arXiv:2303.00358v1 [math.RA] 1 Mar 2023

仿射胞腔代数的半单性

YANBO LI 和 BOWEN SUN

Abstract. 本文证明，仿射胞腔代数 A 是半单的，当且仅当与之相关的概形 A 是既约且零维的，并且关于 A 所有层的双线性形式均为同构。此外，若基环是完美域，则 A是半单的，当且仅当它是可分的。我们还给出了仿射胞腔代数为 Jacobson 半单的一个充分条件。

1. Introduction

Koenig 和 Xi 在 [17], 中引入了仿射胞腔代数，扩展了 Graham 和 Lehrer 提出的胞腔代数框架 [9]。仿射胞腔代数的单表示的同构类由有限个仿射簇的不交并中有限多个子簇的补集参数化。许多类代数已被证明是仿射胞腔代数，包括 A 型仿射 Hecke 代数 [17], 仿射 Temperley-Lieb 代数 [17], 有限型 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 [14, 15], 仿射拟遗传代数 [13], 仿射 Brauer 代数[3], 仿射 Birman-Murakami-Wenzl 代数 [4], 仿射 Yokonuma-Hecke 代数 [7], 仿射 q-Schur 代数 [6], BLN 代数 [5], 秩二仿射 Hecke 代数 [10]等等。

在 [2], Carvalho、Koenig 和 Lomp 的研究中，他们探讨了仿射胞腔代数的环论结构。本文旨在沿着这一方向开展一些工作。更确切地说，我们将研究仿射胞腔代数的半单性。首先，我们来明确一些相关概念。

回顾一下，若环 R 作为左 R模是半单的，则称其为半单环。每个半单环都同构于有限个矩阵环的直积，并且是左阿廷环和右阿廷环。用 $J(R)$表示 R的 Jacobson 根。若 $J(R) = 0$，则称环 R 为 Jacobson 半单环。注意，$J(R)$对单 R模的作用为零。若环 R 没有非零幂零理想，则称 R 为半素环。我们有如下

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13B25；16G30；16K40；16N60。
Key words and phrases. Jacobson 半单；半单；可分；仿射胞腔代数。通讯作者：BOWEN SUN。本文得到河北省自然科学基金（A2021501002）、中国国家留学基金管理委员会（202008130184）和中国自然科学基金（11871107）的资助。

上述代数的层次结构：

$$\{\text{半单}\} \subset \{\text{Jacobson 半单}\} \subset \{\text{半素}\}$$

需要指出的是，如果 R 是一个左阿廷环，那么 R 为半单等价于为 Jacobson 半单，也等价于为半素。注意，交换半素环也称为既约环。

本文的主要目标是证明以下定理，该定理给出了仿射胞腔代数 A 为半单的充要条件。记 $Spec[A]$ 为 A 的伴随概形（见定义 3.3），并记 ϕ_j 为 A的 j层的双线性型。

定理 设 K 为一个域， A 为一个仿射胞腔 K-代数。那么，当且仅当以下条件成立时，A为半单：

(1) $Spec[A]$ 是一个约化零维概形；(2) 对所有 j, ϕ_j 都是可逆的。

此外，如果基环是完美域，那么 A 是半单的，当且仅当它是可分的。我们还给出了仿射胞腔代数为 Jacobson 半单的一个充分条件。

2. Affine cellular algebras

本节将简要回顾仿射胞腔代数的定义及一些已知结果，这些内容是下一节所需的。主要参考文献为 [17]。

设 K 为主理想整环。给定两个 K-模 V和 W，我们用 τ表示交换映射：$V \otimes_K W \to W \otimes_K V$, $v \otimes_K w \to w \otimes_K v$，其中$v \in V$和 $w \in W$。若一个 K-代数 B满足 $B = K[x_1, \cdots, x_t]/I$，其中 $K[x_1, \cdots, x_t]$是由有限个变量 x_1, $\cdots, x_t$生成的多项式环，且 I 是一个理想，则称其为仿射代数。 K-代数 A 上的 K-对合 $*$是一个 K-线性反自同构，并且对所有 $a \in A$都有 $(a^*)^* = a$ 。

定义 2.1. [17, 定义 2.1] 设 A 是一个带有K对合 $*$的酉 K-代数。若给定以下数据且满足以下条件，则称 A 中的双边理想 J 为仿射胞理想：

(1) 理想 J 由 $*$固定：$(J)^* = J$.(2) 存在一个有限秩自由 K-模 V、一个具有单位元且带有 K-对合 σ 的仿射 K-代数 B，使得 $\Delta := V \otimes_K B$ 是一个 A-B双模，其右 B-模结构由 B_B诱导。(3) 存在一个 A-A双模同构 $\alpha : J \to \Delta \otimes_B \Delta'$，其中$\Delta' = B \otimes_K V$ 是一个 B-A双模，其左 B-模结构由 ${}_BB$ 诱导，右 A-模结构则由 $(b \otimes v)a :=$定义

$\tau(a^*(v\otimes b))$ 对于 $a\in A$、 $b\in B$ 和 $v\in V$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta\otimes_B\Delta' \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_1\otimes b_1\otimes_B b_2\otimes v_2\mapsto v_2\otimes\sigma(b_2)\otimes_B\sigma(b_1)\otimes v_1} \\ J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta\otimes_B\Delta' \end{array}$$

代数 A 具有 K-对合 $*$，当且仅当存在一个 K-模分解 $A=J_1'\oplus J_2'\oplus\cdots J_m'$（对于某个 m），使得对于每个 j（$j=1$、.....、m）都有 $(J_j')^*=J_j'$，并且令 $J_j:=\bigoplus_{l=1}^{j}J_l'$后，得到 A的一条双边理想链：$0=J_0\subset J_1\subset J_2\subset\cdots\subset J_m=A$（其中每个理想都在 $*$下保持不变），且每个 $J_j'=J_j/J_{j-1}$都是 A/J_{j-1} 的仿射胞理想（相对于商代数上由 $*$ 诱导的对合）。

显然，如果所有仿射代数 B_j 都等于基环 K，我们就得到 Koenig 和 Xi 在 [16]中给出的胞腔代数定义。注意，胞腔代数的原始定义是 Graham 和 Lehrer 在 [9]中给出的。

对于代数 A中的仿射胞理想 J，下面的引理给出了将 J 视为自身的代数（无单位）时的基本结构。

引理 2.2。 [17, 命题 2。2] 设 J 是带有对合 $*$的 K-代数A 中的仿射胞理想。我们将 J与 $\Delta\otimes_B\Delta'=V\otimes_K B\otimes_K V$视为同一对象。则：

（1）存在一个 K-线性映射 ϕ： $V\otimes_K V\to B$，使得

$$(u\otimes b\otimes v)(u'\otimes b'\otimes v')=u\otimes b\phi(v,u')b'\otimes v'$$

对所有 u、u'、v、$v'\in V$以及 b、$b'\in B$均成立。

（2）如果 I是 B 中的理想，且 u、$v\in V$，那么 $V\otimes_K I\otimes_K V$是A中的理想。

由于双线性型 ϕ的重要性，我们常将 $\Delta\otimes_B\Delta'$ 写作$\mathcal{A}(V,B,\phi)$。设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$是 V的一个基，并将双线性型ϕ与矩阵 $\phi=(\phi_{ij})=\phi(v_i,v_j)$对应起来（在本文中，我们常对双线性型及其矩阵使用相同的记号）。那么，J 同构于swich代数 $S(M_n(B),(\phi_{ij}))$，其定义如下。

定义 2.3。 [17,定义 3.3] 设 Λ 是一个 K-代数，并固定一个元素$a_0\in\Lambda$。我们定义一个新的 K-代数 $\Lambda=S(\Lambda,a_0)$，称为 Λ 关于 a_0的 swich 代数$\widetilde{\ }$，其底层集合为 $\Lambda=\{\widetilde{a}\mid a\in\Lambda\}$，代数$\widetilde{\ }$结构在 Λ 上定义如下：

$$\begin{aligned} \widetilde{a}+\widetilde{b}&=\widetilde{a+b}, && a,b\in\Lambda,\\ \widetilde{a}\cdot\widetilde{b}&=\widetilde{aa_0b}, && a,b\in\Lambda,\\ \lambda\widetilde{a}&=\widetilde{\lambda a}, && \lambda\in K,\ a\in\Lambda. \end{aligned}$$

矩阵代数 $M_n(B)$ 的 swich 代数实际上是 [1] 意义下的广义矩阵代数。通过直接计算，可以证明$\widetilde{}$映射 $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ 定义如下:

$$\widetilde{a} \mapsto \varphi(\widetilde{a}) = aa_0$$

$\widetilde{}$是一个代数同态，而一个 Λ-模 M 将通过 φ变成一个 Λ-模M^{φ} 。下面的引理建立了 Λ 上的所有单模集合$\widetilde{}$与 swich 代数 Λ上的单模集合之间的关系。

引理 2.4. [17, 定理 3.10] 设 Λ 是一个带单位元的 K-代数，且Λ 在其中心上有限生成。那么， $\Lambda.E \neq 0$的非同构单模 Λ E 的集合$\widetilde{}$与所有非同构单模 Λ的集合$\widetilde{}$之间存在一个双射 ω ，其定义为 $E \mapsto E^{\varphi}/\{x \in E^{\varphi} \mid_{\sim} \Lambda.x = 0\}$。

我们以 [17] 的一个结果结束本节，该结果将在第 3 节中用到。

引理 2.5. [17, 定理 3.12 (2)] 设 A 是一个仿射胞腔代数，具有胞腔链 $0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_m = A$ ，使得每一层$J_j/J_{j-1} \cong \mathcal{A}(V_j, B_j, \phi_j)$。那么，对于 $1 \leq j \leq m$， ϕ_j是同构，当且仅当 ϕ_j 的行列式 $det(\phi_{st}^{(j)})$是 B_j中的一个单位。特别地，如果所有的ϕ_j 都是同构，那么，作为一个仿射胞腔 K-代数， A同构于 $\bigoplus_{j=1}^{m} M_{n_j}(B_j)$，其中 n_j是 V_j的维数。

代数 $\bigoplus_{j=1}^{m} M_{n_j}(B_j)$ 将称为仿射胞腔代数 A 的渐近代数。

3. Semisimplicity

本节研究仿射胞腔代数的半单性。我们首先需要回顾交换代数中的一些定义和记号。这里的主要参考文献是 [12] 和 [19]。

定义 3.1. 设 R 是一个含单位元的交换环。 R 的谱定义为 $Spec(R) := \{\mathfrak{P} \subseteq R \mid \mathfrak{P} \ is \ a \ prime \ ideal\}$。

众所周知，可以在 $Spec(R)$ 上赋予一种拓扑，称为扎里斯基拓扑。由此我们可以给出仿射概形的定义。

定义 3.2. 仿射概形是一个二元组 $(Spec(R), \mathscr{O}_R)$，由赋有扎里斯基拓扑的 R 的谱以及其结构层 $\mathscr{O}_R$ 组成。如果 R 是一个约化环，那么 $(Spec(R), \mathscr{O}_R)$ 称为既约的。$(Spec(R), \mathscr{O}_R)$ 的维数定义为 R 的克鲁尔维数。

关于定义 3.2 中提到的结构层的定义，请参阅 [19, 定义 2.20] 。为记号简便起见，我们通常将仿射概形（$Spec(R), \mathscr{O}_R$）简单记作 $Spec(R)$。

基于上述准备，我们可以定义仿射胞腔代数的伴随概形，它将在本节中发挥关键作用。

定义 3.3. 设 A 是一个仿射胞腔代数。我们称

$$Spec[A] := Spec(\prod_{j=1}^{m} B_j)$$

A的伴随概形。

给定一个仿射胞腔代数 A，我们将证明， A的某些环论性质（例如半单性）部分由$Spec[A]$决定。

我们首先考虑 Jacobson 半单性。为此，我们需要下面这个关于 swich 代数的引理。为简化表述，我们规定 0 是零因子。

引理 3.4. 设 R 为一个含幺环，且 R 在其中心上有限生成， $R = S(R, a_0)$ 是 R的一个 swich 代数。那么，当且仅当 a_0 不是零因子时， R 是 Jacobson 半单的当且仅当 R 是 Jacobson 半单的。

证明。根据引理 2.4，非同构简单 R-模 E （满足 $R.E \neq 0$）的集合与所有非同构简单$\sim R$ -模的集合之间存在一个双射，该双射由 $E \mapsto E^{\varphi}/N$给出，其中 N 是 $\{x \in E \mid R.x = 0\}$。对于 R的每个极大左理想 $\mathfrak{m}$ ，将相应的简单 R-模 $R/\mathfrak{m}$ 记为 $E_{\mathfrak{m}}$。

(⇒) 假设 R 是 Jacobson 半单的。那么 R 是半素的。因此，由 [2, 引理 2.1] 可知， a_0 不是零因子。取一个 a 的元素，其中 $J(R)$。那么，对于任意的 $\mathfrak{m}$，有 $aE_{\mathfrak{m}} = 0$ 。假设 $R.E_{\mathfrak{m}} \neq 0$。对于 $x + N_{\mathfrak{m}} \in E_{\mathfrak{m}}^{\varphi}/N_{\mathfrak{m}}$，有

$$\widetilde{a}.(x + N_{\mathfrak{m}}) = \widetilde{a}.x + N_{\mathfrak{m}} = aa_0.x + N_{\mathfrak{m}} = 0 + N_{\mathfrak{m}},$$

其中最后一个等式成立是因为 $a_0.x \in E_{\mathfrak{m}}$ 和 $aE_{\mathfrak{m}} = 0$。这意味着 $\widetilde{a}$ 湮灭所有简单的 R-模，也就是说， $\widetilde{a} \in J(R)$，因此 $\widetilde{a} = 0$。结果， $a = 0$ 和 R 是 Jacobson 半单的。

(⇐) 设 $\mathfrak{m}$ 是 R 的任意一个极大左理想。设 $\widetilde{a}.(E_{\mathfrak{m}}^{\varphi}/N_{\mathfrak{m}}) = 0$。注意， R 是一个含幺环，并且显然 $1_R \notin \mathfrak{m}$。对于任意的 $x \in R$， 记$x + \mathfrak{m} \in E_{\mathfrak{m}}$ 为 $[x]$。我们有

$$0 = \widetilde{a}.([1] + N_{\mathfrak{m}}) = \widetilde{a}[1] + N_{\mathfrak{m}} = [aa_0] + N_{\mathfrak{m}},$$

由此可得 $[aa_0] \in N_{\mathfrak{m}}$，或者 $R.[aa_0] = 0$ 在 $E_{\mathfrak{m}}$中。特别地， $1.[aa_0] =0$，因此 $a_0aa_0 \in \mathfrak{m}$。结果， $a_0aa_0 \in J(R)$，因为 $\mathfrak{m}$ 是任意的。现在， R 的雅各布森半单性迫使 a_0aa_0 为零。结合 a_0 不是零因子的事实，可得 $a = 0$。因此， R 的根为零，证明完毕。□

现在我们可以给出仿射胞腔代数成为 Jacobson 半单的充分条件。

定理 3.5. 设 A 是一个仿射胞腔代数。那么，如果 A 满足以下条件，它就是 Jacobson 半单的：

(1) $Spec[A]$ 是约化概形；(2) 所

有 ϕ_j 都不是零因子。

证明。 A 的仿射胞腔性意味着层 J_j/J_{j-1} 同构于$M_{n_j}(B_j) = S(M_{n_j}(B_j)\ \phi_j)$ 上的 swich 代数。由于 $Spec[A]$ 是约化概形，每个 B_j 都是约化环。注意，约化仿射代数是 Jacobson 半单的。因此，$M_{n_j}(B_j)$是 Jacobson 半单的，因为 Jacobson 半单环上的矩阵代数也是 Jacobson 半单的。$\widetilde{\ }$注意， ϕ_j 不是零因子。于是由引理 3.4可得，$M_{n_j}(B_j)$是半单的。

取一个元素 $r \in J(A)$，并假设 $r = \sum_{j=1}^{m} r_j$，其中 $r_j \in J'_j$。那么 r 湮灭所有单模。根据仿射胞腔代数表示论中的定理 3.12], ， r_i、 i =1、2、$\ldots m-1$ 在属于顶层的单模上的作用均为零。因此 r_m 湮灭顶层的所有单模。由上文证明的每一层的雅各布森半单性可知， r_m 必为零。有限次重复这一过程，我们得到对于 $i = 1$、2、.....、 m， $r_i = 0$，也就是说，$r = 0$。证明完毕。□

推论 3.6. 对于幺元仿射胞腔代数 A，若 $Spec[A]$ 是约化概形，且对于所有 j，ϕ_j 都不是零因子，则 A 是半素的。

下面给出一个例子，说明定理 3.5 中给出的充分判据并非必要条件。该例还表明，距离刻画雅各布森半单性可能还相当遥远。

例 3.7. 设 F 是一个域， K 是形式幂级数环 $F[[x]]$。那么 K 的 Jacobson 根是由 x 生成的理想。这说明 K 不是 Jacobson 半单的。设 $A = K[x]$。那么 A 是 Jacobson 半单的（[11] 第 433 页习题 14 (c)）。我们断言 A 是一个仿射胞腔代数。事实上，我们可以取 A 的胞腔链为 $0 \subset （x） \subset A$，并定义 $B_1 = A$、 V_1 为以 $\{x\}$ 和 $B_2 = K$ 为基的自由 K-模， $V_2 = K$。由于 $B_2 = K$ 不是约化环， $Spec[A]$ 不是约化概形。

现在让我们开始研究域上的仿射胞腔代数的半单性 K 。众所周知，半单代数是左阿廷的。因此，我们首先给出仿射胞腔代数为左阿廷环的一个充要条件如下。

引理 3.8. 设 A 为一个仿射胞腔代数。那么，当且仅当 $Spec[A]$ 是零维概形时，A是左阿廷环。

证明。若 $Spec[A]$ 是一个零维概形，则每个 B_j 的克鲁尔维数均为零。根据 [12, 定理5.11], ，这等价于所有 B_j 都是有限维K-代数，因而仿射胞腔代数 A 是有限维 K-代数。所以 A 是左阿廷的。

反之，设 A 是一个左阿廷环。我们断言，对于任意的$i \in \{1, \cdots, m\}$， B_i 都是阿廷环。事实上，由 A 是左阿廷的可知， A/J_{i-1} 是左阿廷环，且 J_i' 是左阿廷 A/J_{i-1}-模。若 B_i不是阿廷的，则存在 B_i的一个无限严格递降理想链

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

因此，我们得到 J_i' 的一个无限递降子模链

$$V_1 \otimes I_1 \otimes V_1 \supset V_1 \otimes I_2 \otimes V_1 \supset V_1 \otimes I_3 \otimes V_1 \supset \cdots \supset V_1 \otimes I_n \otimes V_1 \supset \cdots$$

根据引理 2.2。这是矛盾的。于是 $Spec[A]$ 是一个零维概形，这由所有 B_i 都是阿廷的可知。□

再次运用 [12, 定理 5.11] ，我们得到引理 3.8 的一个直接推论如下。

推论 3.9。设 A 是一个仿射胞腔代数。则以下陈述等价。

(1) A 是一个左阿廷代数。(2) $Spec[A]$ 是
一个零维概形。(3) A 是一个有限维 K-代数。
(4) 每个 B_j 都是一个有限维 K-代数。

现在我们可以给出仿射胞腔代数为半单代数的一个充分必要条件。

定理 3.10. 设 K 是一个域，且 A 是一个仿射胞腔 K-代数。那么， A 是半单的，当且仅当
(1) $Spec[A]$ 是约化零维概形；(2) 对每个
$j \in \{1, 2, \ldots m\}$， ϕ_j 都是可逆的。

证明。“ $\Rightarrow$ ”设 A 是半单的。那么 A 既是左阿廷的，也是半素的，因此根据推论 3.9， $Spec[A]$ 是一个零维概形。众所周知，半单环的商环也是半单的。这说明 A/J_{j-1} 是半单的。另一方面，半单代数的理想也是半单的。因此， J_j' 是半单的，因为 J_j' 是 A/J_{j-1} 中的一个理想。由此可得，根据命题 2.5]， B_j 是约化环，且 ϕ_j 不是零因子。此外，根据推论 3.9，我们还知道每个 B_j 都是有限维 K-代数。回想一下，有限维含幺代数具有定理 1.2.1] 所述的特殊性质 [8, ：每个元素要么可逆，要么是零因子。这迫使 ϕ_j 可逆。

“ $\Leftarrow$ ”如果 $Spec[A]$ 是约化零维概形，且所有 ϕ_j 都可逆，那么结合推论 3.6 与推论 3.9 可知， A 是有限维半素代数，因此 A 是半单的。□

注意，如果 B_j 是有限维仿射 K-代数，那么 ϕ_j 可逆当且仅当 $det(\phi_j)$ 是 B_j 中的一个单位。此外，利用引理 2.5 可得如下简单结果。

推论 3.11. 设 A是一个仿射胞腔代数 A。那么 A 是半单的，当且仅当它同构于其渐近代数，并且 $Spec[A]$ 是一个约化零维概形。

为了完成对仿射胞腔代数半单性的研究，我们将定理 3.10 中的“约化”条件加强为“几何约化”，这对应于半单代数的一种强化版本：可分代数。

我们先回顾几何约化环和可分代数的定义。

定义 3.12. 设 K 是一个域， $\overline{K}$ 是 K 的代数闭包。若仿射 K-代数 A 是既约环，则称其为几何约化的。若对于任意的 K 上的有限扩域 F， $A \otimes F$ 都是半单 F-代数，则称 A 是可分的 K-代数。

可分代数的定义可以看作一种在基变换下保持不变的性质。特别地，我们将发现，仿射胞腔代数的基变换实际上就是仿射代数 B_j 的基变换。为了研究可分仿射胞腔代数，我们́回顾 étale 代数的定义。

定义 3.13. $[18,$ 定义 1.5.3$]$ 有限维的 K-代数若同构于若干个 K 的可分扩张的有限直和，则́称为 Etale。

́以下引理可视为 Etalé代数的一种等价定义，这意味着 Etale 代数实际上是有限维交换可分代数。

引理 3.14. $[18,$ 命题 1.5.6$]$ 设 A 是有限维交换 K-代数。则以下命题等价。

(1) A是 ́Etale。(2)
$A \otimes_K \overline{K}$ 是既约的。
我们可以给出仿射胞腔代数可分的一些充要条件。

推论 3.15. 设 A是仿射胞腔 K-代数。则以下命题等价。

(1) A 是可分代数。(2) $Spec[A]$ 是几何约化零维概形，并且对于所有 j, $det(\phi_j)$ 都是可逆的。(3) $\prod_{j=1}^{m} B_j$ 是一个 ́Etale 代数代数，并且对于所有 j， $det(\phi_j)$ 都是可逆的。(4) 对于所有 j， B_j 都是 ́Etale 代数代数，并且 $det(\phi_j)$ 是可逆的。

证明。由引理 3.14 可知，(2) 等价于 (3)，而 (3) 与 (4) 等价显然。因此，我们只需证明 (1) ⇔(2)。

(1) ⇒(2) 设 A 可分。由定义 3.12, A 是半单的。因此，根据定理 3.10, $Spec[A]$ 是一个约化零维概形，且 $det(\phi_j)$ 可逆。接下来只需证明 $Spec[A]$ 是几何约化的，或者说 $\prod_{j=1}^{m} B_j \otimes \overline{K}$ 是既约的。这由 $A \otimes \overline{K}$的半单性显然可得。

(2) ⇒(1) 假设 $Spec[A]$ 是一个几何约化概形，且$det(\phi_j)$可逆。根据引理 3.14，我们推得每个 B_j 都是一个 ´Etale 代数，因而是可分代数。这意味着，对于任意 K的有限扩域 F， $B_j \otimes F$都是半单的，因此 $Spec[A \otimes F]$ 是一个约化零维概形。此外，显然$A \otimes F$的切换矩阵与 A 的切换矩阵相同，因而它们的所有行列式均可逆。因此， $A \otimes F$是半单的，证明完成。□

注意，当 K 是一个完美域时，有限维仿射 K-代数是 ´Etale 代数，当且仅当它是既约的（见 [18, 备注 1.5。8]）。由此可直接得到如下结果。

定理 3.16. 设 K 是一个完美域，且 A 是一个仿射胞腔代数。那么，当且仅当 A 是可分的时， A 是半单的。

致谢。作者感谢 Zeren Zheng 富有帮助的交流。本文部分工作是在 Li 于 2021年8月至2022年9月访问斯图加特大学代数与数论研究所期间完成的。借此机会，他向该研究所及 S. Koenig 教授对其访问期间给予的热情接待表示诚挚感谢。

References

[1] W. Brown，广义矩阵代数，加拿大数学杂志 7 (1955)，188-190。[2] P. Carvalho、S. Koenig 和 C. Lomp, *Ring theoretical properties of affine cellular algebras* **476** 2017 494 518 ，代数杂志 ( )，-。[3] W. D. Cui, *Affine cellularity of affine Brauer algebras*, arXiv:1406.3517。[4] W. D. Cui, *Affine cellularity of affine Birman-Murakami-Wenzl algebras*, arXiv:1406.3516。[5] W. D. Cui, *Affine cellularity of BLN algebras*，代数杂志 441 (2015)，582-600。[6] W. D. Cui, *Affine cellularity of affine q-Schur algebras*，美国数学会会刊 144 (2016)，4663-4672。[7] W. D. Cui, *Affine cellularity of affine Yokonuma-Hecke algebras*，代数杂志 496 (2018)，292-314。[8] Y. A. Drozd 和 V. V. Kirichenko，《有限维代数》，施普林格出版社，柏林，1994。[9] J. J. Graham 和 G. I. Lehrer, *Cellular algebras*，数学发明 123 (1996)，1-34。[10] J. Guilhot 和 V. Miemietz, *Affine cellularity of affine Hecke algebras of rank two*，数学杂志 271 (2012)，373-397。[11] T. W. Hungerford，《代数》（GTM 73）。施普林格出版社，1974。[12] G. Kemper，《交换代数教程》。施普林格出版社，2011

[13] A. Kleshchev, *Affine highest weight categories and affine quasihereditary algebras*, 伦敦数学会会刊 110 (2015), 841-882。[14] A. Kleshchev, J. Loubert 和 V. Miemietz, *Affine cellularity of Khovanov-Lauda-Rouquier algebras in type A* **88** 2013 338 358 , 伦敦数学会杂志 ( ), -。[15] A. Kleshchev 和 J. Loubert, *Affine cellularity of Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of finite types* **14** 2015 5659 5709 , 国际数学研究通知 ( ), -。[16] S. Koenig 和 C. C. Xi, *On the structure of cellular algebras*, 载于: I. Reiten、S. Smalø 和 Ø. Solberg（编）: 《代数与模 II》。加拿大数学会会议论文集 24 (1998), 365-386。[17] S. Koenig 和 C. C. Xi, *Affine cellular algebras*, 数学进展 229 (2012), 139-182。[18] T. Szamuely, 《伽罗瓦群与基本群》。剑桥高等数学研究丛书 117 (2008)。[19] K. Ueno, 《代数几何 1: 从代数簇到概形》。

Li: School of Mathematics and Statistics Northeastern University at Qin- , , „
huangdao Qinhuangdao 066004 P.R. China
Email address: liyanbo707@163.com

Sun: Department of mathematics School of Science Northeastern Univer- , , , „
sity Shenyang 110819 P.R. China
Email address: bowen_un@163.com