc^2) \rfloor + j$。

证明。该证明是定理 2.2 的一个应用，并基于 [6]中的讨论和结果。请注意，在 [6] 中，能量定义为

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\dot{x}|^2/c^2}} - \frac{\alpha}{|x|} - \varepsilon U(x),$$

因此，它与式 (3.15) 中定义的能量 E_ϵ 相差加性项 mc^2。因此， [6] 中涉及能量的公式必须作相应修改，以考虑这一加性项。

证明采用与定理 3.1 证明相同的策略，并通过指出可能的差异，概述各个步骤。

我们首先回顾（参见 [6, 第 2] 节），式 (3.14) 可以写成关于变量 (x, p) 的哈密顿系统，其中

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dfrac{|\dot{x}|^2}{c^2}}}.$$

哈密顿量为

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x,p) = mc^2\left(\sqrt{1+\frac{|p|^2}{m^2c^2}}-1\right) - \frac{\alpha}{|x|} - \varepsilon U(x)$$

角动量 $\mathcal{L}_0$ 仍由式 (3.3) 定义。

作用角变量的定义与前一种情况相同，首先引入变量变换

$$\Psi\colon \Omega \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2, \qquad \Psi(r,\vartheta,l,\Phi) = \left(re^{i\vartheta}, le^{i\vartheta} + \frac{\Phi}{r}ie^{i\vartheta}\right),$$

为 $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$。然后，定义

$$\Lambda = \left\{(H,L) \in \mathbb{R}^2 \colon -mc^2 < H < 0,\ \frac{\alpha^2}{c^2} < L^2 < \frac{\alpha^2 m^2 c^2}{-2mc^2H - H^2}\right\},$$

对于每个 $(H,\ L) \in \Lambda$，$(r,\ l)$ 平面内的轨道都是闭合的。我们指出，在这种情况下，径向周期映射和拱点角由下式给出

$$T(H,L) = \frac{2\pi m^2 c^3}{(-2mc^2 H - H^2)^{3/2}}, \tag{3.16}$$

and

$$\Theta(H,L) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2}{c^2 L^2}}}, \tag{3.17}$$

分别对每个 $(H,L) \in \Lambda$ 均成立。

仿照 Levi-Civita 势的情形，我们引入作用角变量 $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$，并在 [6, 第 2 节4] 中证明，在新变量下，与未扰动情形 $\varepsilon = 0$ 相对应的哈密顿量为

$$\mathcal{K}_0(I_1,I_2) = mc^2 \frac{I_1 - I_2 + \dfrac{1}{c}\sqrt{c^2 I_2^2 - \alpha^2}}{\sqrt{(I_1 - I_2)^2 + I_2^2 + \dfrac{2}{c}(I_1 - I_2)\sqrt{c^2 I_2^2 - \alpha^2}}} - mc^2. \tag{3.18}$$

现在，固定 $H^* \in (-mc^2, 0)$、$N \in \mathbb{N}$、$j \in \{1, \dots N\}$，并令 $k_j^* = \lfloor mc^2/(H^* + mc^2) \rfloor + j$。那么，存在唯一的 $L_j^* > 0$ 使得

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 (L_j^*)^2}} = \frac{1}{k_j^*}. \tag{3.19}$$

简单计算可得 $(H^*, L_j^*) \in \Lambda$。此外，回顾式 (3.17)，条件 (3.19) 蕴含

$$\Theta(H^*, L^*) = 2\pi k_j^*$$

于是，与数对 (H^*, L_j^*) 相对应的未扰动问题的解是周期解，其周期为 $2\pi m^2 c^3/(-2mc^2 H^* - (H^*)^2)^{\frac{3}{2}}$（回顾式 (3.16)），且在一个周期内的绕数为 k_j^*。

现在，令 I_j^* 表示通过式 (3.7) 中定义的映射 Π 与 (H^*, L_j^*) 相关联的作用量对。由 $\nabla^2 \mathcal{K}_0(I_j^*)$ 为负定（参见 [6, 第 3.2] 节），可知式 (2.13) 在 $\mathcal{K}_0$ 如式 (3.18) 所定义时成立。

于是，我们可以仿照定理 3.1 的证明得出结论。 □

注 3.2。请注意，与 [6], 中的情形类似，也可以考虑取值 (H^*, L^*)，它们对应于未扰动问题的周期解，其最小周期为 $nT(H^*, L^*)$，其中 $n > 1$（当且仅当 $\Theta(H^*, L^*) \in 2\pi(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ 时会出现这种情况）。非退化条件可以用类似的方法验证，因此可以证明定理 3.2 的一个更一般版本。对于第 3.1 节讨论的 Levi-Civita 问题，同样的注释也成立。◁

参考文献

[1] A. Ambrosetti，U. Bessi，《相对论引力场中的多重周期轨道》，载于：《变分方法》（巴黎，1988），《非线性微分方程与应用进展》第4卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第373–381页。

[2] C. M. Andersen，H. C. von Baeyer，《经典标量场论与相对论开普勒问题》，《物理学年鉴》62（1971）120–134。[3] V. I. Arnol'd，《经典力学的数学方法》，《数学研究生教材》第60卷，第2版，施普林格出版社，纽约，1989年。[4] G. Benettin，F. Fassò，《哈密顿系统扰动理论导论》，讲义，https://www.math.unipd.it/~benettin/postscript-pdf/ hamilt.pdf（2001–2002）。[5] A. Boscaggin，W. Dambrosio，G. Feltrin，《中心力问题的周期扰动及其在受限三体问题中的应用》，arXiv:2110.11635（2021）。[6] A. Boscaggin，W. Dambrosio，G. Feltrin，《受扰相对论开普勒问题的周期解》，《SIAM数学分析杂志》53（2021）5813–5834。[7]A. Boscaggin，W. Dambrosio，D. Papini，《具有奇异电磁势的洛伦兹力方程的无穷多个周期解》，arXiv:2302.06189（2023）。[8] A. Boscaggin，W. Dambrosio，D. Papini，《相对论开普勒问题的周期解：一种变分方法》，《比萨高等师范学院科学分类年刊》。[9] T. H. Boyer，《相对论性粒子在开普勒势或库仑势中的陷生轨迹》，《美国物理学杂志》72（2004）992–997。[10] H. W. Broer，G. B. Huitema，《从"通常的"KAM定理证明等能KAM定理》，《微分方程杂志》90（1991）52–60。[11] B. Cordani，《开普勒问题：群论方面、正则化与量子化，以及在扰动研究中的应用》，《数学物理进展》第29卷，比克豪泽出版社，巴塞尔，2003年。[12] A. Fonda，A. C. Gallo，《开普勒问题的径向周期扰动》，《天体力学与动力天文学》129（2017）257–268。[13] H. Goldstein，C. Poole，J. Safko，《经典力学》，艾迪生-韦斯利出版社，旧金山，2002年。[14] L. Jia，《考虑相对论效应的开普勒椭圆轨道近似》，《国际天文学与天体物理学杂志》3（2013）29–33。[15] E. Lacomba，J. Llibre，A. Nunes，《一类受扰哈密顿系统的不变环面与圆柱》，载于：《哈密顿系统的几何》（加利福尼亚州伯克利，1989），《数学科学研究所出版物》第22卷，施普林格，纽约，1991年，第373–385页。[16] T. J. Lemmon，A. R. Mondragon，《导论经典力学中的开普勒轨道与狭义相对论》，arXiv:1012.5438。[17] T. Levi-Civita，《相对论力学基础》，扎尼凯利出版社，博洛尼亚，1928年。[18] J. Mawhin，《若干非自治常微分方程的共振问题》，载于：《非自治微分方程的稳定性与分岔理论》，《数学讲义》第2065卷，施普林格，海德堡，2013年，第103–184页。[19] G. Muñoz，I. Pavic，《狭义相对论库仑问题的类哈密顿矢量》，《欧洲物理学杂志》27（2006）1007–1018。[20] A. Nunes，J. Casasayas，J. Llibre，《相对论开普勒问题的一个扰动》，载于：《N体动力系统中的可预测性、稳定性与混沌》（科尔蒂纳丹佩佐，1990），《北约高级科学研究所系列B辑：物理学》第272卷，普莱努姆出版社，纽约，1991年，第547–554页。[21] H. Pollard，《天体力学》，《卡鲁斯数学专著》第18卷，美国数学协会，华盛顿特区，1976年。

[22] P. J. Torres、A. J. Ureña、M. Zamora，相对论性粒子在中心力场下的周期运动和拟周期运动，《伦敦数学学会通报》45（2013）140–152。[23] A. Weinstein，非线性哈密顿系统的正规模，《数学发明》20（1973）47–57。[24] A. Weinstein，辛 V流形、哈密顿系统的周期轨道以及某些黎曼流形的体积，《纯粹与应用数学通讯》30（1977）265–271。[25] A. Weinstein，分岔与哈密顿原理，《数学杂志》159（1978）235–248。[26] M. Zamora，具有平面中心力场的相对论性粒子的新周期运动和拟周期运动及其在标量边界周期问题中的应用，《电子定性理论微分方程杂志》（2013）第31号，16页。

Alberto Boscaggin “朱塞佩·佩亚诺”数学系，都灵大学，ViaCarlo Alberto10，10123 都灵，意大利 电子邮箱：alberto.boscaggin@unito.it

Walter Dambrosio “朱塞佩·佩亚诺”数学系，都灵大学，ViaCarlo Alberto10，10123 都灵，意大利 电子邮箱：walter.dambrosio@unito.it

Guglielmo Feltrin 数学、计算机科学与物理系，乌迪内大学，ViadelleScienze 206，33100 乌迪内，意大利 电子邮箱：guglielmo.feltrin@uniud.it