arXiv:2303.00349v1 [math.RA] 1 Mar 2023

之字形代数的导子与霍赫希尔德上同调

李彦博和郑泽仁

Abstract. 设 Γ 为一个没有环、圈或重边的连通图， $Z(\Gamma)$ 为相应的之字形代数。那么， $Z(\Gamma)$ 的每个 Jordan导子都是导子。此外，我们将通过计算由导子和内导子张成的线性空间的维数，证明 $Z(\Gamma)$ 的第一霍赫希尔德上同调群的维数为一。这意味着，与之字形代数导出等价的每个代数，其第一霍赫希尔德上同调群的维数均为 1。

1. 引言

之字形代数由 Huerfano 和 Khovanov [14] 在单边量子群伴随表示的范畴化背景下引入。沿着这一思路，它们也与 Heisenberg代数相关，更多详情见 [4, 24] 。之字形代数出现在现代数学的多个活跃研究领域中，包括辛几何 [8], 表示、对称群的块 [7], Temperley-Lieb代数的分块 [25], Soergel双模理论[22] 等。此外，之字形代数还有一些推广形式。例如，斜之字形代数 [5, 14], 高阶之字形代数 [10] 以及仿射之字形代数 [15]。

之字形代数以路径代数的形式定义。路径代数自然出现在半单代数上双模张量代数的研究中。众所周知，当 K 是代数闭域时，任意有限维基本 K代数都可以表示为带关系的箭图，因此，有限维代数表示论中的许多问题都可以转化为路径代数的问题。

结合代数的线性映射在李理论、表示论、矩阵理论和算子代数等多个数学领域中发挥着重要作用。关于路径代数线性映射的一些结果，读者可参阅一系列论文 [16, 17, 18] 。特别地，众所周知，结合代数的导子具有李代数结构。李代数的性质可用于研究结合代数。相关结果可见 [11, 19, 20] 及其中的参考文献。注意，[20]中使用的李代数是导子李代数对内导子所成李理想的商。作为线性空间，它同构于第 1 个 Hochschild 上同调群，而后者是

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16E40, 16W25, 16T99.*Key words and phrases.* 霍赫希尔德上同调；导子；之字形代数。通讯作者：郑泽仁。本研究得到中国河北省自然科学基金（A2021501002）、中国国家留学基金管理委员会（202008130184）和国家自然科学基金（NSFC 11871107）的资助。

导出等价的不变量。霍赫希尔德上同调群还与给定代数的中心和变形理论密切相关。

对于霍赫希尔德上同调理论，研究特定类别代数的霍赫希尔德上同调群的实际结构十分重要，许多论文都致力于此，例如 [2, 11, 13, 23, 27] 等。本文的主要结果是，通过计算由导子和内导子张成的线性空间的维数，证明之字形代数的第一阶霍赫希尔德上同调群的维数为 1；这一结果将在第3节确定之字形代数的导子形式后给出。

2. Zigzag algebras

本节回顾之字形代数的定义，并确定下一节所需的所有记号。主要参考文献为 [1, 14]。

有限箭图 Q 是一个有向图，其顶点集合 Q_0 和顶点之间的箭的集合 Q_1 均为有限集。对于一条箭 α^i，^{j} 从顶点i 到顶点 j，记作 $s(\alpha^{i,j}) = i$ 和 $e(\alpha^{i,j}) = j$。若不存在混淆，我们常为简便起见用 α表示一条箭。Q 中的长度为 n 的非平凡路径 $p = (a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)$ 是由箭构成的有序序列，满足对每个 $l < n$，都有 $s(\alpha_1) = a$、$e(\alpha_n) = b$ 以及 $e(\alpha_l) = s(\alpha_{l+1})$。每个 $i \in Q_0$对应的平凡路径记作符号 e^i。在这种情况下，我们设 $s(e^i) = e(e^i) = i$。

设 K 是一个域，Q 是一个箭图。那么，路径代数 KQ 是由 Q 中的路径生成的 K-代数，两个路径 $x = (a|\alpha_1 \cdots \alpha_m|b)$ 和 $y = (c|\beta_1 \cdots \beta_n|d)$ 的乘积定义为

$$xy = \delta_{bc}(a|\alpha_1 \cdots \alpha_m\beta_1 \cdots \beta_n|d)$$

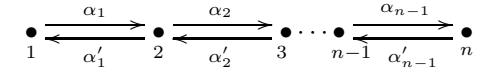
显然，KQ 是一个含单位元 $1 = \sum_{i\in\Gamma_0} e^i$ 的结合代数，其中 $e^i (i \in Q_0)$ 是 KQ 的两两正交本原幂等元。

箭图 Q 上的一个关系 σ 是路径 $\sigma = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i$ 的 K-线性组合，其中 $k_i \in K$，且 $e(p_1) = \cdots = e(p_n)$ $s(p_1) = \cdots = s(p_n)$。此外，假设每条路径中的箭数至少为 2。设 ρ 是 Γ 上的一组关系。称有序对 (Q, ρ) 为带关系的箭图。用 $K(Q, \rho)$ 表示代数 $K\Gamma/ < \rho >$，其中 $< \rho >$ 是由关系集合 ρ 生成的 $K\Gamma$ 的理想。对于任意元素 $x \in KQ$，用 $\overline{x}$ 表示其在 $K(Q, \rho)$ 中对应的元素。如果不会造成误导或混淆，我们通常将 $\overline{x}$ 写作 x。

给定一个连通图 Γ，用 Γ_0表示其顶点集。定义箭图 Q，其顶点为 $Q_0 = \Gamma_0$，箭为 $Q_1 = \{\alpha^{ij}, \alpha^{ji} \mid i - j$，且属于 $\Gamma\}$；其中，$i - j$ 表示在 Γ 中有一条连接 i 与 j 的直线。于是，A 型之字形代数 $Z(\Gamma)$ 是箭图 Q 的路径代数，并满足以下关系：

(1) 所有长度大于等于三的路径均为零。(2) 所有不是圈的长度为二的路径均为零。(3) 基于同一顶点的所有长度为二的圈都相等。下图展示了一个之字形代数的例子。

例 2.1。（A 型之字形代数）设 K 是一个域，Q 是以下箭图



与上文给出的关系 ρ。

请注意，在 [9], Ehrig 和 Tubbenhauer 给出的之字形代数定义略有不同。不过，这些定义是等价的。

将环路 $\alpha^{i,}{}_{j}\alpha^{j,}{}_{i}$ 记为 c^i。那么，下面的引理很容易验证。

引理 2.2. 之字形代数 $Z(\Gamma)$ 是一个有限代数，其基为 $\{e_i \mid i \in Q_0\} \cup \{c^i \mid i \in Q_0\} \cup Q_1$，且中心 $C(Z(\Gamma))$ 的基为 $\{c^i \mid i \in Q_0\} \cup \{1\}$。此外，$\dim Z(\Gamma) = 2|Q_0| + |Q_1|$ 且 $\dim C(Z(\Gamma)) = |Q_0| + 1$。

3. 导子与 Jordan 导子

本节将描述之字形代数 $Z(\Gamma)$的导子形式。因此，我们先从导子的定义开始。设 K 为一个域，$\mathcal{A}$ 为一个 K-代数。回顾一下，从 $\mathcal{A}$ 到其自身的线性映射 Θ 称为导子，如果

$$\Theta(ab) = \Theta(a)b + a\Theta(b)$$

对所有 a、$b \in \mathcal{A}$均成立。

为简便起见，下面我们采用爱因斯坦求和约定。注意，所有不表示求和的位置都很容易辨认，之后不再特别指出。

引理 3.1. 线性映射 Θ 是 $Z(\Gamma)$的导子，当且仅当

(1) $\Theta(e^i) = t^i_{mi}\alpha^{mi} + t^i_{in}\alpha^{in}$;

(2) $\Theta(\alpha^{ij}) = t^{ij}_{ij}\alpha^{ij} + t^j_{ji}c^i + t^i_{ji}c^j$;

(3) $\Theta(c^i) = (t^{ij}_{ij} + t^{ji}_{ji})c^i$,

其中所有系数均属于 K 和 $t^j_{ji} = -t^i_{ji}$。

证明。设 Θ 是 $Z(\Gamma)$ 的一个导子，并假设

$$\Theta(e^i) = k^i_r e^r + t^i_{mn}\alpha^{mn} + l^i_r c^r \tag{3.1}$$

注意到 e^i 是一个幂等元。这意味着

$$\Theta(e^i) = \Theta(e^i)e^i + e^i\Theta(e^i) \tag{3.2}$$

因此，

$$e^i\Theta(e^i)e^i = 0. \tag{3.3}$$

将 (3.1) 与 (3.3) 结合可得

$$k^i_i = l^i_i = 0. \tag{3.4}$$

此外，将 (3.1) 代入 (3.2)，并利用 (3.4)，可得 (1) 成立。注意到 $e^ie^j = 0$，因此

$$\Theta(e^i)e^j + e^i\Theta(e^j) = 0. \tag{3.5}$$

现在将 (1) 代入 (3.5)，得到 $t^j_{ji} = -t^i_{ji}$.

为了证明（2），假设

$$\Theta(\alpha^{ij}) = k^{ij}_r e^r + t^{ij}_{mn}\alpha^{mn} + l^{ij}_r c^r.$$

注意，$\alpha^{ij} = e^i\alpha^{ij}$ 若 $i \neq j$，则

$$\Theta(\alpha^{ij}) = \Theta(e^i\alpha^{ij}) = \Theta(e^i)\alpha^{ij} + e^i\Theta(\alpha^{ij}). \tag{3.6}$$

将 (1) 代入 (3.6)，得到

$$\Theta(\alpha^{ij}) = t^i_{ji}c^i + k^{ij}_i e^i + t^{ij}_{in}\alpha^{in} + l^{ij}_i c^i. \tag{3.7}$$

同样，利用事实 $\alpha^{ij}=\alpha^{ij}e^j$ 可得

$$\Theta(\alpha^{ij})=t^i_{ji}c^i+k^{ij}_j e^j+t^{ij}_{mj}\alpha^{mj}+l^{ij}_j c^j. \tag{3.8}$$

然后，通过比较 (3.7) 与 (3.8)，我们完成了 (2) 的证明。回想一下$c^i=\alpha^{ij}\alpha^{ji}$。由简单计算可从 (2) 得到 (3)。

反过来，如果 Θ 是 $Z(\Gamma)$ 上满足条件 (1)-(3) 的线性映射，那么容易验证 Θ 是一个导子。此处省略细节。□

注 3.2. (1) Guo 和 Li [11] 研究了无关系箭图的路径代数的导子的形式，因此他们的结果不能用于本文。

(2) 对任意 a、$b\in\mathcal{A}$，用 $a\circ b=ab+ba$ 表示约旦乘积。若从 $\mathcal{A}$ 到其自身的线性映射满足

$$\Theta(a\circ b)=\Theta(a)\circ b+a\circ\Theta(b).$$

显然，每个导子都是约旦导子。反过来的结论一般不成立。此外，若线性映射 $\mathcal{A}$ 满足

$$\Theta(ab)=\Theta(b)a+b\Theta(a)$$

对所有的 $a,b\in\mathcal{A}$。注意到，人们对各种代数的 Jordan 导子的研究兴趣日益增长。标准问题是确定 Jordan 导子是否退化为导子。关于该主题的相关结果，参见 [3, 6, 12, 26, 28] 及其中的参考文献。

与引理 3.1 类似，我们可以确定 $Z(\Gamma)$的反导子和 Jordan 导子的形式。于是，以下结果易于验证。我们略去细节，留给读者完成。

（i） $Z(\Gamma)$的每个反导子均为 0。（ii） $Z(\Gamma)$的每个 Jordan 导子都是导子。

4. Hochschild cohomology of zigzag algebras

本节中，我们将计算一个之字形代数的一阶霍赫希尔德上同调群。记由 $Z(\Gamma)$的所有导子张成的线性空间为 $Der(Z(\Gamma))$。我们需要计算 $Der(Z(\Gamma))$的维数。

引理 4.1. 设 Γ 是一个不含环、圈或重边的连通有限图。若 $|\Gamma_0|>1$，则 $\dim Der(Z(\Gamma))=3|\Gamma_0|-2$。

证明. 我们对 Γ 的顶点数进行归纳，以证明此引理。

设 $|\Gamma_0|=2$。则 $Z(\Gamma)$ 有一组基 $\{e^1,e^2,\alpha^{12},\alpha^{21},c^1,c^2\}$。对于任意导子 Θ of $Z(\Gamma)$，由引理 3.1 可得

$$\Theta(e^1,e^2,\alpha^{12},\alpha^{21},c^1,c^2)=(e^1,e^2,\alpha^{12},\alpha^{21},c^1,c^2)A,$$

其中 A 具有如下形式

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
t^1_{12} & -t^1_{12} & t^{12}_{12} & 0 & 0 & 0\\
t^1_{21} & -t^1_{21} & 0 & t^{21}_{21} & 0 & 0\\
0 & 0 & t^2_{21} & -t^1_{12} & t^{12}_{12}+t^{21}_{21} & 0\\
0 & 0 & 0 & t^1_{12} & 0 & t^{12}_{12}+t^{21}_{21}
\end{bmatrix}$$

显然，由 $Z(\Gamma)$的导子张成的空间与由矩阵 A张成的线性空间同构。于是很容易验证

$$\dim DerZ(\Gamma) = 4 = 3 \times 2 - 2,$$

也就是说，当 $|\Gamma_0| = 2$ 时，引理成立。

假设当 $|\Gamma_0| = n-1$ 时，引理成立。设 Γ 是一个没有环、圈或重边的连通有限图，并且假设 $|\Gamma_0| = n$。那么必定存在一个顶点，它只与另一个顶点相连。不失一般性，假设该顶点标记为 n，且与顶点 $n-1$ 相连。接着，取一个与顶点 $n-1$ 相连、且不同于顶点 n 的顶点，并假设其标记为 $n-2$。记由 Γ 删除顶点 n 及其对应边后得到的图为 $\Gamma \setminus \{n\}$。显然，在 $Z(\Gamma\setminus\{n\})$ 的一组基中添加元素 $\{e^n, c^n, \alpha^{n-1,n}, \alpha^{n,n-1}\}$，即可得到 $Z(\Gamma)$ 的一组基。此外，根据引理 3.1，通过确定上述特殊基的像，可以从 $Z(\Gamma \setminus \{n\})$ 的一个导子得到 $Z(\Gamma)$ 的任意导子，

(1) $\Theta(e^n) = -t^n_{n,n-1}\alpha^{n,n-1} - t^n_{n-1,n}\alpha^{n-1,n}$;
(2) $\Theta(c^n) = (t^{n-1,n}_{n-1,n} + t^{n,n-1}_{n,n-1})c^{n-1}$;
(3) $\Theta(\alpha^{n-1,n}) = t^{n-1,n}_{n-1,n}\alpha^{n-1,n} + t^n_{n,n-1}c^{n-1} + t^{n-1}_{n,n-1}c^n$;
(4) $\Theta(\alpha^{n,n-1}) = t^{n,n-1}_{n,n-1}\alpha^{n,n-1} + t^{n-1}_{n-1,n}c^{n-1} - t^{n-1}_{n-1,n}c^n$,

其中

$$t^n_{n,n-1} = -t^{n-1}_{n,n-1},\ \ t^n_{n-1,n} = -t^{n-1}_{n-1,n}, \tag{3.9}$$

并将 e^{n-1} 的像改为如下形式

$$\Theta(e^{n-1}) = t^{n-1}_{n-2,n-1}\alpha^{n-2,n-1} + t^{n-1}_{n,n-1}\alpha^{n,n-1} + t^{n-1}_{n-1,n-2}\alpha^{n-1,n-2} + t^{n-1}_{n-1,n}\alpha^{n-1,n}.$$

仍由引理 3.1 可得

$$\Theta(c^{n-1}) = (t^{n-2,n-1}_{n-2,n-1} + t^{n-1,n-2}_{n-1,n-2})c^{n-1} = (t^{n-1,n}_{n-1,n} + t^{n,n-1}_{n,n-1})c^{n-1},$$

也就是说，

$$(t^{n-2,n-1}_{n-2,n-1} + t^{n-1,n-2}_{n-1,n-2}) = (t^{n-1,n}_{n-1,n} + t^{n,n-1}_{n,n-1}). \tag{3.10}$$

将 $(t^{n-2}_{,\ n-2}{}^{n-1}_{,\ n-1} + t^{n-1}_{,\ n-1}{}^{n-2}_{,\ n-2},)$ 视为常数，并将 (3.9) 与 (3.10) 合并为一个线性方程组。容易验证，其解集是一个三维流形。因此，

$$\dim Der(Z(\Gamma)) - \dim Der(Z(\Gamma \setminus n)) = 3.$$

也就是说，该引理对 $|\Gamma_0| = n$ 成立。证明完毕。 □

给定 $x \in \mathcal{A}$，定义线性映射 $\Theta(a) = [x, a]$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$，其中 $[x, a] = xa - ax$。那么，Θ 是 $\mathcal{A}$的一个导子，称为内导子。显然，若 $x \in C(\mathcal{A})$，则由 x 定义的内导子为零。用 $IDer(\mathcal{A})$表示所有内导子张成的线性空间。那么，若 $\mathcal{A}$ 是有限维代数，我们有

$$\dim IDer(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - \dim C(\mathcal{A}). \tag{3.10}$$

结合引理 2.2 与 (3.10)，可得以下结果。

引理 4.2. $\dim IDer(Z(\Gamma)) = |Q_0| + |Q_1| - 1.$

现在我们可以给出本文的主要结果。

定理 4.3. 设 Γ 是一个没有环、圈或重边的有限连通图， $Z(\Gamma)$ 是与之关联的之字形代数。若 $|\Gamma_0| > 1$，则 $Z(\Gamma)$ 的第一霍赫希尔德上同调群的维数为 1。

证明。由 Γ 的性质可知 $|Q_1| = 2(|Q_0| - 1)$。因此，该定理直接由引理 4.1 和引理 4.2 得出。□

由于任意重数为 1 的布劳尔树代数都与某个之字形代数导出等价，我们得到以下显然的推论，而该推论无法由 [13, 定理 4.4] 得到。关于布劳尔树代数的定义，请参阅 [1]。

推论 4.4。重数为 1 的布劳尔树代数的第 1 阶霍赫希尔德上同调的维数为 1。

注记 4.5。（1）由于霍赫希尔德上同调在导出等价下保持不变，因此与某个之字形代数导出等价的每个代数的第 1 阶 Hochschild 上同调群的维数均为 1。

（2）对于 A 型之字形代数，Mazorchuk 和 Stroppel [21] 计算了所有 $n \geq 0$ 对应的第 n 个 Hochschild 上同调群。

References

[1] M. Auslander、I. Reiten 和 S. O. Smalo，《Artin 代数表示论》。剑桥大学出版社，1995。[2] D. Benson 和 K. Erdmann， *Hochschild cohomology of Hecke algebras*，《代数杂志》336 (2011) 391-394。[3] M. Bre˘sar， *Jordan derivations revisited*，《剑桥哲学会数学论文集》139 (2005) 411-425。[4] S. Cautis 和 A. Licata， *Heisenberg categorification and Hilbert schemes*，《杜克数学杂志》161 (2012) 2469-2547。[5] C. Couture， *Skew-zigzag algebras*，SIGMA 12 (2016) 062，19 页。[6] J. M. Cusack， *Jordan derivations on rings*，《美国数学会会刊》53 (1975) 321-324。[7] A. Evseev 和 A. Kleshchev，

Blocks of symmetric groups semicuspidal KLR algebras and zigzag Schur-Weyl duality , , **188** 2018 453 512

《数学年刊》（）-。[8] T. Etgue 和 Y. Lekili， *Koszul duality patterns in Floer theory*，《几何与拓扑》21 (2017) 3313-3389。[9] M. Ehrig 和 D. Tubbenhauer，

Algebraic properties of zigzag algebras，《代数通讯》48 (2020) 11-36。[10] J. Grant，

Higher zig-zag algebras，《数学文献》24 (2019) 749-814。[11] L. Guo 和 F. Li，

Structure of Hochschild cohomology of path algebras and differential formulation of Euler's polyhedron formula **18** 2014 545 572 ,

《亚洲数学杂志》（）-。[12] I. N. Herstein， *Jordan derivations of prime rings*，《美国数学会会刊》8 (1957)，1104-1110。[13] T. Holm， *Hochschild cohomology of Brauer tree algebras*，《代数通讯》26 (1998)，3625-3646。[14] R. S. Huerfano 和 M. Khovanov，

A Category for the Adjoint Representation，《代数杂志》246 (2001) 514-542。[15] A. Kleshchev 和 R. Muth， *Affine zigzag algebras and imaginary strata for KLR algebras*，《美国数学会汇刊》371 (2018) 4535-4583。[16] Y.-B. Li 和 F. Wei，

Lie derivations of dual extensions of algebras，《数学讨论》141 (2015) 65-82。[17] Y. -B. Li 和 F. Wei， *Jordan derivations and Lie derivations of path algebras*，伊朗数学会会刊 44 (2018) 79-92。[18] Y. -B. Li 和 F. Wei， *Jordan derivations of generalized one point extensions*，Filomat 32 (2018) 4089-4098。

[19] M. Linckelmann, *Finite dimensional algebras arising as blocks of finite group algebras*, 《当代数学》705 (2018) 155-188。[20] M. Linckelmann 和 L. Degrassi, *On the Lie algebra structure of HH1(A) of a finite dimensional algebra A* **148** 2020 1879 1890 , 《美国数学会会刊》（）-。[21] V. Mazorchuk 和 C. Stroppel, *Cuspidal $\mathfrak{sl}(n)$-modules and deformations of certain Brauer tree algebras* **228** 2011 1008 1042 , 《数学进展》（）-。[22] M. Mackaay 和 D. Tubbenhauer, *Two-color Soergel calculus and simple transitive 2- representations* **71** 2016 1523 1566 , 《加拿大数学杂志》（）-。[23] J. de la Pena 和 C.C. Xi, *Hochschild cohomology of algebras with homological ideals*, 《筑波数学杂志》30 (2006) 61-79。[24] D. Rosso 和 A. Savage, *A general approach to Heisenberg categorification via wreath product algebras* **286** 2017 603 655 , 《数学杂志》（）-。[25] E. P. Westin, *Tilting modules and exceptional sequences for leaf quotients of type A zig-zag algebras* **61** 2020 189 207 , 《代数与几何论文集》（）-。[26] Z.-K. Xiao 和 F. Wei, *Jordan higher derivations on triangular algebras*, 《线性代数及其应用》433 (2010) 2615-2622。[27] Y. Xu、Y. Han 和 W. Jiang, *Hochschild cohomology of truncated quiver algebras*, 《中国科学：数学》50 (2007) 727-736。[28] J.-H. Zhang 和 W.-Y. Yu, *Jordan derivations of triangular algebras*, 《线性代数及其应用》419 (2006) 251-255。

Li: School of Mathematics and Statistics, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao,066004, P.R. China*Email address*: liyanbo707@163.com

Zheng: School of Mathematics and Statistics Northeastern University at Qinhuang- , dao Qinhuangdao 066004 P.R. China

, , ,*Email address*: k1169182904@icloud.com