arXiv:2303.00368v2 [math.AG] 6 Jun 2024

本文的期刊版本发表于 Jorge Caravantes、J. Rafael Sendra、David Sevilla、Carlos Villarino，《根式曲线参数化满射的充分条件》，《代数杂志》，第640卷，2024年，第129—146页，ISSN 0021-8693，
https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.11

依据知识共享署名4.0国际许可协议授权，https://creativecommons.org/lic

根式曲线参数化满射的充分条件

Jorge Caravantes[1], J. Rafael Sendra[2], David Sevilla[3] 和 Carlos Villarino[41 2 4] 阿尔卡拉大学 物理与数学系，邮编28871，阿尔卡拉-德埃纳雷斯（马德里），西班牙[3] 埃斯特雷马杜拉大学梅里达大学中心，Santa Teresa de Jornet 大道38号，邮编06800，梅里达（巴达霍斯），西班牙 [1]jorge.caravantes@uah.es电子邮箱： [2]rafael.sendra@uah.es, [3]sevillad@unex.es, [4]carlos.villarino@uah.es

2024年6月7日

摘要

本文提出了满射根式参数化的概念，并证明了根式曲线参数化为满射的充分条件。

关键词：代数曲线、根式参数化、满射参数化、缺失点。

1 引言

设 $\mathcal{V}$ 为定义在 $\mathbb{C}$ 上的一条曲线或一个代数曲面，且其参数化 $\mathcal{P}$ 已知。该参数化可视为从 $\mathcal{V}$上参数空间的一个子集出发的映射。因此，讨论 $\mathcal{P}$的满射性是有意义的。

如果该参数化不是满射，那么在使用它而非 $\mathcal{V}$的隐式方程时，关于 $\mathcal{V}$ 中未被 $\mathcal{P}$ 覆盖部分的信息就会丢失。由于 $\mathcal{V}$ 中所寻求的信息可能位于 $\mathcal{P}$的像之外，这一事实在某些应用中可能会产生不利后果；在[9] 的引言中，通过一些例子说明了这一现象。因此，有必要研究参数化的满射性。

如果 $\mathcal{V}$ 是一条曲线，且 $\mathcal{P}$ 是有理参数化，那么在 [6] 中，这个问题基本上已经得到解决（不同方法见 [1] 和 [2] ）：除了给出保证满射性的充分条件外，还证明了最多只有一个

点无法通过 $\mathcal{P}$ 命中，并说明了如何检测该点。此外，还证明了每条有理曲线都可以进行满射参数化。

当 $\mathcal{V}$ 是一个曲面时，即使 $\mathcal{P}$ 是一个有理参数化，问题也会复杂得多。事实上，在[4] 中已经证明，存在不允许满射有理参数化的有理曲面。克服这一困难的一种方法，是寻找有限个参数化族，使其像的并集覆盖 $\mathcal{V}$（见 [5], [10], [9]）。另一方面，[7] 给出了若干确实允许满射有理参数化的特殊曲面族。

本文显然通过研究曲线而非曲面来降低问题的复杂性，但由于允许参数化为根式参数化，问题的难度反而增加了；直观地说，根式参数化是一个有理函数组，其分子和分母是由雅可比秩等于一的多项式的根式构成的嵌套表达式，更多详情请参见[8] 。因此，这项工作应被视为朝着根式情形下满射性的一般研究迈出的第一步，而诸如获得满射根式参数化等问题（如果可行）则留待未来研究。本文主要致力于获得保证满射性的充分条件。

我们面临的第一个难题，是充分明确在根式情形下“满射性”的含义。来看一个简单的例子。单位圆的有理参数化 $\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ 覆盖了整条曲线，唯独不包含北极点 (0,1)。然而，如果我们考虑同一条曲线的根式参数化 $(t, \sqrt{1-t^2})$，并将平方根视为一个函数（即对每个被开方数只选择两个可能值中的一个），那么我们最多只能覆盖曲线的一半。我们的方法是，取给定参数化的像与其所有共轭元的像的并集。因此，在上面的例子中，我们会同时考虑 $(t, \pm\sqrt{1-t^2})$，而此时这些像的并集就是整个圆；参见例 2.4 和注 3.13。

由于在有理曲线参数化的情形中，曲线上唯一可能遗漏的点是无穷远像，因此，满射性的一个充分条件是：参数化中的至少一个有理函数，其分子的次数严格大于分母的次数。为模仿这一结果在根式情形中的对应形式，我们引入权重，以便恰当地定义含嵌套根式的多项式次数，见定义 2.6。然而，这并未彻底解决问题（见例2.7）。原因在于可能出现 0/0 型不定式。为克服这一困难，我们引入问题多项式的概念（见定义 3.5），以及较弱的可疑多项式概念（见定义 4.9），最终给出根式满射性的一个充分条件，见定理 3.8 和推论4.13。

本文结构如下：第2 节回顾根式参数化的一些概念和结果，介绍根式参数化的满射性概念，并概述我们的策略。第3 节介绍有罪性的概念，并证明主要定理3.8。该节还推导出一些推论。第4 节讨论主要定理的假设，并提出一种替代有罪性的条件，即可疑性；从计算角度看，这一条件更为方便，但原则上限制更严格，

（参见定理4.12）。第5 节总结全文，并在我们的某些满射性条件不成立时，给出缺失点数量的界。

2 符号与预备知识

根式参数化是根式塔 $\mathbb{F}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{F}_m$ 的最后一个域中的元素组成的元组 $(x_1, \ldots, x_n)$，其中 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{C}(t)$ 且 $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}_{i-1}(\delta_i)$，满足 $\delta_i^{e_i} \in \mathbb{F}_{i-1}$ （更多细节见 [8]）。我们将使用多项式环 $\mathbb{C}[t, \Delta_1, \ldots, \Delta_m]$，其中变量的权重将在后文引入。在这个环中，有 δ_i 的定义多项式，即 $E_i := \Delta_i^{e_i} - g_i(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1})$，其中对于所有 $j = 1, \ldots, i-1$，$\deg_{\Delta_j}(g_i) < e_j$。我们将这些 Δ_i 统称为 $\overline{\Delta}$，其他带索引的名称也类似。

注 2.1. $\mathbb{C}(t, \overline{\delta})$ 中的任意有理函数都可以写成 $\mathbb{C}(t)[\overline{\delta}]$ 中的多项式。

回顾 [8]，曲线的根式参数化除其他内容外，还包含一对 $(\mathcal{P}, \overline{E})$，其中

$$\mathcal{P}(t, \overline{\Delta}) = \left(\frac{p_1(t, \overline{\Delta})}{q_1(t, \overline{\Delta})}, \ldots, \frac{p_n(t, \overline{\Delta})}{q_n(t, \overline{\Delta})} \right) \tag{1}$$

是 $\mathbb{C}(t, \overline{\Delta})^n$ 的一个元素，且 $\overline{E} = (E_1, \ldots, E_m)$。本文中我们将始终采用以下满射性的定义：

定义 2.2. 若集合

$$X(\mathcal{P}) := \left\{ \overline{x} \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \exists (t, \overline{\Delta}) \in \mathbb{C}^{m+1} \text{ s.t. } \begin{array}{l} E_i(t, \overline{\Delta}) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m; \\ \mathcal{P}(t, \overline{\Delta}) \text{ is well defined; and} \\ \mathcal{P}(t, \overline{\Delta}) = \overline{x} \end{array} \right\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中是扎里斯基闭的，则称该参数化是满射的或正规的。

我们将满足方程 $E_i(t, \overline{\Delta}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$; $p_i(t, \overline{\Delta}) - x_i\, q_i(t, \overline{\Delta}) = 0$; $i = 1, \ldots, n$; 以及 $z \cdot \operatorname{lcm}(q_1(t, \overline{\Delta}) \ldots, q_n(t, \overline{\Delta})) - 1 = 0$ 的点 $(t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z)$ 所构成的 $\mathbb{C}^{m+n+2}$ 的代数子集称为 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$。于是我们得到投影

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overline{X(\mathcal{P})} \subset \mathbb{C}^n \\ (t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z) & \mapsto & \overline{x} \end{array} \tag{2}$$

其中，$\overline{X(\mathcal{P})}$ 表示 $X(\mathcal{P})$ 的扎里斯基闭包。注意，涉及的每个可构造集都是一维的（见 [8]）。因此，缺失点集合 $X(\mathcal{P}) \setminus X(\mathcal{P})$ 是有限的。注意，在我们的情形下，[8]，中定义的根式簇，即根式~~曲线~~，是 $X(\mathcal{P})$ 的一个不可~~约分支~~，因此，当其不可约时，$X(\mathcal{P})$ 就是整个根式簇。

注 2.3. 定义 2.2 中的满射 与通常所说的满射映射之间有如下对应关系。对于(1)中的每种可能分支组合，我们都可以引入一个从 $\mathbb{C}$ 的子集到 $\mathbb{C}^n$的映射。定义 2.2 中的满射性 要求 ~~$X(\mathcal{P}) =$~~ $X(\mathcal{P})$ （见(2)），因此这些映射的像的并集为 $X(\mathcal{P})$。

例 2.4. 设 $\mathcal{P}(t,\Delta) = (t,\Delta)$，其中 $E := \Delta^2 - (1-t^2)$。那么， $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 是

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}} = \left\{ (t,\Delta,x,y,z) \in \mathbb{C}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x - t = 0 \\ y - \Delta = 0 \\ z = 1 \\ \Delta^2 - (1-t^2) = 0 \end{array} \right\}.$$

根据闭包定理（见 *[3,* 第 3.2 章，定理 3，或第 4.4 章，定理 *3]*），我们有 $X(\mathcal{P})$ 是曲线 $\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$。现在我们来分析$X(\mathcal{P})$，也就是

$$X(\mathcal{P}) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \exists\, (t,\Delta) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{s.t.} \begin{array}{l} \Delta^2 = 1 - t^2 \\ (t,\Delta) = (x,y). \end{array} \right\}$$

首先，我们注意到 $X(\mathcal{P}) \subset \mathcal{C}$，因为 $t^2 + \Delta^2 = 1$。另一方面，如果 $(a,b) \in \mathcal{C}$，取 $t = a$，并令 Δ 为 $\sqrt{1-a^2}$ 的一个根，我们得到 $(a\, b) \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$，因此 $X(\mathcal{P}) = X(\mathcal{P})$。所以 $X(\mathcal{P})$ 是扎里斯基闭的，因此根据定义 2.2， $\mathcal{P}$ 是满射的。

另一方面， $\mathcal{P}$ 给出了两个映射，即 $(t, \pm\sqrt{1-t^2})$，它们的像的并集为 $\mathcal{C}$。

回顾记号 $V(I)$，它表示由理想 I 定义的仿射空间的代数子集； $I(X)$ 表示在仿射空间子集 X 的所有点上取值为零的多项式所构成的理想。再次由闭包定理可得， ~~X~~$(\mathcal{P}) = V(I(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}])$。注意， $X(\mathcal{P})$ 是 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 在投影 $(t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z) \mapsto \overline{x}$下的像。这意味着 $I(X(\mathcal{P})) = I(X(\mathcal{P})) \supset I(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}]$。因此，满~~射性等~~价于 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 在该投影下的像是扎里斯基闭集。鉴于此，我们的主要工具将是延拓定理:

定理 2.5。 *[*延拓定理，参见 *[3]*第 3.1 章，定理 *3]*设 $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subsetneq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 且设 $I = I \cap \mathbb{C}[x_2, \ldots, x_n]$。对于每个 $1 \le i \le s$，记

$$f_i = c_i(x_2, \ldots, x_n) x_1^{N_i} + \ \textit{terms in which } x_1 \textit{ has degree} < N_i,$$

其中 $N_i \ge 0$ 和 $c_i \ne 0$。假设我们有一个部分解 $(a_2, \ldots, a_n) \in V(I)$。如果存在一个在 $(a_2, \ldots, a_n)$ 处非零的 c_i，那么存在 $a_1 \in \mathbb{C}$ 使得 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V(I)$。

定理 2.5 可用于将任意部分解 $\overline{x}$ 提升为 $I(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}]$ 至$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$，从而证明满射性。

对于有理曲线参数化，要判断有理参数化是否为满射，只需检查某个不可约分支的分子次数是否大于其分母的次数。为了将这一结果推广到根式参数化，我们将为 $\mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 配备一个分次环结构，并赋予变量有理权重。

定义 2.6. 首先，我们定义 $\deg(t) = 1$。然后递归地将 Δ_i 的次数定义为 g_i 的次数除以 e_i，其中多变量多项式的次数采用经典定义；回忆一下，$\Delta_i^{e_i} = g_i$。

例 2.7. 本例说明，在有理情形下适用的次数条件，在根式情形下并不足够。考虑纵轴 $x = 0$ in $\mathbb{C}^2$ 的参数化 $\mathcal{P}(t) = (0, t - \sqrt{t^2-1})$。若取 Δ_1 为 $g_1(t) = t^2 - 1$ 的平方根，则对应于 y 坐标的多项式 $y(t, \Delta_1) = t \pm \Delta_1$ 的次数无论如何都是 1。由于 y 的分母为常数，所需的次数条件成立。然而，原点并不对应于 $t \in \mathbb{C}$ 的任何一个值及其两个可能的平方根。

为了找到易于检验的满射性充分条件，我们需要排除某些表达式。为了将延拓定理应用于通过乘以共轭元消去 Δ_i 后得到的多项式，我们需要确保能够控制这些乘积次数的条件。注意，可以用集合 $\{E_1, \dots, E_m\}$ 消去 Δ_i；该集合是关于字典序 $\Delta_m > \cdots > \Delta_1 > t$ 的三角 Gr¨obner 基。定义 2.8. 对于每个 $f \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$，我们将 f 关于 $\{E_1, \dots, E_m\}$ 的标准形记作 $N(f)$。注意，标准形就是通过反复将 $\Delta_i^{e_i}$ 的每次出现替换为 g_i 所得到的多项式。

若 $f \in \mathbb{C}[t]$，注意到 $N(f) = f$。

例 2.9（例 2.7 的续篇）。例 2.7 中的问题在于，$t = \infty$ 在参数化中对应一个仿射点。这里有两个首项单项式，t 和 $\sqrt{t^2-1}$，它们在某种意义上相互消去。事实上，为了用根式实现这种消去，通常会乘以共轭元。对于 $f(t, \Delta_1) = t - \Delta_1$ 及其共轭元 $f(t, -\Delta_1) = t + \Delta_1$，它们乘积的标准形（回顾 $E_1 = \Delta_1^2 - (t^2 - 1)$）为 $N(t^2 - \Delta_1^2) = \mathrm{rem}(t^2 - \Delta_1^2, E_1) = 1$。用根式表示，我们可以写成 $(t - \sqrt{t^2-1})(t + \sqrt{t^2-1}) = 1$。注意，当我们乘以 f 的所有共轭元后，再应用等式 $E_1 = 0$ 以 t 的形式代入 Δ_1^2 时，次数会降低。

3 满射性的充分条件

我们将 $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ 记为经映射 $(t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z) \mapsto (t, \overline{\Delta}, \overline{x})$ 对 $\mathcal{D}_\mathcal{P}$ 投影所得的扎里斯基闭包。我们将反复应用延拓定理（定理 2.5），将 $X(\mathcal{P})$ 中的点 $\overline{x}$（即满足 $I(\mathcal{D}_\mathcal{P}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}] = I(\mathcal{A}_\mathcal{P}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}]$ 的解）先提升到 $\mathcal{A}_\mathcal{P}$，再提升到 $\mathcal{D}_\mathcal{P}$。在第一步中，我们将控制理想 $I(\mathcal{A}_\mathcal{P}) \cap \mathbb{C}[x_1, t]$ 的生成元系数（对于 x_i 和 $i > 1$ 也同样如此），以便对于 $X(\mathcal{P})$ 中的每个点，都存在相应的 t 值（见定理 3.8）。为此，我们将考虑一个乘积，其中包含 $\mathcal{P}$ 的第一分量的分子的共轭元；化简根后，该乘积的次数应保持不变。这就是下面给出定义的动机。从现在起，我们将用正体 i 表示虚数单位，以区别于表示变量的斜体 i。

定义 3.1。对于 $k = 1, \ldots, m$，记 $\gamma_k = \exp(2\pi \mathrm{i}/e_k)$。令 $f \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$。我们定义 $f_m = f(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_m)$，并对 $k = m, \ldots, 1$ 递归定义：

$$F_k = \prod_{j=1}^{e_k} f_k(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_k \cdot \gamma_k^j), \tag{3}$$

$$f_{k-1} = \mathrm{rem}(F_k, E_k) \in \mathbb{C}[t, \Delta_1, \ldots, \Delta_{k-2}][\Delta_{k-1}] \ \textit{(see Lemma 3.2)}. \tag{4}$$

然后我们将 f 的规范化余式定义为 $R(f) = f_0 \in \mathbb{C}[t]$。

若 $f \in \mathbb{C}[t]$，注意到 $R(f) = f$。

引理 3.2。采用定义 3.1中的记号 $f_{k-1} \in \mathbb{C}[t, \Delta_1, \ldots, \Delta_{k-1}]$。

证明。根据构造，

$$F_k(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_k) = F_k(t, \Delta_1, \ldots, \gamma_k \Delta_k).$$

将 F_k 写成关于 Δ_k 的多项式，即 $F_k = \sum_h a_h \cdot \Delta_k^h$，我们有 $a_h = a_h \cdot \gamma_k^h$。因此，如果 e_k 不整除 h，则 $\gamma_k^h \neq 1$，从而 $a_h = 0$。由此可知，F_k 是关于 t、Δ_1、……、Δ_{k-1}、$\Delta_k^{e_k}$ 的多项式：

$$F_k = \sum_l a_{le_k} \Delta_l^{le_k},$$

因此，其关于 Δ_k 除以 E_k 所得的余式为：

$$f_{k-1} = \sum_l a_{le_k} g_k(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_{k-1})^l.$$

□

注3.3。

1. f_{k-1} 是 f_k 和 E_k 关于 Δ_k的结式，因为结式是 f_k 在 E_k的根处取值的乘积。换言之，$R(f)$是通过嵌套结式得到的。2. 我们将 f_{k-1} 定义为除以多项式所得的余式，但若改用标准形，则得到相同的 $R(f)$。3. 一般而言，$R(f)$ 是 $f(t, \overline{\delta})$作为 $\mathbb{C}(t)$上的代数元素的范数的幂。4. 如果根式没有嵌套，即每个 $g_k \in \mathbb{C}[t]$，我们就可以用乘积替代递归定义

$$R(f) = N\left(\prod_{i_1, \ldots, i_m} f(t, \gamma_1^{i_1} \Delta_1, \ldots \gamma_m^{i_m} \Delta_m) \right).$$

一般而言并非如此，如下例所示。

例 3.4。考虑 $E_1 = \Delta_1^2 - t$、 $E_2 = \Delta_2^2 - \Delta_1 - 1$ 和 $f = \Delta_1\Delta_2 + t$。如果我们计算整个乘积，而不是分别对每个变量进行共轭后取余式，则得到

$$N\left(\prod f(t, \pm\Delta_1, \pm\Delta_2)\right) = (-2t^3 + 2t^2)\Delta_1 + t^4 - t^3 + t^2.$$

根据定义 *3.1*，我们得到 $R(f) = t^4 - 3t^3 + t^2$。

由于共轭不会改变次数，由 (3) 可得 $\deg(F_k) = e_k \cdot \deg(f_k)$；另一方面，$\deg(\Delta_k) = \deg(g_k)/e_k$ 根据定义 2.6，因此一般情况下，将 F_k 按 E_k (即将 $\Delta_k^{e_k} = g_k$ 代入 F_k) 化简不会改变次数。因此， $R(f)$ 的次数至多为 $\deg(f) \cdot e_1 \cdots e_m$，且预期的情形是等号成立。然而，例 2.9 表明，由于化简过程中发生消去，这并非总是成立。现在我们为这些例外情形引入一个定义。

定义 3.5。设 $f \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$。当满足以下条件时，我们称 f 有罪

$$\deg(f) \cdot e_1 \cdots e_m > \deg(R(f)).$$

注 3.6。根据定义， $\mathbb{C}[t]$ 中没有多项式是有罪的。

例 3.7 （例 2.9的续篇）。 我们有

$$f_1 = f = t - \Delta_1,\ F_1 = (t - \Delta_1)(t + \Delta_1),\ f_0 = R(f) = 1.$$

由于 $\deg(f) = 1$ 且 $e_1 = 2$, f 是有问题的。如果我们改为从 $y = t - \sqrt{t-1}$开始，就会得到相同的 $f = t - \Delta_1$，但此时带有 $E_1 = \Delta_1^2 - (t-1)$，因此 $R(f) = t^2 - t + 1$ 且 f不会有问题；也可以验证，该参数化是满射的。

借助先前的定义，我们试图像有理参数化那样控制“无穷远像”。然而，根式中还可能出现一个额外问题，即可能出现类型为 $0/0$的不定式。对于满足方程 $\overline{E}$、 p_i 和 q_i的那些 t、 $\overline{\Delta}$ 值，就会出现这种情况，其中 i表示发生不定式的 $\mathcal{P}$ 的不可约分支。现在我们可以陈述主要定理。

定理 3.8. 设 $\mathcal{P}$ 如 (1)中所示 $N(p_i) = p_i$ 和 $N(q_i) = q_i$ 对于$i = 1$, ..., n，并设 $\overline{E}$为根式表达式的定义多项式序列。假设：

1. 存在 i，使得 p_i 无罪且 $\deg p_i > \deg q_i$;
2. *for all* i, *the ideal* $I_i(\mathcal{P}) := \langle \overline{E}, p_i, q_i \rangle$ *is the whole* $\mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$.

因此，该参数化是满射的。

证明。回顾一下，$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$是投影（$t$, $\overline{\Delta}$, $\overline{x}$, z）$\mapsto$（t, $\overline{\Delta}$, $\overline{x}$）的扎里斯基闭包 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$。我们将反复应用延拓定理（定理2.5），将点 $\overline{x} \in X(\mathcal{P}) = V(I(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{C}[\overline{x}])$ 首先提升到 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$，随后再提升到$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$。

不失一般性，假设假设1对 $i = 1$ 成立。令 $F_1(x_1, t)$ 为理想 $I(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{C}[x_1, t]$ 的生成元。这是合理的，因为 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 的每个不可约分支维数均为一（见 [8, 定理 3.11]），且其在变量 (x_1, t) 上的投影是有限的（在 [8, 定理 3.11], 的证明中，$(t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z) \mapsto (t, \overline{\Delta}, \overline{x})$ 的投影是有限的；又由于维数为一，$(t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z) \mapsto (t, \overline{\Delta}, \overline{x})$ 的缺失点构成一个有限集）。令

$$G_1(x_1, t) = R(x_1 q_1 - p_1).$$

根据构造，$G_1 \in I(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$，因此 F_1 整除 G_1。在下文的引理 3.14 中，我们将证明，若将 G_1 视为关于 x_1 的多项式，则其常数项关于 t 的次数高于其他系数。因此，G_1 关于 t 的首项系数是常数，F_1 也同样如此。于是，根据定理 2.5，$X(\mathcal{P})$ 的每个点都可~~以提升~~为 t 的一个值。但由于每个多项式 $E_i = \Delta_i^{e_i} - g_i$ 关于 Δ_i 都是首一的，且它们属于 $I(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$，每个点也都可以提升到 $\overline{\Delta}$。

最后，考虑曲线上的一点 $\overline{x}_0$ 以及它在数值 $t_0, \overline{\Delta}_0$处的所有提升。我们需要通过条件 $z \cdot \text{lcm}(q_1, \ldots, q_n) = 1$提升到变量 z。

由于 $t_0, \overline{\Delta}_0, \overline{x}_0$ 满足方程 $q_i x_i - p_i = 0$（对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$）以及 $\overline{E}$ 方程，若存在任何 $q_i(t_0, \overline{\Delta}_0) = 0$，则也会有 $p_i(t_0, \overline{\Delta}_0) = 0$，这与假设2矛盾。□

注 3.9. 设 $\mathcal{P}(t) = (p_1(t)/q_1(t) .. ., p_n(t)/q_n(t)) \in \mathbb{C}(t)^n$ 是一个既约形式的有理参数化；也就是说，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$\gcd(p_i, q_i) = 1$。假设存在 $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\deg(p_{i_0}) > \deg(q_{i_0})$。那么 $\mathcal{P}(t)$ 满足定理 3.8 的假设。

事实上，根据定义 2.8，对于所有 i，都有 $N(p_i) = p_i$ 且 $N(q_i) = q_i$。根据注 3.6，p_{i_0} 无罪，且 p_{i_0}/q_{i_0} 满足假设 (1)。关于假设 (2)，由于 $\gcd(p_i, q_i) = 1$，因此 $1 \in I_i(\mathcal{P}) = \langle p_i, q_1 \rangle$。所以$I_i(\mathcal{P}) = \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$。

推论 3.10。设 $\mathcal{P}$ 如 (1)中所述，其所有不可约分支都是 $\mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 中的约化多项式（即 $N(p_i) = p_i$ 且 $q_i = 1$ 对于 $i = 1$, ..., n）。若定理 3.8 中的假设 (1) 成立，则 $\mathcal{P}$ 是满射。

证明。我们来验证定理3.8 的第二个假设成立。设 $p_i \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 是 i的第 - 个不可约分支，其中 $\mathcal{P}$，则 $I_i(\mathcal{P}) = \langle \overline{E}, p_i, 1 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$。□

推论 3.11。设 $\mathcal{P}$ 的某些分支是有理的，且其中一个有理分支满足次数条件。若每个非有理分量 p_i/q_i 都是关于 $\mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 的多项式，并且 $N(p_i) = p_i$，则 $\mathcal{P}$ 是满射。

证明。考虑定义 2.8，以及关于 $\mathcal{P}$ 的非有理分量的假设，我们有 $N(p_i) = p_i$ 和 $N(q_i) = q_i$ 对所有 i 都成立。此外，按照备注 3.9 中的推理，我们知道定理 3.8 的假设 (1) 成立。现在由推论 3.10 即得结论。 □

注记 3.12. 由复多项式定义的 $\mathbb{C}^n$ 曲线

$$\{y_i^{n_i} - g_i(x)\}_{i=1,\dots,n-1},$$

以及 $n_i \in \mathbb{N}$，可以满射地参数化为

$$\mathcal{P} = (t, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})$$

其中 $E_i := \Delta_i^{n_i} - g_i(t)$。
我们注意到 $N(\Delta_i) = \Delta_i$。因此，该结论由推论 *3.11*得出。

注记 3.13. 作为前一条注记的具体例子，我们有平面曲线 $x^n + y^n = a$，其中 $a \in \mathbb{C}$。

引理 3.14. 采用定理 *3.8*中的记号和假设，令 $f = xq - p$。滥用定义 *3.1*的记号，对于每个 $k = 0, \dots, m$， f_k 关于 x 的常数项次数为 $e_{k+1} \cdots e_m \cdot \deg(p_1)$，严格大于其他系数的次数。特别地，这适用于 $G_1 = R(f) = f_0$。

证明。我们对 k 采用反向归纳；根据假设， $k = m$ 的情形显然。

假设对 k 命题成立，也就是说，若 $f_k = a_r x^r + \cdots + a_0$ 且 $a_j \in \mathbb{C}[t, \Delta_1, \dots, \Delta_k]$，则对 $j > 0$ 有 $\deg(a_0) = e_{k+1} \cdots e_m \cdot \deg(p_1) > \deg(a_j)$。令

$$F_k = \prod_{i=1}^{e_k} \left(a_r(t, \Delta_1, \dots, \Delta_k \cdot \gamma_k^i)x^r + \cdots + a_0(t, \Delta_1, \dots, \Delta_k \cdot \gamma_k^i)\right) = b_{re_k} x^{re_k} + \cdots + b_0$$

注意，$\deg(b_0) = \deg(a_0) \cdot e_k = e_k \cdots e_m \cdot \deg(p_1)$，最后一个等式由归纳假设得出。

对于 $j > 0$， b_j 是恰由 e_k 个共轭的 a 构成的乘积之和，且并非所有乘积都为 a_0。由于 a_0 的次数严格大于其他项的次数， b_j 中所有加项的次数都严格小于 $e_k \cdot \deg(a_0) = \deg(b_0)$。
现在定义 $\tilde{b}_j$ 使得 $\tilde{b}_j(t, \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, \Delta_k^{e_k}) = b_j$。那么

$$f_{k-1} = \tilde{b}_{re_k}(t, \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, g_k)x^{re_k} + \cdots + \tilde{b}_0(t, \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, g_k).$$

f_{k-1} 上方的常数项与计算 $R(p_1)$时的 $k-1$ 步骤相同，至多相差一个符号。由于 p_1 并无问题，在对$R(p_1)$进行的每个归约步骤中，次数都不会降低。这表明

$$\deg(\tilde{b}_0(t, \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, g_k)) = \deg(b_0) > \deg(b_j) \geq \deg(\tilde{b}_j(t, \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, g_k)).$$

□

4 关于满射性的假设

通过定义并检验多项式的一种首项系数，可以判定一个多项式是否存在问题。我们将在 $m=1$ （即 $\overline{\Delta}=$ （Δ_1）） 的情形中说明这一点。对于 $m>1$，在非嵌套情形（即 g_i（t，Δ_1，.....，Δ_{i-1}）$\in\mathbb{C}[t]$）中，自然可以推广。嵌套情形请参见备注 4.2。

记 $g(t)=g_1(t)=a_0+\cdots+a_kt^k$, $\Delta=\Delta_1$, $\delta=\delta_1$。考虑一个已经约化的多项式

$$f(t,\Delta)=c_0(t)+c_1(t)\Delta+\cdots+c_{e-1}(t)\Delta^{e-1}\in\mathbb{C}[t,\Delta].$$

由于我们定义 $\deg(\Delta)=k/e$，记 $\partial c_i:=\deg_t(c_i(t))$，因此对于$i\in\{0,\ldots,e-1\}$

$$M:=\deg(f(t,\Delta))=\max\{\deg(c_i(t)\Delta^i)\}=\max\left\{\partial c_i+\frac{k}{e}i\right\}.$$

根据备注 3.3,

$$R(f)=R(t)=\mathrm{Resultant}_\Delta(f(t,\Delta),\Delta^e-g(t))=\prod_{r=0}^{e-1}f(t,\gamma^r\delta(t)),$$

其中 $\gamma=\exp(2\pi\mathrm{i}/e)$。现在，定义

$$J=\{i\in\{0,\ldots,e-1\}\ /\ \partial c_i+\frac{k}{e}i=M\}$$

and

$$f_l(\Delta)=\sum_{i\in J}c_{i\partial c_i}\Delta^i\in\mathbb{C}[\Delta],$$

其中 $c_{i\partial c_i}$是 $c_i(t)=c_{i0}+c_{i1}t+\cdots+c_{i\partial c_i}t^{\partial c_i}$ 的首项系数。对于 $R(t)$ 的任意因子

$$f(t,\gamma^r\delta)=c_0(t)+c_1(t)\gamma^r\sqrt[e]{g(t)}+\cdots+c_{e-1}(t)\gamma^{r(e-1)}\sqrt[e]{(g(t))^{e-1}},$$

其次数为 M 的系数是

$$\sum_{i\in J}c_{i\partial c_i}\gamma^{ri}(a_k)^{\frac{i}{e}}$$

（回想一下， a_k 是 $g(t)$ 的首项系数）。采用上述记号，我们陈述如下结果。

引理 4.1. 在上述记号下，以下条件等价:

1. $f(t,\Delta)$无罪。
2. *For all* $r\in\{0,\ldots,e-1\}$, $\sum_{i\in J}c_{i\partial c_i}\gamma^{ri}a_k^{i/e}\neq 0$.

3. 结式$_\Delta(f_l(\Delta)\ \Delta^e - a_k)\ \neq 0$。

$_{e-1}$证明。设 $L = \prod_{r=0}^{} \sum_{i\in J} c_{i\partial c_i}\gamma^{ri}a_k^{i/e} =$ 结式$_\Delta(f_l(\Delta)\ \Delta^e - a_k))$. 右侧的等式证明了 (2) $\Leftrightarrow$(3)。

我们注意到，正如引理 3.2 的证明中所见， $R(f)$ 是所有 $f(t,\ \gamma^r\Delta)$ 的乘积中的代换 $\Delta^e = g(t,$ 该乘积取决于 t 和 Δ^e。这种多项式的最高次齐次分量（按照我们对次数的定义）是 $M - th$ 齐次分量的共轭元之积，其中 $f(t,\ \Delta)$:

$$A(t,\Delta^e) = \prod_{r=0}^{e-1}\sum_{i\in J} c_{i\partial c_i}t^{\partial c_i}\gamma^{ri}\Delta^i.$$

另一方面，同理，结式$_\Delta(f_l(\Delta)\ \Delta^e - a_k))$ 是所有 $f_l(\gamma^r\Delta)$ 的乘积中的代换 $\Delta^e = a_k$：

$$B(\Delta^e) = \prod_{r=0}^{e-1}\sum_{i\in J} c_{i\partial c_i}\gamma^{ri}\Delta^i.$$

由于 $B(a_k)\ = L,$

$$R(f) = \mathrm{Resultant}_\Delta(f(t,\Delta),\Delta^e - g(t)) = Lt^{M\cdot e} + \text{lower degree terms},$$

这意味着（1）等价于（3）。 □

注 4.2。 引理*4.1* 应当很容易推广到非嵌套根式的情形，并且经过更多工作，或许还可以推广到一般情形。不过，定义 $f_l(\overline{\Delta})$ 所需的记号，尤其是在一般情形下，将会十分繁琐。

以下例子表明，定理3.8 中的假设是充分但非必要的。

例 4.3. 考虑有罪性条件下的根式参数化 $x = y = t(\sqrt{t} - \sqrt{t+1})$。可以验证，它是满射的，尽管它由 $p_1 = t(\Delta_1 - \Delta_2)$ 定义，其中 $\Delta_1^2 = t,\ \Delta_2^2 = t+1$ 而它是有罪的。更具体地说，联系 t 与 x(我们在定理 G_1 的证明中称之为 *3.8*) 的多项式为

$$t^4 - 4x^2t^3 - 2x^2t^2 + x^4,$$

它在 t 中是一个4次首一多项式，而根据定理，预期的次数应为 $\frac{3}{2}\cdot 4 = 6$；次数降低是由于乘以四个共轭元后发生了约化。不过，由于它是首一多项式，我们可以对 x的任意取值应用定理*2.5* 。

例4.4。关于次数条件，伯努利双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ 可以参数化为

$$x = \frac{t+t^3}{1+t^4}, \quad y = \frac{t-t^3}{1+t^4}$$

尽管次数条件未满足，但它仍然是满射的。参见 *[6]* 了解更多详情。

例4.5。考虑参数化 $\left(\frac{t(\sqrt{t}-1)}{t-1}, \frac{t^2+1}{t-1}\right)$。数对 $t = 1, \Delta_1 = 1$ 是理想 $I_1(\mathcal{P}) = \langle \Delta_1^2 - t, t(\Delta_1 - 1)\ t - 1\rangle$ 的一个零点，因此假设2不成立。然而，这并不会影响满射性。事实上，由于假设1成立，$X(\mathcal{P})$ 中的每个点都可以提升到 $t, \overline{\Delta}$；此后，尽管我们没有假设2来保证针对 $t = 1$ 提升到 $\overline{z}$，但在这种情况下不存在仿射点，因为对于该参数值，第二个分量变为无穷大。

注4.6。理想 $I_i(\mathcal{P})$ 的解是第 i 个分量中 $0/0$ 型不定式的实例。由于由 $\overline{E}$ 生成的子理想在 $\mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 中的维数为1，理想 $I_i(\mathcal{P})$ 的解集可能出现三种情况：

- 它为空，这根据希尔伯特零点定理对应于假设2中关于第 i个不可约分支的部分；
- 它是有限的；
- 它是一维的。这表明，对于一维 $V(\overline{E})$的某个不可约分支，p_i 和 q_i 都恒等于零。由于 $\overline{E}$ 本身是一个Gr ¨obner基，且假定 p_i 和 q_i 相对于$\overline{E}$均处于标准形，因此当 $V(\overline{E})$不可约时（即由 $\overline{E}$ 生成的子理想为主时），这种情况不可能发生。

本节其余部分讨论比有罪性更具限制性、但另一方面更容易检验的条件。也就是说，我们可以将定理3.8 的假设（2）替换为其他仍能保证满射性的条件。

命题4.7。在上述记号下，若$f \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 和$(t_0, \overline{\Delta}_0) \in \mathbb{C}^{m+1}$对每个 i都满足 $f(t_0, \overline{\Delta}_0) = 0$ 以及 $E_i(t_0, \overline{\Delta}_0) = 0$，则 $R(f)(t_0) = 0$。

证明。根据假设，$f_m = f$ 在该点处为零。由于每个 F_k 都是 f_k 的倍数，且每个 f_{k-1} 都是 F_k 除以 E_k所得的余式，因此这些多项式也都为零。但是 $R(f) = f_0$。 □

因此，我们得到以下条件；例如，使用结式时，该条件在计算上更为方便。

推论 4.8. 若 $\gcd(R(q_i)\ R(p_i)) = 1$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$，则定理 *3.8* 的假设2成立。

接下来我们介绍另一种方法。由于判定有罪性需要考虑可能数量过多的共轭元并进行约简，下面的定义在计算方面很方便。

定义 4.9. 我们再次递归地称多项式 $f \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$ 为可疑多项式，若出现以下任一情况：

1. 最高次数的项至少有两项；或
2. 对某个 i， Δ_i 出现在（唯一的）首项中，且 $g_i(t, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1})$ 是可疑多项式。

注意，当 g_i 是可疑多项式时，多项式 Δ_i 也是可疑多项式。

例 4.10. 考虑表达式

$$\sqrt{t^2-1}\sqrt{t-\sqrt{t^2-1}}+3.$$

将 $\delta_1 = \sqrt{t^2-1}$ 和 $\delta_2 = \sqrt{t-\delta_1}$ 命名后，我们得到 $f(t, \Delta_1, \Delta_2) = \Delta_1\Delta_2 + 3$，其次数为 $3/2$。这是一个可疑多项式，因为 $g_2(t, \Delta_1) = t - \Delta_1$ 显然是可疑多项式，且 Δ_2 出现在首单项式中。

然而， $f(t, \Delta_1, \Delta_2) + t^2$ 并不可疑，因为它的次数为 2，且最高次齐次分量只有项 t^2。

注 4.11。如果根式不是嵌套的，那么 g_i 不可能是可疑的。特别地，当根式参数化只用一个根定义时，情况就是如此。

定理 4.12。如果一个多项式不可疑，那么它就不是有罪的。

证明。 设 f 不可疑。采用定义 3.1中的记号，我们将通过反向归纳证明如下结论：每个 f_k 都不可疑，且 $\deg(f_{k-1}) = e_k \cdot \deg(f_k)$。情形 $k = m$ 是平凡的。现在假设结论对k 成立，并证明它对 $k-1$成立。

对于任意 $g \in \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}]$，我们将其最高次数的齐次分量记为 $C(g)$。于是 $C(f_k) = at^\alpha \Delta_1^{\beta_1} \cdots \Delta_k^{\beta_k}$，其中 $a \in \mathbb{C}$、 $\alpha \geq 0$，并且对于每个$i \in \{1, \ldots, k\}$，如果 g_i可疑，那么 $\beta_i = 0$。

我们考虑两种情况：

- 如果 g_k 是可疑的， $\beta_k = 0$，因此 $C(F_k) = C(f_k)^{e_k}$。转到 f_{k-1}时，对$\Delta_k^{e_k} = g_k$ 的代换不会影响 $C(F_k)$，并且不会增加低次项的次数，因为 $\deg(\Delta_k^{e_k}) = \deg(g_k)$，所以 $C(f_{k-1}) = C(F_k)$。
- 如果 g_k 不可疑，

$$C(F_k) = a^{e_k} t^{\alpha e_k} \Delta_1^{\beta_1 e_k} \cdots \Delta_{k-1}^{\beta_{k-1} e_k} \left(\prod_{i=1}^{e_k} \gamma_k^i \right)^{\beta_k} \Delta_k^{\beta_k e_k}.$$

再次利用代换$\Delta_k^{e_k} = g_k$不会增加次数这一点，

$$C(f_{k-1}) = a^{e_k} t^{\alpha e_k} \Delta_1^{\beta_1 e_k} \cdots \Delta_{k-1}^{\beta_{k-1} e_k} \left(\prod_{i=1}^{e_k} \gamma_k^i \right)^{\beta_k} C(g_k)^{\beta_k}.$$

但由于 g_k 不是可疑的， $C(g_k)$ 中只有一个不涉及可疑变量的单项式。因此 f_{k-1} 不是可疑的。另一方面，

$$\deg(f_{k-1}) = \alpha e_k + \deg(\Delta_1)\beta_1 e_k + \cdots \deg(\Delta_{k-1})\beta_{k-1} e_k + \deg(g_k)\beta_k$$

并且由于 $\deg(g_k) = e_k \deg(\Delta_k)$,

$$\deg(f_{k-1}) = e_k \left(\alpha + \deg(\Delta_1)\beta_1 + \cdots \deg(\Delta_k)\beta_k\right) = e_k \deg(f_k).$$

我们得出 $\deg(f_0) = \deg(R(f)) = \deg(f) \cdot e_1 \cdots e_m$。 □

推论 4.13。 定理 *3.8* 将“无罪”替换为“不可疑”后仍然成立。

5 关于缺失点

回顾一下，我们将以下这些点称为缺失点 $\overline{x}$ 属于有限集 $X(\mathcal{P}) \setminus X(\mathcal{P})$ (参见定义 2.2)，即不存在 $(t, \overline{\Delta}) \in \mathbb{C}^{m+1}$ 使得 $E_i(t, \overline{\Delta}) = 0$ 对所有 i 都成立，且 $\mathcal{P}(t, \overline{\Delta})$ 有定义并且等于 $\overline{x}$。

为了找出缺失点，让我们应用[3, 第8节5]中的射影消元技术:

1. 考虑由定义$\mathcal{D}_\mathcal{P}$ 的方程$I \subset \mathbb{C}[t, \overline{\Delta}, \overline{x}, z]$ 生成的理想（见第2节）。2. 令 $I^h \subset \mathbb{C}[\overline{x}][w, t, \overline{\Delta}, z]$ 为由 I 中各元素的（w、 t、 $\overline{\Delta}$、 z）齐次化生成的理想（可在 [3, 第8.5节，命题 10]中找到一种基于Gr¨obner基来计算 I^h 的方法）。3. 注意到 $\overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}} = V(I^h)$，其中 $\overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{D}_\mathcal{P}$ 在$\mathbb{P}^{m+2} \times \mathbb{C}^n$ 中的射影闭包（见 [3, 第8.5节，命题 8]）。于是，根据 [3, 第8.5节，推论 9], , $\overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}^{m+2} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 的投影恰好是 $X(\mathcal{P})$，因此它在 $\mathbb{C}^n$中是扎里斯基闭的。4. 因此，缺失点包含于 $\overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}}$在无穷远处各点的投影中；也就是说，将 $\overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}} \cap V(w)$ 投影到 $\overline{x}$ 坐标上所得的集合 $= \overline{\mathcal{D}_\mathcal{P}} \setminus \mathcal{D}_\mathcal{P}$ 是缺失点集合的一个有限超集。

这也是一种计算有理曲线缺失点的方法。不过，计算参数化在无穷远处的极限更为简单，参见 [6]。我们希望将后者推广到根式参数化。值得注意的是，一些缺失点与定理 3.8 的条件 1 有关（该条件允许我们提升到 $\mathcal{A}_\mathcal{P}$，见第3节开头），而其他缺失点则与条件 2 有关（该条件允许将 $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ 中的点提升到 $\mathcal{D}_\mathcal{P}$）。

注 5.1. 无法从 $X(\mathcal{P})$ 提升到 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 的点，是指 $F_i(x_i,t)\overline{=c_{\alpha_i}}(x_i)t^{\alpha_i}+\cdots$ 的首项系数 $c_{\alpha_i}(x_i)$（即理想 $I(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\cap\mathbb{C}[x_i,t]$ 的生成元）同时为零的那些点。

至多有 $\deg(c_{\alpha_1})\cdots\deg(c_{\alpha_n})$ 个候选点 $\overline{x}$ 可能是缺失点。此外，$V(c_{\alpha_1}(x_1),\ldots,c_{\alpha_n}(x_n))\cap X(\mathcal{P})$ 是由定理 3.8 的条件 1 导致的缺失点集合的超集。

注 5.2. 考虑坐标为 $(t,\overline{\Delta})$ 的 $m+1$ 维空间中的"Castle"（[8] 的所有塔簇的并）$V(\overline{E})$。在 $V(\overline{E})$ 中定义的有理映射 $(t,\overline{\Delta})\mapsto\mathcal{P}(t,\overline{\Delta})$，我们将称之为 $\mathcal{P}$，这里沿用原有记号。$V(\overline{E})$ 是纯一维的（[8]），因此，由于有理映射的基本点集在光滑代数簇中的余维数大于或等于 2，$\mathcal{P}$ 可以扩展到 $V(\overline{E})$ 的射影闭包的整个解奇异化 $\mathcal{C}$ 上。

未从 $X(\mathcal{P})$ 提升到 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 的点，是 $\overline{X(\mathcal{P})}$ 中那些被 $\mathcal{P}$ "映射"为 $V(\overline{E})$ 的无穷远点的点经 $\mathcal{P}$ 映射所得的像。$V(\overline{E})$ 的次数至多为 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m$，其中 $\varepsilon_i=\max\{e_i,\deg(g_i)\}$ 按次数的经典定义计算，因为它是由次数为 ε_1、……、ε_m 的超曲面构成的仿射完全交。因此，$V(\overline{E})$ 的无穷远点按重数计共有 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m$ 个。这证明，由于缺少假设1而产生的缺失点数量上界为 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m$。

例 5.3。考虑 $\mathcal{P}=\left(\frac{\sqrt[n]{t(t-1)^{n-1}}}{t-1},\frac{\sqrt[m]{(2t-1)(t-1)^{m-1}}}{t-1}\right)=\left(\frac{\Delta_1}{t-1},\frac{\Delta_2}{t-1}\right)$，其中 $E_1=\Delta_1^n-t(t-1)^{n-1}$，$E_2=\Delta_2^m-(2t-1)(t-1)^{m-1}$。注意，$\mathcal{P}$ 可以简化为 $\left(\sqrt[n]{\frac{t}{t-1}},\sqrt[m]{\frac{2t-1}{t-1}}\right)$，这就要求以不同的方式选择 $\overline{\Delta}$ 和 $\overline{E}$。

容易看出，$X(\mathcal{P})$ 由方程 $\overline{x^n-y^m+1=0}$ 定义。备注 F_1 和 F_2 中的多项式 5.1 为

$$F_1(x,t)=x^n(t-1)-t=(x^n-1)t-x^n,$$
$$F_2(y,t)=y^m(t-1)-2t+1=(y^m-2)t-y^m+1.$$

那么，$\deg(c_{\alpha_1})=n$ 且$\deg(c_{\alpha_2})=m$。可能的缺失点是第一坐标为 n的1 的 m 次方根、第二坐标为2的的值时，因此总共有 mn 个缺失点。因此，备注5.1 和 5.2 中的界是紧的。

注意，$F_1(x,1)=-1$，因此 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 中没有点的坐标为 $t=1$，所以没有额外的缺失点。

备注 5.4。在例5.3中，不难验证该参数化是适当的（即一般单射）。一般而言，当 $X(\mathcal{P})$不可约时，如果将 F_1 和 F_2视为系数属于 $X(\mathcal{P})$的有理函数域的多项式，它们的最大公因式是一次多项式的幂，则可推出其适当性。

备注 5.5. 无法从 $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ 提升到 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 的点，属于坐标 $(t,\overline{\Delta})$ 满足方程 $E_1,\ldots,E_m,p_i,q_i$ 的那些点，其中某个 $i=$

1, . . . , n。将它们投影到 $\overline{x}$ 坐标空间上，这意味着由于假设2不成立而产生的缺失点数量，小于或等于这些代数方程组的解的数量。

致谢。作者部分获得西班牙国家研究署（科学与创新部）项目资助，项目编号为PID2020- 113192GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033（数学可视化：基础、算法与应用）。J. Caravantes 和 C. Villarino 属于 ASYNACS研究组（编号CT-CE2019/683）。D. Sevilla 是 GADAC研究组成员，部分经费由埃斯特雷马杜拉自治区政府和欧洲区域发展基金提供（GR21055）。

参考文献

[1] Carlos Andradas 和 Tom´as Recio。绘制实参数曲线的缺失点与分支。Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 18(1- 2):107–126, 2007。[2] Chandrajit L. Bajaj 和 Andrew V. Royappa。实参数曲线与曲面的有限表示。Internat. J. Comput. Geom. Appl., 5(3):313–326, 1995。[3] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea。《理想、簇与算法》。数学本科生教材。Springer，Cham，第四版，2015年。计算代数几何与交换代数导论。[4] J. Caravantes、J. R. Sendra、D. Sevilla 和 C. Villarino。关于仿射曲面双有理满射参数化的存在性。J. Algebra, 501:206–214, 2018。[5] Xiao Shan Gao 和 Shang-Ching Chou。关于曲线与曲面的正规参数化。Internat. J. Comput. Geom. Appl., 1(2):125–136, 1991。[6] J. Rafael Sendra。代数平面曲线的正规参数化。J. Symbolic Comput., 33(6):863–885, 2002。[7] J. Rafael Sendra、David Sevilla 和 Carlos Villarino。关于曲面参数化满射性的一些结果。载于《计算机代数与多项式》，Lecture Notes in Comput. Sci. 第8942卷，第192–203页。Springer，Cham，2015年。[8] J. Rafael Sendra、David Sevilla 和 Carlos Villarino。根式参数化的代数与算法方面。Comput. Aided Geom. Design, 55:1–14, 2017。[9] J. Rafael Sendra、David Sevilla 和 Carlos Villarino。覆盖有理直纹曲面。Math. Comp., 86(308):2861–2875, 2017。

[10] J. Rafael Sendra、CarlosVillarino 和 David Sevilla。《旋转曲面的有理参数化中的缺失集》。《计算机辅助设计》，66：55–61，2015年。