arXiv:2303.00359v1 [math.AP] 1 Mar 2023

波纹状与光滑负曲率等距浸入的唯一性和稳定性

CLEOPATRA CHRISTOFOROU

谨以此文献给我的导师 *Constantine Dafermos*，祝贺他八十华诞。

Abstract. 我们证明了嵌入于 $\mathbb{R}^3$中的负曲率波纹状二维浸入这一类中的光滑等距浸入具有唯一性。我们采用的主要工具是相对熵方法，并将其应用于微分几何中的高斯-科达齐系统。该结果还使我们能够比较高斯-科达齐系统的两个解，它们分别对应于一个光滑浸入和一个 $C^{1,1}$ 等距浸入，且二者的度量不一定相同；并证明它们的第二基本形式关于度量和初始数据在 L^2中连续依赖。

1. Introduction

等距浸入问题是微分几何中一个基础且在概念上十分重要的问题。近年来，学界广泛致力于考察连续介质物理与等距浸入之间的联系，以借鉴彼此领域的工具，进一步发展各自的研究，甚至将这些工具结合起来。因此，部分研究促成了所谓波纹曲面的存在性结果。这类负高斯曲率的二维等距浸入嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中，不一定光滑，而是呈现褶皱、沟槽，并带有棱边和角点。本文探讨波纹曲面 与光滑曲面之间的唯一性及其稳定性，所采用的工具是几何学框架下的相对熵方法。

等距浸入问题的历史可以追溯到 Riemann 提出具有度量结构的抽象流形，即所谓的黎曼流形，并将曲线和曲面这类经典对象推广至 $\mathbb{R}^3$之时。自然地，这引出了等距嵌入问题：一个黎曼流形能否以其给定的诱导度量浸入某个欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 。Nash 于 1954 年、Kuiper 于 1955 年证明了 $n-$维黎曼流形在 $\mathbb{R}^N$ 中存在全局 C^1 等距嵌入，适用于 $N = 2n + 1$。实际上，后来 Nash 通过使用光滑化算子，得以建立到 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑嵌入，这些算子促成了著名的 Nash-Moser 迭代。显然，人们提出了关于最小可能 N 的问题，而这个问题至今仍未解决。

Date: 2023年3月2日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C42、35L65、35A02、58K25、57R42、53C21、35B35、53C45。*Key words and phrases.* 等距浸入、度量、稳定性、唯一性、相对熵、波纹状、曲率。

本文的核心主题是将二维负曲率流形等距浸入 $\mathbb{R}^3$的问题。该问题可以表述为一组椭圆–双曲混合型非线性偏微分方程的初值问题或初边值问题，即所谓的高斯–科达齐方程组。该方程组由两个偏微分方程支配

$$\partial_1 M - \partial_2 L = \Gamma^{(2)}_{22} L - 2\Gamma^{(2)}_{12} M + \Gamma^{(2)}_{11} N$$
$$\partial_1 N - \partial_2 M = -\Gamma^{(1)}_{22} L + 2\Gamma^{(1)}_{12} M - \Gamma^{(1)}_{11} N$$

以及一个约束方程

$$LN - M^2 = K$$

其中未知变量（L, M, N）对应于流形的第二基本形式。该系统通常为混合型，其类型与高斯曲率的符号有关 K。特别地，对于正曲率曲面，该系统是椭圆型的，这种情形下的理论已相当成熟。相比之下，对于负曲率曲面，该系统是双曲型的，关于整体或局部问题仍有若干未解之处。对负曲率曲面的研究始于希尔伯特，他证明了高斯曲率上界为某个负常数的完备流形无法等距嵌入 $\mathbb{R}^3$。叶菲莫夫于1963年得出了同样的不存在性结论，条件是高斯曲率以特定速率与零保持正距离。首个正面结果由Hong取得 [20] ： 1993年，他证明如果高斯曲率为负，且在无穷远处以某种速率衰减至零（比 ρ^{-2} 快，如$\rho \to \infty$），那么存在一个可等距嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的完备负曲率流形。请注意， ρ 在此表示 $\mathbb{R}^2$中的极坐标半径。到目前为止，所有这些结果都只涉及光滑浸入s。

全局非光滑浸入的构造始于Chen等人 [3] ，随后该领域的其他研究者也开展了相关工作；例如，在给定的负高斯曲率满足不同趋零衰减率条件、且初始数据较为粗糙的情况下（数据属于L^∞ 空间或有界变差 BV空间），他们得到了 [3, 1, 7, 5, 2] 。所研究的对象是具有负高斯曲率、但不一定光滑的二维黎曼流形，即曲面；这类曲面称为波纹曲面，具有交替分布的沟槽和脊。此时，读者不妨想一想一个十分常见的例子：纸张折叠，即一张纸如何折叠。纸张可以弯曲、折叠或揉皱，却不能被压缩或拉伸。这些工作 [3, 1, 7, 5, 2] 并未研究曲率为零的曲面（包括纸张），而是得出了波纹曲面存在的结论，也就是说，具有不连续数据和负高斯曲率的二维流形存在全局嵌入。例如，在图1中，左侧是众所周知的旋转悬链面壳，右侧则是 $x = -x_0$所绘制的具有非圆形横截面和负曲率的波纹曲面；然而，这两个曲面都具有与悬链面相同的度量 g 。这些论文遵循的主要策略，也是 [3] 中的基本思想，是将高斯-科达齐系统视为一个特殊的平衡律系统，并借鉴为平衡律构造弱解的方案，在将流形嵌入 $\mathbb{R}^3$的框架下进行处理。

这一新方法建立了连续介质力学与微分几何之间的联系，并由此证明了所谓波纹曲面的存在。具体而言，在 [7], 中，Christoforou和Slemrod采用补偿紧性方法，得到了Hong关于 $C^{1,1}$ 等距浸入的结果。更确切地说，他们证明了存在一个 $C^{1,1}$ 负曲率等距浸入，其高斯曲率具有与Hong [20] 相同的衰减率 $\rho^{-2-\delta}$，其中 $\delta \in (0,2)$，且允许初始数据属于 L^∞。另请参阅 [21]，其中构造了一个映射，可将每个二维曲面映射为该曲面上稳态可压缩欧拉方程的解。

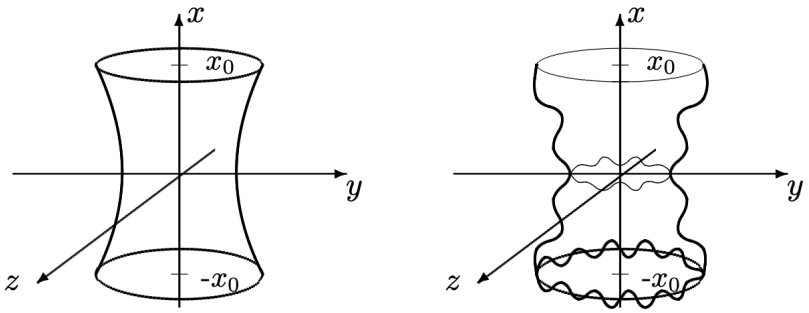


FIGURE 1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，与悬链面具有相同度量的波纹曲面。

本文旨在比较 Hong 的光滑浸入 [20]与 Christoforou–Slemrod 的波纹状浸入 [7]，并采用一种为连续介质力学发展出的另一种方法，即相对熵方法，但将其应用于等距浸入问题，以考察光滑浸入在波纹状浸入类中的唯一性，以及波纹曲面关于其度量的稳定性。这种方法在连续介质力学中已得到广泛应用，并且自其起源之初便与热力学相关，但迄今尚未用于等距嵌入领域。因此，我们的目标有两个：首先，首次将这一名为相对熵的工具应用于几何领域；其次，证明上述稳定性与唯一性结果。由此，我们的工作将使相对熵方法成为浸入领域的一种新工具，同时也会加强这两个领域之间的联系。

Dafermos [12, 13]和 DiPerna [16] 最初在热力学背景下引入了相对熵方法，将其作为比较解的有力工具。该方法已成功应用于守恒律系统（例如 [16, 9, 15, 25]）、平衡律系统（例如 [26, 24]），甚至双曲—抛物型情形。它被用于证明测度值弱解与光滑解的唯一性和稳定性定理，也用于展示零黏性极限或弛豫极限下的收敛结果。关于该方法及其历史的介绍可见书籍 [14]。在 [10], 中，Christoforou 和 Tzavaras 在统一框架下系统整理了相对熵恒等式的推导，并扩展了这一工具适用的系统类别。Christoforou 还在 [6] 中为非齐次平衡律系统建立了该方法的一般框架；也就是说，在这种情况下，状态、通量和源函数显式依赖于

自变量（x, t）。显然，相对熵方法是在热力学研究发展的同时形成的，因此，这一方法与热力学结构密切相关 [11]。鉴于上文提及的连续介质物理与等距浸入之间的紧密联系，我们预计相对熵方法可应用于等距浸入问题。此外，本文所采用的相对熵方法将进一步构建并加强近年来逐渐形成的流体动力学 与微分几何之间的联系，并揭示波纹曲面所具有的“能量”。

过去十年间，守恒律领域的研究群体对这些对象——波纹曲面——给予了广泛关注，旨在理解多维守恒律中弱解的适当概念。实际上，这些对象源于非唯一性悖论，试图捕捉多维系统中存在的现象；因此，有必要对其进行研究，理解适当弱解的特征，并排除不需要的对象。因此，波纹浸入的研究不仅对几何学家具有重要意义，也因其与多维守恒律的联系而具有重要意义。我们还预计，波纹浸入的概念也将出现在各个学科的等距浸入问题应用中，例如生物学、大数据处理和深度学习。因此，对其进行数学解释将有助于更好地理解这些应用领域。

本文的结构如下：在第2节中，我们建立等距浸入问题，并介绍对应于Hong的衰减率 $\rho^{-2-\delta}$ 的光滑浸入和波纹浸入的现有存在性结果，同时在平衡律的框架下表述该问题。随后，在第3节中，我们证明主要定理，其中包括关于初始数据和度量的波纹浸入相对于光滑浸入的稳定性，以及波纹浸入—光滑浸入的唯一性。在本节中，我们在浸入曲面满足适当假设的条件下进行相对熵计算，并获得连续依赖估计。最后，本文通过两个关于螺旋面型曲面的例子，以及根据度量与Hong的浸入进行的比较作结。

2. The Isometric Immersion Problem

本节将介绍等距浸入问题，并从负曲率浸入的角度概述其历史和现状。我们的目标是建立方程，并将其表述为一个平衡律系统。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个开集，且 $\mathbf{y} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 是一个映射，使得曲面 $\mathbf{y}(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$在每一点 $\mathbf{y}(x_1, x_2)$ 处都有一个由向量 $\{\partial_1\mathbf{y}\ \partial_2\mathbf{y}\}$ 张成的切平面。于是，我们立即得到曲面 $\mathbf{y}(\Omega)$ 的单位法向量 $\mathbf{n}$ 为

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_1\mathbf{y} \times \partial_2\mathbf{y}}{|\partial_1\mathbf{y} \times \partial_2\mathbf{y}|}$$

带有相应的度量

$$\begin{aligned} ds^2 =& d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} \\ =& (\partial_1\mathbf{y} \cdot \partial_1\mathbf{y})(dx_1)^2 + 2(\partial_1\mathbf{y} \cdot \partial_2\mathbf{y})dx_1\, dx_2 + (\partial_2\mathbf{y} \cdot \partial_2\mathbf{y})(dx_2)^2 \,. \end{aligned}$$

现在提出以下问题：给定（g_{ij}） $i,\ j=1$，Ω 中的 2 个函数，满足 $g_{12}=g_{21}$，是否存在映射 $\mathbf{y}:\ \Omega\to\mathbb{R}^3$，使得

$$d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y}=g_{11}(dx_1)^2+2g_{12}dx_1dx_2+g_{22}(dx_2)^2\ ,$$

或者等价地，

$$\partial_1\mathbf{y}\cdot\partial_1\mathbf{y}=g_{11},\qquad \partial_1\mathbf{y}\cdot\partial_2\mathbf{y}=g_{12},\qquad \partial_2\mathbf{y}\cdot\partial_2\mathbf{y}=g_{22}$$

存在一个线性无关组 $\{\partial_1\mathbf{y}\ \partial_2\mathbf{y}\}$ 属于 $\mathbb{R}^3$。这个逆矩阵 问题就是等距浸入问题。由最后几个恒等式可知，这个问题关于$\mathbf{y}$的三个分量是完全非线性的。

然而，如果引入流形的第一基本形式和第二基本形式，问题的设定就可以简化。事实上，一个由 Ω 参数化、配有度量 $g=(g_{ij})$ 的二维流形 $(\mathcal{M},g)$，其第一基本形式为 $I=(g_{i\,j})$

$$I\doteq g_{11}(dx_1)^2+2g_{12}dx_1dx_2+g_{22}(dx_2)^2\ ,$$

即其度量 g，而第二基本形式为 $II=(h_{i\,j})$

$$II\doteq h_{11}(dx_1)^2+2h_{12}dx_1\,dx_2+h_{22}(dx_2)^2\ .$$

如果流形 $(\mathcal{M},g)$ 通过映射 $\mathbf{y}$实现等距浸入，则有$II=-d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{y}$，其中$\mathbf{n}$ 是 $\mathcal{M}$的单位法向量。因此，系数 (h_{ij}) 表示$\mathbf{n}$ 与切平面的正交关系，并且与$\mathbf{y}$的二阶导数有关。由于$\mathbf{n}\cdot d\mathbf{y}=0$，可得

$$h_{11}=\mathbf{n}\cdot\partial_1^2\mathbf{y},\quad 2h_{12}=\mathbf{n}\cdot\partial_1\partial_2\mathbf{y},\quad h_{22}=\mathbf{n}\cdot\partial_2^2\mathbf{y}.$$

通过令$\mathbf{y}$ 的混合偏导数相等，并利用上述恒等式，等距浸入问题可归结为求解使高斯–科达齐方程组成立的 (L,M,N)

$$\begin{aligned}\partial_1M-\partial_2L&=\Gamma_{22}^{(2)}L-2\Gamma_{12}^{(2)}M+\Gamma_{11}^{(2)}N\\ \partial_1N-\partial_2M&=-\Gamma_{22}^{(1)}L+2\Gamma_{12}^{(1)}M-\Gamma_{11}^{(1)}N\end{aligned}\tag{2.1}$$

条件为

$$LN-M^2=K\,.\tag{2.2}$$

这里，(L,M,N) 的分量由第一基本形式和第二基本形式给出，如下所示

$$L=\frac{h_{11}}{\sqrt{|g|}},\qquad M=\frac{h_{12}}{\sqrt{|g|}},\qquad N=\frac{h_{22}}{\sqrt{|g|}}\ ,\tag{2.3}$$

其中 $|g|\doteq det(g_{ij})=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$。此外，$K$ 通常表示流形 $(\mathcal{M},g)$ 的高斯曲率$K=K(x_1,x_2)$，其定义为

$$K(x_1,x_2)=\frac{R_{1212}}{|g|}\ ,\tag{2.4}$$

其中，R_{ijkl} 是曲率张量

$$R_{ijkl}=g_{lm}\left(\partial_k\Gamma_{ij}^{(m)}-\partial_j\Gamma_{ik}^{(m)}+\Gamma_{ij}^{(n)}\Gamma_{nk}^{(m)}-\Gamma_{ik}^{(n)}\Gamma_{nj}^{(m)}\right)\ ,$$

且 $\Gamma_{ij}^{(k)}$ 是克里斯托费尔符号

$$\Gamma_{ij}^{(k)} \doteq \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij} \right) .$$

这里，使用指标 i、 j、 k、 $l = 1$、2、(∂_1、 ∂_2) =(∂_{x_1}、 ∂_{x_2})，并采用求和约定。此外，我们使用标准记号，(g^{kl}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵。由上述表达式可知，正如绝妙定理所述，高斯曲率 K由度量 g决定。因此，在给定度量g 的等距浸入问题中， K 和 $\Gamma_{ij}^{(k)}$ 是已知函数。高斯-科达齐系统通常为椭圆–双曲混合型，其类型随高斯曲率的符号而变化。对于具有负高斯曲率的曲面，该系统为双曲型，相应的问题可表述为初值问题或初边值问题。此外，根据曲面理论基本定理，若 (g_{ij}) 和 (h_{ij}) 满足高斯-科达齐系统 (2.1)–(2.3)，则存在一个嵌入$\mathbb{R}^3$ 的曲面，其第一、第二基本形式分别为 I 和 II。这一结果在光滑情形下成立，并已由 S. Mardare [22]推广至 (h_{ij}) $\in L^\infty_{loc}$(Ω) 且给定 (g_{ij}) $\in W^{1,\infty}_{loc}$ (Ω) 的情形。在这种情况下，浸入 y 局部属于 $C^{1,1}$(Ω)。简言之，等距浸入问题可归结为：给定正定度量 (g_{ij}) $\in W^{1,\infty}_{loc}$ (Ω)，求解高斯-科达齐系统 (2.1)–(2.3)，以确定 (L, M, N) $\in L^\infty_{loc}$ (Ω)，从而立即得到等距浸入 y(Ω)，它局部属于 $C^{1,1}$。读者可参阅著作 [17, 19]，了解曲面理论的论述。

为方便读者，我们完整陈述 Mardare 的结果：

定理 2.1 (S.Mardare [22])**.** 假设Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个连通单连通开子集，并且矩阵场(g_{ij}) $\in W^{1,\infty}_{loc}$ (Ω) 为对称正定，且$(h_{ij}) \in L^\infty_{loc}$(Ω) 为对称矩阵，并满足(Ω) $\mathcal{D}'$中的高斯方程和柯达齐-迈纳尔迪方程。那么存在一个映射$\mathbf{y} \in W^{2,\infty}_{loc}$ (Ω $\mathbb{R}^3$) 使得

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{y} \cdot \partial_j \mathbf{y}, \qquad h_{ij} = \partial_{ij} \mathbf{y} \cdot \frac{\partial_1 \mathbf{y} \times \partial_2 \mathbf{y}}{|\partial_1 \mathbf{y} \times \partial_2 \mathbf{y}|}$$

几乎处处在Ω中成立。此外，映射$\mathbf{y}$ 在 $W^{2,\infty}_{loc}$ (Ω $\mathbb{R}^3$) 中唯一，且仅差一个$\mathbb{R}^3$中的保定向等距变换。

本文将注意力限制在测地完备流形上，并指出这一概念等价于黎曼流形定义了一个完备度量空间。事实上，do Carmo 指出：“直观地说，这意味着流形没有任何孔洞或边界”，而这里给出的正是其定义：

定义 2.1. $(\mathcal{M}, g)$ 是测地完备黎曼流形，当且仅当每条测地线都可以无限延拓。

现在，根据 Han and Hong [19, 引理 10.2。1], 若（$\mathcal{M}$， g）是一个测地完备的单连通光滑二维黎曼流形，且具有非正的高斯曲率，那么在 $\mathcal{M}$ 中存在一个全局测地坐标系（x， t），其度量为

$$g = dt^2 + (b(x,t))^2 dx^2 \tag{2.5}$$

其中，$b = b(x, t)$ 是满足 $b(x, 0) = 1$ 且 $\partial_t b(x, 0) = 0$（$x \in \mathbb{R}$）的光滑正函数。这使我们能够在这个测地坐标系（x, t）上进行处理，此时高斯-科达齐系统的形式为

$$\begin{aligned} &\partial_t L - \partial_x M = L\partial_t \ln b - M\partial_x \ln b + Nb\partial_t b, \\ &\partial_t M - \partial_x N = -M\partial_t \ln b, \end{aligned} \tag{2.6}$$

with

$$LN - M^2 = Kb^2, \tag{2.7}$$

其中，$\partial_{tt} b = -Kb$ 根据度量定义了高斯曲率 K。

如引言中所述，Hong 在 1993年 的结果 [20]首次证明：若高斯曲率为负，且其衰减速度快于 t^{-2} （当 $t \to \infty$时），则光滑的完备负曲率流形可以等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$中。另一方面，在 [7], , Christoforou 和 Slemrod 将 Hong 的结果推广到 $C^{1,\,1}$ 等距浸入的情形，即证明存在一个（L, M, N）$\in L^\infty$，其 $\mathbb{R}^2$ 中的高斯曲率 $t^{-2-\delta}$ 具有与 Hong [20]相同的衰减速度。供读者参考，随机选择法、前沿追踪法或带耗散源项的消失黏性法等格式的收敛性，以及补偿紧性方法，已在 [5, 7, 3, 1, 2]中用于借助平衡律的工具构造波纹曲面。本文关注的是 Hong 对 $\delta \in$ （0，2）所给出的较慢衰减率 $t^{-2-\delta}$ 对应的浸入；迄今已知这类浸入存在。因此，我们仅分别陈述 Hong [20] 和 Christoforou–Slemrod [7]的结果如下:

定理2.2 (Han and Hong [19, 定理10.2。2])。 设$(\mathcal{M}, \bar{g})$ 是一个完备单连通二维黎曼流形，其高斯曲率为负 K，度量为 $\bar{g} = dt^2 + (\bar{b}(x,t))^2 dx^2$。假设存在某个常数 $\delta > 0$，使得

(i) $t^{2+\delta}\left|K\right|$ 关于 $|t|$递减，$|t| > T$; *(ii)* $\partial_x^i \ln\left|K\right|$, 对于 $i = 1, 2$ 和 $t\partial_t\partial_x \ln\left|K\right|$ 均有界; *(iii)* K 关于 x 是周期函数，周期为 2π。

那么$(\mathcal{M}, \bar{g})$ 存在一个光滑等距浸入 $\bar{\mathbf{y}}$ 于 $\mathbb{R}^3$.

定理 2.3 (Christoforou 和 Slemrod [7, 定理 6。3])。设$(\mathcal{M}, g)$ 是一个具有负高斯曲率 K 且诱导度量为 $g = dt^2 + (b(x,t))^2 dx^2$的测地完备、单连通光滑二维黎曼流形。对于某个足够大的 $T_1 > 0$，假设 b 和 K 与满足以下条件的 x 无关

$$\partial_{tt} b = -K\, b, \quad b(0) = 1, \quad \partial_t b(0) = 0\,, \tag{2.8}$$

and

$$|K| = \frac{C}{(1 + |t|)^{2+\delta}}, \quad \textit{for all } |t| > T_1 \tag{2.9}$$

对于某个常数 $C > 0$ 以及 $\delta \in (0,2)$。那么$(\mathcal{M}, g)$ 存在一个从$\mathbf{y}$ 到 $\mathbb{R}^3$的全局等距浸入，该浸入局部为，$_1(\mathbb{R}^2)$。

现在，我们通过如下变量缩放，进一步简化系统 (2.6)–(2.7):

$$\ell = \frac{L}{b^2\sqrt{|K|}}, \quad m = \frac{M}{b\sqrt{|K|}}, \quad n = \frac{N}{\sqrt{|K|}} \tag{2.10}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\partial_t \ell - \tfrac{1}{b}\partial_x m + (\ell - n)\partial_t \ln b + \tfrac{\ell}{2}\partial_t \ln|K| - \tfrac{m}{2b}\partial_x \ln|K| = 0,\\ &\partial_t m - \tfrac{1}{b}\partial_x n + 2m\partial_t \ln b + \tfrac{m}{2}\partial_t \ln|K| - \tfrac{n}{2}\partial_x \ln|K| = 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

with

$$\ell n - m^2 = -1. \tag{2.12}$$

在测地坐标系（x, t）中，我们将 t 视为时间变量，将 x 视为空间变量。事实上，在 [7], 中，通过在 $t = 0$ 处赋予适当的数据，并向前、向后求解时间方向上的系统，建立了解的存在性。随后将这两个解拼接起来，因为在 $t = 0$ 处，方程（2.11）的初始数据被选取得至少 C^1。此外，科达齐方程允许我们寻求偏微分方程系统的解（ℓ, m），并将分量 n 视为未知量的函数。事实上，赋予初始数据

$$(\ell(x,0), m(x,0)) = (\ell_0, m_0), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

并采用消失黏性格式，可以证明存在一个子序列（ℓ^μ, m^μ, n^μ），其在 $L^\infty(\Omega)$ 中弱 $*$ 收敛于（ℓ, m, n），当 $\mu \to 0$ 时，$|(\ell, m, n)| \le A$在 Ω 中几乎处处成立，其中 A 与黏性参数 μ 无关，且极限（ℓ, m, n）是区域 Ω 中高斯–科达齐方程组的有界弱解。

此外，遵循 [7], 中的分析，我们假设 b 仅是 t的函数，即与 x无关。作出这一假设只是为了避免进一步的技术细节，否则会在下文写出的守恒律系统中引入额外的源项。换言之，系统 (2.11)–(2.12) 等价于

$$\partial_t U + \partial_x(f(U;b)) + P(U;b) = 0 \tag{2.14}$$

其中，守恒量为 $U = (\ell, m)^T$，通量 f和源项 P分别为

$$f(U;b) = -\frac{1}{b(t)}\begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2-1}{\ell} \end{bmatrix}, \qquad P(U;b) = \begin{bmatrix} (\ell - \frac{m^2-1}{\ell})\partial_t \ln b + \frac{\ell}{2}\partial_t \ln|K| \\ 2m\partial_t \ln b + \frac{m}{2}\partial_t \ln|K| \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

实际上，如果函数 b 也依赖于 x，那么仍然可以将该系统写成守恒形式，其中通量 f 也显式依赖于 x，但代价是源项 P 中会出现涉及 b空间导数的额外项。因此，从现在起，通过 (2.5) 与度量 g 相关联的函数 b 与 x无关。我们注意到，通量和源项都是非齐次的，因为它们通过函数 b显式依赖于时间。这当然会影响下文的分析，因此，当一般函数 ϕ 还依赖于 b时，我们采用记号 $\phi(\cdot; b)$。这里指出，在 [6], 中，我们进行了本构函数显式依赖于 x 和 t时的相对熵计算；这比我们这里的情形更一般，因为此处的依赖仅通过分量 $b(t)$体现。因此，我们不采用 [6] 中的结果，因为其中提出的假设并不适用于此处的情形。

与系统 (2.11) 相关的特征值为

$$\lambda_1 = -\frac{m}{b\,\ell} + \frac{1}{b\,\ell}, \qquad \lambda_2 = -\frac{m}{b\,\ell} - \frac{1}{b\,\ell} \tag{2.16}$$

我们可以看到，每个特征场都是线性简并的。当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时，系统 (2.11) 是严格双曲型的；等价地说，当 $\ell < 0$ 有限时也是如此。还值得一提的是，与上述系统相关的黎曼不变量为

$$u = -\frac{m}{\ell} + \frac{1}{\ell}, \qquad v = -\frac{m}{\ell} - \frac{1}{\ell}\,. \tag{2.17}$$

于是，关于（u, v）变量的一致严格双曲性等价于 $v-u = -\frac{2}{\ell}$为正且一致地远离零。如果 $\ell < 0$ 为有限值，这一点同样成立。此外，该系统还具有一个由（η, q）给出的熵–熵通量对

$$\eta(\ell, m) = -\frac{m^2+1}{\ell}, \qquad q(\ell, m; b) = \frac{m^3 - m}{b\,\ell^2}\,, \tag{2.18}$$

如下文所示，熵 η 关于 $\ell < 0$是凸的。事实上， η 的海森矩阵为

$$\nabla^2\eta = \begin{bmatrix} \eta_{\ell\ell} & \eta_{\ell m} \\ \eta_{\ell m} & \eta_{mm} \end{bmatrix} = -\frac{2}{\ell}\begin{bmatrix} \frac{m^2+1}{\ell^2} & -\frac{m}{\ell} \\ -\frac{m}{\ell} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

由于 $v-u > 0$，我们有 $\ell < 0$，并且断言海森矩阵是正定的。可以计算行列式 $\det \nabla^2\eta = \frac{4}{\ell^4}$ 以及海森矩阵$\nabla^2\eta$的特征值 $-\mu_2 > \mu_1 > 0$：

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= -\frac{1}{\ell^3}(m^2+1+\ell^2) \pm \frac{1}{\ell^3}\sqrt{(m^2+1+\ell^2)^2 - 4\ell^2} \\ &= -\frac{1}{\ell^3}(m^2+1+\ell^2) \pm \frac{1}{\ell^3}\sqrt{m^4 + 2m^2(1+\ell^2) + (\ell^2-1)^2} > c > 0\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

由上述表达式可立即得出，对于 $\ell < -r$，特征值均为实数且严格为正，其中 $r > 0$ 为正常数，因此海森矩阵 $\nabla^2\eta$是正定的。因此，高斯-科达齐系统（2.11）–（2.12）具有严格凸熵 η，即存在一个常数 $c_0 > 0$

$$\xi^T\left(\nabla^2\eta(\cdot)\right)\xi \geq c_0|\xi|^2 > 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

众所周知，相对熵方法的成功有赖于熵的凸性，因此其应用主要见于具有凸熵的双曲型系统，参见 [18]。此外，凸熵 η 可以“视为”浸入的能量。最后补充一点，定理 2.2–2.3 中建立的高斯-科达齐系统的解在 $\mathbb{R}^2$中一致有界。实际上，根据 [7], 中的分析，弱解 $U = (\ell, m)^T \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$，且存在有界的不变区域，其中 $u < 0 < v$。由此可知，对所有满足 $U(x,t) \in B_0$且取值于球 $B_0 := [-R_0, -r_0] \times (-1, 1)$ 的 x和 t， $U(x,t)$ 都一致有界，其中 $(x,t) \in \mathbb{R}^2$， r_0和 R_0为正常数。这是由近似序列 (u^μ, v^μ) 的 Riemann 不变量的 H^{-1} 紧性和一致有界性得到的。我们还用 $B := [-R, -\bar{r}] \times (-1, 1)$ 表示由 Hong 定理 2.2 得到的光滑解$\bar{U} = (\bar{\ell}, m)^T$ 的值域。

—

—

3. The Relative Entropy Method for the Gauss-Codazzi System

本节中，我们考虑两个二维黎曼流形（$\mathcal{M}$, g）和（$\mathcal{M}$, $\bar{g}$），它们是测地完备且单连通的，具有非正高斯曲率，并且

不一定具有相同的度量。设 $\Omega = \mathbb{R} \times [0,T] \subset \mathbb{R}^2$ 为两个流形作为浸入曲面时的公共定义域。此外，假设（$\mathcal{M}$, $\bar{g}$）是一个光滑等距浸入，其中 $\mathbf{y}$ 是在 Ω 中相应的光滑浸入映射。另一方面，设（$\mathcal{M}$, g）是一个等距浸入，其映射 $\mathbf{y}$ 不一定光滑，但至少局部属于 C^1, $_1(\Omega)$。为方便起见，由于不要求光滑性，我们称（$\mathcal{M}$, g）为波纹状。最后，我们考虑满足高斯-科达齐系统（2.11）–（2.12）的相应三元组（ℓ, m, n）和（ℓ, m, $\bar{n}$）。最终，我们计划将结果应用于整体情形，即：$\Omega = \mathbb{R}^2$，其中（$\mathcal{M}$, g）和（$\mathcal{M}$, $\bar{g}$）分别是由 [7] 中的定理 2.3和 [20]中的定理2.2得到的浸入。

我们旨在运用相对熵方法比较这两个流形，并证明第二基本形式的稳定性取决于初始数据和度量，同时建立皱曲–光滑唯一性定理。事实上，下文将利用浸入问题与连续介质物理之间的联系，按照上一节所述，在三元组 (ℓ, m, n) 和 $(\ell, m, \bar{n})$ 的层面上，对两个流形 $(\mathcal{M}, g)$ 和 $(\mathcal{M}, \bar{g})$ 进行比较，并计算相对熵。

为进行下文的相对熵计算，我们作如下假设：

假设（H）。对于某些 T、 $0 < T \leq \infty$ 和 $\Omega = \mathbb{R} \times [0,T] \subset \mathbb{R}^2$，我们假设

(H$_0$) Gauss-Codazzi 方程解的有界性，即对所有 $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$，均有 $U = (\ell, m)^T \in \overline{B_0}$ 和 $U = (\bar{\ell}, m)^T \in B$，且 $U(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap \overline{BV}(\mathbb{R})$ 对所有$t \in [0,T]$成立。(H$_1$) K 和 b 是 $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的函数，且均与 x 无关。此外，函数 $b > 0$ 通过流形 $(\mathcal{M}, g)$ 的式 (2.5) 与度量 g 相关，而 $K < 0$ 对应于同一流形的高斯曲率，即式 (2.4)。在光滑流形 $(\mathcal{M}, \bar{g})$ 的情形下，函数对 K 和 b 也满足类似条件。

(H$_2$) 以下可积性条件成立：

$$(\bar{b}(t))^{-1},\ \partial_t \ln b,\ \partial_t \ln |K| \in L^1[0,T]\,.$$

(H$_3$) 数对 (K,b) 和 $(K,\overline{b})$ 满足

$$\left|\partial_t \ln \frac{b(t)}{\overline{b}(t)}\right| \in L^2[0,T], \quad \left|\partial_t \ln \frac{K(t)}{\overline{K}(t)}\right| \in L^2[0,T], \quad \left|\frac{1}{\overline{b}(t)} - \frac{1}{b(t)}\right| \in L^1[0,T]\,.$$

现在，我们考虑满足系统 (2.11)–(2.12) 的三元组 (ℓ, m, n) 和 $(\ell, m, \bar{n})$，它们分别对应于 $(\mathcal{M}, g)$ 和 $(\mathcal{M}, \bar{g})$。首先，我们定义与系统 (2.11) 相关的相对熵

$$\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m}) := \eta(\ell, m) - \eta(\bar{\ell}, \overline{m}) - \nabla\eta(\bar{\ell}, \overline{m})\left(U - \overline{U}\right) \tag{3.1}$$

其具有以下特殊形式

$$\begin{aligned}\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m}) &= -\frac{1}{\bar{\ell}}\left\{(m - \overline{m})^2 + (\ell - \bar{\ell})\left(\eta(\ell, m) - \eta(\bar{\ell}, \overline{m})\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{\bar{\ell}}\left\{(m - \overline{m})^2 + \frac{(1 + \overline{m}^2)}{\ell\bar{\ell}}(\ell - \bar{\ell})^2 + \frac{1}{\ell}(m + \overline{m})(\overline{m} - m)(\ell - \bar{\ell})\right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

由熵的凸性（2.21），可得

$$\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m}) \geq c_0(|\ell - \bar{\ell}|^2 + |m - \overline{m}|^2) ,$$

对于某个常数 $c_0 > 0$ 。事实上，相对熵等价于状态 $U = (\ell, m)^T$ 与 $U = (\bar{\ell}, m)^T$ 之间的距离 L^2 。事实上，由于 $U \in B_r$ 和 $\bar{U} \in \bar{B}$，我们有

$$c_0(|\ell - \bar{\ell}|^2 + |m - \overline{m}|^2) \leq \eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m}) \leq c_1(|\ell - \bar{\ell}|^2 + |m - \overline{m}|^2) , \tag{3.3}$$

对于某个常数 $c_1 > 0$ ，该常数可能取决于球 B_0 和 B 的大小。

接下来，我们考虑相对熵通量

$$q(\ell, m; b||\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) := q(\ell, m; b) - q(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) - \nabla\eta(\bar{\ell}, \overline{m}) \left(f(\ell, m; b) - f(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b})\right) . \tag{3.4}$$

然而，我们注意到，相对熵通量也依赖于度量，这是通过与 $(\mathcal{M}, g)$ 相关的分量 $\bar{}$、 b，以及与光滑流形 $(\mathcal{M}, \bar{g})$ 相关的分量 b 体现的。为了进行相对熵计算，我们还需要引入相对通量

$$f(\ell, m; b||\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) := f(\ell, m; b) - f(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) - \nabla f(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) \left(U - \overline{U}\right) , \tag{3.5}$$

以及熵的相对梯度

$$\nabla\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m}) := \nabla\eta(\ell, m) - \nabla\eta(\bar{\ell}, \overline{m}) - \nabla^2\eta(\bar{\ell}, \overline{m}) \left(U - \overline{U}\right) . \tag{3.6}$$

这里给出了关于浸入相对于度量和初始数据的稳定性与唯一性的主要定理。

定理 3.1. 设 $0 < T \leq \infty$ 和 $\Omega = \mathbb{R} \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2$。假设 $(\mathcal{M}, g)$ 是具有负高斯曲率 K 、诱导度量 g 具有(2.5) 形式，且存在相应的波纹状等距浸入 $\mathbf{y}$ 到 $\mathbb{R}^3$中的测地完备单连通二维黎曼流形，并且该浸入局部属于 $C^{1,1}(\Omega)$。此外，假设 $(\mathcal{M}, \bar{g})$ 是具有负高斯曲率 K 、诱导度量具有(2.5) 形式的测地完备单连通光滑二维黎曼流形，且存在相应的等距浸入 $\bar{\mathbf{y}}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 中，并且该浸入在Ω上光滑。在假设（H）下，以下结论成立：

(a) 关于度量和初始数据意义下第二基本形式在 L^2 中的稳定性

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(t)-\bar{\ell}(t)|^2+|m(t)-\overline{m}(t)|^2 dx \leq e^{\Phi(t)} \int_{-\infty}^{\infty} |\ell_0-\bar{\ell}_0|^2+|m_0-\overline{m}_0|^2 dx + C_g \int_0^T e^{\Phi(t)-\Phi(s)} \psi(s) ds$$

对于某个正常数 $C_g > 0$ 与度量无关，且某些有界的以及正函数 $\Phi(s)$ $\psi(s)$ 定义在 $[0, T]$ 上，其中 (ℓ, m, n) 和 $(\bar{\ell}, \overline{m}, \bar{n})$ 是相应的对应于(2.11)–(2.12) 的解，其中 (ℓ_0, m_0) 和 $(\bar{\ell}_0, \overline{m}_0)$ 相应的初始数据 (2.13)。

(b) 如果对于所有 $t \in [0, T]$均有 $b(t) = \bar{b}(t)$ </style}，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(t) - \bar{\ell}(t)|^2 + |m(t) - \overline{m}(t)|^2 dx \leq Ce^{\Phi(t)} \int_{-\infty}^{\infty} |\ell_0 - \bar{\ell}_0|^2 + |m_0 - \overline{m}_0|^2 dx .$$

(c) 如果对于所有 $t \in [0,T]$ 以及 $(\ell_0, m_0) = (\ell_0, m_0)$</style}，则在 Ω 上波纹解 – 光滑解唯一性成立，即波纹浸入 **y </style}** 与 **光滑解 y** 重合。

证明。为方便起见，我们用记号 $\phi = \phi(U;\, b)$ 和 $\phi = \overline{\phi}(U;\, b)$ 表示某个一般函数 ϕ。

设 $U = (\ell, m)$ 是方程 (2.11) 的一个弱解，$\overline{U} = (\ell, m)$ 是一个强解，其对应的度量分量分别为 b 和 b。换言之，有

$$\partial_t U + \partial_x (f(U;b)) + P(U;b) = 0 \tag{3.7}$$

and

$$\partial_t \bar{U} + \partial_x (f(\bar{U};b)) + P(\bar{U};\bar{b}) = 0 \tag{3.8}$$

利用守恒律 (2.14)–(2.15) 的形式以及初始数据 (ℓ_0, m_0) 和 (ℓ_0, m_0)。此外，熵不等式成立：

$$\partial_t \eta(\ell, m) + \partial_x (q(\ell, m; b)) + \nabla\eta(\ell, m) \cdot P(U;b) \leq 0\,, \tag{3.9}$$

而在光滑情形下，我们有一个恒等式，即

$$\partial_t \eta(\bar{\ell}, \overline{m}) + \partial_x (q(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b})) + \nabla\eta(\bar{\ell}, \overline{m}) \cdot P(\overline{U};\bar{b}) = 0\,. \tag{3.10}$$

Then

$$\partial_t (\eta(\ell, m) - \eta(\bar{\ell}, \overline{m})) + \partial_x (q(\ell, m; b) - q(\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b})) + \nabla\eta \cdot P - \nabla\bar{\eta} \cdot \overline{P} \leq 0\,. \tag{3.11}$$

这些关系使我们能够计算

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left[\nabla\bar{\eta} \cdot (U - \overline{U})\right] + \partial_x \left[\nabla\bar{\eta} \cdot (f - \bar{f})\right] = \\
=&\nabla^2\bar{\eta}\, \partial_t\overline{U} \cdot (U - \overline{U}) + \nabla^2\bar{\eta}\, \partial_x\overline{U} \cdot (f - \bar{f}) + \nabla\bar{\eta} \cdot \left[\partial_t(U - \overline{U})\partial_x(f - \bar{f})\right] \\
=&\nabla^2\bar{\eta} \left[-\left(\nabla\bar{f}\partial_x\overline{U} + \bar{P}\right) \cdot (U - \overline{U}) + \partial_x\overline{U} \cdot (f - \bar{f})\right] - \nabla\bar{\eta} \cdot (P - \overline{P}) \\
=&\nabla^2\bar{\eta}\, \partial_x\bar{U} \cdot f(\ell, m; b|\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) - \overline{P} \cdot \nabla^2\bar{\eta}\, (U - \overline{U}) - \nabla\bar{\eta} \cdot (P - \overline{P})\,,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

利用 (3.7)、(3.8) 和 (3.5)。我们还将该表达式改写为

$$\begin{aligned}
&\nabla\eta \cdot P - \nabla\bar{\eta} \cdot \bar{P} - \bar{P} \cdot \nabla^2\bar{\eta}(U - \overline{U}) - \nabla\bar{\eta} \cdot (P - \overline{P}) = \\
&\qquad = (\nabla\eta - \nabla\bar{\eta}) \cdot (P - \bar{P}) + \overline{P} \cdot \nabla\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m})\,,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

然后将 (3.11) 和 (3.12) 与 (3.13) 结合起来，得到相对熵不等式

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m})) + \partial_x (q(\ell, m; b||\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b})) + (\nabla\eta - \nabla\bar{\eta}) \cdot (P - \overline{P}) \leq \\
&\qquad \leq -\nabla^2\bar{\eta}\partial_x\overline{U} \cdot f(\ell, m; b||\bar{\ell}, \overline{m}; \bar{b}) - \overline{P} \cdot \nabla\eta(\ell, m|\bar{\ell}, \overline{m})\,.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

不等式 (3.14) 给出了相对熵的演化，它与凸性 (2.21) 一起构成了我们方法的核心，并由此导出下文所示的 (a) 中的稳定性估计。

由 (2.15) 和 (3.5)，我们计算得

$$f(\ell,m;b||\bar{\ell},\overline{m};\bar{b})=\left(\frac{1}{\overline{b}(t)}-\frac{1}{b(t)}\right)\begin{bmatrix} m \\ \dfrac{m^2-1}{\ell} \end{bmatrix}+\frac{1}{\overline{b}(t)}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})+2\dfrac{(\ell-\bar{\ell})^2}{\ell\bar{\ell}^2} \end{bmatrix}.$$

因此，由 (3.3) 和假设 (H_0)，可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\nabla^2\bar{\eta}\partial_x\overline{U}\cdot f(\ell,m;b||\bar{\ell},\overline{m};\bar{b})\right|dx &\le C_1\left|\frac{1}{\overline{b}(t)}-\frac{1}{b(t)}\right|\|\partial_x\overline{U}\|_{L^1}+\frac{C_0}{\overline{b}(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})dx\\ &\le C_g\left|\frac{1}{\overline{b}(t)}-\frac{1}{b(t)}\right|+\frac{C_0}{\overline{b}(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})dx\,. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

这里，正常数 $C_g=C_g(B_0,\ B)$ 和 $C_0=C_0(B_0,\ B)$ 取决于球 B_0 和 B的大小，即 U 和 U的 L^∞ 界。此外，C_g 取决于 $\|\partial_x U\|_{L^1}$，而 C_0 还取决于凸性常数。为方便起见，在下文中我们将 C_g 和 C_0作为通用常数。

接下来，由 (3.6) 和 $(2.18)_1$, 可得

$$\nabla\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})=-\frac{1}{\bar{\ell}}\begin{bmatrix} -(\ell+\bar{\ell})\frac{(1+\overline{m}^2)}{\ell^2\bar{\ell}^2}(\ell-\bar{\ell})^2+\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m}) \\ -\frac{2}{\bar{\ell}}(m-\overline{m})(\ell-\bar{\ell})+\frac{2\overline{m}}{\ell\bar{\ell}}(\ell-\bar{\ell})^2 \end{bmatrix}.$$

利用 U 和 U 的相同界以及凸性，我们立即得到熵的相对梯度受 $\eta(\cdot|\cdot)$ 控制。换言之，可得

$$|\nabla\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})|\le C_0\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})\,. \qquad (3.16)$$

对于演化方程 (3.14) 中最后剩下的源项，我们计算得

$$(\nabla\eta(\ell,m)-\nabla\eta(\bar{\ell},\overline{m}))=\frac{2}{\ell\bar{\ell}}\begin{bmatrix} \dfrac{(m-\overline{m})(m+\overline{m})\bar{\ell}^2+(\overline{m}^2+1)(\ell+\bar{\ell})(\bar{\ell}-\ell)}{2\ell\bar{\ell}} \\ \bar{m}(\ell-\bar{\ell})+(\overline{m}-m)\bar{\ell} \end{bmatrix}$$

而 $P-P=((P-P)_1,(P-P)_2)$ 的两个分量为

$$\begin{aligned}(P-\overline{P})_1=&\left\{\left(\ell-\frac{m^2-1}{\ell}\right)-\left(\bar{\ell}-\frac{\overline{m}^2-1}{\bar{\ell}}\right)\right\}\partial_t\ln b+\left(\bar{\ell}-\frac{\overline{m}^2-1}{\bar{\ell}}\right)\partial_t\ln\frac{b}{\overline{b}}\\ &+\frac{(\ell-\bar{\ell})}{2}\partial_t\ln|K|+\frac{\bar{\ell}}{2}\partial_t\ln\frac{|K|}{|\overline{K}|}\,,\end{aligned}$$

and

$$(P-\overline{P})_2=2(m-\overline{m})\partial_t\ln b+2\overline{m}\partial_t\ln\frac{b}{\overline{b}}+\frac{(m-\overline{m})}{2}\partial_t\ln|K|+\frac{\overline{m}}{2}\partial_t\ln\frac{|K|}{|\overline{K}|}\,.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\left|(\nabla\eta(\ell,m)-\nabla\eta(\bar{\ell},\overline{m}))\cdot(P-\overline{P})\right|\le\ & C_1'(|\ell-\bar{\ell}|^2+|m-\overline{m}|^2)(|\partial_t\ln b(t)|+|\partial_t\ln|K(t)||)\\ &+C_2'(|\ell-\bar{\ell}|+|m-\overline{m}|)\left(\bar{\ell}\left|\partial_t\ln\frac{b(t)}{\overline{b}(t)}\right|+\overline{m}\left|\partial_t\ln\frac{|K(t)|}{|\overline{K}(t)|}\right|\right)\,,\end{aligned}$$

其中常数还取决于 L^∞ 的界以及 U 和 $U_{\text{。因此，我们得到估计}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\nabla\eta(\ell,m)-\nabla\eta(\bar{\ell},\overline{m}))\cdot(P-\overline{P})dx \le C_g\left(\left|\partial_t\ln\frac{b(t)}{\bar{b}(t)}\right|^2+\left|\partial_t\ln\frac{K(t)}{\overline{K}(t)}\right|^2\right)$$
$$+C_0\,(1+|\partial_t\ln b(t)|+|\partial_t\ln|K(t)||)\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})dx \qquad (3.17)$$

利用（3.3）以及 $t\in[0,T]$ 的 $U(t)$ 的 $L^1(\mathbb{R})$ 界。因此，对（3.14）积分并使用估计（3.15）、（3.16）和（3.17），可得

$$\frac{d}{dt}(\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})dx) \le C_0\left(1+\frac{1}{\bar{b}(t)}+|\partial_t\ln b(t)|+|\partial_t\ln|K(t)||\right)\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell,m|\bar{\ell},\overline{m})dx$$
$$+C_g\left(\left|\partial_t\ln\frac{b(t)}{\bar{b}(t)}\right|^2+\left|\partial_t\ln\frac{K(t)}{\overline{K}(t)}\right|^2+\left|\frac{1}{\bar{b}(t)}-\frac{1}{b(t)}\right|\right). \qquad (3.18)$$

现在令

$$\varphi(t):=C_0\left(1+\frac{1}{\bar{b}(t)}+|\partial_t\ln b(t)|+|\partial_t\ln|K(t)||\right) \qquad (3.19)$$

and

$$\psi(t):=\left|\partial_t\ln\frac{b(t)}{\bar{b}(t)}\right|^2+\left|\partial_t\ln\frac{K(t)}{\overline{K}(t)}\right|^2+\left|\frac{1}{\bar{b}(t)}-\frac{1}{b(t)}\right|, \qquad (3.20)$$

由假设（H），我们看到 φ，$\psi\in L^1[0,T]$。现在应用格朗沃尔不等式，我们立即得到所需的相对熵估计

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell(t),m(t)|\bar{\ell}(t),\overline{m}(t))dx \le e^{\Phi(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\ell_0,m_0|\bar{\ell}_0,\overline{m}_0)dx+C_g\int_0^t e^{\Phi(t)-\Phi(s)}\psi(s)\,ds\,,$$

其中 $\Phi(t)=\int_0^t\varphi(s)ds$，从而（a）得证。由于在 $b(t)=b(t)$ 的情形下，$\psi(s)=0$，因此（b）立即成立。此外，如果进一步有（ℓ_0，m_0）$=(\ell_0,m_0)$,则

$$\eta(\ell(t),m(t)|\bar{\ell}(t),\overline{m}(t))=0\,,$$

¯对所有 $t\in[0,T]$ 都成立，并且根据（3.3），两个三元组 ¬(ℓ，m，n）和（ℓ，m，$\bar{n}$）相同。因此，根据曲面的基本定理，相应的浸入映射完全相同。□

注 3.1。*1.* 定义域 Ω 满足假设(H)，且定理 *3.1* 可替换为$\Omega=\mathbb{R}\times[T_1,T_2]$。于是，定理的结论在平移后的时间区间$[T_1,T_2]$内仍然成立。当定义域Ω 有界时，可以对分析进行适当修改。然而，由于我们的目标是处理整体情形 $\mathbb{R}^2$，因此不讨论$\Omega=[-a,a]\times[0,T]$。尽管如此，对于 $x\in[-a,a]$，结合$a>0$，或在空间变量中满足周期性条件时，仍可对上述分析进行调整。

2. 我们注意到，假设 (H_3) 使我们能够比较这两个度量，这一点通过函数 ψ 体现出来；该函数在(3.20) 中给出，对应于度量 g 与 $\bar{g}$之间的“距离”。

在下一个命题中，我们预先讨论整体情形。

定理 3.2（整体情形）。设（$\mathcal{M},g$）是一个测地完备、单连通且具有负高斯曲率的二维黎曼流形 K，其诱导度量 g 具有（2.5）的形式，并带有相应的波纹等距浸入$\mathbf{y}$，其定义在

$\mathbb{R}^3$上，且全局，$_1$（$\mathbb{R}^2$）。此外，设（$\mathcal{M}, \bar{g}$）是一个测地完备、单连通的光滑二维黎曼流形，具有负高斯曲率 K，其诱导度量具有（2.5）的形式，并带有相应的等距浸入$\bar{\mathbf{y}}$，定义在 $\mathbb{R}^3$上且在 $\mathbb{R}^2$上光滑。假设对于$\Omega = \mathbb{R}^2$，假设（H_0）–（H_2）成立，且假设 $g \equiv \bar{g}$，则以下结论成立：

(a) 关于初始数据的第二基本形式的 L^2 稳定性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(t) - \bar{\ell}(t)|^2 + |m(t) - \overline{m}(t)|^2 dx \le Ce^{\Phi(t)} \int_{-\infty}^{\infty} |\ell_0 - \bar{\ell}_0|^2 + |m_0 - \overline{m}_0|^2 dx$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$，以及某个与度量无关的正常数 $C > 0$，并且$\bar{}$在 $\mathbb{R}$ 上的某些有界正函数 $\Phi(s)$，其中 (ℓ, m, n) 和 $(\bar{\ell}, \bar{m}, \bar{n})$ 是$\bar{}$对应于 *(2.13)* 中的初始数据 (ℓ_0, m_0) 和 $(\bar{\ell}_0, m_0)$ 的 *(2.11)–(2.12)* 的解。*(b)* 在 $\mathbb{R}^2$ 上波纹状与光滑解的唯一性，即：若 $(\ell_0, m_0) = (\bar{\ell}_0, m_0)$，则波纹浸入 $\mathbf{y}$ 与光滑浸入 $\bar{\mathbf{y}}$ 重合。

证明。当 $T = \infty$ 时，证明可直接应用定理 3.1；此外，我们也可以沿着相反的时间方向进行证明中的分析，从而覆盖 $t < 0$。然后，将这两部分拼接起来，便可得到 $\mathbb{R}^2$ 上的唯一性。我们注意到，可以先证明 $t > 0$ 上双曲问题 (2.11)–(2.12) 的存在性，再证明 $t < 0$ 上的存在性，从而构造出一个全局浸入。若第二基本形式的数据至少为 C^1，例如在 $t = 0$ 处拼接这两个解，便可实现这一点。[7] 和$\bar{}$也采用了这一策略，但仍会得到波纹浸入。事实上，由于数据不够正则，无法应用 Hong 的结果，$(\ell, m, \bar{n})$ 中的不连续性会在有限时间内出现。然而，$\bar{}$中的补偿紧性方法表明，对于所有时间，$(\ell(t), m(t), \bar{n}(t)) \in L^\infty(\mathbb{R})$。□

现在直接应用即可得到：若比较 Hong [20] 和 Christoforou-Slemrod [7], 构造的两个浸入，当两个度量以及 $t = 0$ 处的初始数据一致时，二者具有唯一性。

推论 3.1。假设$(\mathcal{M}, g)$ 具有定理 *2.3* 的整体 $C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ 等距浸入$\mathbf{y}$，且$(\mathcal{M}, \bar{g})$ 具有定理*2.2* 的整体光滑等距浸入 $\bar{\mathbf{y}}$，二者具有相同的初始数据。那么，对于任意 $T > 0$，波纹浸入$\mathbf{y}$ 在$\Omega = \mathbb{R} \times [-T, T]$上与光滑浸入 $\bar{\mathbf{y}}$ 重合。

该推论直接由定理 3.2 得出，因为对于$T = \infty$，(H_0)–(H_1)得到满足，而对于 $T < \infty$，(H_2)得到满足。

4. 示例

定理 3.1 的结果可以应用于各种情形，不一定局限于整体情形，也不一定要求浸入的高斯曲率以 Hong 的衰减率 $t^{-2-\delta}$衰减。一般而言，只要满足定理的假设，并且两个浸入曲面中至少有一个是光滑的，从而能够进行相对熵计算，就可以比较具有不同度量或不同初始数据的浸入曲面。

这里讨论两个对应于相同数据的应用：

例 1. 比较两个螺旋面。
考虑两个具有不同度量但数据相同的螺旋面，其中一个是光滑的。设

$$g_1 = (1+t^2)dx^2 + dt^2 \,, \tag{4.1}$$

and

$$g_c = \frac{(c^2+t^2)}{c^2}dx^2 + dt^2 \tag{4.2}$$

为分别对应于螺旋面型曲面（$\mathcal{H}_1$，g_1）和（$\mathcal{H}_c$，g_c）的两个度量，其中c 为正常数。螺旋面型曲面已在 [1] 的波纹浸入框架下得到研究；具体而言，上述形式（4.2）所表示的度量，是 [1] 中所考虑的更一般度量类的一个例子，其中使用了与先前工作 [3, 5]不同的变量替换。为阐明 [1], 所揭示的内容，以度量（4.2）为例：如果在 $t = -t_0 < 0$处赋予适当的数据，则存在一个浸入，它接近由映射所描述的已知螺旋面

$$\mathbf{y}(x,t) = (t\sin\frac{x}{c},\, t\cos\frac{x}{c},\, x)$$

并具有不连续二阶导数（h_{ij}）$=$（ℓ_c，m_c，n_c）在 L^∞(Ω)中，其中 Ω $=\mathbb{R}\times[-t_0,0]$, 但具有相同的螺旋面度量 g_c。应当指出，由于偶对称，可以在 Ω′ = {（x，t）中获得弱解：$x\in\mathbb{R}$，$0\le t\le t_0$} 并且利用周期性可将其延拓到 $\mathbb{R}^2$中。

回到我们的问题，我们考察两个这样的浸入。为方便起见，考虑 $c=1$ 为光滑的情形，而对于 $c\neq 1$，我们有一个不一定光滑的浸入，如 [3]所示。我们指出，这两个浸入都对应于测地完备流形。沿用前面的记号，记为

$$b_1(t) = \sqrt{1+t^2}, \quad K_1(t) = -\frac{1}{(1+t^2)^2} \,, \tag{4.3}$$

$$b_c(t) = \frac{1}{c}\sqrt{c^2+t^2}, \quad K_c(t) = -\frac{c^2}{(c^2+t^2)^2} \,, \tag{4.4}$$

其中 K_1 和 K_c 是相应的负曲率。根据 [1], 中的分析可知，假设 (H_0) 成立，而 (H_1) 显然成立。然后，在两个浸入存在的定义域上应用定理 3.1，并对它们的第二基本形式使用相同的数据，便得到以下稳定性结果：

命题 4.1。设 $T>0$ 和$(\mathcal{H}_1, g_1)$ 以及$(\mathcal{H}_c, g_c)$ 是与度量(4.1)–(4.2) 相对应的两个螺旋面型曲面，其中 $\mathcal{H}_1$ 与 $\mathbb{R}^3$中的光滑映射 $\bar{\mathbf{y}}$ 相关，而 $\mathcal{H}_c$ 则对应于局部 $C^{1,\,1}$ 映射 $\mathbf{y}$。那么，相应的第二基本形式(ℓ_1, m_1, n_1) 和(ℓ_c, m_c, n_c) 关于参数 c 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稳定，具体如下

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell_c(t)-\ell_1(t)|^2 + |m_c(t)-m_1(t)|^2 dx \le L\,\frac{|c^2-1|}{c^2}, \qquad t\in[0,T]$$

其中 $L>0$ 是依赖于 T 的某个正常数。

证明。该结果可直接应用定理 3.1 中的分析得出。我们$\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$对 (3.20) 中给出的 $\psi(s)$ 进行估计，将 b 和 K 替换为 b_1 和 K_1，同时将 b 和 K 替换

为 b_c 和 K_c，这符合本例中的记号。于是我们得到

$$\psi(t) \approx \left|\frac{1}{c^2}-1\right| \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2)(1+\frac{t^2}{c^2})}} + \frac{17t^2}{(1+t^2)^2(c^2+t^2)^2}|c^2-1|^2 \lesssim At^2\frac{|c^2-1|}{c^2},$$

对于某个常数 A。注意，此处 $|c-1|$ 取值较小，因此一阶项占主导。现在，定理 3.1 (a) 部分最后一项中完成时间积分后，对因子 L 进行估计；因此，该因子取决于终止时间T。我们注意到， c 通过 (3.19) 出现在 L 中，但这不会影响连续依赖性中得到的因子 $|c^2-1|$。□

例 2. 螺旋面与具有衰减率 $t^{-2-\delta}$ 的浸入

在本例中，我们简要讨论螺旋面型曲面与具有 Hong 慢衰减率的浸入之间的比较，即 $t^{-2-\delta}$。注意，前一例中螺旋面的曲率以速率 t^{-4}衰减。设螺旋面型曲面 $(\mathcal{H}_1, g_1)$ 具有前一例中讨论的度量 (4.1)，并设 $(\mathcal{M}^*, g^*)$ 具有度量 $g^* = dt^2 + (b^*(x,t))^2dx^2$，且满足定理 2.3 的假设，其曲率

$$|K^*| = \frac{C}{(1+|t|)^{2+\delta}}, \quad \text{for all } |t| > T_1 \tag{4.5}$$

对于足够大的 T_1。我们可以根据两个度量 g_1 和 g^* 之间的“距离”，比较相应的第二基本形式 (ℓ_1, m_1, n_1) 和 (ℓ^*, m^*, n^*)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ell_1(t)-\ell^*(t)|^2 + |m_1(t)-m^*(t)|^2 dx \le C_g \int_0^T e^{\Phi(t)-\Phi(s)}\psi(s)ds$$

由定理 3.1 可知，对于 $t \in [0,T]$。事实上，这里我们假设两个浸入在 $t=0$ 处具有相同的初始数据，因此两个基本形式之间的差异仅由度量不同所致。

由 Han and Hong [19, 引理 10.23], 可知，若 $|K^*(s)|$ 和 $s|K^*(s)|$ 属于 $L^1(0,\infty)$，则

$$1 + \int_0^t \int_0^s |K^*(\tau)| dt\tau ds \le b^*(t) \le 1 + C_1 t\,.$$

此外，若 $|K^*(t)|t^{2+\delta}$ 在 $|t|$ 上对于 $|t| > T_1$ 单调递减，则

$$\partial_t \ln b^* = \frac{1}{t} + O(\frac{1}{|t|^{1+\delta}})\,,$$

当 $|t|$ 足够大且 $\partial_t \ln b^*$ 有界时。利用这些结果，我们得到式 (3.20) 中 ψ 的如下渐近行为：

$$\begin{aligned}\psi(t) :&= \left|\frac{t}{1+t^2} - \partial_t \ln b^*(t)\right|^2 + \left|\partial_t \ln(1+t^2)^2 + \partial_t \ln|K^*(t)|\right|^2 + \left|\frac{1}{b^*(t)} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right| \\ &\approx \left|\frac{t}{1+t^2} - (\frac{1}{t} + O(\frac{1}{|t|^{1+\delta}}))\right|^2 + \left|\frac{4t}{1+t^2} - \frac{2+\delta}{t}\right|^2 + \left|\frac{1}{1+t^\delta} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right|,\end{aligned}$$

对于 $|t| > T_1$。

References

[1] W. Cao、F. Huang 和 D. Wang，具有两类度量和负高斯曲率的曲面的等距浸入，《Archive for Rational Mechanics and Analysis》**218**（2015）（3），1431–1457。

[2] W. Cao、F. Huang 和 D. Wang，具有缓慢衰减负高斯曲率的完备曲面的等距浸入，arXiv:1605.09491。[3] G.-Q Chen、M. Slemrod 和 D. Wang，等距浸入与补偿紧性，《数学物理通讯》294，（2010）411–437。[4] G.-Q Chen、M. Slemrod 和 D. Wang，等距嵌入的高斯–科达齐–里奇系统的弱连续性，《美国数学会会刊》138（2010）（5）1843–1852。[5] C. Christoforou，等距浸入的高斯-科达齐系统的BV弱解， *J. Diff. Eqns*252（2012），2845–2863。[6] C. Christoforou，非齐次平衡律系统的相对熵方法， *Quarterlyof Applied Math.*，79（2021）201–227。[7] C. Christoforou 和 M. Slemrod，针对缓慢衰减负高斯曲率和粗糙数据，通过补偿紧性实现的等距浸入， *Z. Angew. Math. Phys.*，66（2015）（6）3109–3122。[8] C. Christoforou 和 M. Slemrod，关于等距浸入的高斯曲率衰减率，*Bulletin of the Braz. Math. Soc.*，（N.S.），47（2016）（1），255–265。[9] Y. Brenier、C. De Lellis 和 L. Sz`ekelyhidi Jr.，测度值解的弱强唯一性，*Comm. Math. Physics* **305** （2011），351–361。[10] C. Christoforou 和 A. Tzavaras。双曲–抛物系统的相对熵及其在热黏弹性本构理论中的应用。*Arch. Rational Mech. Anal.* **229** （2018）（1）1–52。[11]B.D. Coleman 和 W. Noll。具有热传导和黏性的弹性材料的热力学。 *Arch. Rational Mech. Anal.* 13：167–178，1963年。[12] C. M. Dafermos，热力学第二定律与稳定性。 *Arch. Rational Mech. Anal.* **70**（1979），167–179。[13] C. M. Dafermos，热弹性流体运动的稳定性。 *J. Thermal Stresses* **2** （1979），127–134。[14] C.M. Dafermos，*Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*，第三版。《数学科学基础丛书》325。施普林格出版社，柏林，2010年。[15] S. Demoulini、D. M. A. Stuart 和 A. E. Tzavaras。多凸弹性动力学中耗散测度值解的弱强唯一性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，205(3):927–961，2012年。[16] R. J. DiPerna。双曲守恒律解的唯一性， *Indiana Univ. Mah. J.* **28**（1979），137–187。[17] M. P. do Carmo，*Riemannian Geometry* F. Flaherty 译，波士顿，马萨诸塞州：Birkhäuser，1992年。[18] K. O. Friedrichs 和 P. D. Lax。具有凸扩展的守恒方程组。 *Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A.*，68:1686–1688，1971年。[19] Q. Han 和 J.–X. Hong，欧氏空间中的黎曼流形等距嵌入。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会，2006年。[20] J. X. Hong，在 $\mathbb{R}^3$ 中实现具有负曲率的完备黎曼流形， *Comm.Anal. Geom.* **1** （1993），487–514。[21] S. Li 和 M. Slemrod，从等距嵌入的纳什–库伊珀定理到定常流体运动的欧拉方程：类比、例子与推广， *J. Math. Phys.* **64**，011511（2023）。[22] S. Mardare，低正则性曲面的曲面理论基本定理。*J. Elasticity*73，251–290（2003）。[23] S. Mardare，关于具有 L^p 系数的普法夫系统及其在微分几何中的应用。 *J.Math. Pure Appl.* **84** 1659–1692（2005）。[24] A. Miroshnikov 和 K. Trivisa：平衡律双曲松弛中的相对熵。 *Commun.Math. Sci.* **12**（2014），1017–1043。[25] D. Serre 和 A. Vasseur：守恒律系统的 L^2型压缩。 *J. École Polytech.Math.* **1** （2014），1-28。[26] A. E. Tzavaras：双曲松弛中的相对熵。*Commun. Math. Sci.* **3** （2005），119–132。（Cleopatra Christoforou）

Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia 1678, Cyprus.
Email address: christoforou.cleopatra@ucy.ac.cy