arXiv:2303.00374v1 [math.NA] 1 Mar 2023

用于勒让德–高斯–洛巴托间断伽辽金谱元方法的整体凸限制

Andr´es M Rueda-Ram´ırez[1*]，Benjamin Bolm[1]，Dmitri Kuzmin[2] 和 Gregor J Gassner[1,3]

[1*]数学与计算机科学系，科隆大学，Weyertal 86-90，科隆，50931，德国。[2]应用数学研究所（LS III），多特蒙德工业大学，Vogelpothsweg 87，多特蒙德，D-44227，德国。[3]数据与模拟科学中心，科隆大学，Weyertal 86-90，科隆，50931，德国。

*通讯作者。电子邮箱：aruedara@uni-koeln.de；贡献作者：bbolm@smail.uni-koeln.de；kuzmin@math.uni-dortmund.de；ggassner@uni-koeln.de；

摘要

我们将整体凸限制（MCL）方法扩展至节点间断伽辽金谱元方法（DGSEM）。采用勒让德–高斯–洛巴托（LGL）求积，使非线性双曲问题的配点 DGSEM 空间离散化具备了相关性质，从而大幅简化了不变域保持型高分辨率格式的设计。与许多其他连续和间断伽辽金方法变体相比，LGL谱算子的一个显著优势在于可自然分解为兼容的子单元通量离散。我们将高阶空间半离散表示为中间状态，并以一种能够使这些状态及Runge–Kutta阶段的结果保持在凸不变域内的方式进行通量限制。此外，还可以对感兴趣的标量量施加局部界。与基于预测校正算法的限制方法不同，我们针对 LGL-DGSEM 的 MCL 程序所得到的非线性通量近似与时间步长无关，并且可以进一步调整以确保熵稳定性。为了

展示 MCL/DGSEM格式在可压缩欧拉方程中的鲁棒性，我们针对包含强激波、陡峭密度梯度和涡旋主导流的复杂设置进行了模拟。

关键词： 保结构格式、子单元通量限制、整体凸限制、间断 Galerkin 谱元方法、勒让德–高斯–洛巴托节点

1 引言

关于双曲问题二阶有限元离散的文献中，已有大量先进的稳定化方法。在传统的人工黏性方法中，非线性稳定化的程度由基于残差的激波检测器确定 [1–4]。基于限制器的方法则通过调整数值通量 [5–8] 或分片多项式近似的导数 [9–12]。通量/斜率限制旨在满足正性保持、局部离散最大值原理有效性和/或熵稳定性的充分条件。有些限制器在形式上适用于任意阶有限元，但“与离散化无关”的 [13] 黑箱扩展的精度远低于使用相同自由度总数的分片线性近似 [14, 15]。高阶有限元中保持精度的限制过程通常依赖于使用非振荡（WENO）重构 [11, 12, 16, 17], 光滑度指标 [18–20],或子单元通量限制/激波捕捉技术 [15, 21–26]。

本文评述并修改的代数通量修正（AFC）格式，基于目前称为凸限制 [6, 8, 22]的方法论。其设计理念可追溯至用于标量守恒律的局部通量修正输运（FCT）算法 [15, 27, 28]。Guermond 等人提出了将该方法首次扩展至非线性双曲系统的方案 [8]。与 Zalesak 的多维 FCT 限制器 [29]及其针对欧拉方程连续有限元方法的基于边的推广 [5, 15, 30–32], 不同，凸限制方法通过约束各个通量而非通量之和，来确保局部和全局界得以保持。对于显式情形，通量限制近似的局部极值递减（LED）和/或不变域保持（IDP）性质，可通过将其表示为始终处于凸可容许集内的中间状态来证明 [8, 13]。

上述所有通量修正输运算法都属于 AFC 格式这一类：先计算保持性质的低阶预测解，再进行反扩散修正。 [6] 中提出的单体凸限制（MCL）方法不同于这类分步方法，它将受限反扩散通量纳入半离散格式的残差中。由此得到的常微分方程非线性系统具有定义明确的稳态，并且可以采用隐式

时间积分器。显式版本的 IDP 性质可按照 [33] 中对低阶（局部 Lax–Friedrichs）方法的分析加以证明。此外，还可以通过基于限制器或基于耗散的修正来确保（半）离散熵不等式成立 [34, 35]。

FCT 和 MCL 首次成功拓展到高阶有限元时，采用了 Bernstein 多项式作为局部基函数。 [14, 15, 22, 24, 36] 在此背景下，实现最优精度的关键在于使用稀疏离散梯度/拉普拉斯算子和子单元通量限制技术。Pazner、Lin 等人 [37], 以及 Rueda-Ram [38], ırez 等人´提出的间断 Galerkin 谱元方法（DGSEM），将 FCT 类型的子单元凸限制拓展到了勒让德–高斯–洛巴托（LGL）基。其底层低阶方法具有 [39]中所用子单元有限体积格式的结构。DGSEM 高阶离散化还可自然地表示为相邻节点之间的子单元通量稀疏形式。因此，无需进行人为的通量重构或分解。此外，配置型 LGL-DGSEM 近似的质量矩阵为对角矩阵，离散梯度/散度算子具有分部求和（SBP）性质，这些性质是实现熵稳定性所必需的 [23] [40]。

作为高阶通量修正输运算法的 LGL 版本 [37–39, 41, 42] 以及 Bernstein 有限元 [22, 35, 43],的复杂限制器的替代方案，我们针对守恒律引入了 Hajduk [22]子单元 MCL 格式的定制 LGL-DGSEM 对应格式。事实上，所提出的方法也适用于任何能生成具有 SBP 性质的稀疏离散梯度算子的其他空间半离散化，例如 Gauss-DGSEM 离散化 [44] 或非守恒平衡律系统的一般 SBP 离散化 [45, 46]。MCL 过程中的通量约束以及稳态解均与时间步无关。在气体动力学欧拉方程的子单元通量限制中，依次限制密度、动量和总能量通量，以确保密度、各个速度分量和比总能满足局部界。如果压力变为负值，则采用简单的缩放限制器。由于[34, 35, 43] 中提出的基于限制器的修正能够在限制较少的约束条件下保证熵稳定性，因此不对物理熵施加局部界。上述限制策略使我们能够在不牺牲任何重要性质、也不采用不切实际的小时间步的情况下实现高分辨率。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们简要介绍 LGL-DGSEM，推导 LGL-DGSEM 子单元 MCL 方法，并讨论其一些性质。在第 3 节中，我们使用 LGL-DGSEM/MCL 方法对可压缩欧拉方程进行具有挑战性的模拟，并将其与 FCT/IDP 策略进行比较。最后，我们在第 4 节中给出结论。

2 数值方法

In t本文研究如下形式的双曲守恒律系统

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{u})=\mathbf{0},\quad \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^{+}, \tag{1}$$

其中 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{D}$ 是一个计算域。空间维数为 $D\in\{1,2,3\}$。守恒量向量 $\mathbf{u}(\vec{x},t)\in\mathbb{R}^{n_{eq}}$取决于空间位置 $\vec{x}$ 和时间点 t。通量函数 $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^{D\times n_{eq}}$取决于 $\mathbf{u}:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}_{0}^{+}\to\mathcal{G}$。如果集合 $\mathcal{G}\subseteq\mathbb{R}^{n_{eq}}$ 是凸的，且对于所有 $(\vec{x},t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}_{0}^{+}$，均有$\mathcal{G}$和 $\mathbf{u}(\vec{x},t)\in\mathcal{G}$，则称该集合为不变域。系统 (1) 配有初始条件 $\mathbf{u}(\cdot,0)=\mathbf{u}_{0},$，并在 $\partial\Omega$ 上配有适当的边界条件。

为简洁起见并便于阅读，我们在一维 ($D=1$) 守恒律或系统这一简单情境下介绍所研究的方法。所有将要讨论的算法都可直接扩展为适用于二维和三维空间的张量积形式，也可扩展至曲线网格。

2.1 间断Galerkin谱元法

令 $\mathcal{T}=\{\Omega^{1},\dots,\Omega^{K}\}$ 为计算域 Ω 的剖分，由 K 个互不重叠的单元组成。在每个单元内，我们用次数为 N 的多项式近似解 $\mathbf{u}$。分片多项式DG近似 $\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}\approx\mathbf{u}$在单元界面处可能不连续。我们在以下空间中求取 $\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}$

$$\mathcal{V}^{N}=\{\phi\in L^{2}(\Omega)\colon\phi|_{\Omega^{e}}\in\mathcal{P}^{N}(\Omega^{e})\,\forall\Omega^{e}\in\mathcal{T}\}.$$

将注意力限制在单个单元 Ω^{e}上，我们将 (1) 乘以任意多项式测试函数 $\boldsymbol{\phi}\in(\mathcal{P}^{N}(\Omega^{e}))^{n_{eq}}$，对 Ω^{e}上的加权残差积分，并通过分部积分得到弱形式

$$\int_{\Omega^{e}}\frac{\partial\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}\vec{x}-\int_{\Omega^{e}}\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^{\mathrm{DG}})\cdot\vec{\nabla}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}\vec{x}+\oint_{\partial\Omega^{e}}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\mathbf{f}}\mathrm{d}\vec{S}=\mathbf{0} \tag{2}$$

的局部守恒律。由于 $\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}$ 在$\hat{}\leftrightarrow$单元界面处通常没有唯一的定义，因此我们使用近似黎曼求解器计算 $\mathbf{f}\approx\mathbf{f}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega^{e}}$；该求解器接收两个单侧极限并返回一个数值通量。

勒让德–高斯–洛巴托（LGL）不连续Galerkin谱元方法（DGSEM）是DG方法的一种所谓节点配置变体。它生成具有分部求和（SBP）性质的离散梯度/散度算子 [47]。将$\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}$ 限制到Ω^{e} 可表示为与$(N+1)^{D}$ 个LGL插值点相关联的拉格朗日基函数。用于在Ω^{e} 上进行数值积分的求积公式采用参考单元 $\tilde{\Omega}=[-1,1]^{D}$上的LGL配置节点。映射$F^{e}:\Omega\to\Omega^{e}$ 用于将参考空间变换到物理空间（$\vec{\xi}\mapsto\vec{x}$ 对于$\vec{\xi}\in\tilde{\Omega}$和$\vec{x}=F^{e}(\xi)\in\Omega^{e}$）。经过一些推导，

一维LGL-DGSEM离散化中 i第个局部自由度的演化方程1在Ω^e <style id='11}>可写为 [39, 48]

$$J\omega_i \dot{\mathbf{u}}_i^{\mathrm{DG}} + \sum_{k=0}^{N} \bar{S}_{ik}\mathbf{f}_k - \delta_{i0}\hat{\mathbf{f}}_{(0,L)} + \delta_{iN}\hat{\mathbf{f}}_{(N,R)} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

其中， J 表示从参考单元映射得到的雅可比矩阵的恒定行列式， ω_i 表示参考空间求积权重， δ_{ij} 表示节点索引 i 和 j的克罗内克δ。数值通量 $\hat{\mathbf{f}}_{(0,L)}$ 和$\hat{\mathbf{f}}_{(N,R)}$ 采用包含 LGL 节点 x_i^e的单元 $\Omega^e = (x_0^e, x_N^e)$边界上的$\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}$ 内侧和外侧极限计算。强形式导数矩阵 $\bar{\mathbf{S}} = (\bar{S}_{ik})_{i,k=0}^{N}$ 可表示为

$$\bar{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{B}},$$

其中，$\underline{\mathbf{B}} := \mathrm{diag}(-1, 0, \ldots, 0, 1)$是所谓的边界求值矩阵。弱形式导数矩阵$\mathbf{Q} = (Q_{ij})_{i,k=0}^{N}$的元素 $Q_{ij} := \omega_i \ell_j'(\xi_i)$根据拉格朗日基多项式 $\{\ell_i\}_{i=0}^{N}$的导数定义。

利用反对称矩阵 $\mathbf{S} = 2\mathbf{Q} - \mathbf{B} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T$，其元素记为 S_{ik}，离散体积分可用两点数值通量 $\mathbf{f}_{(i,k)}^*$ [49] 表示。半离散格式

$$J\omega_i \dot{\mathbf{u}}_i^{\mathrm{DG}} + \sum_{k=0}^{N} S_{ik}\mathbf{f}_{(i,k)}^* - \delta_{i0}\hat{\mathbf{f}}_{(0,L)} + \delta_{iN}\hat{\mathbf{f}}_{(N,R)} = \mathbf{0} \tag{4}$$

若采用标准平均值 $\mathbf{f}^{*(i,k)} = (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k)/2$，则该格式等价于（3）。不过，选择其他体积数值通量 $\mathbf{f}_{(i,k)}^*$ 可以进一步提高鲁棒性。例如，欧拉方程通量的某些两点近似可保证动能保持 [50]、熵守恒/耗散 [51, 52]、压力平衡保持 [53]，或同时具备所有这些性质 [54, 55]。

所有守恒律的对角范数 SBP 离散（因此也包括本文考虑的 LGL-DGSEM）都可以写成所谓的通量差分 形式 [49]

$$J\dot{\mathbf{u}}_i^{\mathrm{DG}} = \frac{1}{\omega_i}\left(\hat{\mathbf{f}}_{(i-1,i)}^{\mathrm{DG}} - \hat{\mathbf{f}}_{(i,i+1)}^{\mathrm{DG}}\right), \qquad \forall i = 0, \ldots, N, \tag{5}$$

其中，索引 -1和 $N+1$表示外侧状态。对称且相容的通量 $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{DG}} = \hat{\mathbf{f}}_{(j,i)}^{\mathrm{DG}}$ 定义为 [39, 49]

$$\hat{\mathbf{f}}_{(-1,0)}^{\mathrm{DG}} = \hat{\mathbf{f}}_{(0,L)}, \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,i+1)} = \sum_{l=0}^{i}\sum_{k=0}^{N} S_{lk}\mathbf{f}^{*}_{(l,k)}, \qquad i = 0,\dots,N-1, \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(N,N+1)} = \hat{\mathbf{f}}_{(N,R)}. \tag{8}$$

注意，通量 $\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)}$ 与一维单位法向量相乘$n_{(i,j)} \in \{-1,1\}$ 于（5）中。法向通量 $n_{(i,j)}\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)}$ 具有反对称性，即 $n_{(i,j)}\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} = -n_{(j,i)}\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(j,i)}$。因此，（4）具有局部（子单元级）守恒性质，这正是 Lax–Wendroff定理所要求的 [56]。

Remark 1 设 $\Delta x_i = J\omega_i$。则 5 对应于子单元有限体积格式

$$\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{DG}}_i = -\frac{\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{i-1/2}}{\Delta x_i}, \qquad \forall i = 0,\dots,N,$$

其中 $\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{i+1/2} = \hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(i,i+1)}$ 和 $\hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{i-1/2} = \hat{}\mathbf{f}^{\mathrm{DG}}_{(i-1,i)}$。我们采用双下标记法，因为它更适用于基于通量的有限元离散。

*Remark 2*由于 LGL-DGSEM 是一种对角范数求和分部算子，因此其通量差分形式（5）–（8）的表达式可以直接得到。对于质量矩阵稠密的其他 DG 近似，则需要应用稀疏化算子才能恢复通量差分形式。子单元通量分解的示例可见 [22, 26, 35]。对于以次数为 $N > 1$ 的 Bernstein 多项式作为局部基函数的 n_{eq} DG方法，每个 Runge–Kutta阶段都需要为每个单元求解大小为（$N+1$）（$\times$）$N+1$的稀疏线性系统[22, 35]。Vilar [25] 指出，若将测试函数表示为所谓的 *subresolution* 基函数的线性组合，并利用其与直方积分理论之间已有的关系，则无论 DG 解采用模态表示还是节点表示，都可以得到通量差分公式。Vilar和Abgrall [26],提出了向非结构三角网格的推广，他们用满足二维版本（5）的子单元平均值对 $\mathbf{u}^{\mathrm{DG}}$ 进行参数化。子单元通量的计算还需要求解具有稀疏图拉普拉斯矩阵的小型线性系统。

Remark 3 Mateo-Gab´ın 等人 [44]表明，Legendre–Gauss间断Galerkin谱元法（包括标准形式和分裂形式）也可以写成带有显式交错通量和对角质量矩阵的通量差分形式。因此，本文将要介绍的大多数算法都适用于 Legendre–Gauss间断Galerkin谱元法。然而，单元间通量和投影算子的处理还需要进一步分析，并且可能需要进行适当修改。

2.2 整体凸限制

整体凸限制（MCL）方法 [6, 22, 35] 是一种子单元通量修正过程，将高阶基准离散与兼容且保不变域的低阶格式相结合。通过采用中间状态表示（类似于预测校正方法），确保物理和数值可容许性条件成立

中提出的方法 [8, 13, 37–39]）。半离散 MCL 格式的通量限制器除了满足局部和/或全局最大值原理 [43, 57]外，还可设计为满足熵稳定性条件。为尽可能降低低阶数值耗散，针对高阶有限元采用局部子单元限制程序 [22, 35, 43]。此外，面向系统的序贯 MCL 算法支持对不同守恒量或导出量分别选用修正因子 [6, 22]。

2.2.1 低阶不变域保持格式

如 [23], 中所述，通过将 DGSEM 格式的节点值解释为子单元的均值，可以得到与 LGL-DGSEM 离散化兼容的低阶有限体积格式。令

$$J\dot{\mathbf{u}}_i^{\mathrm{FV}} = \frac{1}{\omega_i}\left(\hat{\mathbf{f}}_{(i-1,i)}^{\mathrm{FV}} - \hat{\mathbf{f}}_{(i,i+1)}^{\mathrm{FV}}\right), \qquad \forall i = 0, \ldots, N, \tag{9}$$

其中 $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{FV}}$ 是节点 i与 j之间通量的低阶数值近似。此类子单元有限体积格式具有与（5）相同的结构。因此，这两种格式兼容，可以进行混合化。

已有研究表明，对于一阶 Rusanov 通量（也称为局部 Lax-Friedrichs 通量，LLF），（9）具有不变域保持（IDP）性质 [37, 39]

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{FV}} = \frac{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}{2} - (i-j)\,\frac{\lambda_{(i,j)}^{\max}}{2}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \tag{10}$$

其中，$\lambda_{(i,j)}^{\max} = \lambda_{(j,i)}^{\max} > 0$ 是具有初始状态$\mathbf{u}_i$ 和$\mathbf{u}_j$的黎曼问题的最大波速上界。例如，[58]讨论了该波速的估计。在我们的记号中，(10)耗散部分中的 $(i-j)$ 确保通量 $\hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{FV}(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}_{(j,i)}^{\mathrm{FV}}$ 具有对称性。乘以单位法向量 $n_{(i,j)} = -n_{(j,i)}$ 后，它变为反对称的。

将 Rusanov 通量（10）代入（9），并使用前向欧拉法进行时间积分，可得到低阶格式的全离散版本。遵循 Guermond 和 Popov [33], ，我们将其写成如下形式

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^{\mathrm{FV},n+1} = &\left(1 - \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\left(\lambda_{(i,i-1)}^{\max} + \lambda_{(i,i+1)}^{\max}\right)\right)\mathbf{u}_i^n \\ &+ \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\,\lambda_{(i,i-1)}^{\max}\,\overline{\mathbf{u}}_{(i,i-1)}^n + \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\,\lambda_{(i,i+1)}^{\max}\,\overline{\mathbf{u}}_{(i,i+1)}^n\end{aligned} \tag{11}$$

使用辅助平均态

$$\overline{\mathbf{u}}_{(i,j)} := \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j}{2} - (i-j)\,\frac{\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j}{2\,\lambda_{(i,j)}^{\max}}. \tag{12}$$

如果时间步长 Δt 满足 CFL 条件

$$\Delta t \leq \frac{J\,\omega_i}{\lambda^{\max}_{(i,i-1)} + \lambda^{\max}_{(i,i+1)}}, \tag{13}$$

那么，显式更新（11）的结果 $\mathbf{u}_i^{\mathrm{FV}\,n+1}$，是状态 $\mathbf{u}_i^n$ 和 $\mathbf{u}^n_{(i,i\pm1)}$的保性质凸组合。第 2.2.4 节讨论时间步长限制。

如此定义的 LLF 平均态最重要的性质是，它们保持双曲系统初值问题的所有凸不变量，这已在连续（多）线性有限元离散化的背景下由 [33] 证明。事实上，$\mathbf{u}^{(i,j)}$ 由（12）定义，是 HLL 近似黎曼求解器的中间状态 [59]。由此可推知正性保持以及熵条件的有效性。

Remark 4 低阶 LLF 格式（半离散或全离散）的平均态（12）具有对称性，即对于任意一对局部索引为 $i \in \{0,\dots,N\}$ 和 $j \in \{i-1, i+1\}$ 的相邻节点，均有 $\mathbf{u}^{(i,j)} = \mathbf{u}^{(j,i)}$。

Remark 5 为了获得适用于一般高阶 DG 方法的兼容低阶 IDP 格式，必须首先用稀疏近似替换离散梯度/散度算子，然后施加低阶耗散（例如，采用稀疏图拉普拉斯算子，如 [14, 22]中所示）。对于我们的 LGL-DGSEM 格式，以及一般而言所有对角范数 SBP 算子，低阶 IDP 格式（9）可直接获得，并且与（5）的通量差分形式相兼容（4）。

2.2.2 限制过程

为施加相关的不等式约束，我们将（5）替换为（参见 [22, 35]）

$$J\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\omega_i}\left(\hat{\mathbf{f}}_{(i-1,i)} - \hat{\mathbf{f}}_{(i,i+1)}\right), \qquad \forall i = 0,\dots,N. \tag{14}$$

$\hat{}$ 最简单的情形下，混合子单元通量 $\mathbf{f}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{n_{eq}}$ 定义为

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \boldsymbol{\alpha}_{(i,j)} \circ \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}_{(i,j)}) \circ \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,j)}, \tag{15}$$

其中，$\circ$ 表示 Hadamard（或逐分量）乘积。$\boldsymbol{\alpha}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{n_{eq}}$ 的标量分量是取值介于 0 和 1 之间的权重。分别取 $\boldsymbol{\alpha}_{(i,j)} = \mathbf{1}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{(i,j)} = \mathbf{0}$，即可恢复高阶 DG 方法（5）和低阶 FV 格式（9）。

如下一节所述，计算 $\boldsymbol{\alpha}_{(i,j)}$ 在数值上可能是不适定的。因此，在实际实现中应避免这样做，$\hat{}$ 尤其是在能够直接计算通量 $\mathbf{f}^{(i,j)}$的情况下。

*Remark 6*如果 $\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,j)}$ 对于 $j \in \{-1, N+1\}$，那么 DG 和 FV 格式在 Ω 的边界上使用相同的两点通量近似 $^e = (x^e_0, x^e_N)$。在这种情况下，公式 (15) 将产生 $\hat{\mathbf{f}}^{(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,j)}$ 对于任意选择的 $\boldsymbol{\alpha}_{(i,j)}$。边界通量的这一理想性质是 LGL-DGSEM 离散所特有的，因为它包含边界节点。这使限制过程的实现具有很强的局部性。

由于$\hat{\mathbf{f}}^{(i,j)}$ 的低阶分量可证明具有 IDP，因此子单元限制的目的是约束反扩散分量

$$\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = (i-j)\left(\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} - \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,j)}\right) \tag{16}$$

通量 $\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i-1,i)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i-1,i)} + \Delta\hat{\mathbf{f}}^{(i-1,i)}$ 和 $\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(i,i+1)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,i+1)} - \Delta\hat{\mathbf{f}}^{(i,i+1)}$。

*Remark 7*所谓的反扩散通量 $\Delta\mathbf{f}_{(i,j)} = -\Delta\mathbf{f}^{(j,i)}$ 是反对称的，因为通量 $\hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{DG}(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{DG}}_{(j,i)}$ 和 $\hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{FV}(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{FV}(j,i)}$ 是对称的。

采用这一记号，高阶更新可写为

$$J\omega_i \frac{\mathbf{u}^{\mathrm{DG},n+1}_i - \mathbf{u}^n_i}{\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV},n}_{(i-1,i)} - \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV},n}_{(i,i+1)} + \Delta\hat{\mathbf{f}}^n_{(i,i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{f}}^n_{(i,i+1)}. \tag{17}$$

利用以式（**12**）定义的平均态表示通量差 $\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i-1,i)} - \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{FV}}_{(i,i+1)}$，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathrm{DG},n+1}_i = &\left(1 - \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\left(\lambda^{\max}_{(i,i-1)} + \lambda^{\max}_{(i,i+1)}\right)\right)\mathbf{u}^n_i \\ &+ \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\lambda^{\max}_{(i,i-1)}\,\overline{\mathbf{u}}^n_{(i,i-1)} + \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\lambda^{\max}_{(i,i+1)}\,\overline{\mathbf{u}}^n_{(i,i+1)} \\ &+ \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\left(\Delta\hat{\mathbf{f}}^n_{(i,i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{f}}^n_{(i,i+1)}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

现在可以将高阶方法的平均态定义为

$$\overline{\mathbf{u}}^{\mathrm{DG}}_{(i,j)} = \overline{\mathbf{u}}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}}{\lambda^{\max}_{(i,j)}}, \tag{19}$$

并将（18）转换为条状态形式

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathrm{DG},n+1}_i = &\left(1 - \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\left(\lambda^{\max}_{(i,i-1)} + \lambda^{\max}_{(i,i+1)}\right)\right)\mathbf{u}^n_i \\ &+ \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\lambda^{\max}_{(i,i-1)}\,\overline{\mathbf{u}}^{\mathrm{DG},n}_{(i,i-1)} + \frac{\Delta t}{J\,\omega_i}\lambda^{\max}_{(i,i+1)}\,\overline{\mathbf{u}}^{\mathrm{DG},n}_{(i,i+1)}\end{aligned} \tag{20}$$

其结构与（11）相同。

沿用针对拉格朗日有限元和 Bernstein 有限元推导 MCL 格式的方法 [6, 22, 35], ，我们将由式（19）定义的 DG 平均态替换为

$$\overline{\mathbf{u}}_{(i,j)}^{Lim} = \overline{\mathbf{u}}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}}{\lambda_{(i,j)}^{\max}}, \tag{21}$$

其中 $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim} = (i-j)\left(\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \hat{\mathbf{f}}\mathrm{FV}_{(i,j)}\right)$ 是 $\Delta\hat{\mathbf{f}}^{(i,j)}$ 的限制近似。与低阶分量 $\mathbf{u}^{(i,j)} = \mathbf{u}^{(j,i)}$ 不同，限制条状态（21）通常并不对称，这是由于 $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim} = -\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(j,i)}^{Lim}$ 的斜对称性所致。

MCL 平均态 $\mathbf{u}_{(i,j)}^{Lim}$ 应满足与 $\mathbf{u}^{(i,j)}$ 相同的不等式约束，并尽可能接近高阶目标 $\mathbf{u}_{(i,j)}^{\mathrm{DG}}$。应以高阶龙格–库塔方法替代前向欧拉时间离散。对于采用前向欧拉阶段的 SSP-RK 格式，可以按照低阶格式 [6, 22] 的相同方式证明 IDP 性质。一般的龙格–库塔方法可能需要进行时间通量限制 [60, 61]。

在 [8, 13, 37–39] 中采用的凸限制技术与 MCL 不同之处在于，它们将 $\mathbf{u}_i^{\mathrm{DG}\,n+1}$ 的计算分为低阶 IDP 更新和反扩散修正阶段。这种预测–校正策略也用于较早的 FCT 型算法，以离散双曲系统的有限元 [5, 15, 30–32]。与 MCL 相比，由此得到的格式没有半离散对应形式。此外，限制约束的界取决于时间步。根据应用场景，FCT/IDP 方法的这一特点可能是优点，也可能是缺点。

现在我们将介绍具有通用界的 MCL 版本中受限反扩散通量的计算 $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}$。关于界的适当定义，将在第 2.2.3节讨论。

守恒量限制器

对系统而言，最简单的限制策略是将每个方程视为标量守恒律，并分别限制每个守恒变量的反扩散通量。令 ρ 为 $\mathbf{u}$ 的一个标量分量。我们分别用 $\rho_{(i,j)}$ 和 $\Delta\hat{f}_{(i,j)}^{\rho,Lim}$ 表示 $\mathbf{u}^{(i,j)}$ 和 $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}$ 的相应分量。为使 $\rho_{(i,j)}^{Lim}$ 和 $\rho_{(j,i)}^{Lim}$ 保持在范围 $[\rho_i^{\min}, \rho_i^{\max}]$ 内，我们施加以下不等式约束

$$\rho_i^{\min} \le \overline{\rho}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{f}_{(i,j)}^{\rho,Lim}}{\lambda_{(i,j)}^{\max}} \le \rho_i^{\max}, \qquad \rho_j^{\min} \le \overline{\rho}_{(i,j)} - \frac{\Delta\hat{f}_{(i,j)}^{\rho,Lim}}{\lambda_{(i,j)}^{\max}} \le \rho_j^{\max}. \tag{22}$$

正/负反扩散通量 $\Delta\hat{f}_{(i,j)}^{\rho,Lim}$ 可能会违反 $\rho_{(i,j)}^{Lim}$ 的上界/下界，或违反 $\rho_{(j,i)}^{Lim}$ 的下界/上界。引入

$$\Delta\hat{f}_{(i,j)}^{\rho,+} = \lambda_{(i,j)}^{\max}\min\{\rho_i^{\max} - \overline{\rho}_{(i,j)}, \overline{\rho}_{(i,j)} - \rho_j^{\min}\},$$

$$\Delta\hat{f}^{\rho,-}_{(i,j)} = \lambda^{\max}_{(i,j)} \max\{\rho^{\min}_i - \overline{\rho}_{(i,j)}, \overline{\rho}_{(i,j)} - \rho^{\max}_j\},$$

我们定义 [6, 22]

$$\Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)} = \begin{cases} \min\{\Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)}, \Delta\hat{f}^{\rho,+}_{(i,j)}\} & \text{if } \Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)} \geq 0, \\ \max\{\Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)}, \Delta\hat{f}^{\rho,-}_{(i,j)}\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{23}$$

容易验证，对于此选择 $\Delta\hat{f}^{\rho}_{,Lim\,(i,j)}$，条件 (22) 得到满足。此外，存在 $\alpha^{\rho}_{(i,j)} \in [0,1]$ 使得 $\Delta\hat{f}^{\rho}_{,Lim\,(i,j)} = \alpha^{\rho}_{(i,j)}\Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)}$ 并且

$$\hat{f}^{\rho}_{(i,j)} = \hat{f}^{\rho,\mathrm{FV}}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)}}{i-j} = \alpha^{\rho}_{(i,j)}\hat{f}^{\rho,\mathrm{DG}}_{(i,j)} + (1-\alpha^{\rho}_{(i,j)})\hat{f}^{\rho,\mathrm{FV}}_{(i,j)} \tag{24}$$

是 FV 通量和间断伽辽金通量的凸组合。Kuzmin [6] 注意到，计算 $\alpha^{\rho}_{(i,j)} = \Delta\hat{f}^{\rho}_{,Lim\,(i,j)} / \Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)}$ 在分母非零但很小的情况下既没有必要，数值上也不适定。因此，实际应用中直接计算受限反扩散通量（23）更为可取。

“原始”量的顺序限制器

在某些情况下，我们希望对状态向量 $\mathbf{u}$中未包含的标量施加界限。如果感兴趣的量表示两个守恒变量之比，则可以使用 [6, 9]中提出的序贯限制方法。例如，气体动力学 Euler 方程（见附录 A）中的速度场分量$\vec{v} = (\rho\vec{v})/\rho$以及总比能 $E = (\rho E)/\rho$可能属于控制变量集合。

设 ρ 和 $\rho\phi$ 为一般的守恒变量。为确保 $\rho_i \in [\rho^{\min}_i, \rho^{\max}_i]$ 和 $\phi_i \in [\phi^{\min}_i, \phi^{\max}_i]$，顺序 MCL 算法 [6, 22] 的第一阶段使用（23）限制 $\Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)}$。第二阶段则使用乘积法则的离散版本 $(\rho\phi)' = \rho'\phi + \phi'\rho$限制 $\Delta\hat{f}^{\rho\phi}_{(i,j)}$。平均态

$$\overline{\phi}_{(i,j)} = \frac{\overline{(\rho\phi)}_{(i,j)} + \overline{(\rho\phi)}_{(j,i)}}{\overline{\rho}_{(i,j)} + \overline{\rho}_{(j,i)}} \overset{\text{LGL}}{=} \frac{\overline{(\rho\phi)}_{(i,j)}}{\overline{\rho}_{(i,j)}} \tag{25}$$

在 LGL-DGSEM 版本中，ϕ 变量的平均态具有对称性。与 Bernstein 基间断伽辽金方法 [22]相比，这一性质是其另一项优势。

第二阶段要施加的不等式约束为

$$\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\phi^{\min}_i \leq \overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\overline{\phi}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{g}^{\phi,Lim}_{(i,j)}}{\lambda^{\max}_{(i,j)}} \leq \overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\phi^{\max}_i, \tag{26}$$

其中 $\Delta\hat{g}^{\phi,\,Lim}_{(i,\,j)}$ 是对下列内容的限制近似

$$\Delta\hat{g}^{\phi}_{(i,j)} = \Delta\hat{f}^{\rho\phi}_{(i,j)} - \lambda^{\max}_{(i,j)}\left(\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\overline{\phi}_{(i,j)} - \overline{(\rho\phi)}_{(i,j)}\right). \tag{27}$$

容易验证，条件（26）等价于

$$\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\phi^{\min}_{i} \le \overline{(\rho\phi)}_{(i,j)} + \frac{\Delta\hat{f}^{\rho\phi,Lim}_{(i,j)}}{\lambda^{\max}_{(i,j)}} \le \overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\phi^{\max}_{i}, \tag{28}$$

其中

$$\Delta\hat{f}^{\rho\phi,Lim}_{(i,j)} = \Delta\hat{g}^{\phi,Lim}_{(i,j)} + \lambda^{\max}_{(i,j)}\left(\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\overline{\phi}_{(i,j)} - \overline{(\rho\phi)}_{(i,j)}\right). \tag{29}$$

我们使用界通量

$$\begin{aligned}\Delta\hat{g}^{\phi,+}_{(i,j)} &= \lambda^{\max}_{(i,j)}\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\min\{\phi^{\max}_{i} - \overline{\phi}_{(i,j)}, \overline{\phi}_{(i,j)} - \phi^{\min}_{j}\},\\ \Delta\hat{g}^{\phi,-}_{(i,j)} &= \lambda^{\max}_{(i,j)}\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\max\{\phi^{\min}_{i} - \overline{\phi}_{(i,j)}, \overline{\phi}_{(i,j)} - \phi^{\max}_{j}\}\end{aligned}$$

来定义

$$\Delta\hat{g}^{\phi,Lim}_{(i,j)} = \begin{cases}\min\{\Delta\hat{g}^{\phi}_{(i,j)}, \Delta\hat{g}^{\phi,+}_{(i,j)}\} & \text{if } \Delta\hat{g}^{\phi}_{(i,j)} \ge 0,\\ \max\{\Delta\hat{g}^{\phi}_{(i,j)}, \Delta\hat{g}^{\phi,-}_{(i,j)}\} & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{30}$$

这个定义与（23）类似，可保证（28）以及通量校正的平均态 $(\rho\phi)^{\,Lim}_{(j,\,i)}$ 所对应约束的有效性。受限反扩散通量 $\Delta\hat{f}^{\rho\phi,\,Lim}_{(i,\,j)}$ 根据公式（29）计算。

Remark 8 根据定义（30），存在一个有效限制因子 $\alpha^{\phi} \in [0,1]$，使得 $\Delta\hat{g}^{\phi,\,Lim}_{(i,\,j)} = \alpha^{\phi}\Delta\hat{g}^{\phi}_{(i,\,j)}$。然而，与恒等式 $\Delta\hat{f}^{\rho\phi,\,Lim}_{(i,\,j)} = \alpha^{\rho\phi}\Delta\hat{f}^{\rho\phi}_{(i,\,j)}$ 对应的 $\alpha^{\rho\phi}$ 值不一定落在范围 $[0,1]$ 内。

压力限制器

求解气体动力学的可压缩欧拉方程（附录 A）时，我们要求压力和内能始终非负。若受限平均态满足以下条件，即可保证正性保持：

$$\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)}\overline{(\rho E)}^{Lim}_{(i,j)} - \frac{\left\|\overline{(\rho\vec{v})}^{Lim}_{(i,j)}\right\|^2}{2} \ge 0. \tag{31}$$

为满足（31），我们对 $\Delta\hat{\mathbf{f}}^{Lim}_{(i,j)}$ 的所有分量应用同步限制因子 $\alpha^{p}_{\,(i,j)} \in [0,1]$。受限条形状态变为

$$\overline{\mathbf{u}}^{Lim}_{(i,j)} = \overline{\mathbf{u}}_{(i,j)} + \frac{\alpha^{p}_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}^{Lim}_{(i,j)}}{\lambda^{\max}_{(i,j)}}, \qquad \overline{\mathbf{u}}^{Lim}_{(j,i)} = \overline{\mathbf{u}}_{(i,j)} - \frac{\alpha^{p}_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}^{Lim}_{(i,j)}}{\lambda^{\max}_{(i,j)}} \tag{32}$$

and 预限制反扩散通量 $\Delta\hat{\mathbf{f}}^{Lim}_{(i,j)}$ 被替换为 $\alpha^p{}_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}^{Lim}_{(i,j)}$.

为提高可读性而省略上标 p 并引入缩放后的横线状态 $\mathbf{w}^{(i,j)} := \lambda^{\max}_{(i,j)}\mathbf{u}^{(i,j)}$, 我们将（31）转化为二次不等式

$$A_{(i,j)}\alpha^2_{(i,j)} \pm B_{(i,j)}\alpha \leq Q_{(i,j)}, \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{(i,j)} &= \frac{\|\Delta\vec{\hat{f}}^{\rho\vec{v},Lim}_{(i,j)}\|^2}{2} - \Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}^{\rho E,Lim}_{(i,j)},\\
B_{(i,j)} &= \vec{\overline{w}}^{\rho\vec{v}}_{(i,j)} \cdot \Delta\vec{\hat{f}}^{\rho\vec{v},Lim}_{(i,j)} - \overline{w}^{\rho}_{(i,j)}\Delta\hat{f}^{\rho E,Lim}_{(i,j)} - \overline{w}^{\rho E}_{(i,j)}\Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)},\\
Q_{(i,j)} &= \overline{w}^{\rho}_{(i,j)}\overline{w}^{\rho E}_{(i,j)} + \frac{\|\vec{\overline{w}}^{\rho\vec{v}}_{(i,j)}\|^2}{2}.
\end{aligned}$$

按照 Kuzmin [6], , 我们注意到 $\alpha^2 \leq \alpha$ 对于 $\alpha \in [0,1]$。因此，在满足线性充分条件 $P_{(i,j)}\alpha \leq Q_{(i,j)}$时，结论成立，其中 (33)

$$P_{(i,j)} = \max\{0, A_{(i,j)}\} + |B_{(i,j)}|. \tag{34}$$

我们得出结论，压力修正可以通过以下方式进行

$$\alpha_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{Q_{(i,j)}}{P_{(i,j)}} & \text{if } P_{(i,j)} > Q_{(i,j)},\\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{35}$$

此定义利用了低阶 LGL-DGSEM 的平均态具有对称性这一性质。$\alpha_{(i,j)}$ 的一般公式更为复杂 [6]。

为确保限制通量 $\alpha^p{}_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}^{(i,j)}$ 对数据的连续依赖，可以将 $P_{(i,j)}$ 替换为上界 [6]

$$\begin{aligned}
P^{\max}_{(i,j)} = \max\{0, A_{(i,j)}\} &+ |\vec{\overline{w}}^{\rho\vec{v}}_{(i,j)}| \cdot |\Delta\vec{\hat{f}}^{\rho\vec{v},Lim}_{(i,j)}| + |\overline{w}^{\rho}_{(i,j)}\Delta\hat{f}^{\rho E,Lim}_{(i,j)}|\\
&+ |\overline{w}^{\rho E}_{(i,j)}\Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)}| \geq P_{(i,j)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

本文将探讨这种可能性。在数值实验的描述中，我们将采用（35）的压力限制器称为“精确型”，该限制器使用（34）。使用（36）而非（34）的限制器则称为“谨慎型”。正如我们在数值结果一节中所展示的，谨慎型压力修正给格式带来的数值耗散可能远多于精确型。

半离散熵限制器

在本文中，我们还使用了 [57]中为 MCL格式开发的半离散熵限制器。若数值通量满足 Tadmor 洗牌条件，则 DG 或 FV方法具有

gua半离散熵稳定性 [62–64]

$$[\![\mathbf{v}]\!]_{(i,j)}^{T}\,\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} \leq [\![\Psi]\!]_{(i,j)}\,, \tag{37}$$

其中 $[\![\Psi]\!]_{(i,j)} := \Psi_j - \Psi_i$ 表示跳跃算子，Ψ 是所谓的熵通量势，而 $\mathbf{v}$ 是熵变量向量。有关这些量在欧拉方程中的定义，请参见附录 A 。

设 $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}$ 为受限反扩散通量，其受到约束，以确保所有感兴趣的标量量均满足局部和／或全局界。定义

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{FV}} + \alpha_{(i,j)}^{s}\frac{\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}}{i-j} \tag{38}$$

采用修正因子 $\alpha_{(i,j)}^{s} \in [0,1]$ ，使 Tadmor 条件（37）得以满足。将（38）代入（37），可得关于 $\alpha_{(i,j)}^{s} \in [0,1]$ 的线性不等式约束。我们使用（参见 [57]）施加此约束

$$\alpha_{(i,j)}^{s} = \begin{cases} \frac{[\![\mathbf{v}]\!]_{(i,j)}\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{FV}} - [\![\Psi]\!]_{(i,j)} + \epsilon}{[\![\mathbf{v}]\!]_{(i,j)}\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}/(i-j) + \epsilon} & \text{if } \Pi_{(i,j)} > [\![\Psi]\!]_{(i,j)}\,, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{39}$$

其中 ϵ 是一个很小的正数，并且

$$\Pi_{(i,j)} = [\![\mathbf{v}]\!]_{(i,j)}\left(\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{\mathrm{FV}} + \frac{\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^{Lim}}{i-j}\right)$$

是应用 $\alpha_{(i,j)}^{s}$之前的熵产生率。

Remark 9 本节所述的所有修正工具都能为限制通量或修正因子给出闭式表达式。这使我们的方法有别于需要求解非线性方程的 FCT/IDP 替代方法 [8, 37, 39]。

2.2.3 界的定义

我们区分全局界和局部界。全局界用于确保满足物理可容许性条件，例如在气体动力学可压缩欧拉方程的情形下，保证密度 ρ 和压力 p为正。保持这些界是顺利运行具有挑战性的模拟而不发生崩溃的先决条件。如果在 ρ 的限制器中使用下界$\rho_i^{\min} \geq 0$ ，并在顺序限制过程的最后阶段应用（尖锐或谨慎的）压力限制器，那么 MCL 格式在此意义上保持正性。

另一方面，施加局部界可以在全局界内避免非物理振荡，并提高该方法的激波捕捉能力。相应的数值

可容许性条件通常表述为局部最大值或最小值原理。如果低阶 bar 状态满足不等式约束，则我们的 MCL 方法中的这些约束是可行的。因此，必须将这些状态纳入上下界的定义中。例如，如果节点 i 处的守恒变量或原始变量 ϕ 满足以下界限，则可将其视为数值可容许的

$$\phi_i^{\min} = \min\left\{\phi_i, \min_{j\in\mathcal{N}^*(i)} \overline{\phi}_{(i,j)}\right\}, \quad \phi_i^{\max} = \max\left\{\phi_i, \max_{j\in\mathcal{N}^*(i)} \overline{\phi}_{(i,j)}\right\}, \tag{40}$$

其中，$\mathcal{N}^*(i) = \{i-1, i+1\}$ 和 ϕ_i 是上一个时间步节点 i 处的解。在多维情形下，整数集合 $\mathcal{N}^*(i)$ 包含所有节点 $j \neq i$ 的索引 $\hat{}$，使得通量 $\mathbf{f}^{(i,j)}$ 出现在节点状态 $\mathbf{u}_i$的演化方程中。

我们可以将（40）重写为

$$\phi_i^{\min} = \min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\phi}_{(i,j)}, \quad \phi_i^{\max} = \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\phi}_{(i,j)}, \tag{41}$$

其中 $\mathcal{N}(i) = \{i-1, i, i+1\}$ 是包含 i 以及 i的所有相邻节点索引的整数集合，根据定义（12）。

如果 MCL 界（41）过于严格，通量修正格式可能无法在光滑区域达到最优精度阶。通过纳入节点 i 及其邻居处的 $\phi^{\mathrm{FV},\,n+1}$ 值可以构造更宽的界，其中这些邻居属于物理上包含节点点 [14, 15]的单元。纳入外推状态后，可以保证一般网格上的线性保持 [6]。或者，也可以利用光滑度指标 [43] 放宽局部界，以避免因不必要的限制而导致潜在的精度损失。

使用低阶平均态来定义界限，在 FCT/IDP 方法中也很常见 [5, 8, 30, 33]。与 MCL 版本类似，还可以将其他节点状态 $\phi^{\mathrm{FV},\,n+1}_{j}$ 纳入 $\phi_i^{\min}$ 和 $\phi_i^{\max}$ 的定义中。使用光滑度指标也是一种选择 [8, 37]。在 FCT/IDP 方法中，还可以使用下一时间步的低阶解来定义界限，而不使用低阶平均态，例如 [37, 39, 65]，

$$\phi_i^{\min} = \min_{j\in\mathcal{N}(i)} \phi_j^{\mathrm{FV},n+1}, \quad \phi_i^{\max} = \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \phi_j^{\mathrm{FV},n+1}. \tag{42}$$

这会导致格式具有更强的耗散性，但在某些情况下，时间步长限制可能会放宽（详情见下一节）。FCT/IDP 格式的一个特点是，受限反扩散通量的界限与时间步长成反比。因此，通量限制近似的质量往往会强烈依赖于 CFL 数。

本文对 MCL 和 FCT 方法均采用紧致局部界限（41），不作任何放宽。

2.2.4 显式时间步长限制

整体凸限制方法通过限制界面通量来强制满足节点界限，使所有高阶条状态均满足这些界限。当（20）是凸组合时，该策略可确保离散解满足这些界限。因此，我们得到以下一维类 CFL 时间步长限制：

$$\Delta t \leq \min_i \frac{J\,\omega_i}{\lambda^{\max}_{(i,i-1)} + \lambda^{\max}_{(i,i+1)}}. \tag{43}$$

一般而言，时间步长限制按以下方式缩放

$$\Delta t \lesssim \min_i \frac{m_i}{2\sum_{d=1}^{D} \lambda_i^{\max,d}}, \tag{44}$$

其中， D 是问题的空间维数， m_i 是节点 i 的质量矩阵对角项， $\lambda^{\max}_{,\,i}{}^{d}$ 是节点i 在坐标方向 d 上的最大波速。例如，当 $D=1$ 时，有 $\lambda^{\max}_{,\,i}{}^{1} = \max\{\lambda^{\max}_{(i,i-1)}, \lambda^{\max}_{(i,i+1)}\}$。

由于 CFL 稳定性条件(44) 是根据条状态表示推导出来的，因此，使用条状态界限(41) 的 MCL 和 FCT/IDP 方法必须满足该条件，才能使解保持在界限内。不幸的是，(44) 比低阶方法的典型 CFL 稳定性条件更加严格，尤其是在多空间维数情况下 [66]:

$$\Delta t \lesssim \min_i \left\{ \min_{1\leq d\leq D} \left\{ \frac{\Delta x_i^d}{\lambda_i^{\max,d}} \right\} \right\}, \tag{45}$$

其中， Δx_i^d 是方向 d上的子单元尺寸。

据作者所知，要规避严格的 CFL 条件（44），同时仍使解保持在规定界限内，唯一的方法是使用 FCT/IDP 方法，并完全避开条状态界限。例如，可以使用下一时间步的（稳健）低阶解计算出的界限（42）。尽管这种策略在某些情况下可以减少计算时间，但由于低阶方法只有在满足严格的 CFL 条件（44）时，才能证明其保持正性（例如，参见 [67]），因此可能会导致非物理解。

由于 FCT/IDP 方法在时间更新完成后才施加限制，以确保完全离散的结果满足界限，因此其反扩散修正（进而空间离散）取决于时间步长。另一方面，MCL 在半离散（空间）层面施加限制，而不考虑时间离散。因此，对于 FCT/IDP 方法，耗散量取决于 CFL 数；而对于 MCL 方法则不然。事实上，我们已对

格式对 CFL 的依赖性进行了数值研究，并表明 FCT/IDP 方法没有明显的时间收敛现象。

3 数值结果

为测试 MCL/DGSEM 格式的收敛性和鲁棒性，我们使用气体动力学的可压缩欧拉方程进行模拟（见附录A）。

所有情况下，我们均在兼容的鲁棒低阶子单元格式中使用 Rusanov（LLF）数值通量，并将其用于高阶 DG方法的表面通量。CFL 条件由（44）给出。

3.1 收敛性测试

我们模拟密度波的平流，其初始条件为

$$\rho(x) = 2 + A\,\sin(2\,\pi\,(x+y)), \quad A = 0.98, \quad \vec{v} = (0.1, 0.2, 0), \quad p = 20, \quad (46)$$

在计算域 $\Omega = [-1,1]^2$ 中，并量化网格细化时解的 L_2 误差。

我们采用 Ranocha [54] 提出的熵守恒且动能保持通量，作为分裂形式 DGSEM 方法的体数值通量；比热比取 $\gamma = 1.4$，CFL 取 $=0.9$。

我们首先研究采用 MCL 方法对解施加全局界的影响。为此，我们对所有受限条形状态强制要求密度和压力严格为正，

$$\overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)} \geq 0, \quad p(\overline{\mathbf{u}}^{Lim}_{(i,j)}) \geq 0, \quad \forall i,j \in \mathcal{N}(i). \quad (47)$$

守恒变量的密度正性由单侧MCL限制器保证，而压力正性则由锐压力正性限制器保证。

表1 和2 展示了 L_2 MCL/DGSEM格式中所有解变量的误差及实验收敛阶（EOC）；该格式对密度和压力施加全局界（正性）。EOC 针对四种不同的笛卡尔网格计算，N_e 每个空间方向上的单元数。对于多项式次数为 $\approx N+1$ 的近似，我们观察到 EOC N。

现在，我们研究采用 MCL方法施加局部界的效果。为此，我们使用序贯MCL限制器，对所有平均态的密度、速度和比总能施加局部最小值和最大值，

$$\begin{aligned}
&\min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\rho}_{(i,j)} \leq \overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)} \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\rho}_{(i,j)}, \min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{E}_{(i,j)} \leq \overline{E}^{Lim}_{(i,j)} \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{E}_{(i,j)} \\
&\min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{v}_{1(i,j)} \leq \overline{v}^{Lim}_{1(i,j)} \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{v}_{1(i,j)}, \min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{v}_{2(i,j)} \leq \overline{v}^{Lim}_{2,(i,j)} \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{v}_{2(i,j)}
\end{aligned} \quad (48)$$

表 1：L_2 采用正性限制（全局界）的收敛性测试误差与实验收敛阶，$N = 3$。

N_e	$\|\epsilon_\rho\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_1}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_2}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho E}\|^2$	EOC
4	1.29×10^{-1}	–	1.29×10^{-2}	–	2.58×10^{-2}	–	3.22×10^{-3}	–
8	1.15×10^{-2}	3.48	1.15×10^{-3}	3.48	2.30×10^{-3}	3.48	2.88×10^{-4}	3.48
16	9.35×10^{-4}	3.62	9.35×10^{-5}	3.62	1.87×10^{-4}	3.62	2.34×10^{-5}	3.62
32	2.25×10^{-5}	5.37	2.25×10^{-6}	5.37	4.51×10^{-6}	5.37	5.64×10^{-7}	5.37
mean		4.16		4.16		4.16		4.16

表 2：L_2 采用正性限制（全局界）的收敛性测试误差与实验收敛阶，$N = 4$。

N_e	$\|\epsilon_\rho\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_1}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_2}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho E}\|^2$	EOC
4	1.75×10^{-2}	–	1.75×10^{-3}	–	3.50×10^{-3}	–	4.37×10^{-4}	–
8	1.61×10^{-3}	3.44	1.61×10^{-4}	3.44	3.22×10^{-4}	3.44	4.03×10^{-5}	3.44
16	2.55×10^{-5}	5.98	2.55×10^{-6}	5.98	5.11×10^{-6}	5.98	6.38×10^{-7}	5.98
32	8.97×10^{-7}	4.83	8.97×10^{-8}	4.83	1.79×10^{-7}	4.83	2.24×10^{-8}	4.83
mean		4.75		4.75		4.75		4.75

表 3：L_2 采用顺序限制（局部界）的收敛性测试误差与实验收敛阶，$N = 3$。

N_e	$\|\epsilon_\rho\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_1}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_2}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho E}\|^2$	EOC
4	2.51×10^{-1}	–	2.51×10^{-2}	–	5.02×10^{-2}	–	6.28×10^{-3}	–
8	7.74×10^{-2}	1.70	7.74×10^{-3}	1.70	1.55×10^{-2}	1.70	1.92×10^{-3}	1.71
16	1.91×10^{-2}	2.02	1.91×10^{-3}	2.02	3.82×10^{-3}	2.02	4.77×10^{-4}	2.01
32	5.70×10^{-3}	1.74	5.70×10^{-4}	1.74	1.14×10^{-3}	1.74	1.42×10^{-4}	1.75
mean		1.82		1.82		1.82		1.82

表 4：L_2 采用顺序限制（局部界）的收敛性测试误差与实验收敛阶，$N = 4$。

N_e	$\|\epsilon_\rho\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_1}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho v_2}\|^2$	EOC	$\|\epsilon_{\rho E}\|^2$	EOC
4	1.27×10^{-1}	–	1.27×10^{-2}	–	2.53×10^{-2}	–	3.18×10^{-3}	–
8	4.19×10^{-2}	1.59	4.19×10^{-3}	1.60	8.38×10^{-3}	1.59	1.04×10^{-3}	1.61
16	1.19×10^{-2}	1.81	1.19×10^{-3}	1.81	2.39×10^{-3}	1.81	2.98×10^{-4}	1.80
32	4.47×10^{-3}	1.42	4.47×10^{-4}	1.42	8.94×10^{-4}	1.42	1.12×10^{-4}	1.42
mean		1.61		1.61		1.61		1.61

表 3 和 4 展示了 L_2 施加局部界（顺序限制）的 MCL/DGSEM格式中所有解变量的误差和实验收敛阶。在这种情况下，实验收敛阶至多为二阶，与多项式次数无关，这表明局部界过于严格，无法达到 $EOC > 2$。因此，通常需要放宽严格的界限以恢复高阶精度，例如将 MCL 限制器的局部界与光滑度传感器/指标结合起来，避免限制近似解的光滑极值。

3.2 开尔文–亥姆霍兹不稳定性

我们考虑无黏二维开尔文–亥姆霍兹不稳定性（KHI）设置，例如 [39, 41] 中所述。由于其高密度反差和可压缩性效应，该测试案例对节点型高阶方法而言颇具挑战性

尤其是在（欠分辨的）KHI 涡结构形成并演化时。事实上，标准 LGL-DGSEM 方法需要进行限制，以确保鲁棒性（此处具体指正性）。

初始条件为

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}B, & p(x,y) &= 1, \\ v_1(x,y) &= \frac{1}{2}\left(B-1\right), & v_2(x,y) &= \frac{1}{10}\sin(2\pi x), \end{aligned} \tag{49}$$

其中 $B = \tanh\left(15y + 7.5\right) - \tanh(15y - 7.5)$。

我们对模拟区域 Ω 进行剖分 $= [-1,1]^2$，采用 64×64 个四边形单元，使用周期性边界条件，以次数为 $N = 7$的多项式表示解，并将模拟运行至最终时刻 $t = 10$。此外，我们使用分裂形式 DGSEM 离散欧拉方程，并采用 Ranocha 的熵守恒且动能保持通量 [54] 作为体积数值通量，并选取 CFL=0.9

我们首先研究采用 MCL 和 FCT/IDP 方法对解施加全局界的影响。使用 MCL 方法时，可以通过对守恒量采用单侧 MCL 限制器并使用锐压力正性限制器，对所有受限条形状态（47）严格保持密度和压力为正。然而，对于 [39] 中提出的 FCT/IDP 方法，则需要设置大于零的正阈值，否则某些节点可能会得到无效的真空状态。因此，对于 FCT/IDP 变体，我们以子单元方式采用 Rueda-Ramírez [41] 提出的启发式保正方法，即根据有限体积解为密度和压力设定下界，

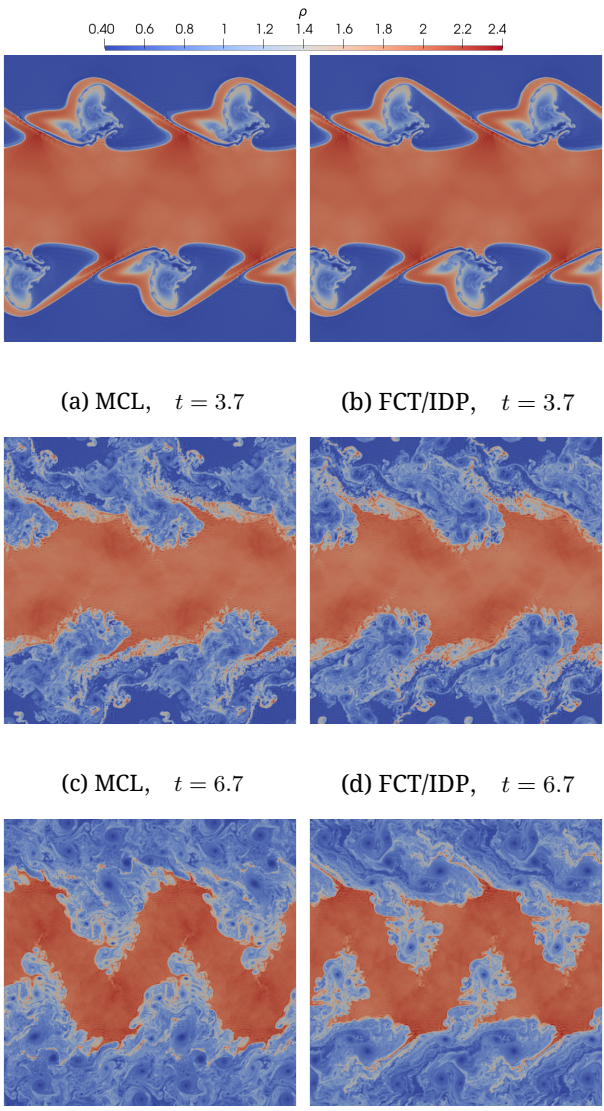
$$\rho_i \geq \beta \rho_i^{\mathrm{FV}}, \quad p_i \geq \beta p_i^{\mathrm{FV}}, \tag{50}$$

满足 $\beta = 0.1$。我们注意到，这一要求比严格正性稍为严格。

图1 展示了采用具有全局界的 MCL 和 FCT/IDP 限制器进行 KHI 模拟时不同阶段的密度等值线——两种方法都能稳定运行至最终时刻。尽管该模拟设置对离散格式 [39] 所产生的涡旋卷起形状极为敏感，但这两种施加全局界的方法所得结果看起来十分相似。

现在，我们研究采用 MCL 和 FCT/IDP 方法对解施加局部界的效果。使用 MCL 方法时，我们采用标准的顺序限制，对密度、速度和总能量施加局部最小值和最大值（48）。使用 FCT/IDP 方法时，我们对密度施加局部最小值和最大值，并对比熵施加局部最小值，

$$\min_{j\in\mathcal{N}(i)} \bar{\rho}_{(i,j)} \leq \rho_i \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \bar{\rho}_{(i,j)}, \qquad \min_{j\in\mathcal{N}(i)} \eta(\bar{u}_{(i,j)}) \leq \eta(u_i), \tag{51}$$



(a) MCL, $t = 3.7$ (b) FCT/IDP, $t = 3.7$

(c) MCL, $t = 6.7$ (d) FCT/IDP, $t = 6.7$

(e) MCL, $t = 10$ (f) FCT/IDP, $t = 10$

图 1：采用 MCL 和 FCT/IDP（对密度和压力进行正性限制）的开尔文–亥姆霍兹模拟密度等值线。多项式次数为 $N = 7$、单元数为 64×64 的 DGSEM 结果。

其中，对修正比熵 $\eta = e\rho^{1-\gamma}$施加的条件可确保满足离散熵不等式 [13]。此外，η这种选择效率较高，因为其计算成本低于比熵 $s =$

$\ln(p/\rho^\gamma)$，并且提高了牛顿法的收敛性。牛顿法用于 FCT/IDP 方法中，以求解非线性方程并获得限制因子 [13, 68]。注意，条件（48）对于 MCL 是典型的，而条件（51）对于 FCT/IDP 是标准的。

图 2 展示了使用带有局部界的 MCL 和 FCT/IDP 限制器进行 KHI 模拟时不同阶段的密度等值线。与之前一样，尽管两种方法的限制技术和界不同，但二者得到的解非常相近。在比较图 1 和 2时，显然可以看出，施加局部界的方法比采用全局界的方法引入了更多的数值耗散，这符合预期。采用局部界时，可见的尺度范围更小，尤其是在较大时间处。

最后，我们将平均限制因子计算为

$$\bar{\alpha}(t) = \left(\frac{1}{V} \sum_{e=1}^{K} \sum_{i,j=0}^{N} J_{ij} \omega_{ij} \alpha_{ij}^{e}(t) \right), \tag{52}$$

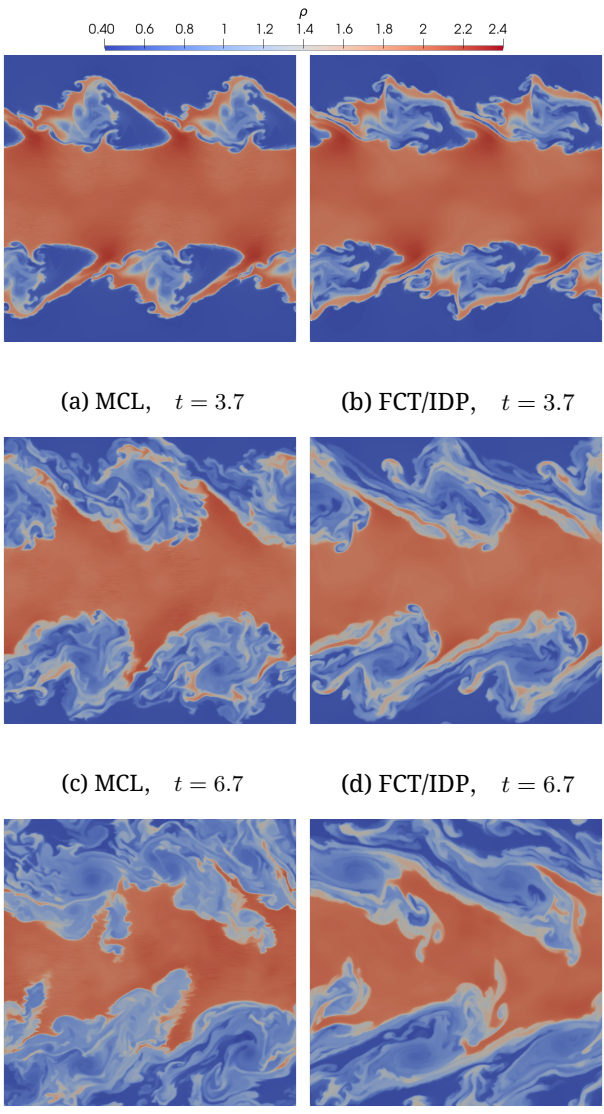
其中， $e \in [1, K]$ 表示单元索引， K 表示计算域中的单元数量， $i, j \in [0, N]$ 表示节点索引， N表示多项式次数， α_{ij}^{e}（t）表示时间 t时单元 e 的节点 ij 的限制因子， V 表示计算域的总面积。由于在 MCL 方法中，限制是针对每个界面和每个方程进行的，且不使用限制因子，因此我们首先计算每个界面和每个方程的有效限制因子，然后通过对节点 ij的所有界面取平均值来计算节点α_{ij}^{e} ，

$$\alpha_{ij}^{e} := \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathcal{N}^e(ij)} \alpha_{(ij,k)}^{e}. \tag{53}$$

我们在图 3中展示了 KHI 模拟中平均限制因子随时间的变化。为获得介于 0 和 1 之间的限制因子，MCL 的动量方程和能量方程所对应的因子是辅助通量的有效缩放，即

$$\alpha_{(ij,k)}^{e,\phi} := \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta\hat{g}_{(ij,k)}^{\phi} \approx 0, \\ \frac{\Delta\hat{g}_{(ij,k)}^{\phi,Lim} + \epsilon\, \mathtt{sign}(\Delta\hat{g}_{(ij,k)}^{\phi})}{\Delta\hat{g}_{(ij,k)}^{\phi} + \epsilon\, \mathtt{sign}(\Delta\hat{g}_{(ij,k)}^{\phi})} & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{54}$$

其中 ϵ 是一个非常小的数。对于 FCT/IDP 方法，我们绘制量 $(1-\alpha)$，因为我们的 FCT/IDP 方法 [39] 的限制因子定义方式与 MCL 方法相反。平均限制因子 $\bar{\alpha} = 1$ 表示离散化在所有位置都采用无限制高阶格式，而平均限制因子 $\bar{\alpha} = 0$ 则表示反扩散通量 $\Delta\mathbf{f}$（对于 FCT/IDP），或 $\Delta\hat{f}^{\rho}$ 或 $\Delta\hat{g}^{\phi}$（对于 MCL ）在所有位置都被设为零。



(a) MCL, $t = 3.7$ (b) FCT/IDP, $t = 3.7$

(c) MCL, $t = 6.7$ (d) FCT/IDP, $t = 6.7$

(e) MCL, $t = 10$ (f) FCT/IDP, $t = 10$

图 2：采用 MCL（顺序限制）和 FCT/IDP（密度和比熵）进行开尔文–亥姆霍兹模拟的密度等值线。多项式次数为 $N = 7$、单元数为 64×64 的 DGSEM 结果。

3.3 钝体上游的无黏弓形激波

我们考虑二维钝体周围的超声速流动，该流动会产生脱体弓形激波，以测试 MCL/DGSEM 方法在曲线坐标

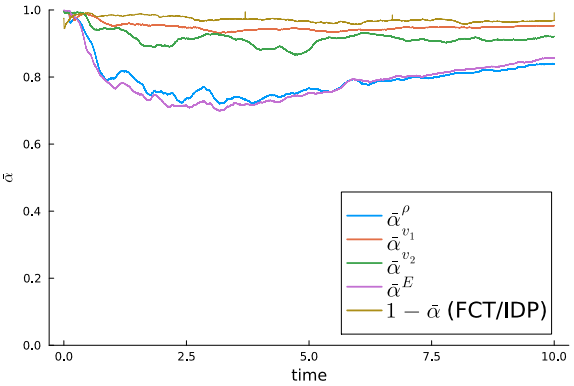


图 3：MCL（顺序限制）和 FCT/IDP（密度和比熵）的限制因子演化。采用多项式次数 $N = 7$ 和 64×64 个单元的 DGSEM 结果。

网格。该问题设置被提出作为第五届高阶计算流体力学方法国际研讨会的一个高级测试算例 [69]。

计算域的左边界是一个圆弧段，圆心为 (3。85，0)，半径为 5。9；钝体具有长度为 1 的平坦前端，并与两个半径为 0。5 的四分之一圆相连；右边界位于 $x = 0$。比热比设为 $\gamma = 1.4$ ，初始条件为常数状态

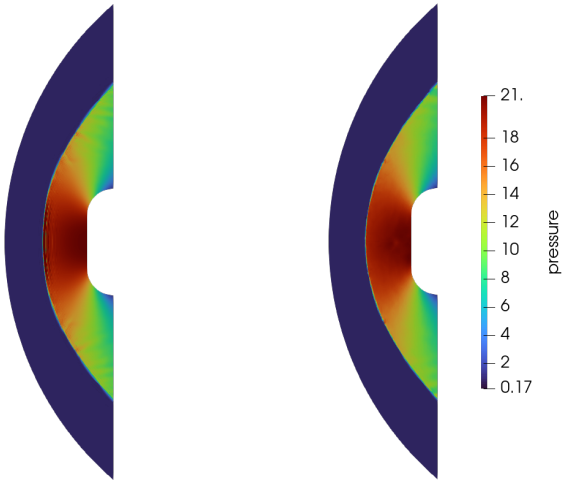
$$\rho(x, y) = 1.4, \qquad p(x, y) = 1, \qquad v_1(x, y) = 4, \qquad v_2(x, y) = 0, \tag{55}$$

其对应于马赫数 Ma $= 1.4$。

对于钝体，我们采用反射壁面边界条件；对于其他边界，则采用基于特征的流入/流出边界，并根据垂直于边界方向的流动条件选择外部状态。

我们采用分裂形式 DGSEM，并使用 Ranocha 的熵守恒且动能保持通量 [54], 多项式次数 $N = 5$、几何的等参数映射、带有全局（47）和局部（48）界的 MCL 限制，以及一个协调网格。该网格包含 36 个沿流入边界和壁面边界规则分布的单元，以及 24 个沿流出边界规则分布的单元。为保证压力正性，我们再次采用锐压力正性限制器。

图 4 展示了使用全局界和局部界的 MCL 限制器进行弓形激波模拟时的压力等值线，时间为$t = 10$ 。图 4a 表明，全局正性界足以使模拟持续运行至结束时间，但激波附近会出现伪振荡。使用局部界可以消除激波附近的伪振荡，如图 4b所示。



(a) 全局界　　(b) 局部界

图 4：在时刻$t = 10$，采用 MCL 进行弓形激波模拟得到的压力等值线。多项式次数为 $N = 5$、包含 24×36 个单元的 DGSEM 结果。左图显示仅采用全局界（正性）时的模拟结果，右图显示采用局部界（顺序限制）时的结果。

3.4 Sedov 爆炸

Sedov 爆炸问题是一个极具挑战性的模拟设置，其中包含一个强烈的圆形激波，用于描述对称爆炸波的演化过程：该爆炸波从初始的密度和压力集中区域向外扩展，进入静止的气体中。

初始条件采用 FLASH 天体物理代码中的标准设置 [70]。气体初始时处于静止状态，$v_1(t = 0) = v_2(t = 0) = 0$，密度为常数 $\rho(t = 0) = 1$，大气压为 $p_0 = 10^{-5}$，并在网格中心半径为 $e = 1$ 的小区域内注入一定量的无量纲能量 $r_0 = 0.21875$，

$$p(t = 0) = \begin{cases} p_0 & \text{if } r \geq r_0, \\ \frac{(\gamma-1)e}{\pi r_0^2} & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{56}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。

我们将模拟区域 $\Omega = [-2, 2]^2$ 剖分为 64×64 个四边形单元，采用周期性边界条件（不过最终时刻足够短，因此这不会产生影响），使用分裂形式 DGSEM 进行模拟，并采用 Chandrashekar 的熵守恒且动能保持

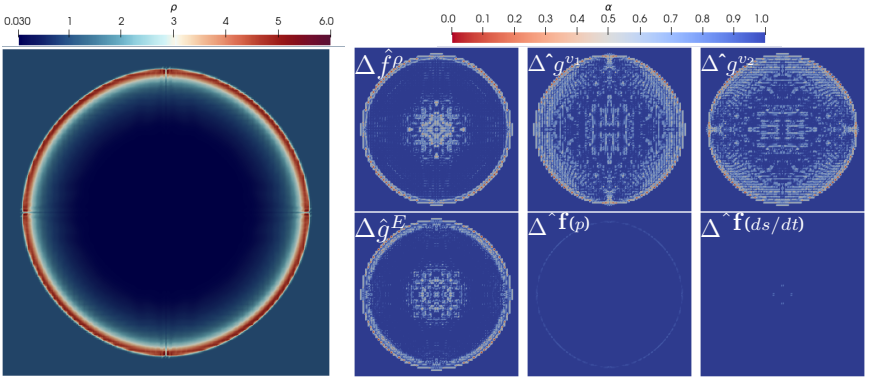


图 5：Sedov 爆炸测试在 $t = 3$ 时采用 MCL 限制器**A**（顺序限制、压力和熵限制器）的 DGSEM 模拟中，密度和限制因子的等值线。限制因子图中的文字标明了这些因子所应用的通量。

通量 [52]作为体积数值通量，以次数为 $N = 3$ 的多项式表示解，模拟运行至 $t = 3$，并采用 CFL=0.9。

我们测试了带局部界的 MCL 限制器的不同变体，以确定哪些变体能够处理该测试中的强激波，并将通过（53）计算得到的节点限制因子可视化。

我们测试的第一个 MCL 限制器变体（下文简称 **MCL 限制器 A**）首先使用标准MCL序贯限制器（48），然后使用具有全局界的尖锐正性限制器（47），最后使用半离散熵限制器（38）。

图 5 展示了在最终时刻 $t = 3$，Sedov 爆炸模拟采用 MCL 限制器 **A** 时的密度等值线和限制因子。限制因子图中的文字标明了这些因子所应用的通量。由于压力正性限制器和半离散熵限制器都会作用于反扩散通量的所有分量，$\Delta \mathbf{f}$，我们在括号中注明限制因子对应的是压力（p）还是熵（ds/dt）限制器。使用这一标准版本的 MCL 限制器时，可以在爆炸波的激波前沿观察到一些伪影。

我们测试的第二种 MCL 限制器变体（以下简称**MCL 限制器 B**）对守恒量使用 MCL 限制器，并对密度采用局部条形状态界限，

$$\min_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\rho}_{(i,j)} \leq \overline{\rho}^{Lim}_{(i,j)} \leq \max_{j\in\mathcal{N}(i)} \overline{\rho}_{(i,j)}, \tag{57}$$

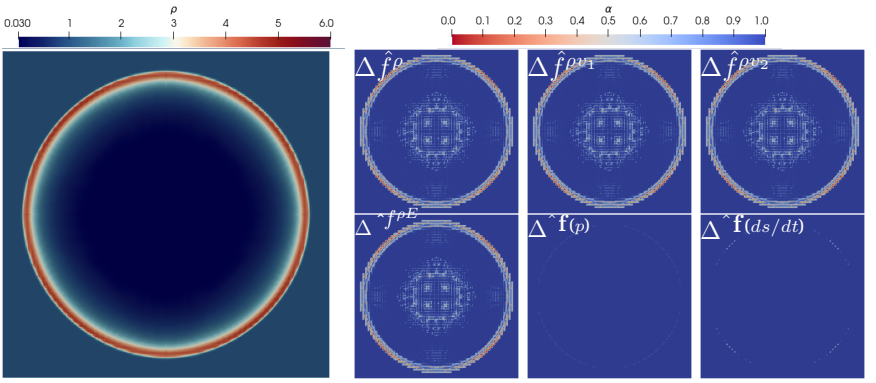


图 6：使用 MCL 限制器 **B**（所有方程的密度因子、压力和熵限制器）进行 DGSEM 模拟时，Sedov 爆炸测试在 $t = 3$ 处的密度和限制因子等值线。限制因子图中的文字说明了这些因子应用于哪种通量。

然后计算密度的有效限制因子，

$$\alpha^{\rho}_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)} \approx 0 \\ \frac{\Delta\hat{f}^{\rho,Lim}_{(i,j)} + \epsilon\,\mathtt{sign}(\Delta\hat{f}^{\rho}_{(ij,k)})}{\Delta\hat{f}^{\rho}_{(i,j)} + \epsilon\,\mathtt{sign}(\Delta\hat{f}^{\rho}_{(ij,k)})} & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{58}$$

其中 ϵ 是一个非常小的数，对所有其他守恒量 $\alpha^{\rho}{}_{(i,j)}$（$\Delta\hat{f}^{\rho v_1}$, $\Delta\hat{f}^{\rho v_2}$和 $\Delta\hat{f}^{\rho E}$）应用，然后使用带全局界的尖锐正性限制器（47），最后应用半离散熵限制器（38）。

图 6 展示了使用 MCL 限制器 **B** 进行 Sedov 爆炸模拟在最终时刻 $t = 3$ 的密度等值线和限制因子。在本例中，密度、压力和半离散熵限制器作用于反扩散通量的所有分量。请注意，与 MCL 限制器**A**相比，压力正性限制器需要减弱作用，而半离散熵限制器则需要加强作用。此外，MCL 限制器 **B** 消除了爆炸激波前沿处的类碳块伪影。

我们测试的最后一种 MCL 限制器变体（下文称为**MCL 限制器 C**）结合了 MCL 限制器 **A** 和 **B**。它对守恒量使用密度具有局部条状态界限的 MCL 限制器（57），利用（58）计算有效限制系数并将其应用于其他守恒量；接着使用顺序限制器对“原始”量施加界限（48）；随后使用尖锐正性限制器对密度和压力施加全局界（47）；最后应用半离散熵限制器（38）。

图 7 展示了在最终时刻使用 MCL 限制器 **C** 进行 Sedov 爆炸模拟时的密度和限制因子等值线 $t = 3$。同样，密度、压力和半离散熵限制器作用于反扩散通量的所有分量

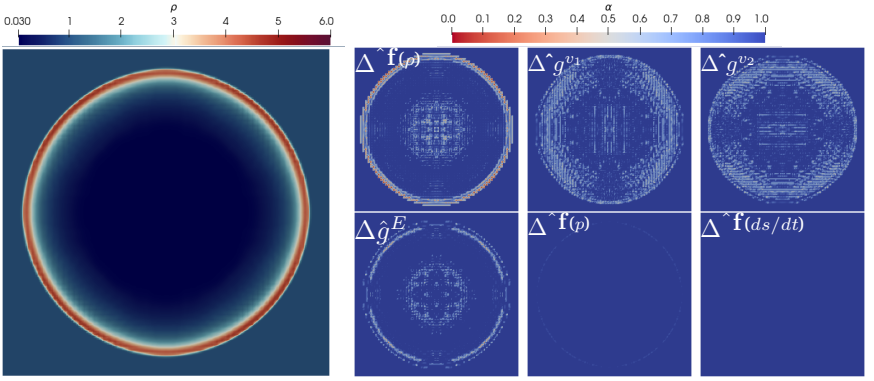


图 7：采用 MCL 限制器 **C**（对所有方程使用密度因子、顺序限制、压力和熵限制器）进行 DGSEM 模拟，在 $t = 3$ 时 Sedov 爆炸测试的密度和限制因子等值线图。限制因子图中的文字说明了这些因子所应用的通量。

。由于密度限制系数作用于动量和总能量通量，速度和总比能的顺序限制器所需的限制程度低于 MCL 限制器 **A**。压力正性限制器所需的限制程度低于 MCL 限制器 **A** 和 **B**，而在 $t = 3$ 时刻的快照中，半离散熵限制器无需发挥作用。与 MCL 限制器 **B**一样，卡布兰克尔型伪影不再出现，但所得格式显然具有更强的耗散性。

3.5 高马赫数天体物理喷流

为检验 MCL 技术的鲁棒性，我们模拟了一个受天体物理喷流应用启发的设置，其马赫数 Ma ≈ 2000，该设置最初由 Ha 等人提出。 [71]这个极端基准算例已被用于对高阶方法的激波捕捉技术进行压力测试[11, 39, 72]。

计算域 $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$ 内充满静止的单原子气体（$\gamma = 5/3$），其

$$\rho(x, y) = 0.5, \qquad p(x, y) = 0.4127, \qquad v_1(x, y) = 0, \qquad v_2(x, y) = 0,$$

左边界处存在高超声速流入，其

$$\rho(-0.5, y_B) = 5,\ p(-0.5, y_B) = 0.4127,\ v_1(-0.5, y_B) = 800,\ v_2(-0.5, y_B) = 0,$$

对于 $y_B \in [-0.05, 0.05]$，相对于射流气体的声速，其马赫数为 Ma $= 2156.91$；相对于环境气体的声速，其马赫数为 Ma $= 682.08$ 。

表 5：MCL 和 FCT/IDP 天体物理喷流模拟在 $t = 10^{-3}$处的总时间步数、密度和压力范围随 CFL 数的变化

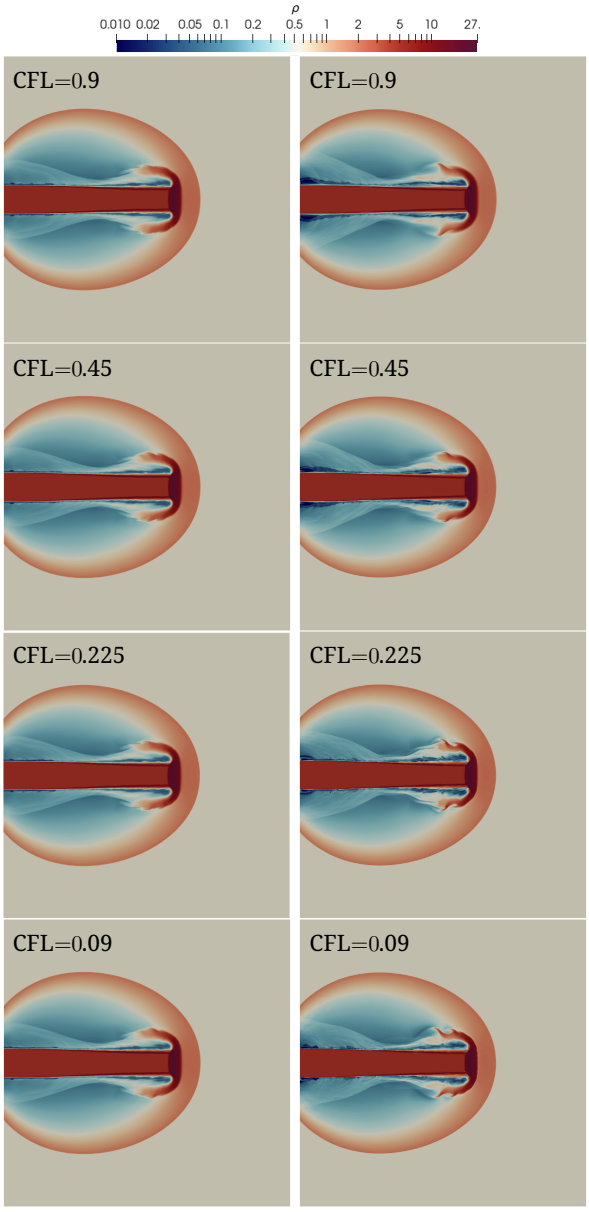
方法	CFL	# 时间步数	$[\rho^{\min}, \rho^{\max}]$	$[p^{\min}, p^{\max}]$
FCT/IDP	0.9	10758	$[4.43 \times 10^{-3}, 32.15]$	$[0.412, 172640]$
	0.45	25608	$[2.93 \times 10^{-3}, 35.64]$	$[0.409, 173935]$
	0.225	71577	$[1.56 \times 10^{-3}, 32.62]$	$[0.407, 217273]$
	0.09	241974	$[7.11 \times 10^{-4}, 40.67]$	$[0.405, 228165]$
MCL	0.9	10284	$[1.07 \times 10^{-2}, 24.71]$	$[0.217, 174801]$
	0.45	20568	$[8.73 \times 10^{-3}, 25.41]$	$[0.279, 175133]$
	0.225	41138	$[7.40 \times 10^{-3}, 23.85]$	$[0.047, 175271]$
	0.09	102844	$[1.33 \times 10^{-2}, 24.64]$	$[0.126, 175304]$

我们使用 256×256 阶数为$N = 3$的四边形单元求解该问题；顶部和底部边界采用周期性边界条件，左侧和右侧边界采用基于特征的流入/流出边界条件；DGSEM 方法的体数值通量采用 Ranocha [54] 的熵守恒且动能保持通量，并使用不同的 MCL 和 FCT/IDP限制器及 CFL 数。

我们首先将上一节中的 MCL 限制器变体 **C**与采用密度和比熵局部条形状态界限的 FCT/IDP 方法（51）在不同 CFL 数下进行比较。图 8 显示，在 $t = 10^{-3}$ 处，使用 FCT/IDP 方法得到的密度等值线中涡结构的数量高度依赖于 CFL 数，而使用 MCL 限制器的模拟对 CFL 数的依赖性较弱。表 5 还显示，对于 MCL 方法，到达 $t = 10^{-3}$ 所需的总时间步数与 CFL 数呈线性关系，但对于 FCT/IDP 方法则并非如此。

FCT/IDP 方法的空间离散对时间步长的依赖性，使涡结构的数量高度依赖于 CFL 数，且总时间步数并非与 CFL 数成反比。事实上，CFL 数较小时，耗散会减弱，导致 FCT/IDP 中的最小密度更低、最大压力更高，如表5所示。当较低的密度和较高的压力使介质中的声速增大时，会产生类似反馈效应；这又会进一步减小时间步长，从而再次减弱耗散（间接而言，这是因为降低了 FCT/DIP 中 事后 限制方法的界限）。通常，耗散降低当然是可取的，但在此处情况更为微妙，因为低耗散是以时间步数大幅增加为代价换来的，也就是说，CPU 时间会大幅增加。

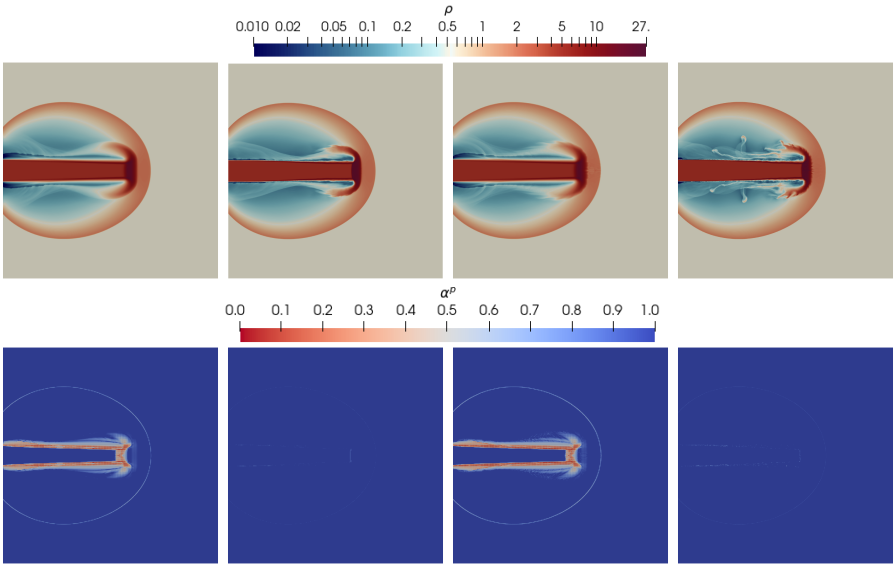
最后，我们比较锐压力正性限制器（(35) 与 (34)）和谨慎压力正性限制器（(35) 与 (36)）之间的差异。图 9 展示了使用 MCL 限制器 $t = 10^{-3}$ **A** 和 **C**以及谨慎和锐压力正性限制器得到的密度等值线和压力限制器限制因子。对于这个特定案例，很明显，



(a) MCL (b) FCT/IDP

图 8：采用 MCL 限制器C（所有方程均使用密度因子、顺序限制、压力和熵限制器）以及 FCT/IDP（密度和比熵）策略进行的天体物理喷流模拟密度等值线。多项式次数为 $N = 3$、包含 256×256 个单元的 DGSEM 结果。

谨慎压力正性限制器会在喷流的剪切层中引入显著耗散，从而抑制两种 MCL 限制器下涡结构的形成。另一方面，锐压力正性限制器仅引入足够的耗散，以确保所有平均态的压力均为非负，因此能够促成湍流的发展。



(a) MCL**C** 谨慎 (b) MCL **C** 锐 (c) MCL **A** 谨慎 (d) MCL **A** 锐

图 9</style】【：采用谨慎和锐压力限制器的 MCL 限制器A 和**C** 进行天体物理喷流模拟所得的密度等值线。多项式次数为 $N = 3$、含有 256×256 个单元的 DGSEM 结果。CFL=0.9。

4 结论

本文将整体凸限制方法扩展到了采用勒让德–高斯–洛巴托（LGL）点的节点间断伽辽金方法（DGSEM）。我们证明，LGL-DGSEM 近似的配置特性极大简化了 MCL 限制器的设计，以及相容的低阶不变域保持格式的推导，而这些格式是应用 MCL 策略所必需的。我们展示了 LGL-DGSEM/MCL 方法在求解具有超音速、高超音速和湍流流动状态的复杂模拟问题时的多功能性。我们比较了 MCL 方法与预测校正型通量修正输运（FCT）子单元限制方法的性能。与 FCT 方法不同，采用该方法所获得的耗散量（进而影响空间离散化）

MCL 技术不依赖于时间步长。因此，在需要稳定化的问题中，MCL 格式可以预期具有时间收敛性，而 FCT 格式则不能。

补充信息。

本文所用的方法在开源高阶 DG 代码 Trixi.jl 中实现 [73–75]。感兴趣的读者可参阅我们的可复现性代码库（https://github.com/amrueda/paper2023MCL LGL-DGSEM），其中提供了详细说明，介绍如何复现本文展示的数值结果。

致谢。作者感谢 Hennes Hajduk 博士使用其代码开展对比研究，并深入介绍了他为 [22] 高阶 Bernstein 有限元开发的子单元 DG-MCL 格式。此外，作者还感谢 Hendrik Ranocha 教授在 Trixi.jl 中实现 FCT 方法期间给予的支持和建议[73–75]。

Gregor Gassner 和 Andr´es M. Rueda-Ram´ırez 感谢 Klaus-Tschira 基金会通过“HiFiLab”项目提供资助。Gregor Gassner 还感谢德国研究联合会（DFG）通过资助编号 DFG-FOR5409 提供资助。Dmitri Kuzmin 感谢德国研究联合会通过资助编号 KU 1530/23-3 提供支持。

此外，我们感谢科隆大学区域计算中心（RRZK）在 ODIN 高性能计算（HPC）系统上提供计算时间，并提供技术支持。

声明

作者声明，与本文内容相关的利益冲突均不存在。

附录 A 气体动力学欧拉方程

欧拉方程描述单位体积内质量、动量和总能量的守恒，$\mathbf{u} = [\rho, \rho\vec{v}, \rho E]^T$。守恒律写作

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v} \otimes \vec{v} + \underline{\mathbf{I}}p \\ \vec{v}(\rho E + p) \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{A1}$$

其中$\mathbf{I}$ 是单位矩阵，压力根据热完全气体假设计算，

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \tag{A2}$$

γ 是比热比，$e = E - \|\vec{v}\|^2/2$ 是内能。

基于密度和压力为正的物理假设，$\rho,\ p > 0$，可压缩欧拉方程的一个合适的严格凸熵函数

is t热力学熵密度除以常数 $-(\gamma-1)$ [64, 76],

$$S(\mathbf{u}) = -\frac{\rho s}{\gamma - 1}, \tag{A3}$$

其中， S 是所谓的数学熵，而 $s = \ln(p\rho^{-\gamma})$ 是热力学熵。根据熵函数，我们定义熵变量，

$$\mathbf{v} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = \left(\frac{\gamma - s}{\gamma - 1} - \beta \left\|\vec{v}\right\|^2,\ 2\beta v_1,\ 2\beta v_2,\ 2\beta v_3,\ -2\beta\right)^T, \tag{A4}$$

其中 $\beta = \frac{\rho}{2p}$ 是一个与温度倒数成正比的量 e.

若将（A1）与熵变量作内积，当解光滑时，我们得到熵守恒律 [64, 76],

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^S = 0, \tag{A5}$$

其中 $\vec{f}^S = \vec{v}S$ 是所谓的熵通量。

此外，当解存在间断时，用熵变量与可压缩欧拉方程作内积可得熵不等式 [64, 76],

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^S \leq 0, \tag{A6}$$

其中，任意物理区域 Ω 内的总数学熵只有在通过其边界输运进入该区域时才会随时间增加， $\partial\Omega$。方程（A6）是热力学第二定律的数学描述。

最后，熵通量势定义为 [64, 76]

$$\vec{\Psi} := \mathbf{v}^T \overleftrightarrow{\mathbf{f}}^a - \vec{f}^S. \tag{A7}$$

参考文献

[1] Guermond, J.-L., Pasquetti, R., Popov, B.: 非线性守恒律的熵黏性方法。《计算物理学杂志》**230**(11), 4248–4267 (2011)

[2]Johnson, C., Szepessy, A., Hansbo, P.: 关于用于双曲守恒律的激波捕捉流线扩散有限元方法的收敛性。计算数学**54**(189)，107–129（1990）

[3] 吕, Y., See, Y.C., Ihme, M.：使用高阶间断伽辽金方法求解守恒律的熵残差激波探测器。《计算物理学杂志》 **322**, 448–472 (2016年)[4] Nazarov, M.：基于残差的人工黏性有限元方法的收敛性。《计算机与应用数学》 **65**(4), 616–626 (2013)[5] Kuzmin, D., M¨oller, M., Shadid, J.N., Shashkov, M.：气体动力学方程的失效保护通量限制与约束数据投影。《计算物理学杂志》 **229**(23), 8766–8779 (2010)[6]Kuzmin, D.：双曲守恒律连续有限元离散的整体凸限制。《计算机方法：应用力学与工程》 **361**, 112804 (2020年)[7] Lohmann, C., Kuzmin, D.：气体动力学变量的同步通量限制。《计算物理学杂志》 **326**, 973–990 (2016年)[8] Guermond, J.-L., Nazarov, M., Popov, B., Tomas, I.：采用凸限制的欧拉方程二阶不变域保持近似。《SIAM科学计算杂志》 **40**(5), 3211–3239 (2018)[9] Dobrev, V., Kolev, T., Kuzmin, D., Rieben, R., Tomov, V.：欧拉方程连续与间断伽辽金方法中的顺序限制。《计算物理学杂志》 **356**, 372–390 (2018)[10] Moe, S.A., Rossmanith, J.A., Seal, D.C.：采用 Lax–Wendroff时间离散的保正间断伽辽金方法。《科学计算杂志》 **71**, 44–70 (2017年)[11] Zhang, X., Shu, C.-W.：矩形网格上可压缩欧拉方程保正高阶间断伽辽金格式。《计算物理学杂志》 **229**(23), 8918–8934 (2010)[12]Zhang, X., Xia, Y., Shu, C.-W.：三角形网格上满足最大值原理且保正的守恒律高阶间断伽辽金格式。《科学计算杂志》**50**(1), 29–62 (2012)[13]Guermond, J.-L., Popov, B., Tomas, I.：双曲系统的不变域保持离散无关格式与凸限制。《计算机方法：应用力学与工程》 **347**, 143–175 (2019 年)[14]

Bernstein 有限元离散中线性平流方程的残差分布。《计算机方法：应用力学与工程》**359**，112658（2020年）[15]Lohmann, C., Kuzmin, D., Shadid, J.N., Mabuza, S.：基于高阶Bernstein有限元的连续Galerkin方法通量修正输运算法。《计算物理学杂志》**344**，151–186（2017年）[16] Zhu, J., Qiu, J.：Hermite WENO格式及其作为Runge–Kutta间断Galerkin方法限制器的应用，III：非结构网格。《科学计算杂志》**39(2)**，293–321（2009）[17] Kuzmin, D., Vedral, J.：基于耗散的加权本质无振荡稳定化，用于标量守恒律的高阶有限元方法。arXiv预印本 arXiv:2212.14224 [math.NA]（2022年）[18] Diot, S., Clain, S., Loub`ere, R.：改进的检测准则：用于非结构网格上超高阶多项式的多维最优阶检测（MOOD）。《计算机与流体》**64**，43–63（2012年）[19] Krivodonova, L., Xin, J., Remacle, J.-F., Chevaugeon, N., Flaherty, J.E.：双曲守恒律的间断Galerkin方法中的激波检测与限制。《应用数值数学》**48(3–4)**，323–338（2004）[20]Persson, P.-O., Peraire, J.：间断Galerkin方法的子单元激波捕捉。载于：第44届AIAA航空航天科学会议及展览，第112页（2006）[21] Dumbser, M., Zanotti, O., Loub`ere, R., Diot, S.：双曲守恒律间断Galerkin有限元方法的后验子单元限制。《计算物理学杂志》**278**，47–75（2014）[22] Hajduk, H.：双曲守恒律间断Galerkin离散中的整体凸限制。《计算机与数学及其应用》**87**，120–138（2021）[23] Hennemann, S., Rueda-Ram´ırez, A.M., Hindenlang, F.J., Gassner, G.J.：一种可证明熵稳定的子单元激波捕捉方法，用于可压缩欧拉方程的高阶分裂形式DG。《计算物理学杂志》**426**，109935（2021）[24] Kuzmin, D., Quezada de Luna, M.：标量双曲守恒律高阶Bernstein有限元离散的子单元通量限制。《计算物理学杂志》**411**，109411（2020年）

[25] Vilar, F.：通过子单元有限体积公式和通量重构对高阶间断伽辽金格式进行后验修正。《计算物理学杂志》**387**，245–279（2019年）[26] Vilar, F., Abgrall, R.：针对二维非结构网格上守恒律的高阶间断伽辽金格式的后验局部子单元修正。arXiv 预印本 arXiv:2212.11358（2022年）[27] Cotter, C.J., Kuzmin, D.：带局部限制器的嵌入式间断伽辽金输运格式。《计算物理学杂志》**311**，363–373（2016年）[28] Guermond, J.-L., Popov, B.：标量守恒方程的不变域和二阶连续有限元近似。《SIAM 数值分析杂志》**55(6)**，3120–3146（2017年）[29] Zalesak, S.T.：适用于流体的全多维通量修正输运算法。《计算物理学杂志》**31(3)**，335–362（1979年）[30]Kuzmin, D., L¨ohner, R., Turek, S.（编）：《通量修正输运：原理、算法与应用》，第2版。施普林格，多德雷赫特（2012年）[31]L¨ohner, R.：《应用计算流体力学技术：基于有限元方法的导论》，第2版。约翰·威立父子出版公司，奇切斯特（2008年）[32]Selmin, V.：双曲方程的有限元解。II. 二维情形。研究报告 RR-0708，法国国家信息与自动化研究所（1987年）[33] Guermond, J.L., Popov, B.：双曲系统的不变域和一阶连续有限元近似。《SIAM 数值分析杂志》**54(4)**，2466–2489（2016年）[34] Kuzmin, D., Hajduk, H., Rupp, A.：非线性双曲问题半离散和全离散格式的基于限制器的熵稳定化。《计算机方法：应用力学与工程》**389**，114428（2022年）[35] Kuzmin, D., Quezada de Luna, M.：标量双曲守恒律高阶Bernstein有限元离散的子单元通量限制。《计算物理学杂志》**411**，109411（2020年）[36] Anderson, R., Dobrev, V., Kolev, T., Kuzmin, D., Quezada de Luna, M., Rieben, R., Tomov, V.：输运方程的高阶局部极大值原理保持（MPP）间断Galerkin有限元方法。《计算物理学杂志》**334**，102–124（2017年）

[37] Pazner, W.：采用子单元凸限制的稀疏不变域保持间断Galerkin方法。《计算机方法：应用力学与工程》**382**，113876（2021）[38] Lin, Y., Chan, J., Thomas, I.：一种用于可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程熵稳定间断伽辽金离散的保正策略。《计算物理学杂志》，111850（2022）[39] Rueda-Ramírez, A.M., Pazner, W., Gassner, G.J.：间断 Galerkin 谱元方法的子单元限制策略。《计算机与流体》**247**，105627（2022）[40] Gassner, G.J.：一种斜对称间断伽辽金谱元离散及其与SBP-SAT有限差分方法的关系。《SIAM科学计算杂志》**35(3)**，1233–1253（2013）[41] Rueda-Ramírez, A.M., Gassner, G.J.：一种用于欧拉方程DGSEM离散的子单元有限体积保正限制器。arXiv预印本 2102.06017 [math.NA]（2021）[42] Wu, X., Trask, N., Chan, J.：带有子单元保正的浅水方程熵稳定间断Galerkin方法。arXiv预印本 arXiv:2112.07749 [math.NA]（2021）[43] Kuzmin, D., Quezada de Luna, M.：标量守恒律高阶连续伽辽金近似的熵守恒性质与熵稳定化。《计算机与流体》**213**，104742（2020）[44] Mateo-Gabín, A., Rueda-Ramírez, A.M., Valero, E., Rubio, G.：采用高斯节点的DGSEM熵稳定通量差分形式。arXiv预印本 arXiv:2211.05066（2022）[45]Rueda-Ramírez, A.M., Gassner, G.J.：非守恒系统分裂形式分部求和离散的通量差分公式：在磁流体力学子单元限制中的应用。arXiv预印本 arXiv:2211.14009 （2022）[46] Rueda-Ramírez, A.M., Hennemann, S., Hindenlang, F.J., Winters, A.R., Gassner, G.J.：一种用于电阻性磁流体方程的熵稳定节点间断伽辽金方法。第二部分：子单元有限体积激波捕捉。《计算物理学杂志》**444**，110580（2021）[47] Gassner, G.：一种斜对称间断伽辽金谱元离散及其与SBP-SAT有限差分方法的关系。《SIAM科学计算杂志》**35(3)**，1233–1253（2013）

[48] Ranocha, H.、Schlottke-Lakemper, M.、Chan, J.、Rueda-Ramírez, A.M.、Winters, A.R.、Hindenlang, F.、Gassner, G.J.：用于守恒律的现代熵稳定与动能保持间断Galerkin方法的高效实现。arXiv预印本 arXiv:2112.10517（2021）[49] Fisher, T.C.、Carpenter, M.H.：非线性守恒律的高阶熵稳定有限差分格式：有限区域。《计算物理学杂志》**252**，518–557（2013）[50] Gassner, G.J.、Winters, A.R.、Kopriva, D.A.：具有分部求和性质的可压缩欧拉方程分裂形式节点间断伽辽金格式。《计算物理学杂志》**327**，39–66（2016）[51] Ismail, F.、Roe, P.L.：经济型熵一致欧拉通量函数II：激波处的熵产生。《计算物理学杂志》**228(15)**，5410–5436（2009）[52] Chandrashekar, P.：可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程的动能保持与熵稳定有限体积格式。计算物理通讯**14(5)**，1252–1286（2013）[53] Shima, N.、Kuya, Y.、Tamaki, Y.、Kawai, S.：在可压缩流的分裂对流形式离散中防止虚假压力振荡。《计算物理学杂志》**427**，110060（2021）[54] Ranocha, H.：双曲平衡律数值方法的广义分部求和算子与熵稳定性。Cuvillier Verlag，G¨ottingen（2018）[55] Ranocha, H.、Gassner, G.J.：防止压力振荡并不能解决基于熵的分裂形式高阶格式的局部线性稳定性问题。应用数学与计算通讯，1–24（2021）[56] Lax, P.、Wendroff, B.：守恒律系统。纯粹与应用数学通讯**13(2)**，217–237（1960）[57] Kuzmin, D.、Hajduk, H.、Rupp, A.：非线性双曲问题半离散与全离散格式的基于限制器的熵稳定化。《计算机方法：应用力学与工程》**389**，114428（2022）[58] Guermond, J.-L.、Popov, B.：黎曼问题中欧拉方程最大波速的快速上界估计。《计算物理学杂志》**321**，908–926（2016）

[59]Harten, A., Lax, P.D., van Leer, B.：关于双曲守恒律的上游差分与 Godunov 型格式。《SIAM Review》**25**(1), 35–61 (1983)[60] Kuzmin, D., Quezada de Luna, M., Ketcheson, D.I., Gr¨ull, J.：针对双曲守恒律高阶 Runge–Kutta 时间离散的保界凸限制。《科学计算杂志》**91**, 21 (2022)[61] Quezada de Luna, M., Ketcheson, D.I.：标量对流扩散方程对角隐式 Runge-Kutta 离散的保最大值原理时空通量限制。《科学计算杂志》**92**(102), 102 (2022)[62] Tadmor, E.：气体动力学方程中的最小熵原理。《应用数值数学》**2**(3-5), 211–219 (1986)[63] Tadmor, E.：对称守恒律系统的熵函数。《数学分析与应用杂志》**122**(2), 355–359 (1987)[64]Tadmor, E.：非线性守恒律差分近似及相关时变问题的熵稳定性理论。《Acta Numerica》**12**, 451–512 (2003)[65] Kuzmin, D., Klyushnev, N.：磁流体力学方程连续有限元离散的限制与散度清理。《计算物理学杂志》**407**, 109230 (2020)[66] Toro, E.F.：《流体动力学的黎曼求解器与数值方法：实用导论》。施普林格, 柏林、海德堡 (2013)[67] Perthame, B., Shu, C.-W.：欧拉方程保正有限体积格式。《Numerische Mathematik》**73**, 119–130 (1996)[68]Maier, M., Kronbichler, M.：采用保持不变域的二阶有限元格式，高效并行三维计算可压缩欧拉方程。《ACM并行计算汇刊》**8**(3), 1–30 (2021)[69] Galbraith, M., Murman, S., Kim, C., Persson, P., Fidkowski, K., Glasby, R., Hillewaert, K., Ahrabi, B.：第五届高阶计算流体力学方法国际研讨会。http://how5.cenaero.be。AIAA 科学与技术论坛及展览会 (2017)[70] Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F., Zingale, M., Lamb, D., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J., Tufo, H：Flash：一种自适应网格

用于模拟天体物理热核闪焰的流体动力学代码。《天体物理学杂志增刊》**131**(1), 273 (2000)[71] Ha, Y., Gardner, C.L., Gelb, A., Shu, C.-W.：采用辐射冷却对高马赫数天体物理喷流进行数值模拟。《科学计算杂志》**24**(1),29–44 (2005)[72] Liu, Y., Lu, J., Shu, C.-W.：一种无振荡的双曲系统间断伽辽金方法 (2021)[73]Ranocha, H., Schlottke-Lakemper, M., Winters, A.R., Faulhaber, E., Chan, J., Gassner, G.：使用 Trixi.jl 进行自适应数值模拟：Julia 在科学计算中的一个案例研究。JuliaCon 会议论文集 **1**(1),77 (2022)[74] Schlottke-Lakemper, M., Winters, A.R., Ranocha, H., Gassner, G.J.：一种用于自引力气体动力学的纯双曲型间断伽辽金方法。《计算物理学杂志》, 110467 (2021)[75]Schlottke-Lakemper, M., Gassner, G.J., Ranocha, H., Winters, A.R.：Trixi.jl：使用 Julia 对双曲型偏微分方程进行自适应高阶数值模拟。https://github.com/trixi-framework/Trixi.jl(2020)[76]Barth, T.J.：非结构网格上气体动力学系统的数值方法。载于：《守恒律理论与数值方法最新进展导论》，第 195–285 页。施普林格，柏林，海德堡 (1999)