arXiv:2303.00367v1 [math.NA] 1 Mar 2023

具有 N被动弹性臂的低雷诺数游动器的极限模型

Fran,cois Alouges[1],Aline Lefebvre-Lepot[2],和 Jessie Levillain[2]

[1]Centre Borelli、巴黎萨克雷高等师范学院、法国国家科学研究中心、巴黎萨克雷大学，法国吉夫叙尔伊维特 91190[2] 应用数学中心、法国国家科学研究中心、 ´巴黎综合理工学院、巴黎理工学院，法国帕莱索 91120

摘要

我们研究一种低雷诺数人工游动体，它由一个主动臂以及其后由球体隔开的N 被动弹簧组成。这一装置推广了 Montino 和 DeSimone 在《欧洲物理学杂志 E》第 38 卷（2015年）中提出的方法。我们进一步研究弹簧数量趋于无穷且参数经过适当缩放时的极限，并严格证明离散模型收敛到连续模型。若干数值实验展示了主动臂的振荡频率或振幅对位移性能的影响。

1 引言

正如珀塞尔的扇贝定理 [3], 所述，在低雷诺数条件下，游动器的往复形状变化永远不会使系统产生净位移。事实上，在这种情况下，由于惯性力可以忽略不计，微观扇贝即使开合贝壳，也完全无法游动 [4]。此后，人们提出了几种简单的机制（例如参见 [5]），以克服这一障碍；其中大多数机制利用两个自由度，在游动器的形状空间中形成具有非零面积的闭合曲线。

文献中提出的最简单机制之一，可能是 Najafi 和 Golestanian 的三球游动器 [6], ，它由三个球体通过两条厚度可忽略的可伸缩臂连接而成，并沿单一方向运动。该模型比珀塞尔最初的三连杆游动器 [3],或珀塞尔旋转器 [7], 简单得多，因为它不涉及旋转运动。这个游动器有两个自由度，它们随时间周期性地启动，并带有相位差，从而形成闭合环路。珀塞尔的游动器以及 Najafi 和 Golestanian 的游动器都已在 [8–13]中得到广泛研究。

作为对这种三球游动体的扩展，Montino 和 DeSimone 随后提出了一种带有被动弹性臂的三球游动器 [14]。这种改进只有一个自由度，即非弹性臂的长度。得益于系统固有频率处的共振效应（该频率取决于流体的黏度、质量和弹簧常数），弹簧会产生反相振荡，最终使游动器产生净运动。然而，在频率极低或极高时，划动后都不会产生净运动。被动弹性臂还会将净运动限制在游动轴上的一个方向，因此游动方向也受到限制，游动器只能以被动弹性臂朝前的方式移动。Passov 在研究带有被动弹性尾部的珀塞尔三连杆游动器时，也指出了这一点 [15], 。

本文通过为 Montino 和 DeSimone 的一维游动器添加大量 N 被动弹性臂，将其扩展为一个（$N+2$）球体游动器。这个简单的游动器进而导出一个带有弹性尾部的极限模型，其形态类似于一维鞭毛，沿着该鞭毛

压缩波传播。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们介绍 N 弹簧游动器及其运动方程，然后在第 2.3 节考察弹簧数量趋于无穷时的极限模型。我们在第 3 节证明离散模型收敛到连续模型，并指出该离散模型是极限模型的一种非传统质量集块离散。第 4 节介绍两个公式，用于计算离散和连续这两种游动器的净位移。最后，在第 5 节中，我们通过数值研究游动器的运动和位移如何随各种系统参数而变化，以确定能够产生最大净位移的最优游动参数。

2 问题的表述与研究： N弹簧离散模型及其连续极限

本文研究的游动器是对带有一条被动弹性臂 [14], 的三球游动体的扩展，它由 $N+2$ 个球体和 N 条被动弹性臂组成，如图 1 所示。该人工游动体的第一条摆臂是一根厚度可忽略的杆，周围有两个半径为 a_1的球体。这条摆臂围绕其静止长度 L作给定的周期运动，形式为 $L_0(t) = L(1+\tilde{\varepsilon}\cos(\omega t))$，其中$\tilde{\varepsilon} \in [0,1)$是一个无量纲参数。 $\tilde{\varepsilon} < 1$ ，从而保证主动臂的长度始终为正。我们将 ε 定义为 $\varepsilon = L\tilde{\varepsilon}$。游动器其余部分的总静止长度为 Λ ，且不依赖于 N。为保持总长度不变，并使弹性力不依赖于 N，其余所有球体~的半径均为 $a = \tilde{a}/N$，每根弹簧的静止长度均为 $h = \Lambda/N \gg a$，弹性常数均为 $k = kN$，

~

，其中 k 和 $\tilde{a}$ 是给定值，且独立于 N。

如果游动器能够通过给定的周期函数 $L_0(t)$ 控制前杆的长度，那么其余 N 根弹簧的长度由黏性力与弹性力的平衡决定。在任意时刻 t，第 j 个摆臂的长度 $L_j(t)$ $j \geq 1$ 可写为 $L_j(t) = {}^{\ell_j(t)}{}_N + h$。记 μ 为流体黏度， f_j^F 和 f_j^R 分别为作用在第 j 个球体上的流体动力和弹性力。再记 x_j 为其中心坐标，因此 $V_j = \dot{x}_j$ 是第 j 个球体的速度。系统的几何结构˙意味着，对所有 $j = 0, \ldots, N$，均有 $L_j = V_{j+2} - V_{j+1}$。

为了实现有效游动，我们的 N弹簧游动器会经历周期性的谐波形变，但这些形变并非可逆，这与 Najafi 和 Golestanian [6], 以及 Montino 和 DeSimone[14]提出的原始游动器相同。然而，由于几何结构的原因，我们预计会有一个波沿尾部传播。本文余下部分旨在描述这一波的行为。

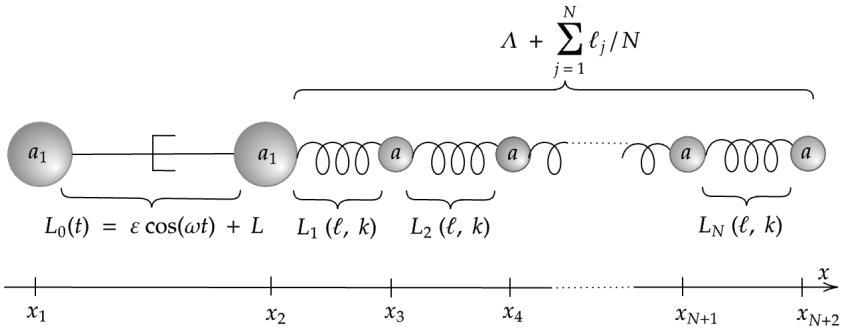


图 1：带有 N 根弹性臂的低雷诺数游动器。

2.1 一阶近似

作为第一近似，我们考虑这样一种情况：j号球体所受的流体动力仅取决于该球体自身的速度，并忽略球体之间的相互作用。这将得到如下关于（流体）力和速度的方程组：

$$\begin{cases} f_j^F = -6\pi\mu a V_j \text{ for } j \geq 3, \\ f_j^F = -6\pi\mu a_1 V_j \text{ for } j = 1, 2. \end{cases} \tag{1}$$

作用在每个球体上的弹性力可写为：

$$\begin{cases} f_2^R &= k(L_1 - h) = k\dfrac{\ell_1}{N} \\ f_j^R &= k\big((L_{j-1} - h) - (L_{j-2} - h)\big), \\ &= k\dfrac{\ell_{j-1} - \ell_{j-2}}{N} \quad \text{for } 3 \leq j \leq N+1 \\ f_{N+2}^R &= -k(L_N - h) = -k\dfrac{\ell_N}{N}. \end{cases} \tag{2}$$

在低雷诺数下，惯性力可以忽略。再结合人工游动体是自推进的这一事实，可得：

$$\begin{cases} f_1^F + \cdots + f_{N+2}^F = 0, \\ f_j^R + f_j^F = 0 \text{ for } j \geq 3. \end{cases} \tag{3}$$

利用（1）、（2）和（3），我们可以得到各球体所受流体力关于相邻摆臂长度的表达式。具体而言，对于前两个球体：

$$\begin{cases} f_1^F - f_2^F = 6\pi\mu a_1(V_2 - V_1) = 6\pi\mu a_1 \dot{L}_0, \\ f_1^F + f_2^F = f_3^R + \cdots + f_{N+2}^R = -k\ell_1/N, \end{cases} \tag{4}$$

最终可得：

$$\begin{cases} f_1^F = \frac{1}{2}(+6\pi\mu a_1 \dot{L}_0 - \tilde{k}\ell_1), \\ f_2^F = \frac{1}{2}(-6\pi\mu a_1 \dot{L}_0 - \tilde{k}\ell_1). \end{cases} \tag{5}$$

2.2 球体的运动

为了写出描述系统的方程，我们利用方程（1-5）求得关于第 l_j 个t j 摆臂伸长量 $j \geq 1$ 的常微分方程。我们首先考虑 $j \geq 2$ 的情形。写作 $\dot{L}_j = V_{j+2} - V_{j+1} = \frac{1}{6\pi\mu a}(f_{j+2}^R - f_{j+1}^R)$，可推得

$$\dot{\ell}_j = \Lambda^2 K \frac{\ell_{j-1} - 2\ell_j + \ell_{j+1}}{h^2}, \; 2 \leq j \leq N, \tag{6}$$

其中我们添加了一个虚拟变量

$$\ell_{N+1} = 0\,, \tag{7}$$

且 $K = \dfrac{k}{6\pi\mu\tilde{a}}$。

为了确定第一条弹性臂的方程，我们利用 $\dot{L}_1 = V_3 - V_2 = -\dfrac{1}{6\pi\mu a} f_3^F + \dfrac{1}{6\pi\mu a_1} f_2^F$，再利用方程（2）和（5）可得：

$$h\dot{\ell}_1 = \Lambda^2 K \frac{\ell_2 - \ell_1}{h} - \frac{\Lambda K \tilde{a}}{2a_1}\ell_1 - \frac{\Lambda}{2}\dot{L}_0. \tag{8}$$

利用柯西-利普希茨定理，可以很容易验证常微分方程问题（6，7，8）是适定的，并且对任意初始构型都存在唯一解 $(\ell_j(t))_{1 \leq j \leq N+1}$。

求方程（6）的周期（复）解可得

$$\ell_j(t) = (\alpha_d \gamma_+^{j-1} + \beta_d \gamma_-^{j-1}) e^{i\omega t}, \tag{9}$$

其中 α_d， $\beta_d \in \mathbb{C}$ 且

$$\gamma_\pm = \frac{i/(K_\omega N^2) + 2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{10}$$

且 $\Delta = \frac{-1}{K_\omega^2 N^4} + \frac{4i}{K_\omega N^2}$，其中 $K_\omega = \frac{K}{\omega} = \frac{k}{6\pi\mu\tilde{a}\omega}$ 是一个无量纲数。注意， $|\gamma_+| > 1$ 而 $|\gamma_-| < 1$。常数 α_d 和 β_d 可通过边界条件确定。具体而言，基于问题的线性性质，假设 $\ell_1 = b_d e^{i\omega t}$，其中 $b_d \in \mathbb{C}$，并回顾 $l_{N+1} = 0$，即可写出

$$\begin{cases} \ell_1(t) = b_d e^{i\omega t} = e^{i\omega t}(\alpha_d + \beta_d), \\ \ell_{N+1}(t) = e^{i\omega t}(\alpha_d \gamma_+^N + \beta_d \gamma_-^N) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

最终得到

$$\alpha_d = \frac{-\gamma_-^N b_d}{(\gamma_+^N - \gamma_-^N)}, \quad \beta_d = \frac{\gamma_+^N b_d}{(\gamma_+^N - \gamma_-^N)}. \tag{12}$$

然后，我们利用（8）确定 b_d:

$$b_d = -\frac{\varepsilon i/2}{i/N + NK_\omega(1 - z_d) + K_\omega \dfrac{\tilde{a}}{2a_1}}, \tag{13}$$

其中 $z_d = \frac{\gamma_+^N \gamma_- - \gamma_-^N \gamma_+}{\gamma_+^N - \gamma_-^N}$。

2.3 弹簧数量趋于无穷时的极限模型

随着游动器中弹簧数量的增加，会出现一个带有类弹性尾部的极限模型，如图所示2。该弹性尾部会像弹簧一样压缩和膨胀，并跟随主动臂运动，从而使游动器产生整体位移。

方程（6）和（8）可以看作对一个偏微分方程的有限元离散，该方程描述了游动器的连续模型。本节将形式化推导该偏微分方程模型的极限表达式，而 N弹簧模型收敛到连续模型的性质将在第3节中证明。

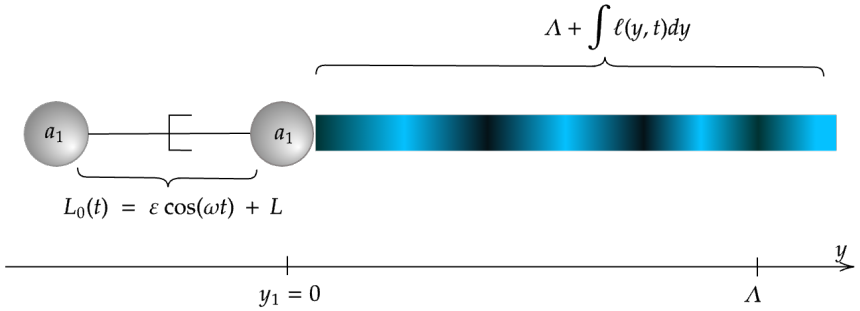


图 2：低雷诺数弹性游动器的连续模型。尾部颜色的变化表示游动器的压缩和膨胀。

首先，由于 $h \to 0\,(N \to \infty)$, $\frac{\ell_{j-1} - 2\ell_j + \ell_{j+1}}{h^2}$ 形式上收敛于二阶导数。更准确地说，我们为 $1 \le j \le N+1$ 引入一个新的空间变量 $y_j = (j-1)h$。点 y_j 间距相等

，因此不同于之前的 x_j。由于 $y_1 = 0$， y 变量可以看作附着于第二个球体的局部空间坐标，并且我们假设 $\ell(y_j) = \ell_j$ 对于足够光滑的函数 ℓ。将（6）形式上取极限，得到热方程：

$$\partial_t \ell(y,t) = K\Lambda^2 \partial_{yy}\ell(y,t), \quad \forall (y,t) \in [0,\Lambda] \times \mathbb{R}_+^\star. \tag{14}$$

关于边界条件，我们首先注意到 $\ell_{N+1} = 0$ 可推出 $\ell(\Lambda, t) = 0$ 对所有 $t > 0$均成立。由于$h \to 0$，方程（8）在 ℓ_1 上形式上可化为傅里叶型边界条件：

$$\Lambda^2 K \partial_y \ell(0,t) - \Lambda K \frac{\tilde{a}}{2a_1}\ell(0,t) = \frac{\Lambda}{2}\dot{L}_0(t), \quad \forall t > 0.$$

因此，我们最终得到如下连续问题：
求 $\ell \in \mathcal{C}^2([0,\Lambda] \times \mathbb{R}_+^*)$，使得 $\forall (y, t) \in (0, \Lambda) \times \mathbb{R}_+^\star$，

$$\begin{cases} \partial_t \ell(y,t) - \Lambda^2 K \partial_{yy}\ell(y,t) = 0, \\ \Lambda^2 K \partial_y \ell(0,t) - \Lambda K \dfrac{\tilde{a}}{2a_1}\ell(0,t) = \dfrac{\Lambda}{2}\dot{L}_0(t), \\ \ell(\Lambda, t) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

2.4 问题的适定性

方程（15）属于经典抛物型方程理论适用的问题类别。具体而言，令

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H^1((0,\Lambda)) | u(\Lambda) = 0 \right\},$$

这是一个带有标量积 $(u, v)_{\mathcal{V}} = \int_0^\Lambda \partial_y u \, \partial_y v \, dy$的希尔伯特空间，变分形式如下：设 $T > 0$，求 $\ell(y, t) \in L_t^\infty(0, T; L_y^2((0, \Lambda))) \cap L_t^2(0, T; \mathcal{V})$，使得对所有 $t \in (0, T)$ 以及所有 $v \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^\Lambda \ell v \, dy + \Lambda^2 K \int_0^\Lambda \partial_y \ell \, \partial_y v \, dy \\ + \frac{\Lambda K \tilde{a}}{2a_1}\ell(0,t)v(0) = -\frac{\Lambda}{2}\dot{L}_0(t)v(0) \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\ell(y, 0) = \ell_0(y) \in L^2((0, \Lambda))$ 为给定的初始数据。

定义 κ 在 $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 上的双线性型如下：

$$\kappa : (u,v) \mapsto \Lambda^2 K \int_0^\Lambda \partial_y u(y) \partial_y v(y) \, dy + \frac{\Lambda K \tilde{a}}{2a_1} u(0)v(0), \tag{17}$$

它在 $\mathcal{V}$ 上是对称且强制的，因此问题（16）的适定性可由抛物型方程的标准结果推出（例如参见 [16]）。此外，众所周知，解 $\ell(\cdot, t)$ 属于 $\mathcal{C}^\infty([0,\Lambda])$ 类，对任意时刻 $t > 0$。

2.5 解析周期解

现在，我们使用以下试探解 $\ell(y,t) = \ell(y)e^{i\omega t}$求解系统（15）。由（14）可推出以下方程：

$$i\underline{\ell} = \Lambda^2 K_\omega \partial_{yy}\underline{\ell}. \tag{18}$$

与（18）对应的特征多项式有两个根，$r := \dfrac{1+i}{\Lambda\sqrt{2K_\omega}}$ 和 $-r$，由此得到以下解：

$$\underline{\ell}(y) = \alpha e^{ry} + \beta e^{-ry}, \tag{19}$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。

然后我们利用边界条件确定 α 和 β：

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta)\dfrac{\tilde{a}}{2a_1}+\Lambda r(\alpha-\beta)=\dfrac{i\varepsilon}{2K_\omega}, \\ \alpha e^{r\Lambda}+\beta e^{-r\Lambda}=0, \end{cases}$$

即，

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{i\varepsilon}{2K_\omega\big(\dfrac{\tilde{a}}{2a_1}(e^{2r\Lambda}-1)+\Lambda r(e^{2r\Lambda}+1)\big)}, \\ \beta=-e^{2r\Lambda}\alpha. \end{cases} \tag{20}$$

我们注意到，$r\Lambda=\dfrac{1+i}{\sqrt{2K_\omega}}$ 仅取决于 K_ω。

3 离散模型向连续模型的收敛性

我们首先注意到，离散问题（6）是连续问题（15）的有限元离散的一种非常规质量集总版本。为阐明这一说法，我们引入有限元框架。令为一维划分上的连续分片线性函数空间，其中该划分将（0, Λ）分割，并且这些函数满足狄利克雷边界条件 g（Λ） = 0。令$\{\Phi_j\}_{j=1,\,N}$ 为 $\mathcal{V}_h$ 的标准基，由如下定义的帽函数组成：Φ_j（y_k）= $\delta_{j,k}$，其中 $1\le j,k\le N$。

令 $\ell_h\in\mathcal{V}_h$ 为连续分片线性函数，使得对于 $1\le j\le N+1$, $t>0$, $\ell_h(y_j,t)$ =$\ell_j(t)$。使用基本的半离散伽辽金方法，可将（21）离散化为如下矩阵形式：

$$\frac{d(M_hL_h)}{dt}+K_hL_h=\tilde{f}(t), \tag{21}$$

其中 $L_h(t)=(\ell_1(t)\ \cdots,\ \ell_N(t))^T$。类似地，$\tilde{f}=(-\frac{\Lambda}{2}\dot{L}_0,0,\cdots,0)$, $(M_h)_{i,j}=\int\Phi_i(y)\Phi_j(y)dy$ 以及 $(K_h)_{i,j}$ =$\kappa(\Phi_i,\Phi_j)$，其中 κ 定义于方程（17）中。

显式计算矩阵 K_h 和 M_h 的系数可得

$$(K_h)_{ij}=\begin{cases} -\Lambda^2K/h & \text{for } |i-j|=1, \\ 2\Lambda^2K/h & \text{for } i=j\ge 2\,, \\ \Lambda^2K/h+\Lambda K\tilde{a}/(2a_1) & \text{for } i=j=1\,, \end{cases}$$

and

$$(M_h)_{ij}=\begin{cases} h/6 & \text{for } |i-j|=1, \\ 2h/3 & \text{for } i=j\ge 2\,, \\ h/3 & \text{for } i=j=1\,. \end{cases}$$

关键观察是，方程（6）和（8）不过是对（15）进行质量集总离散化，其中质量矩阵 M_h 已被对角版本取代

$$\widetilde{M}_h=\begin{pmatrix} h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h \end{pmatrix}.$$

因此，ℓ_h 实际上满足

$$\frac{d(\widetilde{M}_hL_h)}{dt}+K_hL_h=\tilde{f}(t)\,, \tag{22}$$

以及初始条件

$$\ell_h(0)=\ell_{0,h}\in\mathcal{V}_h\,. \tag{23}$$

另一方面，经典集总质量法将使用剖分顶点上的积分公式，把三对角质量矩阵 M_h 替换为对角矩阵 $\bar{M}_h$。具体而言，对于 $\int g \sim \left(\frac{1}{2}g(y_1) + \sum_{j=2} g(y_j) + \frac{1}{2}g(y_{N+1})\right)h = \left(\frac{1}{2}g(y_1) + \sum_{j=2} g(y_j)\right)h$，可得到集总质量矩阵

$$\bar{M}_h = \begin{pmatrix} h/2 & & & 0 \\ & h & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & h \end{pmatrix} \tag{24}$$

，它与 M_h 不同。

接下来，我们将使用 [17] 中介绍的方法研究常微分方程 (22)、(23)，该方法为我们提供了关于质量集总方法的收敛性结果，其中 $\bar{M}_h$。

我们在 $\mathcal{V}_h$ 上引入以下两个内积，分别与 $\bar{M}_h$ 和 M_h 相关。具体而言，对于 $(u_h, v_h) \in \mathcal{V}_h$

$$\langle u_h, v_h \rangle_h = \frac{h}{2} u_h(y_1) v_h(y_1) + h \sum_{j=2}^{N} u_h(y_j) v_h(y_j)$$

and

$$(u_h, v_h)_h = h \sum_{j=1}^{N} u_h(y_j) v_h(y_j) \,.$$

我们还将 $\|\cdot\|_h$ 称为与 $(\cdot,\cdot)_h$ 对应的范数，而 L^2 范数和内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$。将 Gerschgorin 定理应用于 $\bar{M}_h$，可得范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_h$ 在 $\mathcal{V}_h$ 上一致等价于 h，更具体地说，对所有 $v_h \in \mathcal{V}_h$ 都成立以下估计

$$\frac{1}{6}(v_h, v_h)_h \le (v_h, v_h) \le (v_h, v_h)_h \,,$$

由此我们还可以推得

$$h v_h(y_1)^2 \le \|v_h\|_h^2 \le 6\|v_h\|^2 \,. \tag{25}$$

最后，我们引入 $u_h, v_h \in \mathcal{V}_h$, $\delta_h(u_h, v_h) = (u_h, v_h)_h - (u_h, v_h)$ 的求积误差。

引理 3.1. 设 $u_h, v_h \in \mathcal{V}_h$。当 h 充分小时，有：

$$|\delta_h(u_h, v_h)| \le Ch\|\partial_y u_h\|\|\partial_y v_h\|, \tag{26}$$

$$|\delta_h(u_h, v_h)| \le C\sqrt{h}\|\partial_y u_h\|\|v_h\| \tag{27}$$

其中常数 C 与 u_h、v_h 和 h 无关。

证明。 在下文中，C 均表示一个可能逐行变化、但始终与 h 无关的常数。设 $u_h, v_h \in \mathcal{V}_h$。记 $|\delta_h(u_h, v_h)| \le |(u_h, v_h)_h - \langle u_h, v_h \rangle_h| + |\langle u_h, v_h \rangle_h - (u_h, v_h)|$。Thom´ee [17]给出了 $\langle u_h, v_h \rangle_h$ 与 (u_h, v_h) 之间误差的估计，即

$$|\langle u_h, v_h \rangle_h - (u_h, v_h)| \le Ch^2\|\partial_y u_h\|\|\partial_y v_h\|$$

and

$$|\langle u_h, v_h \rangle_h - (u_h, v_h)| \le Ch\|\partial_y u_h\|\|v_h\|$$

其中某个常数 $C > 0$ 不依赖于 u_h、v_h 或 h。后一个估计是通过逆不等式得到的。

接下来需要估算项 $\delta_h(u_h, v_h) = (u_h, v_h)_h - \langle u_h, v_h \rangle_h$。

我们注意到:

$$|\tilde{\delta}_h(u_h, v_h)| = \frac{h}{2}|u_h(y_1)v_h(y_1)| \tag{28}$$

$$= \frac{h}{2}\left|\int_0^\Lambda \partial_y u_h(y)\,dy\right|\left|\int_0^\Lambda \partial_y v_h(y)\,dy\right|$$

$$\leq \frac{h\Lambda}{2}\|\partial_y u_h\|\|\partial_y v_h\|\,. \tag{29}$$

同样，(28) 与 (25) 一起给出:

$$|\tilde{\delta}_h(u_h, v_h)| \leq C\sqrt{h}\|\partial_y u_h\|\|v_h\|. \tag{30}$$

这得到 (26) 和 (27)。 □

定理 3.1。 若 ℓ 和 ℓ_h 分别是 (16) 和 (22) 的解，(23) 分别成立，且 $\ell_0 \in H^2((0,\Lambda))$，则对所有 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\ell_h(t) - \ell(t)\| \quad &\leq C\|\ell_{0,h} - \ell_0\| + Ch^2(\|\partial_{yy}\ell_0\| + \|\partial_{yy}\ell(t)\|) \\ &\quad + Ch\left(\int_0^t \|\partial_{yt}\ell\|^2 ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

证明。 令 R_h 为从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{V}_h$的 Ritz 投影算子，与 $\kappa(\cdot,\cdot)$ 相关。也就是说，对于 $g \in \mathcal{V}$， $R_h g$ 定义为

$$\kappa(R_h g, v_h) = \kappa(g, v_h)$$

对所有 $v_h \in \mathcal{V}_h$。记 $\ell_h - \ell = (\ell_h - R_h\ell) + (R_h\ell - \ell) = \theta_h + \rho$ (注意 $\theta_h \in \mathcal{V}_h$)。标准估计表明， $\rho(t)$ 满足 $\|R_h\ell - \ell\| \leq Ch^2\|\partial_{yy}\ell\|$。为了估计 θ_h，对所有 $\chi_h \in \mathcal{V}$，我们写成

$$\begin{aligned}(\partial_t\theta_h, \chi_h)_h + \kappa(\theta_h, \chi_h) &= (\partial_t\ell_h, \chi_h)_h + \kappa(\ell_h, \chi_h) \\ &\quad -(\partial_t R_h\ell, \chi_h)_h - \kappa(R_h\ell, \chi_h) \\ &= (f, \chi_h) \\ &\quad -(\partial_t R_h\ell, \chi_h)_h - \kappa(\ell, \chi_h) \\ &= (\partial_t\ell, \chi_h) - (\partial_t R_h\ell, \chi_h)_h \\ &= -(\partial_t\rho, \chi_h) \\ &\quad -\delta_h(\partial_t R_h\ell, \chi_h).\end{aligned} \tag{31}$$

令 $\chi_h = \theta_h$，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_h\|_h^2 + \kappa(\theta_h, \theta_h) = -\left(\partial_t\rho, \theta_h\right) - \delta_h\left(\partial_t R_h\ell, \theta_h\right).$$

这里，利用柯西-施瓦茨不等式和庞加莱不等式，我们立即得到:

$$\begin{aligned}|(\partial_t\rho, \theta_h)| &\leq \|\partial_t(\ell - R_h\ell)\|\,\|\theta_h\| \\ &\leq Ch\,\|\partial_{yt}\ell\|\,\|\theta_h\| \\ &\leq Ch\,\|\partial_{yt}\ell\|\,\|\partial_y\theta_h\|.\end{aligned}$$

利用引理3.1的第一个方程，以及 $\|\partial_y R_h u\| \leq C\|\partial_y u\|$这一事实，我们还可以得到

$$\begin{aligned}|\delta_h\left(\partial_t R_h\ell, \theta_h\right)| &\leq Ch\,\|\partial_{yt}R_h\ell\|\,\|\partial_y\theta_h\| \\ &\leq Ch\,\|\partial_{yt}\ell\|\,\|\partial_y\theta_h\|\,,\end{aligned}$$

由此可推得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_h\|_h^2+\kappa(\theta_h,\theta_h) &\leq Ch\,\|\partial_{yt}\ell\|\,\|\partial_y\theta_h\|\\ &\leq \kappa(\theta_h,\theta_h)+Ch^2\,\|\partial_{yt}\ell\|^2\,,\end{aligned}$$

利用 $\kappa(\cdot,\ \cdot)$ 在 $\mathcal{V}$ 上的强制性。因此我们推得

$$\|\theta_h(t)\|_h^2\leq\|\theta_h(0)\|_h^2+Ch^2\int_0^t\|\partial_{yt}\ell\|^2\,ds\,.$$

现在回顾一下，$\|\cdot\|_h$ 和 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{V}_h$ 上的等价范数，且这种等价性关于 h 一致，因此

$$\|\theta_h(t)\|\leq C\|\theta_h(0)\|+Ch\left(\int_0^t\|\partial_{yt}\ell\|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

这里 $\|\theta_h(0)\|=\|\ell_{0,\ h}-R_h\ell_0\|$ 且

$$\begin{aligned}\|\ell_{0,h}-R_h\ell_0\| &\leq \|\ell_{0,h}-\ell_0\|+\|\ell_0-R_h\ell_0\|\\ &\leq \|\ell_{0,h}-\ell_0\|+Ch^2\|\partial_{yy}\ell_0\|,\end{aligned}$$

由此，$\theta_h(t)$ 如所需有界。 □

定理 3.2。若 ℓ 和 ℓ_h 分别是方程 (16) 和 (22)、(23) 的解，则对于 $t\geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\partial_y(\ell_h-\ell)(t)\| &\leq Ch(\|\partial_{yy}\ell_0\|+\|\partial_{yy}\ell(t)\|)\\ &\quad+C\|\partial_y(\ell_{0,h}-\ell_0)\|+C\sqrt{h}\left(\int_0^t\|\partial_{yt}\ell\|^2ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

证明。现在令 $\chi_h=\partial_t\theta_h$ 代入方程 (31) 中，其中 θ_h 得到：

$$\|\partial_t\theta_h\|_h^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\kappa(\theta_h,\theta_h)=-(\partial_t\rho,\partial_t\theta_h)-\delta_h(R_h\partial_t\ell,\partial_t\theta_h).$$

此处与定理 3.1的证明中一样，

$$|(\partial_t\rho,\partial_t\theta_h)|\leq\|\partial_t(\ell-R_h\ell)\|\|\partial_t\theta_h\|\leq C\sqrt{h}\|\partial_{yt}\ell\|\|\partial_t\theta_h\|.$$

此外，根据引理 3.1的第二行，

$$\begin{aligned}|\delta_h(\partial_tR_h\ell,\partial_t\theta_h)| &\leq C\sqrt{h}\|\partial_{yt}R_h\ell\|\|\partial_t\theta_h\|\\ &\leq C\sqrt{h}\|\partial_{yt}\ell\|\|\partial_t\theta_h\|.\end{aligned}$$

再次利用 $\mathcal{V}_h$ 上 $\|\cdot\|_h$ 范数与 $\|\cdot\|$ 范数的等价性，我们得到：

$$\begin{aligned}\|\partial_t\theta_h\|_h^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\kappa(\theta_h,\theta_h) &\leq C\sqrt{h}\|\partial_{yt}\ell\|\|\partial_t\theta_h\|_h\\ &\leq \|\partial_t\theta_h\|_h^2+Ch\|\partial_{yt}\ell\|^2\,,\end{aligned}$$

因此，积分后，并利用 $\mathcal{V}$ 上 $\kappa(\cdot,\ \cdot)$ 的强制性

$$\begin{aligned}\|\partial_y\theta_h(t)\| &\leq C\|\partial_y\theta_h(0)\|+C\sqrt{h}\left(\int_0^t\|\partial_{yt}\ell\|^2ds\right)^{1/2}\\ &\leq \|\partial_y(\ell_{0,h}-\ell_0)\|+Ch\|\partial_{yy}\ell_0\|\\ &\quad+C\sqrt{h}\left(\int_0^t\|\partial_{yt}\ell\|^2ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

结合关于 $\partial_y\rho(t)$ 的标准估计，即完成证明。 □

我们证明了离散 N-弹簧游动器收敛到上一节形式推导出的连续模型。请注意，我们得到的收敛阶仅为一阶（分别为半阶），对应于 L^2 范数（分别为 H^1 范数）；而质量集总方法的标准估计给出的收敛阶为二阶（分别为一阶）。这是因为在 0 处采用了傅里叶型边界条件，这不同于 [17]中使用的经典狄利克雷边界条件。

4 位移的数学表达式

4.1 N-弹簧游动器的净位移

我们通过考察最大球体中第一个球体的位移来求游动器的位移，这意味着我们只计算 $V_1 = \dot{x}_1$，并在一个周期 $(0, 2\pi/\omega)$ 内积分。

考虑到 i^{th}-球体与 $i \in \{2, \cdots, N+2\}$ 对第一个球体产生的流体动力学相互作用，我们有

$$V_1 = \frac{1}{6\pi\mu a_1} f_1^F + \frac{1}{4\pi\mu L_0} f_2^F + \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{i=3}^{N+2} \frac{f_i^F}{L_0 + L_1 + \cdots + L_{i-2}}$$

利用表达式（2）和（5），我们得到

$$\begin{aligned} V_1 \quad &= \frac{1}{2}\dot{L}_0 - \frac{\tilde{a}}{2a_1} K\ell_1 - \frac{3a_1\dot{L}_0}{4L_0} \\ &\quad - \frac{3K\tilde{a}\ell_1}{4L_0} + \frac{3\tilde{a}K}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{\sum_{i=0}^{j} L_i}, \end{aligned} \tag{32}$$

其中我们回顾一下，按照约定，$\ell_{N+1} = 0$。

最后，对一个周期进行积分，并注意到 ℓ_2 和 L_1/L_1 的时间平均值均为零，我们得到，对于 $h = \Lambda/N$ 的任意取值，相应的 N-弹簧游动器的位移为：

$$\Delta_h x_1 = \int_0^{2\pi/\omega} \left[- \frac{3K\tilde{a}\ell_1}{4L_0} + \frac{3\tilde{a}K}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{\sum_{i=0}^{j} L_i} \right] dt \tag{33}$$

4.2 极限模型的净位移

我们可以找到一个关于位移的表达式 当 h 趋近于 0 时，通过将其代入极限模型的位移表达式中，可得 t 在前述表达式 i 中。事实上，给定 h 和 y，我们定义 $j_h(y)$ 为满足 $j_h(y)h \le y \le (j_h(y)+1)h$ 的唯一整数。于是，定义函数 χ_h

$$\chi_h(y,t) = \frac{1}{L_0(t) + \cdots + L_{j_h(y)+1}(t)},$$

我们可以写成

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\ell_h(jh,t) - \ell_h((j+1)h,t)}{\sum_{i=0}^{j+1} L_i} \, dt = \\ - \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{\Lambda} \partial_y \ell_h(y,t) \chi_h(y,t) \, dy \, dt \,, \end{aligned}$$

其中，ℓ_h 是上一节定义的分段线性函数。

最后，　　N弹簧游动器在一个周期内的位移 $\Delta_h x_1$ 可改写为　　s

$$\Delta_h x_1 = \int_0^{2\pi/\omega} \Bigg[-\frac{3K\tilde{a}\ell_h(0,t)}{4L_0(t)} - \frac{3\tilde{a}K}{2}\int_0^{\Lambda} \partial_y \ell_h(y,t)\chi_h(y,t)\,dy \Bigg] dt\,.$$

现在，利用 $j_h(y)h \to y$ 当 $h \to 0$ 时成立这一事实，结合 ℓ_h 到 ℓ 的 L^2 和 H^1 收敛性，我们得到：对于任意 y 和 t,

$$\chi_h(y,t) = \frac{1}{L_0(t) + (j_h(y)+1)h + \frac{h}{\Lambda}\sum_{i=0}^{j}\ell_h(ih,t)} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{L_0(t) + y + \int_0^y \frac{\ell(t)}{\Lambda}} =: \chi(y,t)$$

此外，$0 \le \chi_h(y,\ t) \le \max^t \frac{1}{L_0(t)} = \frac{1}{L(1-\tilde{\varepsilon})}$ 表明 χ_h 一致有界。

因此，利用支配收敛定理，我们推得，当 h 趋于 0 时，χ_h 在 $L^2(0,\ 2\pi/\omega;\ (0,\ \Lambda))$ 中收敛到 χ。

利用上一节证明的收敛定理，我们可以在 $\Delta_h x_1$ 中令 $h \to 0$ 取极限，并得到极限模型每个周期内位移的如下表达式

$$\begin{aligned}\Delta x_1 \quad = \int_0^{2\pi/\omega}\int_0^{\Lambda} -\frac{3K\tilde{a}}{2}\partial_y \ell(y,t)\Big(L_0(t) + y + \int_0^y \frac{\ell}{\Lambda}\Big)^{-1} dy\,dt \\ - \int_0^{2\pi/\omega} \frac{3K\tilde{a}\ell(0,t)}{4L_0} dt\,.\end{aligned} \tag{34}$$

5 数值实验

本节中，我们通过数值方法研究离散模型向连续模型的收敛性。随后，我们考察两个参数 ω 和 $\tilde{\varepsilon}$ 对系统及其位移的影响；游动器其余部分的参数则取自表 1。所有模拟均使用 MATLAB完成。本节假设主动臂的默认长度 L 相对于游动器其余部分较小。因此，第一个球体就像精子细胞的头部，而主动臂则像连接头部和鞭毛的连杆，发出信号使系统其余部分发生振荡。

5.1 离散模型向连续模型的收敛性　　e

我们通过数值方法考察第 3 节中得到的收敛性估计。回顾一下，连续解 ℓ 满足带有傅里叶型边界条件的热方程偏微分方程（15）。本节考虑周期激励，其显式解由（19、20）给出。

5.1.1 N 弹簧离散模型的收敛性

我们回顾一下，离散解 ℓ_h 是基于 P^1 $(\ell_i)_{\ i}$ 解的离散函数，该解来自 N-弹簧常微分方程组（6，7，8）。该离散系统对应于连续模型的空间半离散化，采用了一种非常规的质量集总方法。周期情形下离散问题的解 $(\ell_i)_{\ i}$ 由方程（9，10，12，13）给出。

$\tilde{a}$	$1 \cdot 10^{-5}\, m$
a_1	$1 \cdot 10^{-5}\, m$
Λ	$4 \cdot 10^{-4}\, m$
L	$3 \cdot 10^{-5}\, m$
$\tilde{k}$	$1 \cdot 10^{-8}\, Nm^{-1}$
μ	$8.9 \cdot 10^{-4}\, Pa\, s$

表 1：数值模拟中使用的参数值，与 [14]中的参数相匹配。我们取 μ 为 $25°C$时水的动力黏度。

给定空间步长 h （或等价地，给定弹簧数量 N）后，离散误差定义为 ℓ_h 与 ℓ 的 P^1 插值之间的误差。我们在图 3 中绘出了 $e_{h,\ L^2}$（分别为 L^2 和 H^1）所表示的误差 $e_{h,\ L^2}$（分别为 $e_{h,\ H^1}$）。

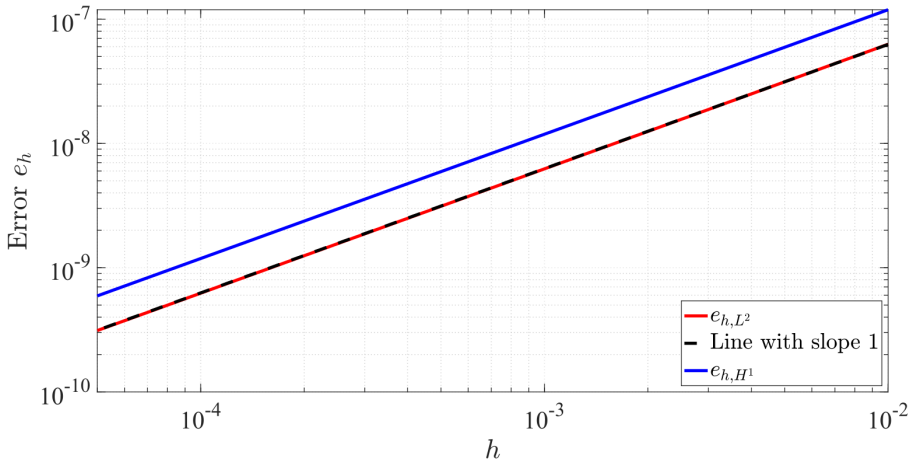


图 3：在（$2\pi/\omega$）周期情形下，对于 $\tilde{\varepsilon} = 0.7$ 和 $\omega = 1\, rad \cdot s^{-1}$， N 弹簧离散模型与连续模型之间的 L^2 和 H^1 误差随弹簧数量变化的对数刻度图。

我们观察到， L^2 误差按预期以一阶收敛，定理3.1给出了这一结论。对于H^1 误差，我们观察到超收敛现象：与 L^2 误差一样，它以一阶收敛，而定理3.2预测其收敛阶为 1/2。这可以用所考虑周期解的正则性来解释。

5.1.2 质量集总的影响

如前所述， N弹簧模型实际上是对连续问题（15）进行空间离散化所得，其基础是一种非常规的质量集总方法。我们在第3 节提出的收敛性证明基于 Thom´ee [17]的结果。他证明，对于标准的质量集总离散化，有限元通常具有预期的收敛阶：误差 L^2 的收敛阶为 2，误差 H^1 的收敛阶为 1。

本文通过比较数值求解的 N-弹簧模型（22）、经典的质量集总方法（24）以及标准的 Galerkin 有限元方法（21），研究空间离散的影响。同样，我们考虑具有精确解的周期框架。

三个常微分方程组的时间离散化采用 Crank-Nicolson格式，时间步长选得足够小，从而使时间离散化带来的误差可以忽略不计。

对应的 L^2 （分别为 H^1）误差见图4 （分别见图5）。如预期所示， L^2 误差对于 N弹簧模型以 1 阶收敛，而经典质量集总方法和标准 Galerkin 离散化均以 2 阶收敛。同样，由于解的正则性，三种方法均观察到了 H^1 误差的超收敛现象：与L^2 误差一样， N弹簧模型以 1 阶收敛，而另外两种离散化以 2 阶收敛。

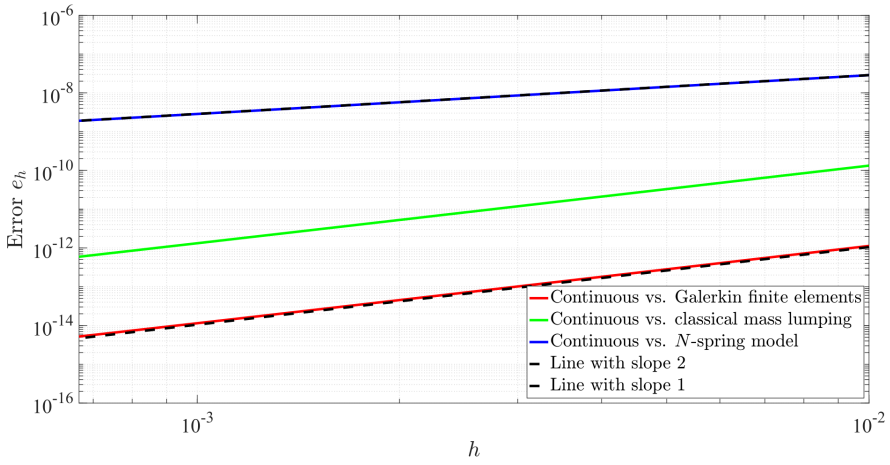


图 4： L^2 连续模型与我们的质量集总方法之间的误差，作为弹簧数量的函数，以对数刻度表示。

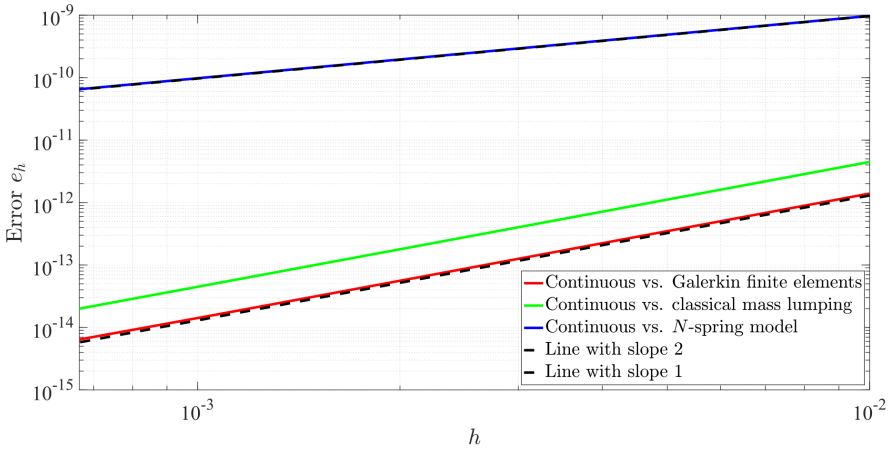


图 5： H^1 连续模型与我们的质量集总方法之间的误差，作为弹簧数量的函数，以对数刻度表示。

5.2 游泳划动

本节研究 N弹簧游动器的游动能力。由于划动是周期性的，我们使用第2.2节给出的显式解。计算采用 $N = 2\,000$ 个弹簧。

5.2.1 游动器的形变

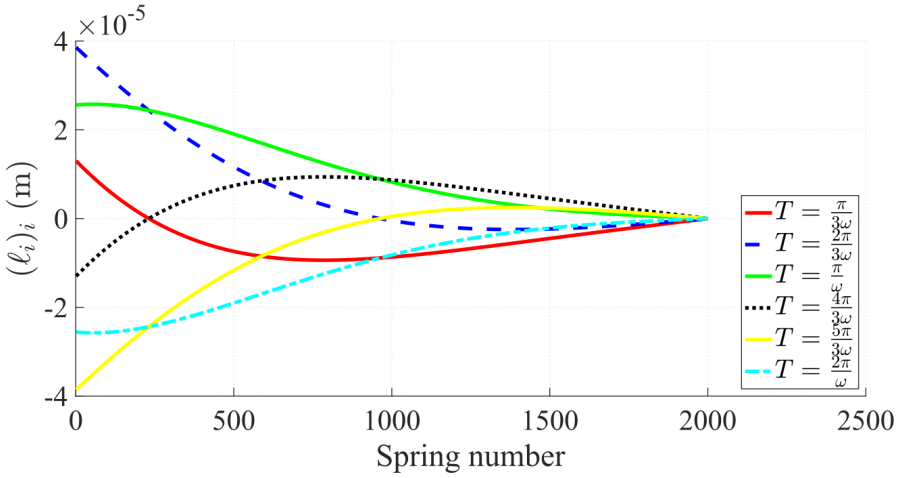


图6：在一次完整划动过程中，2000 根弹簧组成的游动器在不同时间点 T、$\omega = 1\,rad \cdot s^{-1}$ 和 $\tilde{\varepsilon} = 0.7$ 的整体运动。

图 6 展示了游动器的一次完整划动，可以看到有一个波沿着其尾部传播。请记住，这个波是沿水平尾部传播的收缩波。尾部靠近头部的一侧似乎振荡得相当有效，而收缩振幅在尾部的后半段则显著衰减。

图中所示的运动对应于 ℓ_j 的伸展，而非实际形变；对于所有 $1 \le j \le N$，实际形变应为 ℓ_j/N。因此我们注意到，与人工游动体的尺寸相比，这种形变相对较小，这与我们最初采用的小形变近似相符。

5.2.2 位移

在本节中，我们研究参数 $\tilde{\varepsilon}$ 和 K_ω 对游动器位移（33）的影响，以使其绝对值最大。

在图 7中，我们绘出了游动器位移随时间的变化关系，展示了 $\tilde{\varepsilon}$的不同取值。位移通过对方程（33）进行数值积分计算得出。图中显示，游动器整体上向后游动；我们也观察到低雷诺数人工游动体所特有的往复运动。更大的驱动振幅 $\tilde{\varepsilon}$ 会带来更大的位移，并且我们观察到（见图 8），Δx_1 与 $\tilde{\varepsilon}^2$成正比，这与理论预期一致（例如，[1,2,7] 中也观察到了类似行为，并将其解释为形状空间中闭合环路的面积 [11]）。

由于我们希望最大化 Δx_1，同时满足 $\tilde{\varepsilon} < 1$，因此选择一个固定值 $\tilde{\varepsilon} = 0.7$。尽管这一选择是任意的，但它便于与 Montino 和 DeSimone 的结果 [14], 进行比较，因为他们也采用了类似的参数选择。

图 9 展示了 Δx_1 随 K_ω变化的情况，其中 $\tilde{\varepsilon}$取不同的值。在 K_ω固定时，我们再次观察到，较大的 $\tilde{\varepsilon}$ 会带来较大的 Δx_1。首先可以看到，如果 $K_\omega \to \infty$，游动器的净位移为零。根据 K_ω的表达式，例如当 $\omega \to 0$时，振荡消失，人工游动体因此无法运动。当 $k \to \infty$时也会出现这种情况：弹簧变得过于刚硬，以至于游动器的尾部无法再变形。在这种情况下，游动器只剩下一个可变形的自由度，因而受到珀塞尔扇贝定理的限制。同样地，令 $K_\omega \to 0$

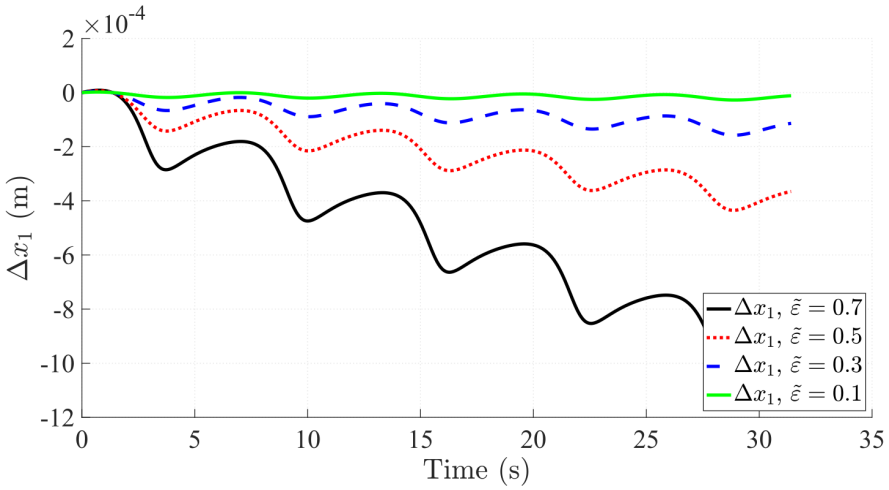


图 7：对于不同的 $\tilde{\varepsilon}$，2000弹簧游动体的位移随时间 t 的变化。

会使游动器无法运动。为使一个周期内的位移最大化，无量纲参数 K_ω^{opt}存在一个最优值，介于这两个极限情况之间。根据图中所示，$K_\omega^{\text{opt}} \simeq 0.3765$。由于该问题具有很强的非线性性质，似乎无法得到 K_ω^{opt}的完整数学表达式；这与 [14]中得到的最终表达式不同。要达到这一 K_ω^{opt}， ω和 k的一组最优值为 $\omega = 1\,rads^{-1}$和 $\tilde{k} \simeq 6.207 \cdot 10^{-8} Nm^{-1}$。此外，~ ~$K_\omega$ 的表达式保证 ω 必须与 k 成正比，k和ω组成的数对才能保持在最优状态。

事实上，弹簧越软，第一摆臂就需要以越慢的速度振荡，才能产生较大的运动。

分别考察其他参数时，我们也可以从方程（33）清楚地看出，位移与 $\tilde{a}$呈线性关系，这是可以预料的。然而，该参数会直接影响人工游动体的尺寸，因此必须保持在合理范围内（在我们的情形中，不超过 $1e-5\,m$），以确保游动体处于微观尺度。

最后，我们注意到， Λ 的取值和 $a_1/\tilde{a}$ 的比值对前面的分析几乎没有影响。因此，对于这些参数，我们采用与所研究尺度相符、且与 [14] 中提供的数值实验结果一致的取值。

6 结论

我们分析了两种低雷诺数游动体的动力学。第一种是 [14]，的扩展，由 N 个被动弹簧组成；第二种则是相应的极限模型，带有弹性尾部。两者都由一个主动臂驱动，该摆臂以振幅 ε 和角频率 ω 周期性地伸长和收缩。

注意到 N-弹簧游动器是极限模型的一种非常规质量集块离散，我们将 Thom´ee [17] 的结果推广到傅里叶型边界条件的情形，从而证明了当 N 趋于无穷时，它收敛于连续模型。

对于这两种游动器，主动臂与尾部的振荡之间会因弹性力与流体动力的相互作用而产生相位差。随后，两种模型都会发生非互易形状变化，从而绕过扇贝定理的限制 [3]。数值模拟确实显示，波沿着游动器的尾部传播。与 [14], 中展示的情况类似，我们的模型能够游动，但无法控制游动方向。

随后，考虑到优化问题，我们着重计算了游动器在两种情况下一个周期内的净位移。我们得到了该位移关于划动期间局部伸长的显式公式

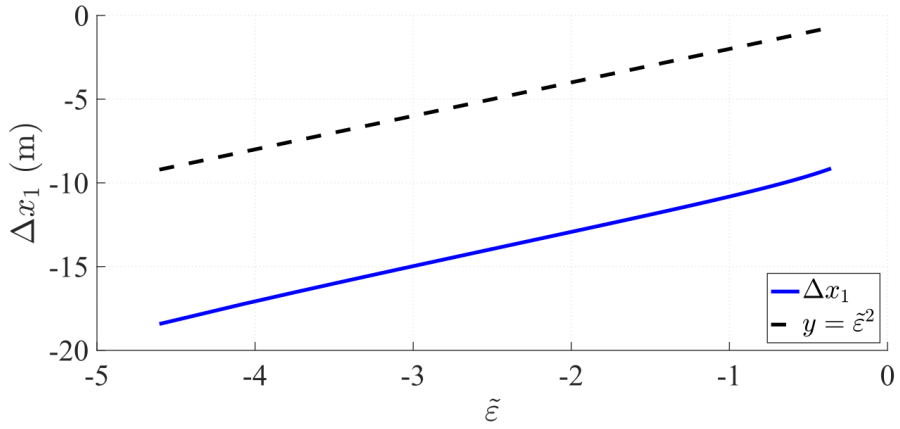


图 8：当摆臂振荡频率为 ω =1 rad/s 并与 $y = \tilde{\varepsilon}^2$相比时，2000弹簧游动体的位移随 ε 的变化关系（对数刻度）。

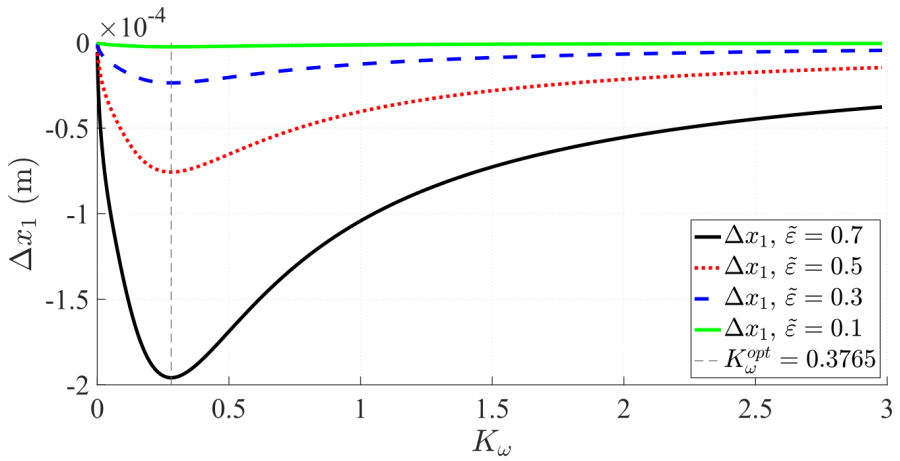


图 9： 2000弹簧游动体的位移随 K_ω的变化关系，其中 $\tilde{\varepsilon}$取不同值 .

。我们通过数值计算重现了经典的往复游动，以及位移关于驱动主动臂最大伸长量的二阶标度关系。此外，我们指出了一个无量纲参数 K_ω；当游动器的几何形状（Λ、 a、a_1）给定时，该参数驱动游动器运动。通过数值实验可以估算该参数的一些最优值。

最后，我们注意到，与 Machin 游动杆的行为类似， [18], 我们的两个游动器的形变沿其被动部分都在迅速衰减，这表明需要某种形式的激活，才能模拟自然界中观察到的这类行为。

参考文献

[1] J. E. Avron、O. Kenneth 和 D. H. Oaknin，“Pushmepullyou：一种高效的微型游动器”，《新物理学杂志》，第 7 卷，第 234 页，2005 年。

[2] J. E. Avron、O. Gat 和 O. Kenneth，《低雷诺数下的最优游动》，《物理评论快报》，第 93 卷，页 186001，2004[3] E. Purcell，《低雷诺数下的生命》，《美国物理学杂志》，第 45 卷，页 3-11，1977。

[4] S. Childress, 《游泳与飞行力学》，剑桥数学生物学研究丛书。剑桥大学出版社，1981。[5] E. Lauga 和 T. R. Powers, 《游泳微生物的流体动力学》，《物理学进展报告》，第 72 卷，第 9 期，页 096601，2009。[6] A. Najafi 和 R. Golestanian, 《低雷诺数下的简单游动器：三个相连球体》，《物理评论E》，第 69 卷，第 6 期，页 062901，2004。[7] R. Dreyfus、J. Baudry 和 H. Stone, 《Purcell“旋转器”：低雷诺数下的机械旋转》，《凝聚态物理》，第 47 卷，页 161-164，2005。[8] F. Alouges、A. DeSimone、L. Heltai、A. Lefebvre-Lepot 和 B. Merlet, 《最优游动的斯托克斯型机器人》，《离散与连续动力系统B辑》，第 18 卷，第 5 期，页 1189-1215，2013。[9] A. Desimone、L. Heltai、F. Alouges 和 A. Lefebvre-Lepot, 《计算低雷诺数游动器的最优划动》，载于《流体与表面上的自然运动》，IMA数学及其应用丛书，S. Childress、A. Hosoi、W. W. Schultz 和 J. Wang 编。纽约：施普林格，第 155 卷，页 177-184，2012。[10] F. Alouges、A. DeSimone 和 L. Heltai, 《轴对称微型游泳体划动优化的数值策略》，《应用科学中的数学模型与方法》，第 21 卷，第 2 期，页 361-387，2011。[11] F. Alouges、A. DeSimone 和 A. Lefebvre, 《低雷诺数游动器的最优划动：一个实例》，《非线性科学杂志》，第 18 卷，第 3 期，页 277-302，2008。[12] F. Alouges、A. DeSimone、L. Giraldi、Y. Or 和 O. Wiezel, 《多连杆微型游泳体的能量最优划动：Purcell环与Taylor波的统一》，《新物理学杂志》，第 21 卷，第 4 期，页 043050，2019。[13] F. Alouges、A. DeSimone 和 A. Lefebvre, 《轴对称微型游泳体的最优划动》，《欧洲物理学杂志 E》第 28 卷，279–284，2009。[14] A. Montino 和 A. DeSimone, 《带被动弹性臂的三球低雷诺数游动器》，《欧洲物理学杂志E辑》，第 38 卷，页 1-10，2015。[15] E. Passov 和 Y. Or, 《带被动弹性尾部的Purcell三连杆微型游泳体的动力学》，《欧洲物理学杂志E辑》，第 35 卷，第 8 期，页 78，2012。[16] P. Raviart 和 J.-M. Thomas, 《偏微分方程数值分析导论》，˙应用数学文库，´马松出版社，1988。[17] V. Thom´ee, 《抛物型问题的伽辽金有限元方法》，施普林格计算数学丛书，第 25 卷。柏林、海德堡：施普林格，2006。[18] K. E. Machin, 《沿鞭毛传播的波》，《实验生物学杂志》，第 35 卷，第 4 期，页 796-806，1958年。