arXiv:2303.00378v1 [math.RT] 1 Mar 2023

构造李超群极小表示的一般方法

SIGISWALD BARBIER 和 SAM CLAEREBOU T

Abstract. 本文描述了一种方法，用以将极小表示推广到超情形，适用于由 Jordan 超代数通过 TKK 构造获得的李超代数。该方法已成功用于构造正交辛李超群 OSp($p, q|2n$) 以及例外李超群 $\mathbb{D}(2, 1; \alpha)$ 的福克模型、薛定谔模型和相互交织的 Segal-Bargmann 变换。我们还描述了将该方法用于渗透型和怪异李超代数时遇到的一些障碍。

Introduction

对于正则李群，余伴随轨道与不可约酉表示之间存在一种对应关系，通常称为轨道方法。在这一框架下，半单李群的极小表示是对应于极小余伴随轨道的不可约酉表示。有关技术细节和精确定义，参见 [1]。极小表示往往具有多种有趣的实现方式，各有其优点和缺点，并且已在许多不同的情形中得到研究 [2, 3, 4, 5, 6]。

一个突出的例子是亚辛群 Mp$_{\mathbb{R}}(2n)$ 的 Segal-Shale-Weil 表示，它是辛群 Sp$_{\mathbb{R}}(2n)$ 的双重覆盖。该表示也称为振子表示或亚辛表示。对于 Segal-Shale-Weil 表示，我们有薛定谔模型（也称为 L^2-模型）和福克模型，二者通过一个称为 Segal-Bargmann变换的交织积分算子相互联系。关于 Segal-Shale-Weil 表示的这些模型以及（经典）Segal-Bargmann变换的更多信息，请参见 [7]。对于李群的许多其他极小表示，也可以构造类似的实现，这些实现也称为薛定谔模型和福克模型。对于单李群， [6] 给出了一种统一构造薛定谔模型的方法。之后， [8] 针对管型厄米李群给出了一种统一构造福克模型的方法。此外，他们还构造了一种广义 Segal-Bargmann变换，使其福克模型与 [6] 中的薛定谔模型相互交织。

李超群是李群的一种推广，使我们能够用数学方式描述超对称性。在 [9] 和 [10] 中，研究者提出了这样一个问题：是否也能为李超群定义并构造极小表示。在 [10], 中，研究者针对正交辛李超群 OSp($p, q|2n$) 给出了答案。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B10, 17B60, 22E46, 58C50。*Key words and phrases.* 极小表示，福克模型，薛定谔模型，贝塞尔算子，李超代数，Jordan 超代数，贝塞尔-费舍尔乘积。

本质上，研究者采用 [6]中的方法推广，构造了极小表示类似物的薛定谔模型。遵循[8], 中的方法，研究者还在 [11]中为 OSp($p, 2|2n$) 构造了福克模型和交织塞格尔-巴格曼变换类似物。

选择正交辛超群作为出发点的原因之一，是它推广了不定正交群 O(p, q)。O(p, q) 的极小表示已得到充分研究，例如见 [12, 13, 4, 5]。因此，更容易看出这些结果应如何推广到 OSp($p, q|2n$)。在 [14] 和 [15], 中，针对例外李超群 D(2, 1; α) 构造了一个极小表示的薛定谔模型和福克模型，以及一个交织塞格尔-巴格曼变换。与正交辛超群不同，它没有明确的经典对应物。

对于李群，极小表示总是酉表示。然而，为 OSp($p, q|2n$) 和 D(2, 1; α) 构造的极小表示并不是酉表示。此外，当 p、 q 和 n 非零时，OSp($p, q|2n$) 不存在任何酉表示，见 [16, 定理 6.2。1]。这些李超群的极小表示有望成为“超酉”表示的例子，其中“超酉”一词具有某种新的含义。已有一些超酉表示的定义推广了酉表示的概念，例如见 [17] 和 [18], ，但目前仍不清楚这些是否是应采用的正确定义。

本文的一个主要动机是这样一种想法：研究李超代数的极小表示，有助于我们更好地理解超酉表示的定义应当是什么。在 [15] 中，已证明 D(2, 1; α) 的极小表示按照 [17], 中的定义是一种超酉表示。相比之下，OSp($p, q|2n$) 的极小表示似乎不符合任何现有定义下的超酉表示。

[6] 和 [8], 中给出的经典情形，加上 [10],[11], [14] 和 [15], 中给出的超情形，让我们大致了解了其他李超群的极小表示应当是什么样的。本文尝试从这些情形中提炼出一个同样适用于其他李超群的一般框架。具体而言，对于一个李超群，我们提出一种构造以下对象的方法：

- 一个极小表示，
- 一个薛定谔模型，
- 一个福克模型，
- 以及一个交织塞格尔-巴格曼变换。

我们还构造了一种称为贝塞尔-费舍尔乘积的“超内积”。在许多方面，超向量空间上的这些超内积取代了向量空间上内积的作用。在 [17] 和 [18], 中，它们在定义超酉表示时都发挥着重要作用。

[6] 和 [8] 中的李代数被视为某个 Jordan 代数的 TKK 构造。因此，我们将研究范围限定在这样的李超群：其对应的李超代数是通过 TKK 构造从含幺 Jordan 超代数得到的。这类李超代数称为 TKK代数。表1列出了复数域上这类 TKK代数的完整清单，以及与之对应的 Jordan 超代数。同一个 Jordan 超代数 J可能对应多个 TKK代数$\widetilde{\quad}$，因此我们设置了两列，分别标为 TKK(J) 和 TKK(J)。第 1.5 节简要介绍了这些 TKK 构造，完整概述见 [19]。请注意，我们不会

证明我们的方法适用于表1中的所有李超代数。相反，在第 3 节和第 4 节中，我们将证明，我们的方法至少有一部分不适用于围辛李超代数和 Q型李超代数。具体而言，在这些情形下，我们无法将贝塞尔-费舍尔乘积用作超内积来得到超酉极小表示。

TABLE 1. TKK代数。当 TKK(J) $\cong$TKK(J) 时，我们只写了一次。

J	$\overline{\text{TKK}}(J)$	$\widetilde{\text{TKK}}(J)$	限制
$JGL(m\|n)$	$\mathfrak{sl}(2m\|2n)$		$m \neq n$
$JGL(m\|m)$	$\mathfrak{psl}(2m\|2m)$	$\mathfrak{pgl}(2m\|2m)$	$m > 1$
$JOSP(m\|2n)$	$\mathfrak{osp}(4n\|2m)$		$(m,n) \neq (0,1)$
$JSpin(m-3\|2n)$	$\mathfrak{osp}(m\|2n)$		$m \geq 3, (m,n) \neq (4,0)$
$JPe(n)$	$\mathfrak{spe}(2n)$	$\mathfrak{pe}(2n)$	$n > 1$
$JQ(n)$	$\mathfrak{psq}(2n)$	$\mathfrak{pq}(2n)$	$n > 1$
D_α	$D(2,1;\alpha)$		$\alpha \neq \{0,-1\}$
D_{-1}	$\mathfrak{psl}(2\|2)$	$D(2,1;-1)$	
E	$E(7)$		
F	$F(4)$		
$JP(0,n-3)$	$H(n)$	$\mathbb{K}C \ltimes \widetilde{H}(n)$	$n \geq 5$

论文结构。本文组织如下。

在第 1 节中，我们给出基本定义、约定和预备结果。具体而言，我们分别在第 1.1、1.2 和 1.3 节中定义一般线性、佩里普莱克蒂克和奎尔超代数。在第 1.4 节中，我们定义李超群。第 1.5 节基于 [19] 中的结果，简要介绍 TKK 构造。在第 1.6节中，我们指出引言中提及的、已应用我们方法的 TKK代数。第 1.7 和 1.8 节基于 [9] 中的结果。在这两节中，我们介绍贝塞尔算子（第 1.7 节）和一种多项式实现，借助它可以构造我们的极小表示（第 1.8 节）。

第 2 节是本文的主体。在第 2.1 节中，我们给出了李超代数层面上的极小表示定义。随后，我们在第 2.2 节中讨论了将极小表示积分到群层面的方法。基于这一讨论，我们分别在第 2.3 节和第 2.4 节中定义了薛定谔模型和福克模型。在第 2.5 节中，我们定义了贝塞尔-费舍尔乘积，并讨论了我们预期它所具有的一些性质。在第 2.6 节中，我们构造了薛定谔模型与福克模型之间的交织算子，并在第 2.7 节中利用该算子定义了 Segal-Bargmann变换。

最后，在第 3 节和第 4 节中，我们分别讨论了针对 periplectic 李超代数和怪异李超代数的方法及其不足之处。这两节均分为三个部分。在第一部分，即第 3.1 节和第 4.1 节中，我们明确给出了 TKK

构造。第二部分，即第 3.2 节和第 4.2 节，讨论了我们的表示所依赖的特征。在最后一部分，即第 3.3 节和第 4.3 节中，我们明确给出了贝塞尔算子，并表明 Bessel-Fischer 乘积不具有所期望的性质。

1. Preliminaries

本文用 $\imath$ 表示复单位，并采用约定 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$。我们所用的域可以是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$，记为 $\mathbb{K}$。函数空间总是定义在 $\mathbb{C}$ 上。

超向量空间定义为一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次向量空间。这意味着超向量空间 V 有一个分解 $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$。我们分别称 $V_{\overline{0}}$ 和 $V_{\overline{1}}$ 为 V的偶部和奇部。

若元素 $v \in V$ 满足 $v \in V_i$, $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，则称其为齐次元素。齐次元素 $v \in V$ 的奇偶性记为 $|v|$，是满足 $v \in V_i$的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。公式中使用 $|v|$ 时，我们考虑的是齐次元素，并默认该公式需线性延拓至任意元素。

我们将超向量空间 V 的维数定义为 $\dim(V) := (d_{\overline{0}}|d_{\overline{1}})$，其中 $d_i = \dim(V_i)$ 是 V_i 作为向量空间时的维数。

具有 $V_{\overline{0}} = \mathbb{K}^m$ 和 $V_{\overline{1}} = \mathbb{K}^n$ 的超向量空间 V 记作 $\mathbb{K}^{m|n}$。

超代数是一个超向量空间 $A = A_{\overline{0}} \oplus A_{\overline{1}}$，其中 A 是一个代数，并且 $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$。

现在我们介绍李超代数和 Jordan 超代数的形式定义。

定义 1.1。李超代数是一个超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\overline{1}}$，带有满足以下性质的双线性乘法 $[\cdot, \cdot]$：

- Skew-supersymmetry: $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$,
- Super Jacobi identity: $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]]$.

$\mathfrak{g}$ 上的乘法称为其李括号。

定义 1.2. Jordan 超代数是满足约当恒等式的超交换超代数 $J = J_{\overline{0}} \oplus J_{\overline{1}}$

$$(-1)^{|x||z|}[L_x, L_{yz}] + (-1)^{|y||x|}[L_y, L_{zx}] + (-1)^{|z||y|}[L_z, L_{xy}] = 0 \text{ for all } x, y, z \in J.$$

这里，算子 L_x 是关于 x 的左乘，而 $[\cdot, \cdot]$ 是超交换子，即 $[L_x, L_y] := L_x L_y - (-1)^{|x||y|} L_y L_x$。$J$ 上的代数乘积称为约当积。

下面三个小节给出了一些 Jordan 超代数和 Lie 超代数的例子，后文将会用到这些例子，尤其是在第 3 节和第 4 节。其他例子和更多信息可参见例如 [20]。

1.1. 一般线性超代数。超向量空间 $\mathbb{K}^{m|n}$ 上的自同态构成一个结合超代数。我们可以用矩阵将其表示为

$$\mathrm{End}(\mathbb{K}^{m|n}) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{K}^{m\times m}, b \in \mathbb{K}^{m\times n}, c \in \mathbb{K}^{n\times m}, d \in \mathbb{K}^{n\times n} \right\},$$

其中，分块对角矩阵 a 和 d 给出偶部，而奇部由非对角分块 b 和 c 给出。

作为超向量空间，一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 和全线性约当超代数 $JGL(m|n)$ 均等于 $\mathrm{End}(\mathbb{K}^{m|n})$。$\mathfrak{gl}(m|n)$ 上的李括号定义为

$$[x,y] := xy - (-1)^{|x||y|}yx \text{ for } x,y \in \mathfrak{gl}(m|n),$$

而 $JGL(m|n)$ 上的约当积定义为

$$x \cdot y := \frac{1}{2}(xy + (-1)^{|x||y|}yx) \text{ for } x,y \in JGL(m|n).$$

设 E_{ij} 为 $(m|n)\times(m|n)$ 矩阵，其唯一的非零元素 1 位于第 i 行、第 j 列。那么 $\{E_{ij}\colon 1 \le i,j \le m+n\}$ 是 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 和 $JGL(m|n)$ 的一组基。

1.2. 佩里普莱克超代数。设 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\beta$ 是 $\mathbb{K}^{n|n}$ 上的一个非退化、超对称的奇双线性形式。本文始终假设其对应的矩阵形式为

$$\beta := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right),$$

其中 I_n 是 n 维单位矩阵。

periplectic 李超代数 $\mathfrak{pe}(n)$ 是 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 中由所有保持 β 不变的算子构成的子代数。用矩阵可将其表示为

$$\mathfrak{pe}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array}\right) \mid a,b,c \in \mathbb{K}^{n\times n}, b^t = b, c^t = -c \right\} \subset \mathfrak{gl}(n|n).$$

特殊围奇李超代数定义为

$$\mathfrak{spe}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array}\right) \mid a,b,c \in \mathbb{K}^{n\times n}, b^t = b, c^t = -c, \mathrm{tr}(a) = 0 \right\} \subset \mathfrak{pe}(n),$$

当 $n \ge 3$ 时，它是单的。

Jordan-periplectic 超代数 $JPe(n)$ 是 $JGL(n|n)$ 中关于 β 自伴算子构成的子代数。用矩阵可将其表示为

$$JPe(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & a^t \end{array}\right) \mid a,b,c \in \mathbb{K}^{n\times n}, b^t = -b, c^t = c \right\} \subset JGL(n|n).$$

注意，对于 $\mathfrak{pe}(n)$，b 是对称的，而 c 是反对称的；对于 $JPe(n)$，则恰好相反。

1.3. 奎尔超代数。怪异李超代数 $\mathfrak{q}(n)$ 是 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 的子代数，由 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 中所有与算子 β 对易的算子构成。我们可以用矩阵将其表示为

$$\mathfrak{q}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right) \mid a,b \in \mathbb{K}^{n\times n} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n|n).$$

特殊怪异李超代数定义为

$$\mathfrak{sq}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right) \mid a,b \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathrm{tr}(b) = 0 \right\} \subset \mathfrak{q}(n).$$

射影 queer 李超代数定义为

$$\mathfrak{pq}(n) := \mathfrak{q}(n)/\langle I_{2n}\rangle .$$

射影特殊 queer 李超代数定义为

$$\mathfrak{psq}(n) := \mathfrak{sq}(n)/\langle I_{2n}\rangle ,$$

当 $n \geq 3$ 时，它是单的。

我们将 Jordan-queer 超代数 $JQ(n)$ 定义为 $JGL(n|n)$ 中与算子 β交换的所有算子所构成的子代数。因此，作为超向量空间，$JQ(n) = \mathfrak{q}(n)$。

1.4. 李超群。现有文献中有两种等价的方式来刻画李超群：一种基于超流形，另一种基于有序对。我们将采用基于有序对的刻画，并参阅 [21, 第 7]章，以获取有关这些结构及其关联方式的更多信息。

定义 1.3. 李超群 G 是一个有序对（G_0, $\mathfrak{g}$），以及一个态射σ: $G_0 \to \mathsf{End}(\mathfrak{g})$，其中 G_0 是李群，$\mathfrak{g}$ 是满足以下条件的李超代数：

- $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 是 G_0的李代数，即 $\mathsf{Lie}(G_0) \cong \mathfrak{g}_{\overline{0}}$,
- 态射 σ 扩展了 G_0 在 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$上的伴随表示 Ad，即对所有 $g \in G_0$，我们都有 $\sigma(g)|_{\mathfrak{g}_{\overline{0}}} = \mathsf{Ad}(g)$,
- 对所有 $X \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$和 $Y \in \mathfrak{g}$，我们都有

$$d\sigma(X)Y = \frac{d}{dt}\sigma(\exp(tX))Y\Big|_{t=0} = [X, Y].$$

1.5. TKK 构造。以下记 J 为域 $\mathbb{K}$ 上给定的含幺 Jordan 超代数，并假设 $\dim(J) = (m|n)$。

通过 TKK 构造，我们可以为 J 关联一个三重分次李超代数。文献中有多种 TKK 构造，概述见 [19]；但对于含幺 Jordan 超代数，所有 TKK 构造都等价于我们将在本节中构造的形式。为了定义这些 TKK 构造，我们必须先定义以下结构；这些结构本身也很有趣。

导子的空间定义为

$$\mathrm{Der}(J) := \left\{ D \in \mathfrak{gl}(J) \mid D(xy) = D(x)y + (-1)^{|x||D|}xD(y), x, y \in J \right\}$$

内导子的空间定义为

$$\mathrm{Inn}(J) := \mathrm{span}_{\mathbb{K}} \left\{ [L_x, L_y] \mid x, y \in J \right\}.$$

这里，算子 $L_x \in \mathfrak{gl}(J)$ 是由 x 给出的左乘，而 $[\cdot, \cdot]$ 是 $\mathfrak{gl}(J)$ 的括号，即 $[L_x, L_y] = L_xL_y - (-1)^{|x||y|}L_yL_x$。

结构代数定义为

$$\mathfrak{str}(J) = \{L_x \mid x \in J\} \oplus \mathrm{Der}(J)$$

且内结构代数定义为

$$\mathfrak{istr}(J) = \{L_x \mid x \in J\} \oplus \mathrm{Inn}(J) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}} \left\{ L_x, [L_x, L_y] \mid x, y \in J \right\}.$$

设 J^+ 和 J^- 是 J 的两个副本。作为向量空间，我们定义以下两个 J 的 TKK代数：

$$\overline{\mathrm{TKK}}(J) := J^- \oplus \mathfrak{istr}(J) \oplus J^+,$$
$$\widetilde{\mathrm{TKK}}(J) := J^- \oplus \mathfrak{str}(J) \oplus J^+.$$

李括号定义如下。我们将 $\mathfrak{istr}(J)$ 或 $\mathfrak{str}(J)$ 分别嵌入为 TKK(J) 或 TKK(J) 的子代数，并令

$$[x,u] = 2L_{xu} + 2[L_x, L_u], \qquad [x,y] = [u,v] = 0,$$
$$[L_a, x] = ax, \qquad [L_a, u] = -au,$$
$$[D,x] = Dx, \qquad [D,u] = Du,$$

对于齐次的 x、$y \in J^+$、u、$v \in J^-$、$a \in J$ 和 $D \in$，Inn(J) 或 $D \in$ Der(J)。

对于 K = C，含单位有限维简单约旦超代数及其相应的结构代数和 TKK代数的完整列表见[19, 第 6 节1]。因此，该列表恰好给出了适用于我们方法的（复）李超代数。为方便起见，我们在引言的表1中采用我们的记号约定重新列出了该列表。当 TKK(J) ≅ TKK(J) 时，我们将 TKK(J) 一栏留空。

本文中的大多数结果仅针对 TKK(J) = TKK(J)。TKK(J) 情形是类似的。从现在起，我们用 $\mathfrak{g} =$ TKK(J) 表示通过 TKK 构造与 J 相关联的李超代数。

1.6. 特殊情形。本文将经常区分以下几种情形。

- 如果 J 是一个简单约旦代数，那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，由此得到的表示正是 [6] 和 [8]中研究的表示。我们将这种情形称为经典情形。
- 如果 J 是自旋因子 Jordan 超代数 $JSpin(m-3|2n)$，那么 $\mathfrak{g}$ 是正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}(m|2n)$，由此得到的表示正是 [10] 和 [11]中研究的表示。我们将这种情形称为正交辛情形。
- 如果 J 是 Jordan 超代数 D_α，那么 $\mathfrak{g}$ 是例外李超代数 $D(2,1;\alpha)$，由此得到的表示正是[14] 和 [15]中研究的表示。我们将这种情形称为 $D(2,1;\alpha)$ 情形。

在第 3 节和第 4 节中，我们还将分别讨论 J 为 Jordan-periplectic 超代数 $JPe(n)$ 和 Jordan-queer 超代数 $JQ(n)$ 的情形。我们将这些情形分别称为 periplectic 情形和怪情形。

1.7. 贝塞尔算子。在 [9] 中，构造了 $\mathfrak{g} =$ TKK(J) 的一种多项式实现，它是对 [6] 中所考虑的共形表示的类比。随后，在正交辛情形和 $D(2,1;\alpha)$ 情形中，利用这一多项式实现定义了极小表示。该多项式实现取决于一个特征 λ: $\mathfrak{str}(J) \to$ K，而贝塞尔算子在其中发挥着关键作用。

定义 1.4. 设一个特征 λ: $\mathfrak{str}(J) \to$ K。对于任意 u、$v \in J$-，我们定义$\lambda_u \in (J^+)^*$ 以及 $P_{u,\,v} \in J$- $\otimes (J^+)^*$ 为

$$\lambda_u(x) := -2\lambda(L_{xu})$$

and

$$\widetilde{P}_{u,v}(x) := (-1)^{|x|(|u|+|v|)}(L_uL_v + (-1)^{|u||v|}L_vL_u - L_{uv})(x)$$

对所有 $x \in J^+$。然后我们将贝塞尔算子定义为

$$\mathcal{B}_\lambda = \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_{z_i}\partial_{z_i} + \sum_{i,j=1}^{m+n} \widetilde{P}_{z_i,z_j}\partial_{z_j}\partial_{z_i},$$

其中（z_i）$_i$ 是 J^- 的一组齐次基。

由 [9, 命题 4.2] 可得以下结果。

命题 1.5. 对固定的 λ，算子族 $\mathcal{B}_\lambda(x)$（$x \in J^+$）超交换，即

$$[\mathcal{B}_\lambda(u), \mathcal{B}_\lambda(v)] = 0,$$

对于 u、$v \in J^+$。

1.8. 多项式实现 π_λ. K 上的超多项式空间定义为

$$\mathcal{P}\big(\mathbb{K}^{m|n}\big) := \mathcal{P}\big(\mathbb{K}^m\big) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda\big(\mathbb{K}^n\big),$$

其中，$\mathcal{P}(\mathbf{K}^m)$表示域 K 上关于 m 个变量的复值多项式空间，而 $\Lambda(\mathbf{K}^n)$表示关于 n 个变量的格拉斯曼代数。$\mathcal{P}(\mathbf{K}^m)$ 和 $\Lambda(\mathbf{K}^n)$ 的变量分别称为偶变量和奇变量。

令 $z = (z_i)_{i=1}^{m+n}$ 表示 $\mathcal{P}(\mathbf{K}^{m|n})$ 的变量，则它们满足交换关系

$$z_iz_j = (-1)^{|z_i||z_j|}z_jz_i,$$

对于 i、$j \in \{1, \dots, m+n\}$。我们还将次数为 k 的齐次超多项式空间定义为

$$\mathcal{P}_k\big(\mathbb{K}^{m|n}\big) := \big\{p \in \mathcal{P}\big(\mathbb{K}^{m|n}\big) \mid \mathbb{E}p = kp\big\},$$

其中 $\mathbb{E} := \sum_{i=1}^{m+n} z_i\partial_{z_i}$ 是欧拉算子。

由 [9, 第 4.1] 节可得 $\mathfrak{g} = J^- \oplus \mathfrak{str}(J) \oplus J^+$ 在 $\mathcal{P}(J) \cong \mathcal{P}(\mathbf{K}^{m|n})$ 上的如下多项式实现 π_λ。设 $(z_i)_i$ 为 J 的一个齐次基，$(z_i^\pm)_i$ 为 $J^\pm$ 中相应的齐次基。对于 $D \in \mathfrak{str}(J)$ 和 $i \in \{1, \dots, m+n\}$，我们有

- $\pi_\lambda(z_i^-) = -2\imath z_i$,
- $\pi_\lambda(D) = \lambda(D) + \sum_{j=1}^{m+n} [D, z_j^-]\partial_{z_j}$,
- $\pi_\lambda(z_i^+) = -\frac{\imath}{2}\mathcal{B}_\lambda(z_i)$,

其中，我们将齐次基 $(z_i^\pm)_i$ 与 $\mathcal{P}(\mathbf{K}^{m|n})$ 的变量 $(z_i)_i$ 对应起来。

2. The minimal representation

2.1. 定义。在正交辛情形和 $D(2,1;\alpha)$ 情形中，构造了一种表示，可将其视为经典情形下极小表示的类比。这些“极小表示”是针对 λ 的特定取值，从 π_λ 的商中得到的。更具体地说，在这两种情形中，都找到了 $\mathcal{P}_2(\mathbb{K}^{m|n})$ 的一个非平凡子空间 V_λ，贝塞尔算子在其上作用平凡，且该子空间还是一个 $\mathfrak{str}(J)$-模。由 Poincar´e-Birkhoff-Witt 定理可知

$$\mathcal{I}_\lambda := U(J^-)V_\lambda = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})V_\lambda$$

是 π_λ 的一个子模。这里，$U(J^-)$ 表示 J^- 的包络代数。沿用 [8] 中针对经典情形的方法，$\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})/\mathcal{I}_\lambda$ 上的商表示可视为极小表示的类比。

一般而言，设 V_λ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})$ 的一个子空间，贝塞尔算子在其上平凡作用，且它也是一个 $\mathfrak{str}(J)$-模。我们可以定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})/\mathcal{I}_\lambda$ 上的商表示，其定义为

$$\mathcal{I}_\lambda := U(J^-)V_\lambda = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})V_\lambda.$$

对于每一种 V_λ 的选择，现在都有一个相应的 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})/\mathcal{I}_\lambda$上的表示，我们仍将其记作 π_λ。请注意，只有对于某些特征 λ，V_λ才会有有趣的选择。于是，如果存在，我们便可将 $\mathfrak{g}$ 的极小表示定义为通过这种方法得到的“最小”无限维表示。这里，我们可以借助 Gelfand–Kirillov维数 [22, 第7节3]，将最小表示的定义形式化。

在本文其余部分将详细考察的情形中，我们只考虑满足 $V_\lambda \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{K}^{m|n})$的表示，因为这些表示对应于第1.6节中提到的特殊情形下的极小表示。不过，对于通过选择其他 V_λ而得到的其他可能的商表示，我们的方法大部分仍然适用。我们推测，这些表示不再是极小表示，但与[23]中研究的表示相似。

2.2. 积分到群层面。为了将表示积分到群层面，我们可以利用 [24] 中建立的 Harish-Chandra超模框架。

定义 2.1. [24, 定义 4.1] 设 V 是一个复超向量空间，且$G = (G_0, \mathfrak{g})$ 是一个李超群。记 K 为 G_0 的一个极大紧子群，记 $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ 为 K 的李代数。那么，如果 V 由 $\mathfrak{k}$-有限向量组成，且 K 的导出作用与其 $\mathfrak{k}$-模结构相一致，则 V 是一个 $(\mathfrak{g}, K)$-模:

$$d\pi_0(X)(v) = \frac{d}{dt}\pi_0(\exp(tX))(v)\Big|_{t=0} = d\pi(X)(v) \text{ for all } X \in \mathfrak{k},\ v \in V$$

and

$$\pi_0(k)(d\pi(X)(v)) = d\pi(\mathrm{Ad}(k)(X))(\pi_0(k)(v)),\ \text{for all } k \in K, X \in \mathfrak{g}, v \in V,$$

其中 π_0 是 K-表示，$d\pi$ 是 $\mathfrak{g}$-表示。若 $(\mathfrak{g}, K)$-模在 $U(\mathfrak{g})$ 上有限生成，且具有 K-重数有限性，则称其为 Harish–Chandra 超模。

一般而言，设 $G = (G_0, \mathfrak{g})$ 为一个超群。我们用 K 表示 G_0 的一个极大紧子群，用 $\mathfrak{k}$ 表示 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$对应的极大李代数，即 $\mathfrak{k} \cong \mathrm{Lie}(K)$。在 [24, 定理 4.6] 中证明了，若 $(\mathfrak{g}, K)$ 是一个 Harish–Chandra 超模，则它可以积分为 G的一个唯一的光滑 Fr´echet 表示，且具有温和增长。因此，要证明 $\mathfrak{g}$ 的一个表示可以积分到群层面，只需证明它对应于一个 Harish–Chandra 超模。

多项式实现 π_λ 要对应于一个 Harish–Chandra 超模，要求之一是它必须由 $\mathfrak{k}$-有限向量组成。在接下来的两个小节中，我们给出两种方法，将 π_λ 转化为一个由 $\mathfrak{k}$-有限向量组成的表示。第一种方法基于以下观察：当我们将作用扩展到光滑超函数时，π_λ 仍然定义良好。这将得到经典薛定谔表示的一个推广，相关研究见 [6]。第二种方法基于以下观察：π_λ 由 $\mathfrak{str}(J)$-有限向量组成。这将得到经典福克表示的一个推广，相关研究见 [8]。

2.3. 薛定谔模型。让我们将 π_λ 扩展到光滑超函数，并假设我们找到了一个同时也是 $\mathfrak{k}$-有限向量的光滑超函数 κ。（严格来说，κ 应当是我们将与 J 相关的超流形按理想 $\mathcal{I}_\lambda$取商后得到的超流形的一个整体截面，但这与下面的内容无关。）于是我们可以定义表示

$$W_\lambda := U(\mathfrak{g})\kappa \mod \mathcal{I}_\lambda,$$

其中，$U(\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的包络代数，而 $\mathfrak{g}$-模结构由 π_λ给出。我们称 W_λ 为一个薛定谔空间，并称该表示为我们表示的薛定谔模型。根据 [6, 引理 2.23], ，这些空间由 $\mathfrak{k}$-有限向量构成。注意，尽管 [6] 仅考虑经典情形，[6, 引理 2.23]的证明在将李代数替换为李超代数后仍然成立。

在 [6]中，$\kappa(z)$被选为 $K_{\frac{\nu}{2}}(|z|)$，用于经典情形。（除非$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(p,q)$~，其中 $p+q$ 为奇数且 $p, q \geq 3$，参见注 2.2。）这里，K 是经过重整化的 K-贝塞尔函数，$|z|$ 是由迹型在 J 上诱导的范数，而 ν 是 J的结构~常数。特别地，若 J是欧几里得的，则$K_{\frac{\nu}{2}}(|z|) = \exp(-\mathrm{tr}(z))$，其中~$\mathrm{tr}(z)$表示 J的迹函数。在 [10]中，$\kappa(z)$也被选为 $K_{\frac{\nu}{2}}(|z|)$，用于正交辛情形。这里，$|z|$ 现在表示一种推广经典范数的超函数。在第 2.6 节中，我们将选择 κ，使其在福克模型中对应于 1。

~注 2.2. 在经典情形下，当 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(p,q)$ 满足 $p+q$ 为奇数且 $p, q \geq 3$ ([6, 定理 A]) 时，$K_{\frac{\nu}{2}}(|z|)$ 不是 $\mathfrak{k}$-有限的。此外，若 $p, q \geq 4$ 和 $p+q$ 均为奇数，则对于任何李代数为 $g \cong \mathfrak{so}(p,q)$ 的群，都不存在极小表示（[25,~定理 2.13]）。类似地，在正交辛情形下，对于满足 $\nu \notin -2\mathbb{N}$、$p+q$ 为奇数且 $p, q \geq 3$ ([10, 定理 5.3]) 的 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{osp}(p,q|2n)$，$K_{\frac{\nu}{2}}(|z|)$ 也不是 $\mathfrak{k}$-有限的。

2.4. 福克模型。注意，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathfrak{str}(J)$ 对 $\mathcal{P}_k(\mathbb{K}^{m|n})$ 中元素的作用都会得到 $\mathcal{P}_k(\mathbb{K}^{m|n})$ 中的元素。由于 $\mathcal{P}_k(\mathbb{K}^{m|n})$ 是有限维的，这意味着 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})$ 上的作用由 $\mathfrak{str}(J)$-有限向量组成。因此，如果存在一个将 $\mathfrak{k}$ 映入 $\mathfrak{str}(J)$ 的 $\mathfrak{g}$ 同构，那么我们就可以以某种方式扭曲 π_λ，使其由 $\mathfrak{k}$-有限向量组成。由于有限性得以保留

在复化下，因此只需存在一个将 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 映入 $\mathfrak{stv}(J_{\mathbb{C}})$ 的 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 同构。这里， $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 和 $J_{\mathbb{C}}$ 分别是 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{k}$ 和 J 的复化。设 $\gamma \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是一个同构，满足 $\gamma(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{stv}(J_{\mathbb{C}})$。那么我们可以定义表示

$$F_\lambda := U(\mathfrak{g})1 \mod \mathcal{I}_\lambda,$$

其中， $\mathfrak{g}$-模结构由 $\rho_\lambda := \pi_\lambda \circ \gamma$ 给出。我们称 F_λ 为 Fock 空间，并称此表示为我们表示的福克模型。请注意， F_λ 不仅取决于特征 λ，还取决于 V_λ （也就是 $\mathcal{I}_\lambda$）的选取，以及扭曲 γ的选取。

在 J 为欧几里得的经典情形、 $q = 2$ 的正交辛情形以及$D(2, 1; \alpha)$ 情形中，我们可以选择 γ为凯莱变换 $c \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，其定义如下:

$$c := \exp\left(\frac{\imath}{2}\,\mathrm{ad}(e^-)\right)\exp(\imath\,\mathrm{ad}(e^+)),$$

其中， $e^{\pm}$ 表示 $J^{\pm}$的单位元。经典情形、正交辛情形以及 $D(2, 1; \alpha)$ 情形对应的 Fock 空间分别见 [8], [11] 和 [14],。请注意，在 [8] 中，他们采用的 TKK 构造约定与本文所述的不同，因此凯莱变换的形式略有差异。

在 [15] 中， $D(2, 1; \alpha)$ 情形下的福克模型被积分到群层面。随后，根据 [17] 中“超酉”的定义，证明了它是一个超酉表示。

注 2.3. 在经典情形下，若 J 是欧几里得的，则凯莱变换c 在 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 与 $\mathfrak{stv}(J_{\mathbb{C}})$之间诱导一个同构，这就是为什么 [8]只考虑欧几里得约旦代数。类似地，在正交辛情形下， c 仅当 $J_{\overline{0}}$ 是欧几里得的时，才将 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 映入 $\mathfrak{stv}(J_{\mathbb{C}})$，因此 [14]中只考虑 $q = 2$。在 $D(2, 1; \alpha)$ 情形下， $J_{\overline{0}}$总是欧几里得的。凯莱变换 c仍可用于非欧几里得约旦超代数，以定义类 Fock 表示$\rho^c_\lambda := \pi_\lambda \circ c$。然而，这种表示一般不是酉的。

2.5. 贝塞尔-费舍尔乘积。超情形与非超情形之间的一个显著区别，在于内积在薛定谔空间和 Fock 空间中的作用。在 Fock 空间上，我们将从经典情形的以下内积出发进行推广。设 $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$，并令 $p(\mathcal{B}_\lambda)$ 为在 p 中将每一个 z_i 替换为 $\mathcal{B}_\lambda(z_i)$ 后得到的算子。于是， p 与 q 的贝塞尔-费舍尔内积定义为

$$\langle p, q\rangle_{\mathcal{B}} := p(\mathcal{B}_\lambda)\overline{q(\bar{z})}\Big|_{z=0}.$$

该内积最初在 [8, Section 2.3] 中作为多项式空间$\mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$上的内积引入。在经典情形下，已证明贝塞尔-费舍尔内积等于 Fock 空间 [8, 上的 L^2-内积（见命题 2.6]）。在正交辛情形和 $D(2, 1; \alpha)$ 情形中，该乘积被用作将 Fock 空间推广到超空间的起点。在这种情形下，贝塞尔-费舍尔乘积不再是内积。然而，在满足适当条件时，它是 F_λ 上的非退化半双线性超厄米形式，这与 [17] 中给出的 Hilbert超空间定义一致。

一般而言，假设我们有贝塞尔算子作用于 $\mathcal{P}(J) \cong \mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})$，如第 1.7 节所述。回顾一下，该作用依赖于一个特征 λ: $\mathfrak{stv}(J) \to \mathbb{K}$。于是，我们在超多项式空间上定义贝塞尔-费舍尔乘积如下。

定义 2.4. 对于 $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^{m|n})$，我们将 p 与q 的贝塞尔-费舍尔乘积定义为

$$\langle p, q\rangle_{\mathcal{B}} := p(\mathcal{B}_\lambda)\bar{q}(z)|_{z=0}\,,$$

其中，$\bar{q}(z) = \overline{q(\bar{z})}$ 是通过对多项式 q 的系数取共轭得到的，而 $p(\mathcal{B}_\lambda)$ 则是对所有 $i \in \{1, \dots, m+n\}$，将 z_i 替换为 $\mathcal{B}_\lambda(z_i)$ 得到的。

在正交辛情形和 $D(2,1;\alpha)$ 情形下，将贝塞尔-费舍尔乘积限制在 Fock 空间 F_λ 上时，它是非退化的超厄米半双线性形式。此外，相对于贝塞尔-费舍尔乘积，福克表示 ρ_λ 是斜超对称的。我们猜想，这些性质在更一般的情形下也成立。然而，不能期望这些性质对所有含幺 Jordan 超代数都成立。例如，在第 3 节和第 4 节中，我们证明当 J 是周极或 Q 型约当超代数时，贝塞尔-费舍尔乘积是退化的。

2.6. 交织算子。在使用凯莱变换 c 处理福克模型中所考虑的扭曲 γ 的情形下，见第2.4节，我们可以定义 $C := \exp(\frac{\imath}{2}e^-)\exp(\imath e^+)$。于是，凯莱变换 c可以改写为

$$c = \exp\left(\frac{\imath}{2}\operatorname{ad}(e^-)\right)\exp\left(\imath\operatorname{ad}(e^+)\right) = \operatorname{Ad}\left(\exp(\frac{\imath}{2}e^-)\right)\operatorname{Ad}\left(\exp(\imath e^+)\right) = \operatorname{Ad}(C).$$

因此，我们形式上有，

$$\rho_\lambda(X) = \pi_\lambda(c(X)) = \pi_\lambda(\operatorname{Ad}(C)X) = \pi_\lambda(C)\,\pi_\lambda(X)\,\pi_\lambda(C)^{-1},$$

这表明，$\pi_\lambda(C)$交织了 π_λ 和 ρ_λ的作用。

一般而言，设$(G_0, \mathfrak{g})$为一个超群，并假设对于某个$\Gamma \in G_0$，我们有 $\gamma = \operatorname{Ad}(\Gamma)$，那么 $\pi_\lambda(\Gamma)$交织了 π_λ 和 $\rho_\lambda = \pi_\lambda \circ \gamma$的作用。特别地，由此我们可以为每个福克模型关联一个薛定谔模型，方法是将第2.3节中的超函数 κ 选为 $\pi_\lambda(\Gamma)^{-1}1$。

2.7. Segal-Bargmann变换。在经典情形下，[8, 第 3] 节构造了一个交织薛定谔模型与福克模型的算子，称为Segal-Bargmann变换。令 $x = (x_i)_{i=1}^{m+n}$和 $z = (z_i)_{i=1}^{m+n}$分别表示 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m|n})$和 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{m|n})$中的变量。同样，令 e_x 和 e_z 分别表示 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m|n})$和 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{m|n})$中与 J 的单位元相对应的元素。那么，在我们的框架中，这个Segal-Bargmann变换由变换SB: $W_\lambda \to F_\lambda$ 给出，其定义为

$$\operatorname{SB}(f(x))(z) := \exp(-e_z)\,\langle f(x), \mathbb{I}_\lambda(2x, 2z)\exp(-2e_x)\rangle_W \tag{1}$$

其逆为

$$\operatorname{SB}^{-1}(p(z))(x) = \exp(-2e_x)\,\langle p(z), \mathbb{I}_\lambda(2z, 2x)\exp(-e_z)\rangle_{\mathcal{B}}\,.$$

这里，$\langle\cdot\,、\,\cdot\rangle_W$表示 W_λ上的 L^2 内积，而 $\mathbb{I}_\lambda(z,x)$ 是在 [8, 第 2 节4]中构造的Fock 空间上的再生核。特别地，我们有

$$\langle p(z), \mathbb{I}_\lambda(z,x)\rangle_{\mathcal{B}} = p(x) \quad \text{for all } p \in F_\lambda. \tag{2}$$

对于正交辛情形，[11, Section 6] 中构造了一个交织塞格尔-巴格曼变换，它也由定义（1）给出。再生核 $\mathbb{I}_\lambda(z,x)$现在是 [11, Section 4.2] 中构造的超函数，并且也满足方程（2）。

对于 $D(2,1;\alpha)$ 情形，也可以利用方程（1）定义 Segal-Bargmann变换。然而，在 [14, Section 7] 中，以一种更易于推广的方式构造了一个交织塞格尔-巴格曼变换。首先，结合 $\pi_\lambda(C)$ 使用 Bessel-Fischer 乘积，如 Section 2.6 中所述，定义 Schr¨odinger 空间 W_λ 上的相应乘积，如下所示。我们设

$$\langle f,g\rangle_W := \langle \pi_\lambda(C)f, \pi_\lambda(C)g\rangle_{\mathcal{B}},$$

对所有 $f,g\in W_\lambda$。Segal-Bargmann变换现在定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{SB}(f(x))(z) &:= \langle \pi_\lambda(C)f(x), \mathbb{I}_\lambda(x,z)\rangle_{\mathcal{B}(x)}\\ &= \big\langle f(x), \pi_\lambda(C)^{-1}\mathbb{I}_\lambda(x,z)\big\rangle_W\\ &= \left\langle f(x), \exp(-\frac{1}{2}\,\mathcal{B}_\lambda(e_x))\exp(-e_x)\mathbb{I}_\lambda(x,z)\right\rangle_W,\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}(x)}$ 表示关于变量 x 的贝塞尔-费舍尔乘积，而 $\mathbb{I}_\lambda(z,x)$ 是在 [14, 第 5 节中构造的超函数，2] 满足方程 (2)。与经典定义相比，这一定义的优点在于，交织性质和超酉性可由 $\pi_\lambda(C)$ 及 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$的定义直接得出。由于 W_λ 上的乘积是利用 F_λ上的贝塞尔-费舍尔乘积定义的，因此使用逆Segal-Bargmann变换更为方便，其定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{SB}^{-1}(p(z))(x) &= \pi_\lambda(C)^{-1}(\langle p, \mathbb{I}_\lambda(z,x)\rangle_{\mathcal{B}})\\ &= \exp(-\frac{1}{2}\,\mathcal{B}_\lambda(e_x))\exp(-e_x)\,\langle p, \mathbb{I}_\lambda(z,x)\rangle_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

对所有 $p\in F_\lambda$。

一般来说，假设我们有一个 Schr¨odinger 表示 π_λ、一个 Fock 表示 $\rho_\lambda=\pi_\lambda\circ\gamma$，以及一个满足 $\gamma=\mathrm{Ad}(\Gamma)$ 的元素 $\Gamma\in G_0$。令 F_λ 为复Fock空间，W_λ 为实 Schr¨odinger 空间，其中 $\kappa=\pi_\lambda(\Gamma)^{-1}1$，并令 $\mathbb{I}_\lambda(\cdot,\cdot)$ 为满足方程 (2) 的超函数。然后我们可以定义如下

定义 2.5. 逆Segal-Bargmann变换 SB^{-1}：$F_\lambda\to W_\lambda$ 定义为

$$\mathrm{SB}^{-1}(p(z))(x) := \pi_\lambda(\Gamma)^{-1}(\langle p, \mathbb{I}_\lambda(z,x)\rangle_{\mathcal{B}}),$$

对所有 $p\in F_\lambda$。

在 W_λ 上定义半双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$如下:

$$\langle f,g\rangle_W := \langle \pi_\lambda(\Gamma)f, \pi_\lambda(\Gamma)g\rangle_{\mathcal{B}},$$

对所有 $f,g\in W_\lambda$。那么 SB^{-1} 自动保持双线性形式，因此我们可以如下定义 Segal-Bargmann变换。

定义 2.6. Segal-Bargmann变换 SB: $W_\lambda\to F_\lambda$ 定义为

$$\mathrm{SB}(f(x))(z) := \big\langle f(x), \pi_\lambda(\Gamma)^{-1}\mathbb{I}_\lambda(x,z)\big\rangle_W$$

对所有 $f\in W_\lambda$。

注意，$\mathrm{SB}\circ\mathrm{SB}^{-1}=\mathrm{id}_{F_\lambda}$ 以及 $\mathrm{SB}^{-1}\circ\mathrm{SB}=\mathrm{id}_{W_\lambda}$，正如所需。

3. The periplectic case

现在，我们针对 J 是 Jordan-periplectic 超代数 $JPe(n)$ 且 $n \geq 2$ 的具体情形，明确给出第 1 节中的 TKK 构造和贝塞尔算子。本节旨在说明，我们的方法在这种情形下并不能完全奏效。具体而言，我们将证明，贝塞尔-费舍尔乘积不能用作非退化形式。

在第2节开头，我们指出，V_λ 有不同的选择，这可能导致不同的无限维表示。然而，正如我们将要证明的，对于 periplectic 情形，贝塞尔-费舍尔乘积要么在相应的 Fock 空间上退化，要么该表示是有限维的。无论选择哪个 V_λ，这一结论都成立。

3.1. TKK 构造。

由第 1.5 节中的表格可知，$JPe(n)$的 TKK 构造同构于 periplectic 李超代数 $\mathfrak{pe}(2n)$。我们首先将更明确地证明这一结论。

回顾第1.2节中给出的超代数定义，以及第1.1节中的元素E_{ij}。Jordan-periplectic 超代数 $JPe(n)$的一组基为

$$\begin{aligned} x_{ij} &:= E_{ij} + E_{j+n,i+n}, && \text{for} && 1 \leq i,j \leq n, \\ \beta_{ij} &:= E_{i,j+n} - E_{j,i+n}, && \text{for} && 1 \leq i < j \leq n, \\ \gamma_{ij} &:= E_{i+n,j} + E_{j+n,i}, && \text{for} && 1 \leq i \leq j \leq n. \end{aligned}$$

用基元素表示的 Jordan 乘法为

$$\begin{aligned} &x_{ij} \cdot x_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{jk}x_{il} + \delta_{il}x_{kj}), \quad x_{ij} \cdot \beta_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{jk}\beta_{il} - \delta_{jl}\beta_{ik}), \\ &x_{ij} \cdot \gamma_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\gamma_{jl} + \delta_{il}\gamma_{jk}), \quad \beta_{ij} \cdot \gamma_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{jk}x_{il} + \delta_{jl}x_{ik} - \delta_{ik}x_{jl} - \delta_{il}x_{jk}), \\ &\beta_{ij} \cdot \beta_{kl} = \gamma_{ij} \cdot \gamma_{kl} = 0. \end{aligned}$$

periplectic 李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{pe}(2n)$ 的一组基为

$$\begin{aligned} \overline{x}_{ij} &:= E_{ij} - E_{j+2n,i+2n}, && \text{for} && 1 \leq i,j \leq 2n, \\ \overline{\beta}_{ij} &:= E_{i,j+2n} + E_{j,i+2n}, && \text{for} && 1 \leq i < j \leq 2n, \\ \overline{\gamma}_{ij} &:= E_{i+2n,j} - E_{j+2n,i}, && \text{for} && 1 \leq i \leq j \leq 2n. \end{aligned}$$

用基元素表示的李括号为

$$\begin{aligned} &[\overline{x}_{ij}, \overline{x}_{kl}] = \delta_{jk}\overline{x}_{il} - \delta_{il}\overline{x}_{kj}, \qquad [\overline{x}_{ij}, \overline{\beta}_{kl}] = \delta_{jk}\overline{\beta}_{il} + \delta_{jl}\overline{\beta}_{ik}, \\ &[\overline{x}_{ij}, \overline{\gamma}_{kl}] = \delta_{ik}\overline{\gamma}_{lj} - \delta_{il}\overline{\gamma}_{kj}, \qquad [\overline{\beta}_{ij}, \overline{\gamma}_{kl}] = \delta_{jk}\overline{x}_{il} - \delta_{jl}\overline{x}_{ik} + \delta_{ik}\overline{x}_{jl} - \delta_{il}\overline{x}_{jk}, \\ &[\overline{\beta}_{ij}, \overline{\beta}_{kl}] = [\overline{\gamma}_{ij}, \overline{\gamma}_{kl}] = 0. \end{aligned}$$

我们有如下三重分次 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$，其中

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_- &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \left\{ \overline{x}_{2i-1,2j}, \overline{\beta}_{2i-1,2j-1}, \overline{\gamma}_{2i,2j} \mid 1 \leq i,j \leq n \right\}, \\ \mathfrak{g}_+ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \left\{ \overline{x}_{2i,2j-1}, \overline{\beta}_{2i,2j}, \overline{\gamma}_{2i-1,2j-1} \mid 1 \leq i,j \leq n \right\}, \\ \mathfrak{g}_0 &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \left\{ \overline{x}_{2i,2j}, \overline{x}_{2i-1,2j-1}, \overline{\beta}_{2i,2j-1}, \overline{\gamma}_{2i,2j-1} \mid 1 \leq i,j \leq n \right\}. \end{aligned}$$

显式同构 ϕ 在 $JPe(n)^- \oplus \mathfrak{istr}(JPe(n)) \oplus JPe(n)^+$ 与 $\mathfrak{spe}(2n)$ 之间由以下条件唯一确定

$$\begin{aligned}
&\phi(x_{ij}^-) = \overline{x}_{2j-1,2i}, && \phi(x_{ij}^+) = \overline{x}_{2j,2i-1}, && \phi(2L_{x_{ij}}) = \overline{x}_{2j,2i} - \overline{x}_{2j-1,2i-1},\\
&\phi(\beta_{ij}^-) = -\overline{\gamma}_{2i,2j}, && \phi(\beta_{ij}^+) = \overline{\gamma}_{2i-1,2j-1}, && \phi(2L_{\beta_{ij}}) = \overline{\gamma}_{2i-1,2j} + \overline{\gamma}_{2i,2j-1},\\
&\phi(\gamma_{ij}^-) = \overline{\beta}_{2i-1,2j-1}, && \phi(\gamma_{ij}^+) = -\overline{\beta}_{2i,2j}, && \phi(2L_{\gamma_{ij}}) = \overline{\beta}_{2i,2j-1} + \overline{\beta}_{2i-1,2j}.
\end{aligned}$$

我们将导数 $D_p \in \mathfrak{str}(JPe(n))$ 定义为

$$D_p(x_{ij}) := 0, \qquad D_p(\beta_{ij}) := -2\beta_{ij}, \qquad D_p(\gamma_{ij}) := 2\gamma_{ij},$$

对所有 i, j 均成立。于是，我们有 $\mathfrak{str}(JPe(n)) = \{D_p\} \oplus \mathfrak{istr}(JPe(n))$，且 $\phi(D_p) = \sum_i \overline{x}_{ii}$ 将同构 ϕ 扩展为 TKK(J) 与 $\mathfrak{g} = \mathfrak{pe}(2n)$ 之间的同构。

若我们对 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 使用标准基 $\{E_{ij} : 1 \le i, j \le 2n\}$，则由同构可得 $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{gl}(n|n)$

$$\overline{x}_{2i,2j} \mapsto E_{i,j} \qquad \overline{x}_{2i-1,2j-1} \mapsto -E_{j+n,i+n} \qquad \overline{\beta}_{2i,2j-1} \mapsto E_{i,j+n}$$

对于 $1 \le i, j \le n$ 和

$$\overline{\gamma}_{2i,2j-1} \mapsto -E_{j+n,i} \quad \text{for } i \ge j, \qquad \overline{\gamma}_{2i,2j-1} \mapsto E_{i+n,j} \quad \text{for } i < j.$$

3.2. 特征 λ。现在我们考察 $\mathfrak{g}_0$ 上的一个特征 λ。由于 λ 是偶李超代数态射，我们立即得到 $\lambda(\overline{\beta}_{2i,2l-1}) = 0$，以及 $\lambda(\overline{\gamma}_{2l-1,2j}) = 0$。我们有 $\lambda([a,b]) = \lambda(a)\lambda(b) - (-1)^{|a||b|}\lambda(b)\lambda(a) = 0$，因此

$$\begin{aligned}
&\lambda([\overline{x}_{2i,2j}, \overline{x}_{2k,2l}]) = 0, && \lambda([\overline{x}_{2i-1,2j-1}, \overline{x}_{2k-1,2l-1}]) = 0,\\
&\lambda([\overline{\beta}_{2i,2j-1}, \overline{\gamma}_{2k,2l-1}]) = 0.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\delta_{kj}\lambda(\overline{x}_{2i,2l}) = \delta_{il}\lambda(\overline{x}_{2k,2j}), && \delta_{kj}\lambda(\overline{x}_{2i-1,2l-1}) = \delta_{il}\lambda(\overline{x}_{2k-1,2j-1}),\\
&\delta_{jl}\lambda(\overline{x}_{2i,2k}) = \delta_{ik}\lambda(\overline{x}_{2j-1,2l-1}).
\end{aligned}$$

对于所有 $1 \le i, j \le n$，我们现在得到

$$\begin{aligned}
\lambda(\overline{x}_{2i-1,2j-1}) = \lambda(\overline{x}_{2i,2j}) = \delta_{ij}\lambda(\overline{x}_{11}),\\
\lambda(\overline{\beta}_{2i-1,2j}) = \lambda(\overline{\gamma}_{2i-1,2j}) = 0.
\end{aligned}$$

利用同构 ϕ，我们现在得到，对于 $\mathfrak{str}(JPe(n))$ 上的特征 λ，

$$\lambda(L_{x_{ij}}) = \lambda(L_{\beta_{ij}}) = \lambda(L_{\gamma_{ij}}) = 0$$

以及 $\lambda(D_p) = \lambda_p := 2n\lambda(\phi^{-1}(\overline{x}_{11}))$。特别地，$\mathfrak{istr}(JPe(n))$ 上唯一的特征是平凡特征 $\lambda = 0$。

3.3. 贝塞尔算子。通过一项技术性但直接的计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\lambda(x_{kl}) &= \sum_{i,j=1}^{n} (x_{ij}\partial_{x_{lj}} + \beta_{ij}\partial_{\beta_{lj}})\partial_{x_{ik}} + (1+\delta_{ik})(\gamma_{ij}\partial_{x_{lj}} + x_{ji}\partial_{\beta_{lj}})\partial_{\gamma_{ik}},\\
\mathcal{B}_\lambda(\beta_{kl}) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(1+\delta_{jl})\partial_{x_{ik}}\partial_{\gamma_{jl}} - x_{ji}(1+\delta_{ik})\partial_{\gamma_{ik}}\partial_{x_{jl}}\\
&\quad + \gamma_{ij}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{jl})\partial_{\gamma_{ik}}\partial_{\gamma_{jl}},\\
\mathcal{B}_\lambda(\gamma_{kl}) &= \sum_{i,j=1}^{n} (\gamma_{ij}\partial_{x_{ki}} + x_{ij}\partial_{\beta_{ki}})\partial_{x_{lj}} + (x_{ji}\partial_{x_{ki}} - 2\beta_{ij}\partial_{\beta_{ki}})\partial_{\beta_{lj}}.
\end{aligned}$$

请注意，由于 λ 是 $\mathfrak{istr}(JPe(n))$ 上的平凡特征，因此不存在只含一个导数的项。特别地，贝塞尔算子中的所有项都会对其作用对象求两次导数。因此，对于所有 $x \in J$ 和 $p \in \mathcal{P}_1(J)$，有 $\mathcal{B}_\lambda(x)p = 0$。这意味着，对于 $\mathcal{P}(J)$ 上的贝塞尔-费舍尔乘积而言， $\mathcal{P}_1(J)$ 中的每个元素都是退化元素。因此，为了使贝塞尔-费舍尔乘积在 F_λ 上非退化，必须有 $\mathcal{P}_1(J) \subseteq V_\lambda$，但此时

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(J) \subseteq \mathcal{I}_\lambda,$$

这意味着 F_λ 同构于 C 或 0。无论哪种情况，我们都不再有无限维表示。

现在再次令 J 为任意一个含幺 Jordan 超代数。上述论证表明，若 λ 是 $\mathfrak{istr}(J)$ 上的平凡特征，则要么 F_λ 同构于 K 或 0，要么贝塞尔-费舍尔乘积在 F_λ 上是退化的。

4. The queer case

现在我们将详细考察 J 是 Jordan-queer 超代数$JQ(n)$，且 $n \geq 2$ 的情形。与第3节类似，本节旨在说明贝塞尔-费舍尔乘积不能用作非退化形式。

4.1. TKK 构造。从第 1.5 节的表格可知， $JQ(n)$ 的 TKK 构造同构于射影 queer 李超代数$\mathfrak{pq}(2n)$。本节将更明确地证明这一结论。

回顾第 1.3 节给出的超代数定义，以及第 1.1 节中的元素E_{ij}。Jordan-queer 超代数 $JQ(n)$ 的一组基为

$$\begin{aligned}
y_{ij} &:= E_{ij} + E_{i+n,j+n}, && \text{for} && 1 \leq i,j \leq n,\\
\theta_{ij} &:= E_{i+n,j} + E_{i,j+n}, && \text{for} && 1 \leq i,j \leq n.
\end{aligned}$$

用基元素表示的 Jordan 乘法为

$$\begin{aligned}
y_{ij}\cdot y_{kl} &= \frac{1}{2}(\delta_{jk}y_{il} + \delta_{il}y_{kj}), & y_{ij}\cdot\theta_{kl} &= \frac{1}{2}(\delta_{jk}\theta_{il} + \delta_{il}\theta_{kj}),\\
\theta_{ij}\cdot\theta_{kl} &= \frac{1}{2}(\delta_{jk}y_{il} - \delta_{il}y_{kj}).
\end{aligned}$$

射影 queer 李超代数由下式给出

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{pq}(2n) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{y_{ij}, \theta_{ij} : 1 \leq i,j \leq 2n\} \,/\, \left\langle \sum y_{ii} \right\rangle.$$

基元素的李括号由下式给出

$$[y_{ij}, y_{kl}] = \delta_{jk} y_{il} - \delta_{il} y_{kj}, \qquad [y_{ij}, \theta_{kl}] = \delta_{jk} \theta_{il} - \delta_{il} \theta_{kj},$$
$$[\theta_{ij}, \theta_{kl}] = \delta_{jk} y_{il} + \delta_{il} y_{kj}.$$

我们有三重分次 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$，其中

$$\mathfrak{g}_- = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{ y_{2i-1,2j}, \theta_{2i-1,2j} \mid 1 \le i, j \le n \},$$
$$\mathfrak{g}_+ = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{ y_{2i,2j-1}, \theta_{2i,2j-1} \mid 1 \le i, j \le n \},$$
$$\mathfrak{g}_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{ y_{2i,2j}, \theta_{2i,2j}, y_{2i-1,2j-1}, \theta_{2i-1,2j-1} \mid 1 \le i, j \le n \} / \left\langle \sum y_{ii} \right\rangle.$$

$\mathrm{TKK}(JQ(n)) = JQ(n)^- \oplus \mathfrak{istr}(JQ(n)) \oplus JQ(n)^+$ 与 $\mathfrak{psq}(2n)$之间的一个显式同构由下式唯一确定：

$$\phi(y_{ij}^-) = y_{2i-1,2j}, \qquad \phi(\theta_{ij}^-) = \theta_{2i-1,2j},$$
$$\phi(y_{ij}^+) = y_{2i,2j-1}, \qquad \phi(\theta_{ij}^+) = \theta_{2i,2j-1},$$
$$\phi(2L_{y_{ij}}) = y_{2i,2j} - y_{2i-1,2j-1}, \qquad \phi(2L_{\theta_{ij}}) = \theta_{2i,2j} - \theta_{2i-1,2j-1}.$$

我们将导数 $D_q \in \mathfrak{str}(JQ(n))$ 定义为

$$D_q(y_{ij}) := 0, \qquad D_q(\theta_{ij}) = 2y_{ij},$$

对所有 i、j 均成立。因此，我们有 $\mathfrak{str}(JQ(n)) = \{D_q\} \oplus \mathfrak{istr}(JQ(n))$，且 $\phi(D_q) = \sum_i \theta_{ii}$ 将同构 ϕ 扩展为 $\mathrm{TKK}(J)$ 与 $\mathfrak{g} = \mathfrak{pq}(2n)$ 之间的同构。

4.2. 特征 λ。现在我们考察 $\mathfrak{g}_0$ 上的一个特征 λ。由

$$\lambda([y_{2i,2j}, y_{2k,2l}]) = 0, \qquad \lambda([y_{2i-1,2j-1}, y_{2k-1,2l-1}]) = 0,$$
$$\lambda([\theta_{2i,2j}, \theta_{2k,2l}]) = 0, \qquad \lambda([\theta_{2i-1,2j-1}, \theta_{2k-1,2l-1}]) = 0,$$

我们得到

$$\delta_{kj}\lambda(y_{2i,2l}) = \delta_{il}\lambda(y_{2k,2j}), \qquad \delta_{kj}\lambda(y_{2i-1,2l-1}) = \delta_{il}\lambda(y_{2k-1,2j-1}),$$
$$\delta_{kj}\lambda(y_{2i,2l}) = -\delta_{il}\lambda(y_{2k,2j}), \qquad \delta_{kj}\lambda(y_{2i-1,2l-1}) = -\delta_{il}\lambda(y_{2k-1,2j-1}).$$

对于所有 $1 \le i$、$j \le n$，现在有

$$\lambda(y_{2i-1,2j-1}) = \lambda(y_{2i,2j}) = \lambda(\theta_{2i-1,2j-1}) = \lambda(\theta_{2i,2j}) = 0.$$

因此，$\mathfrak{str}(JQ(n))$ 上唯一的特征是平凡特征 $\lambda = 0$。

4.3. 贝塞尔算子。经过一番技术性但直接的计算可得

$$\mathcal{B}_\lambda(y_{kl}) = \sum_{i,j} y_{ij}(\partial_{y_{ik}}\partial_{y_{lj}} - \partial_{\theta_{ik}}\partial_{\theta_{lj}}) + \theta_{ij}(\partial_{y_{ik}}\partial_{\theta_{lj}} + \partial_{\theta_{ik}}\partial_{y_{lj}}),$$
$$\mathcal{B}_\lambda(\theta_{kl}) = \sum_{i,j} \theta_{ij}(\partial_{y_{ik}}\partial_{y_{lj}} + \partial_{\theta_{ik}}\partial_{\theta_{lj}}) + y_{ij}(\partial_{y_{ik}}\partial_{\theta_{lj}} - \partial_{\theta_{ik}}\partial_{y_{lj}}).$$

由于在 $\mathfrak{str}(JQ(n))$ 上只有平凡特征，我们可以使用与偏辛情形相同的论证，得出只有当 F_λ 同构于 K 或 0 时，贝塞尔-费舍尔乘积才是非退化的。

致谢。SB 获得佛兰德斯研究基金会（FWO）博士后初级奖学金资助（1269821N）。

References

[1] W. T. Gan 和 G. Savin, 《关于极小表示：定义与性质》, *Represent.*, 第 卷, *Theory* 9, 46 93, 2005 页码 – 。[2] M. Vergne 和 H. Rossi, 《半单李群全纯离散系列的解析延拓》, *Acta Math.*, 第 136 卷, 第 1-2 期, 第 1–59 页, 1976 年。[3] A. Dvorsky 和 S. Sahi, 《某些幂零表示的显式希尔伯特空间 II》, *Invent. Math.*, 第 138 卷, 第 1 期, 第 203–224 页, 1999 年。[4] T. Kobayashi 和 B. Ørsted, 《O(p, q) 极小表示的分析 III: $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$上的超双曲方程》, *Adv. Math.*, 第 180 卷, 第 2 期, 第 551–595 页, 2003 年。[5] T. Kobayashi 和 G. Mano, 《不定正交群 O(*p*, *q*) 极小表示的薛定谔模型》, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 第 213 卷, 第 1000 期, 第 vi+132 页, 2011 年。[6] J. Hilgert、T. Kobayashi 和 J. M ¨ollers, *J. Math. Soc. Japan* 66, 2, 349 414, 2014 《通过贝塞尔算子构造极小表示》, , 第 卷, 第 期, 第 – 页。[7] G. B. Folland, 《*Harmonic analysis in phase space*》, 第 *Annals of Mathematics Studies* 卷第 122 册。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1989 年。[8] J. Hilgert、T. Kobayashi、J. M¨ollers 和 B. Ørsted, 《厄米李群极小表示的福克模型与 Segal-Bargmann 变换》, *J. Funct. Anal.*, 第 263 卷, 第 11 期, 第 3492–3563 页, 2012 年。[9] S. Barbier 和 K. Coulembier, 《李（超）代数的多项式实现与贝塞尔算子》, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 第 10 期, 第 3148–3179 页, 2017 年。[10] S. Barbier 和 J. Frahm, 《正交辛李超群的一个极小表示》, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2019 年。[11] S. Barbier、S. Claerebout 和 H. De Bie, 《正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}$ m $2|2n$ *SIGMA* (,) 极小表示的福克模型与 Segal-Bargmann 变换》, , 第 卷, 页码 页数, 。[12] T. Kobayashi 和 B. Ørsted, *Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 16, 085, 33 2020 《O(p, q) 极小表示的分析 I：通过共形几何实现》, *Adv. Math.*, 第 180 卷, 第 2 期, 第 486–512 页, 2003 年。[13] T. Kobayashi 和 B. Ørsted, 《O(p, q) 极小表示的分析 II：分支律》, *Adv. Math.*, 第 180 卷, 第 2 期, 第 513–550 页, 2003 年。[14] S. Barbier 和 S. Claerebout, 《例外李超代数 $D(2,1;\alpha)$ 的薛定谔模型、福克模型与交织 Segal-Bargmann 变换》, *J. Lie Theory*, 第 31 卷, 第 4 期, 第 1153–1188 页, 2021 年。[15] S. Barbier 和 S. Claerebout, 《例外李超群 $\mathbb{D}(2,1;\alpha)$ 的超幺正福克模型》, *Preprint. arXiv:2301.07982*, 2023 年。[16] K.-H. Neeb 和 H. Salmasian, 《李超群、酉表示与不变锥》, 载于 *Supersymmetry in mathematics and physics*, 第 *Lecture Notes in Math.* 卷第 2027 册, 第 195–239 页, 施普林格, 海德堡, 2011 年。[17] A. de Goursac 和 J.-P. Michel, 《海森堡超群的超酉表示》, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2018 年 8 月。rny184。[18] G. M. Tuynman, 《超李群的左正则表示》, *J. Lie Theory*, 第 29 卷, 第 1 期, 第 1–78 页, 2019 年。[19] S. Barbier 和 K. Coulembier, 《约旦超代数的结构与 TKK 代数》, *Comm. Algebra*, 第 46 卷, 第 2 期, 第 684–704 页, 2018 年。[20] S.-J. Cheng 和 W. Wang, 《*Dualities and representations of Lie superalgebras*》, 第 *Graduate Studies in Mathematics* 卷第 144 册。美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2012 年。[21] C. Carmeli、L. Caston 和 R. Fioresi, 《*Mathematical foundations of supersymmetry*》。EMS 数学讲义系列, 苏黎世：欧洲数学会（EMS）, 2011 年。[22] I. M. Musson, 《*Lie superalgebras and enveloping algebras* 131 *Graduate Studies in Mathematics* 2012》, 第 卷第 册。美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 。[23] J. M¨ollers 和 B. Schwarz, 《约旦对上的贝塞尔算子与半单李群的小表示》, *J. Funct. Anal.*, 第 272 卷, 第 5 期, 第 1892–1955 页, 2017 年。[24] A. Alldridge, 《Harish-Chandra 超模的 Fr´echet 全局化》, , 第 期, 第 – 页。[25] D. A. Vogan, Jr., 《奇异幺正表示》, 载于 *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980)* 880 *Lecture Notes in Math.* 506 535, , 第 卷第 册, 第 – 页, 施普林格, 柏林-纽约, 1981 年。

Department of Electronics and Information Systems, Faculty of Engineering and Architecture, Ghent University, Krijgslaan 281, 9000 Gent, Belgium.*Email address*: Sigiswald.Barbier@UGent.be

Department of Electronics and Information Systems, Faculty of Engineering andArchitecture, Ghent University, Krijgslaan 281, 9000 Gent, Belgium.*Email address*: Sam.Claerebout@UGent.be