arXiv:2303.00381v1 [math.OC] 1 Mar 2023

事件触发的线性波动方程边界阻尼

Lucie Baudouin* Swann Marx† Sophie Tarbouriech* Julie Valein‡

2023年3月2日

摘要

本文分析了在一种经过精心设计的事件触发机制下，多维偏微分波动方程的稳定化问题，该机制对边界控制输入进行采样。波动方程定义在一个有界区域内，并通过边界经典阻尼项实施控制，其中诺伊曼边界条件与速度成正比。首先，证明了事件触发控制机制下闭环系统解的存在性和正则性。随后，提出了基于特定李雅普诺夫泛函的充分条件，以确保解收敛到一个包含原点的紧集内，该紧集可由设计者进行调节。此外，正如预期，闭环系统中的任何芝诺行为都会被避免。

关键词：波动方程、事件触发边界控制、李雅普诺夫泛函、实用稳定性、无芝诺行为。

致谢：本研究部分受法国资助项目 ANR-19-CE48- 0004-01（ODISSE）、ANR-20-CE40-0009（TRECOS）以及 CIMI LabEx，ANR-11-LABX- 0040 的资助。

1 引言

如今，利用连续反馈律对多维线性波动方程进行边界稳定化已相当成熟，如 [19], [17], [18], [35, 第7节6] 或 [14] 所示。我们还可以提及该反馈受到时滞影响的情形（例如参见 [25]）。

因此，探讨这类系统的控制律如何进行数字化实现，或者等价地，考虑通过遵循非周期律的采样保持机制来修改现有连续反馈，是很有意义的。具体而言，后者遵循事件触发式 控制律。这个问题最初是在有限维情形下展开研究的（例如，参见 [28, 34]），与此类反馈律的实现密切相关：每一时刻都修改反馈在数值计算上可能负担很重，因此人们更倾向于只在某些时刻更新反馈。此外，人们希望根据可能损害系统稳定性的事件来选择这些时刻。这也说明了为何更新时刻是非周期选取的。然而，从理论角度看，主要问题之一与芝诺现象可能发生有关，即在有界时间区间内无限次触发控制更新

*LAAS-CNRS，图卢兹大学，法国国家科学研究中心，法国图卢兹。电子邮件：baudouin@laas.fr，tarbour@laas.fr。
†LS2N，南特中央理工学院和 CNRS UMR 6004，法国国家科学研究中心，法国南特。电子邮件：swann.marx@ls2n.fr。
‡洛林大学、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究所、洛林大学数学研究所，F-54000 南锡，法国。电子邮箱：julie.valein@univ-lorraine.fr。

，或者等价地说，更新时刻序列可能在某个有限的时间范围内聚集。

除有限维情形外，近年来事件触发机制也已应用于一些偏微分方程。据我们所知，首次应用可追溯至 [9, 10], ，研究的是一维双曲方程系统。同样在这一背景下，我们还可以提及 [7] ，该文研究了采用周期更新的采样数据控制器控制线性双曲系统的情形。此外， [11]也值得一提，该文研究了反应扩散偏微分方程。最后， [36]从半群视角将某种周期性事件触发控制应用于抽象系统。

除最后这项研究外，迄今为止所考虑的大多数系统在空间变量上都是一维的。然而，近年来，[20] 和 [21], 从事件触发控制的角度研究了多维波动方程或薛定谔方程。与我们将在此研究的边界反馈律不同， [20] 和 [21]中的边界反馈律作用于整个空间区域，这尤其使得研究者能够采用某种有限维策略来证明芝诺现象不会发生。

如前所述，我们关注的是边界反馈律情形，该情形对应于无界控制算子，因此会带来需要克服的特定困难。据我们所知，这是首次将此类策略应用于多维偏微分方程。事实上，与 [36], 相比，我们允许控制是非周期的。然而，由于在考虑此类设置时缺乏正则性，我们无法给出渐近稳定性结果，而只能证明解收敛到一个紧集。实际上，我们提出了基于适当李雅普诺夫泛函的充分条件，以确保解收敛到一个包含原点且形状可调的紧集；在自动控制理论中，这对应于实用稳定性。相较于 [20], ，这是一个显著特点；在 [20], 中，我们研究了事件触发机制下的波动方程，该机制会更新分布式阻尼源项。

本文的结构如下。第 2 节介绍主要问题以及构成本论文框架的问题（以数学方式表述）。论文的主要结果及其证明汇总于第 3 节。第 4 节给出了一些数值示例，以说明我们的反馈律的有效性，并在最后给出总结性意见和进一步的研究方向。

记号：集合 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开有界区域，其边界为 $\partial\Omega$。函数 z关于 x_i的偏导数记为 $\partial_{x_i} z = \frac{\partial z}{\partial x_i}$，梯度是向量函数 $\nabla z = (\partial_{x_i} z)_{i=1,\dots,n}$，其法向分量记为 $\partial_\nu z = \nabla z \cdot \nu$； ν是 Ω 的单位外法向量。Ω 上取值于 $\mathbb{R}$ 的平方可积函数构成的希尔伯特空间记为 $L^2(\Omega)$，其内积为 $\langle z_1, z_2 \rangle = \int_\Omega z_1(x) z_2(x) dx$，相应的范数记为 $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$。索博列夫空间 $\left\{ z \in L^2(\Omega) \middle| \nabla z \in \left(L^2(\Omega)\right)^N \right\}$ 记为 $H^1(\Omega)$，其范数为 $\|z\|_{H^1}^2 = \|z\|^2 + \|\nabla z\|^2$。$\Omega$ 的庞加莱常数记为 C_Ω （见附录中的引理 3）。对于边界值函数空间 $L^2(\partial\Omega)$，其范数的记法将明确写作 $\|z\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} |z(x)|^2 d\sigma$ 。最后，拉普拉斯算子记为 $\Delta z = \sum_{n=1}^N \partial_{x_n}^2 z$。本文中， $z = z(t, x)$表示演化偏微分方程的无限维状态。

2 问题陈述

我们研究定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的多维波动方程，并通过边界 $\partial\Omega$ 的一部分 Γ_1 对其进行控制。所考虑的偏微分系统描述如下：

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ z(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu z(t,x) = u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ z(0,x) = z_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_t z(0,x) = z_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中， z 和 u 分别表示状态和控制变量。未知量 z 的狄利克雷边界数据在 $\partial\Omega$的一个非空部分 Γ_0 上为齐次数据，而 u 是在互补部分 $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$上起作用的诺伊曼边界控制。

众所周知（例如参见 [35]），如果 $u \in L^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_1))$和（$z_0, z_1$） $\in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$，并且假设它们在 $\{0\} \times \partial\Omega$上满足适当的相容条件，那么初边值问题（2.1）是适定的，并且具有如下正则性的唯一解

$$z \in C^0(\mathbb{R}_+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$$

其中

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

借鉴 [17], 的引言，我们回顾一下：关于寻找能够产生指数衰减的大类边界反馈，最一般的结果由 Bardos、Lebeau 和 Rauch 在 [3], 中证明，他们刻画了一个关于光学规则射线 Γ_1 的几何控制条件。然而，他们的方法无法提供明确的衰减率估计。另一方面，我们希望在此探讨一些能够使能量指数快速衰减的特殊反馈，并研究如何通过精心设计的事件触发反馈律来维持这种特性。

实际上，我们认为控制输入将采用以下形式

$$u(t,x) := -\alpha(x)\partial_t z(t,x) \tag{2.2}$$

其中边界阻尼权重 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ 表示为

$$\alpha(x) = \alpha_1(x - x_0) \cdot \nu(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \forall x \in \Gamma_1, \tag{2.3}$$

其中 $\alpha_1 > 0$ 为调节系数， ν 为 Ω 的单位外法向量。此处需要注意，控制算子因此是无界的，因为控制仅作用于区域 Ω 的边界上。

然而，若 Γ_1 满足以下几何条件，对于 $x_0 \notin \Omega \subset \mathbb{R}^n$，

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\} \tag{2.4}$$

并且，如果 Γ_1 和 $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ 满足 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$，那么闭环系统的原点是全局指数稳定的（参见 [17]）。关于相同类型情形下此前的可控性结果，例如参见 [23], [Lasiecka 等人（1986） Lasiecka、Lions 和 Triggiani] （或阅读 [14], [35]）。

注 1. 关于 $\partial\Omega$ 的边界部分 Γ_0 和 Γ_1 的假设大致意味着：Ω 是一个带孔区域，且 x_0 位于该孔内，因此 Γ_0 是内边界，而 Γ_1 是外边界。设置这种“不接触”约束的主要原因，在于我们需要利用 $H^2(\Omega)$ 正则性来构建控制回路。

本文的目标是研究如何在采样保持机制下实现控制输入 $u = -\alpha\partial_t z$，以获得尽可能好的稳定化效果。具体来说，施加在 Γ_1 上的控制仅在特定时刻 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 更新，并在相邻两个采样时刻之间保持恒定。此外，这些采样时刻构成一个递增序列，但并非按周期选取，而是遵循下文给出的专门设计的事件触发规则。

更准确地说，我们拟施加的控制输入可写为

$$u(t,x) = -\alpha(x)\partial_t z(t_k,x), \quad \forall (t,x) \in [t_k, t_{k+1}[\times\Gamma_1 \tag{2.5}$$

从而得到以下闭环系统：

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x) = 0, & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ z(t,x) = 0, & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu z(t,x) = -\alpha(x)\partial_t z(t_k,x), & \text{on } [t_k, t_{k+1}[\times\Gamma_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ z(0,x) = z_0(x),\ \partial_t z(0,x) = z_1(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

在详细说明触发律之前，先将波动方程的自然能量（动能与势能之和）定义为

$$E(t) = E(z(t), \partial_t z(t)) := \frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t z(t)\|^2, \tag{2.7}$$

注意，闭环系统的状态实际上由两个分量组成 $\begin{pmatrix} z \\ \partial_t z \end{pmatrix}$。

现在，我们可以陈述本文将要分析的问题。

问题1。 考虑如下简化的事件触发律：

$$t_{k+1} := \inf\Big\{ t \geq t_k,\ \|\partial_t z(t) - \partial_t z(t_k)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - \gamma E(t) - \nu_0 \geq 0 \Big\}, \tag{2.8}$$

我们希望设计正参数 γ 和 ν_0 ，以保证：

(i) 闭环系统(2.6)-(2.8)的适定性，

(ii) 闭环解向紧集 $\mathcal{A}$的全局收敛，该紧集对应于对全局稳定吸引子的外估计，

(iii) 不存在芝诺行为。

该采样律受到 [20], 的启发，其中控制算子是有界的，但它在此处所能证明的收敛定理（见下一节）与 [20]中证明的指数稳定性结果存在细微差异。简而言之， ν_0 一项旨在保证不存在芝诺行为；由于控制算子具有无界性，这一点无法通过其他方式获得。当无限更新序列 t_k 能够

在有限时间内触发时，就会出现这种芝诺现象。 ν_0 项证明了更新序列中不存在聚点（t_k）$_{k\in\mathbb{N}}$。然而，它允许原点邻域具有吸引性（正如将在主要结果部分看到的，另见 [2], [16], [28]），甚至允许系统向全局吸引子实现指数收敛，但会阻止系统像 [20]中那样实现原点的指数稳定性。

进一步介绍我们的工作时，应当注意，实际上，在连续情形 (2.1)-(2.2) 中，(2.7) 中定义的能量 E 是一个弱李雅普诺夫泛函。它只是我们在定义吸引子时所需的（严格）李雅普诺夫泛函的一部分，也是证明收敛结果时所用泛函的一部分。但事实上，对 E形式地计算时间导数，并经过若干次分部积分后，可得

$$\dot{E}(t) = \int_{\Gamma_1} u(t,x)\partial_t z(t,x)\, d\sigma = -\int_{\Gamma_1} \alpha(x)\left|\partial_t z(t,x)\right|^2 d\sigma \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

因此，我们在此定义一个李雅普诺夫泛函候选，其形式为 $\varepsilon > 0$:

$$V(t) = V(z(t), \partial_t z(t)) := E(t) + \varepsilon \int_\Omega \left(2(x-x_0)\cdot\nabla z(t,x) + (n-1)z(t,x)\right)\partial_t z(t,x)\, dx, \qquad (2.9)$$

旨在展示满足 $\dot{V}(t) \le -2\delta V(t)$、$\forall t \ge 0$ 的条件。该泛函的选择源自文献 [19]，关于详细信息及相关参考文献，也可参阅 [35]。

最后，由于 (2.8) 中提出的采样律是非周期的，我们必须仔细检查它是否会导致芝诺现象。为此，我们引入最大时间 T^*，在此时间范围内，受该事件触发规则作用的闭环系统存在解:

$$\begin{cases} T^* = +\infty & \text{if } (t_k) \text{ is a finite sequence,} \\ T^* = \limsup\limits_{k\to+\infty} t_k & \text{if not.} \end{cases} \qquad (2.10)$$

因此，本文后文中，对不存在芝诺行为的证明实际上将由对 $T = +\infty$ 的证明得出，因为序列 $(t_k)_{k\ge0}$ 不可能存在聚点。

3 主要结果

本节首先给出本文的核心结果，回答问题1中的第 (ii) 项。随后讨论 (i) 和 (iii)，这两者确实密切相关。最后，给出保证 (ii) 的定理证明。

3.1 稳定性与收敛定理

下面陈述本文的主要结果，描述轨迹全局指数收敛到吸引子的条件。

定理 1. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $R = \max_{x\in\Gamma_1}|x-x_0|$, $\alpha_1 > 0$ 分别为边界阻尼系数和区域Ω 的 *Poincar´e* 常数（见附录）。令事件触发控制律(2.8) 由

某些调节参数 $\gamma > 0$ 和 $\nu_0 > 0$定义。假设存在系数 $\lambda_1 > 0$,$\lambda_2 > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1/(2R + (n-1)C_\Omega)$，使得

$$-\varepsilon + \frac{\lambda_1 \gamma}{2} + \lambda_2 C_\Omega (R + nC_\Omega) < 0 \tag{3.1}$$

且以下线性矩阵不等式成立

$$M := \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & -(n-1)\alpha_1\varepsilon/2 & (n-1)\alpha_1\varepsilon/2 \\ * & -\varepsilon/R^2 & -\alpha_1\varepsilon & \alpha_1\varepsilon \\ * & * & \varepsilon - \alpha_1 & \alpha_1/2 \\ * & * & * & -\lambda_1/R \end{pmatrix} \prec 0. \tag{3.2}$$

那么，对于任意初始状态 $(z_0, z_1) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，系统 (2.6) 在事件触发规则 (2.8)下的闭环轨迹 $\begin{pmatrix} z \\ \partial_t z \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \times C(\mathbb{R}_+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ 指数快速地收敛到吸引子

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \ such\ that\ V(v,w) < r \right\}$$

with

$$V(v,w) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 + \varepsilon\big(\langle 2(x - x_0)\cdot\nabla v, w\rangle + \langle (n-1)v, w\rangle\big),$$

一个半径

$$r = \lambda_1 \nu_0 \left(\frac{2\varepsilon - \lambda_1\gamma - 2\lambda_2 C_\Omega (R + nC_\Omega)}{(1 + \varepsilon(2R + (n-1)C_\Omega))} - 2\delta \right)^{-1}$$

以及一个指数衰减率

$$\delta < \frac{\varepsilon - \frac{\lambda_1\gamma}{2} - \lambda_2 C_\Omega (R + nC_\Omega)}{1 + \varepsilon(2R + (n-1)C_\Omega)}. \tag{3.3}$$

于是，问题*1*的第*(ii)*项得到了解决。

从某种意义上说，该定理证明了自治闭环系统 (2.6)-(2.8) 是全局实际稳定的，因为该系统的任意解都收敛于吸引子 $\mathcal{A}$。注意，所考虑的球可以任意小，但不能等于原点。

注2. 如果想要像 *[4]*, 中那样，用术语 $\epsilon_0 e^{-2\theta t}$替换事件触发规则(2.8) 中的术语 ν_0，首先应注意，相关的闭环系统不再是自治系统。但如果我们设定

$$0 < \epsilon_0 < E(0) = \|(z_0, z_1)\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \tag{3.4}$$

并选择 $\delta < \theta$，可以证明能量估计 $E(t) \le KE(0)e^{-2\delta t}$，从而系统能量以速率 δ 指数衰减并趋向其平衡点，只要存在系数$\lambda_1 > 0$、 $\lambda_2 > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1/(2R + (n-1)C_\Omega)$，使线性矩阵不等式 (3.2) 成立，且

$$-\varepsilon + \delta + \frac{\lambda_1\gamma}{2} + \lambda_2 C_\Omega (R + nC_\Omega) < 0. \tag{3.5}$$

然而，这一非零初始能量条件 (3.4) 带来了一个令人质疑的情况：既无法据此讨论全局指数稳定性，也无法将其结果定义为局部指数稳定性。事实上，指数稳定性结果关于初始数据缺乏一致性，正是我们陈述定理 *1* 而非这一收敛结果的确切原因。

注 3。 与针对具有域内采样阻尼的波动方程所能提出的较简单设定（见 *[20]*）相比，后者不需要额外项 ν_0 或 $\epsilon_0 e^{-2\theta t}$，应当注意，这里的关键仅在于避免芝诺行为。在域内阻尼的情形下，有一条引理证明了系统能量的非消失性质，因此我们不需要这些额外项。当涉及边界控制时，由于其无界性质，无法证明这样的引理。

3.2 闭环系统的适定性

以下结果保证问题1的第（i）项和第（iii）项均成立。

定理 2。 考虑事件触发机制 (2.8) 下的线性波动方程 (2.6) 。对于任意初始条件 $(z_0, z_1) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，存在唯一解

$$z \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$$

并且避免了芝诺现象。

在证明该定理之前，值得注意的是，我们只能针对强解证明这一结果。这主要是因为我们使用了迹定理，而迹定理要求解具有强正则性。

证明。 - 定理 2 的证明分为三个步骤。首先，我们证明对于事件触发律 (2.8)，闭环系统 (2.6) 在每个采样区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上适定，从而得到唯一解 $z \in C([0, T^*); H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1([0, T^*); H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$。然后，我们证明 (2.6)-(2.8) 避免了芝诺现象。最后，综合这些信息可知，对于任意 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$，解 $z(t, x)$ 均存在。

•解的存在性、唯一性与正则性：
我们采用归纳法。首先，关注初始化区间 $[0, t_1]$，并证明解属于所需的函数空间且是唯一的。然后，假设对于某个固定整数 k，正则性一直成立到 t_{k+1}，并在下一个时间区间内按照在 $[0, t_1]$ 上相同的方式继续进行。

初始化。 在第一个时间区间内，(2.6) 写作

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,t_1] \times \Omega \\ z(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,t_1] \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu z(t,x) = -\alpha(x) z_1(x), & (t,x) \in [0,t_1] \times \Gamma_1 \\ z(0,x) = z_0(x),\ \partial_t z(0,x) = z_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

这是一个带有非齐次边界条件的波动方程。根据假设，$(z_0, z_1) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$。由于 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$（如需了解详情，请参见 [35,第 13 节6]），且 $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$，因此有 $-\alpha z_1|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$。

- 一方面，考虑 y_s 定常问题的解

$$\begin{cases} -\Delta y_s(x) = 0, & x \in \Omega \\ y_s(x) = 0, & x \in \Gamma_0 \\ \partial_\nu y_s(x) = -\alpha(x) z_1(x), & x \in \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

另一方面，定义 $\widetilde{y}$ 使得 $\partial_\nu \widetilde{y} = -\alpha(x) z_1(x) \in H^{1/2}(\Omega)$。根据迹定理（例如参见 [24, 定理 9.4]），$\widetilde{y} \in H^2(\Omega)$。现在定义一个截断函数 $\eta \in C^\infty(\Omega)$，使得 $\eta = 1$ 在 Γ_1 上成立，并且在 Γ_1 的某个邻域之外满足 $\eta = 0$，然后令 $w = y_s - \eta \widetilde{y}$。则 w 满足

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = g, & x \in \Omega \\ w(x) = 0, & x \in \Gamma_0 \\ \partial_\nu w(x) = 0, & x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

其中 $g = (\Delta \eta)\widetilde{y} + 2\nabla \eta \cdot \nabla \widetilde{y} + \eta \Delta \widetilde{y} \in L^2(\Omega)$。利用第 6.3.1 节中的 [12, 定理 1],，可得 $w \in H^2(\Omega)$。因此 $y_s = w + \eta \widetilde{y} \in H^2(\Omega)$。

- 现在考虑演化方程的 y_e 解

$$\begin{cases} \partial_t^2 y_e(t,x) - \Delta y_e(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,t_1] \times \Omega \\ y_e(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,t_1] \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu y_e(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,t_1] \times \Gamma_1 \\ y_e(0,x) = z_0(x) - y_s(x), & x \in \Omega \\ \partial_t z(0,x) = z_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

由于 $(z_0 - y_s, z_1) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，利用 Lumer-Phillips 定理，可以证明（例如参见 [35, 第 3.9] 节，$b = 0$）系统 (3.8) 存在唯一解

$$y_e \in C^0([0,t_1]; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1([0,t_1]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) := \mathcal{H}_0.$$

- 因此，(3.6) 的 $z = y_s + y_e$ 解也满足 $z \in \mathcal{H}_0$。
并且由于 $\partial_t z = \partial_t y_e$，我们可以推得 $\partial_t z(t_1, \cdot) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，因此 $\partial_t z(t_1, \cdot)|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$。

注 4. 假设 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ 是一项强制条件，它与我们对解 z 所要求的 $H^2(\Omega)$ 正则性密切相关。

遗传性。固定 $k \in \mathbb{N}$ 并假设

$$z \in C([t_k, t_{k+1}]; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1([t_k, t_{k+1}]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) := \mathcal{H}_k.$$

记 z_{2k+2} 和 z_{2k+3} 为波在时间 t_{k+1} 时的位置函数值和速度函数值（根据定义，满足相容性条件）。现在考虑时间区间 $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ 上的（2.6）：

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x) = 0, & \text{in } [t_{k+1}, t_{k+2}] \times \Omega \\ z(t,x) = 0, & \text{on } [t_{k+1}, t_{k+2}] \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu z(t,x) = -\alpha(x) z_{2k+3}(x), & \text{in } [t_{k+1}, t_{k+2}] \times \Gamma_1 \\ z(t_{k+1}) = z_{2k+2},\ \partial_t z(t_{k+1}) = z_{2k+3}, & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

由于根据归纳假设， $z_{2k+2} = z(t_{k+1}) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 且 $z_{2k+3} = \partial_t z(t_{k+1}) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $-\alpha z_{2k+3}|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$。然后我们可以应用（$i$）的结果，并且存在唯一解$z \in \mathcal{H}_{k+1}$.

结论。由归纳法可知，对任意 $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathcal{H}_k$ 因此，根据在时刻 t_k 处通过连续性进行的延拓，可以得出 (2.6) 有唯一解

$$z \in C([0,T^*); H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1([0,T^*); H^1_{\Gamma_0}(\Omega)).$$

•避免芝诺现象：
目标是证明，对于满足触发律 (2.8) 的系统 (2.6)，有限时间内不可能发生无限次更新。更具体地，我们将证明由 (2.10) 定义的闭环系统的解的最大存在时间 T^* 不可能是有限的。否则，序列 $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 将有一个聚点，从而导致芝诺行为。

假设 $\lim_{k\to+\infty} t_k = T^* < +\infty$。证明依赖于 $t \mapsto \partial_t z(t, \cdot)$ 作为从 $[0,T^*)$ 到 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 的函数的连续性，并将其在 T^* 处连续延拓为： $\partial_t z(T^*, \cdot) = \lim_{t\to T^*} \partial_t z(t, \cdot)$。由迹定理可推得，$t \mapsto \partial_t z(t, \cdot)$ 是从紧集$[0,T^*]$ 到希尔伯特空间 $L^2(\Gamma_1)$ 的一致连续函数。

根据这一一致连续性定义的逆否命题可知，对于所有 $\eta > 0$，存在 $\tau > 0$，使得对于所有 $s, t \in [0,T^*]$

$$\|\partial_t z(t) - \partial_t z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)} > \eta \quad \Rightarrow \quad |t-s| > \tau.$$

因此，选取 $k \in \mathbb{N}$ 并将这一性质应用于 $s = t_k$、 $t = t_{k+1}$，最终需要证明可以找到一个与 k无关的下界，使量 $\|\partial_t z(t_{k+1}) - \partial_t z(t_k)\|_{L^2(\Gamma_1)}$ 有界于该下界之上，从而避免芝诺现象。

事实上，根据事件触发规则（2.8）中 t_{k+1} 的定义，我们有

$$\|\partial_t z(t_{k+1}) - \partial_t z(t_k)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \geq \gamma E(t_{k+1}) + \nu_0 \geq \nu_0 > 0$$

因此，根据一致连续性 $|t_{k+1} - t_k| > \tau$，从而产生矛盾。
由此可以得出，芝诺行为得以避免。

• 结论：
我们刚刚证明了 $\lim_{k\to+\infty} t_k = T^* = +\infty$，从而

$$z \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)),$$

可以结束定理 2 的证明。 □

3.3 闭环稳定性

在本节中，我们证明定理 1，从而能够验证问题1的第 (ii) 项。具体而言，我们将展示系统能量（记为 $E(t)$）与式 (2.9) 中所考虑的李雅普诺夫泛函之间的联系，以处理闭环稳定性。

定理 *1* 的证明。除了式 (2.7) 中给出的能量 $E(t)$ 外，定义

$$\rho(t) = \rho(z(t), \partial_t z(t)) := \int_\Omega \left(2(x - x_0) \cdot \nabla z(t,x) + (n-1) z(t,x)\right) \partial_t z(t,x)\, dx \tag{3.9}$$

从而，式 (2.9) 中给出的李雅普诺夫泛函候选 $V(t)$ 满足：

$$V(t) = E(t) + \varepsilon \rho(t).$$

这些泛函 E、ρ 和 V 都定义在满足以下条件的 (2.6) 的状态轨迹上（根据定理 2）：

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \partial_t z(t) \end{pmatrix} \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

为简便起见，它们都记作 $F(t)$，而不是 $F(z(t)\ \partial_t z(t))$。

•第一步：Le $\widetilde{\ }$让我们证明，存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $t \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$|V(t) - E(t)| \leq \widetilde{C} \varepsilon E(t). \tag{3.10}$$

因此，如果取 $\varepsilon < 1/C$，系统的能量 E 与所提出的李雅普诺夫泛函 V 将是$\widetilde{\ }$等价的。

回顾 $R = \max_{x \in \Gamma_1} |x - x_0|$。确实，利用附录中回顾的柯西–施瓦茨不等式和庞加莱不等式，很容易证明

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}|V(t) - E(t)| = |\rho(t)| &= \left| \int_\Omega \left(2(x - x_0) \cdot \nabla z(t,x) + (n-1) z(t,x)\right) \partial_t z(t,x)\, dx \right| \\ &\leq \|\partial_t z(t)\| \left(2R \|\nabla z(t)\| + (n-1)\|z(t)\|\right) \\ &\leq \left(2R + (n-1) C_\Omega\right) \|\partial_t z(t)\| \|\nabla z(t)\| \\ &\leq \left(2R + (n-1) C_\Omega\right) E(t). \end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$因此，对于常数 $C = 2R + (n-1)C_\Omega$，结论 (3.10) 成立。最后一个估计（见引理 1）使用杨氏不等式，其中取 $\eta = 1$ 和 $a = \|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}$ 以及 $b = \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}$，最终得到

$$\left(1 - 2R\varepsilon - (n-1)\varepsilon C_\Omega\right) E(t) \leq V(t) \leq \left(1 + 2R\varepsilon + (n-1)\varepsilon C_\Omega\right) E(t). \tag{3.11}$$

因此，通过选择 ε 使得 $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2R + (n-1)C_\Omega} = 1/C$，我们能够保证不等式 (3.11) 成立，其形式为

$$0 < (1 - \varepsilon \widetilde{C}) E(t) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon \widetilde{C}) E(t). \tag{3.12}$$

•第二步：

这一步的目标是计算并估计泛函 V 沿闭环系统 (2.6) 的轨迹且采用事件触发机制 (2.8) 时的时间导数，该机制如下：

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x) = 0, & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ z(t,x) = 0, & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu z(t,x) = -\alpha(x) \partial_t z(t,x) + \alpha(x) e_k(t,x), & \text{on } [t_k, t_{k+1}[\times \Gamma_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ z(0,x) = z_0(x),\ \partial_t z(0,x) = z_1(x), & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中我们使用了

$$e_k(t,\cdot) := \partial_t z(t,\cdot) - \partial_t z(t_k,\cdot), \quad \text{on } \Gamma_1, \ \forall t \in [t_k, t_{k+1}[. \tag{3.14}$$

利用分部积分、边界条件以及式 (2.3) 中给出的 α 的定义，对于所有满足 $t \in [t_k, t_{k+1}[$, 的 $t \geq 0$, 一方面，由于函数 z 足够光滑,

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\partial_t z(t,x)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla z(t,x)|^2\,dx\right) \\
&= \int_\Omega \partial_t^2 z(t,x)\partial_t z(t,x)\,dx + \int_\Omega \partial_t \nabla z(t,x)\cdot\nabla z(t,x)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(\partial_t^2 z(t,x) - \Delta z(t,x)\right)\partial_t z(t,x)\,dx + \int_{\Gamma_1} \partial_t z(t,x)\partial_\nu z(t,x)\,d\sigma \\
&= -\alpha_1 \int_{\Gamma_1} |\partial_t z(t,x)|^2\,(x-x_0)\cdot\nu(x)\,d\sigma + \alpha_1 \int_{\Gamma_1} e_k(t,x)\partial_t z(t,x)\,(x-x_0)\cdot\nu(x)\,d\sigma
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left(2(x-x_0)\cdot\nabla z(t,x) + (n-1)z(t,x)\right)\partial_t z(t,x)\right) \\
&= \int_\Omega \left(2(x-x_0)\cdot\nabla z(t,x)\right)\Delta z(t,x)\,dx + \int_\Omega (n-1)z(t,x)\Delta z(t,x)\,dx \\
&\quad + \int_\Omega (x-x_0)\cdot\nabla(|\partial_t z(t,x)|^2)\,dx + \int_\Omega (n-1)|\partial_t z(t,x)|^2\,dx \\
&= 2\int_\Omega \Delta z(t,x)(x-x_0)\cdot\nabla z(t,x)\,dx - \int_\Omega (n-1)|\nabla z(t,x)|^2\,dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (n-1)z(t,x)\nabla z(t,x)\cdot\nu(x)\,d\sigma - \int_\Omega n|\partial_t z(t,x)|^2\,dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} |\partial_t z(t,x)|^2 (x-x_0)\cdot\nu(x)\,d\sigma + \int_\Omega (n-1)|\partial_t z(t,x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

现在我们详细计算这个表达式的第一项。这一结果称为 Rellich 恒等式 [17] （另见 [35, 引理 7.6.3]），其表述为：对于 $v \in H^2$,

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \Delta v(x)(x-x_0)\cdot\nabla v(x)\,dx &= (n-2)\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \\
&\quad + 2\int_{\partial\Omega} (x-x_0)\cdot\nabla v(x)\,\partial_\nu v(x)\,d\sigma - \int_{\partial\Omega} |\nabla v(x)|^2 (x-x_0)\cdot\nu(x)\,d\sigma
\end{aligned}$$

该式可通过分部积分证明。请注意，在限制条件较弱的情况下，也可以得到形式相同的估计（例如参见 [17]）。我们将其应用于 $v = z$ （t）。

因此，我们得到（为简化表达，省略变量 x ）

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) &= -\int_\Omega |\nabla z(t)|^2 - \int_\Omega |\partial_t z(t)|^2 + 2\int_{\partial\Omega} (x-x_0)\cdot\nabla z(t)\,\partial_\nu z(t) \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} |\nabla z(t)|^2 (x-x_0)\cdot\nu + \int_{\partial\Omega} (n-1)z(t)\partial_\nu z(t) + \int_{\partial\Omega} |\partial_t z(t)|^2 (x-x_0)\cdot\nu.
\end{aligned}$$

此外，应记住，对于任意 $t \geq 0$,

- 由于 $z(t,\ x) = 0$ 在 Γ_0上成立，因此可以推得，对于所有 $x \in \Gamma_0$，$\partial_t z(x,\ t) = 0$ 且 $\nabla z(x,\ t) = \partial_\nu z(x,\ t)\ \nu(x)$，从而 $\nabla z(x,\ t) \cdot (x - x_0) = \partial_\nu z(x,\ t)\ (x - x_0) \cdot \nu(x)$

- on Γ_1, $\partial_\nu z(x,t) = (-\partial_t z(x,t) + e_k(x,t))\, \alpha_1 (x - x_0) \cdot \nu(x)$.

因此，根据关于 Γ_0 和 Γ_1的这些假设，可得

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) \ &= \ -\int_\Omega |\nabla z(t)|^2 - \int_\Omega |\partial_t z(t)|^2 + \ 2\alpha_1 \int_{\Gamma_1} (x - x_0) \cdot \nabla z(t) \big(e_k(t) - \partial_t z(t)\big)(x - x_0) \cdot \nu \\
&\quad + 2\int_{\Gamma_0} |\partial_\nu z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu - \int_{\Gamma_0} |\nabla z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu - \int_{\Gamma_1} |\nabla z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} |\partial_t z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu + \ \alpha_1 \int_{\Gamma_1} (n-1) z(t) \big(e_k(t) - \partial_t z(t)\big)(x - x_0) \cdot \nu.
\end{aligned}$$

由于 $|\nabla z|^2 = |\partial_\nu z|^2$ 位于 Γ_0 上，且根据 $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ 的定义， Γ_0 上的边界项合并为一个负项

$$\int_{\Gamma_0} |\partial_\nu z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu \le 0.$$

. . 汇总 $E(t)$ 和 $\dot{\rho}(t)$ 的估计可得，对于 $V(t) = E(t) + \varepsilon\dot{\rho}(\ t)$,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \ &\le \ -\varepsilon \int_\Omega |\nabla z(t)|^2 - \varepsilon \int_\Omega |\partial_t z(t)|^2 + (\varepsilon - \alpha_1) \int_{\Gamma_1} |\partial_t z(t)|^2 \, (x - x_0) \cdot \nu \\
&\quad + \alpha_1 \int_{\Gamma_1} e_k(t) \partial_t z(t) \, (x - x_0) \cdot \nu - \varepsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu \\
&\quad - 2\alpha_1 \varepsilon \int_{\Gamma_1} (x - x_0) \cdot \nabla z(t) \, \partial_t z(t) \, (x - x_0) \cdot \nu + 2\alpha_1 \varepsilon \int_{\Gamma_1} (x - x_0) \cdot \nabla z(t) \, e_k(t) \, (x - x_0) \cdot \nu \\
&\quad - \alpha_1 \varepsilon \int_{\Gamma_1} (n-1) z(t) \partial_t z(t) (x - x_0) \cdot \nu + \alpha_1 \varepsilon \int_{\Gamma_1} (n-1) z(t) e_k(t) (x - x_0) \cdot \nu.
\end{aligned}$$

由于 $z(t) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，附录中给出并证明的引理 4 的迹估计表明，对于任意 $\lambda_2 > 0$，其中 $\beta = RC_\Omega + nC_\Omega^2$

$$-\lambda_2 \int_{\Gamma_1} |z(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu + \lambda_2 \beta \int_\Omega |\nabla z(t)|^2 \ge 0. \tag{3.15}$$

还要回顾一下 th 更新时刻 t_k 遵循事件触发律 (2.8)，因此对于任意 $\lambda_1 > 0$

$$-\frac{\lambda_1}{R} \int_{\Gamma_1} |e_k(t)|^2 (x - x_0) \cdot \nu + \frac{\gamma\lambda_1}{2} \int_\Omega |\nabla z(t)|^2 + \frac{\gamma\lambda_1}{2} \int_\Omega |\partial_t z(t)|^2 + \lambda_1 \nu_0 \ge 0. \tag{3.16}$$

因此，将 (3.15) 和 (3.16) 加到关于 $V(t)$ 的最后一个估计式右端，现在可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & \left(-\varepsilon+\frac{\gamma\lambda_1}{2}+\lambda_2\beta\right)\int_\Omega|\nabla z(t)|^2+\left(-\varepsilon+\frac{\gamma\lambda_1}{2}\right)\int_\Omega|\partial_t z(t)|^2-\lambda_2\int_{\Gamma_1}|z(t)|^2(x-x_0)\cdot\nu\\ &-\frac{\varepsilon}{R^2}\int_{\Gamma_1}|(x-x_0)\cdot\nabla z(t)|^2(x-x_0)\cdot\nu-\frac{\lambda_1}{R}\int_{\Gamma_1}|e_k(t)|^2(x-x_0)\cdot\nu\\ &+(\varepsilon-\alpha_1)\int_{\Gamma_1}|\partial_t z(t)|^2(x-x_0)\cdot\nu+\alpha_1\int_{\Gamma_1}e_k(t)\partial_t z(t)(x-x_0)\cdot\nu\\ &-2\alpha_1\varepsilon\int_{\Gamma_1}(x-x_0)\cdot\nabla z(t)\,\partial_t z(t)(x-x_0)\cdot\nu+2\alpha_1\varepsilon\int_{\Gamma_1}(x-x_0)\cdot\nabla z(t)\,e_k(t)(x-x_0)\cdot\nu\\ &-\varepsilon(n-1)\alpha_1\int_{\Gamma_1}z(t)\partial_t z(t)(x-x_0)\cdot\nu+\varepsilon(n-1)\alpha_1\int_{\Gamma_1}z(t)e_k(t)(x-x_0)\cdot\nu+\lambda_1\nu_0.\end{aligned}$$

我们将增广状态的边界迹定义为：对于所有 $(t,\ x)\in\mathbb{R}_+\times\Gamma_1$,

$$\xi(t,x)=(z(t,x),(x-x_0)\cdot\nabla z(t,x),\partial_t z(t,x),e_k(t,x))^\top$$

并注意到，状态的正则性 $z\in C^0(\mathbb{R}_+;\ H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))\cap C^1(\mathbb{R}_+;H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ z 使得$\xi(t)\in L^2(\Gamma_1)^4$ 成立，因为 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega)$。同时利用对称矩阵

$$M=\begin{pmatrix}-\lambda_2 & 0 & -(n-1)\alpha_1\varepsilon/2 & (n-1)\alpha_1\varepsilon/2\\ * & -\varepsilon/R^2 & -\alpha_1\varepsilon & \alpha_1\varepsilon\\ * & * & \varepsilon-\alpha_1 & \alpha_1/2\\ * & * & * & -\lambda_1/R\end{pmatrix}$$

最终可以将其写为

$$\dot{V}(t)\leq 2\left(-\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\lambda_2C_\Omega(R+nC_\Omega)\right)E(t)+\int_{\Gamma_1}\xi(t)^\top M\xi(t)(x-x_0)\cdot\nu+\lambda_1\nu_0. \tag{3.17}$$

• 第三步：最终的思路是确保当闭环的解 $(z,\ \partial_t z)$ 在吸引子之外演化时，也就是在 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times L^2(\Omega)\setminus\mathcal{A}$ 中演化时，能够得到 $V(t)<-2\delta V(t)$。我们将刻画真实吸引子的一个外逼近，因此考虑将 $\mathcal{A}$ 定义为李雅普诺夫泛函 V：

$$\mathcal{A}=\{(v,w)\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times L^2(\Omega);V(v,w)\leq\bar{r}\},$$

这里回顾一下

$$V(v,w)=\frac{1}{2}\int_\Omega|w|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2+\varepsilon\int_\Omega(2(x-x_0)\cdot\nabla v+(n-1)v)\,w.$$

我们首先　由 (3.17) 可计算得，在假设 (3.1) 成立且使用 (3.12) 的情况下　　：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)+2\delta V(t)\leq 2&\left(\frac{-\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\lambda_2C_\Omega(R+nC_\Omega)}{1+\varepsilon(2R+(n-1)C_\Omega)}+\delta\right)V(t)\\ &+\int_{\Gamma_1}\xi(t)^\top M\xi(t)(x-x_0)\cdot\nu+\lambda_1\nu_0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

现在应注意，只要……，(3.18) 的右端便为负

$$\frac{-\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\lambda_2 C_\Omega(R+nC_\Omega)}{1+\varepsilon(2R+(n-1)C_\Omega)}+\delta<0$$

$$M\prec 0$$

$$V(t)\geq\frac{\lambda_1\nu_0}{2}\left(\frac{-\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\lambda_2 C_\Omega(R+nC_\Omega)}{1+\varepsilon(2R+(n-1)C_\Omega)}+\delta\right)^{-1}.$$

因此，在满足定理 1 的假设 (3.1)、(3.2) 和 (3.3) 时，如果轨迹 $(z(t)\ \partial_t z(t))$ 演化于 $\mathcal{A}$ 之外，也就是说，如果 $V(t)\geq r$，则有

$$\dot{V}(t)\leq -2\delta V(t).$$

因此，我们证明了，对于函数空间 $H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 中的任意初始条件 (z_0,z_1)，闭环轨迹 $\begin{pmatrix}z\\ \partial_t z\end{pmatrix}\in C(\mathbb{R}_+;H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))\times C(\mathbb{R}_+;\ H^1_{\Gamma_0}$ 指数快速地收敛至吸引子 $(\Omega))$

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times L^2(\Omega)\text{ such that }V(v,w)<r\right\}.$$

至此，我们完成了定理 1 的证明。 □

3.4 定理假设的可行性。

最后，我们证明定理 1 的条件总是存在可行解 $(\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2)$。

定理 3. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $R=\max_{x\in\Gamma_1}|x-x_0|$, $\alpha_1>0$，且 C_Ω 为区域Ω的庞加莱常数。设 $\gamma>0$ 和 ν_0 为(2.8)中的调节参数。总存在系数 $\lambda_1>0$,$\lambda_2>0$和 $\varepsilon>0$，使得 $\varepsilon<1/(2R+(n-1)C_\Omega)$ 成立，且条件(3.1) （或(3.5)）和(3.2)均成立。因此，定理 *1* 的结论同样成立。

证明。 我们的目标是证明定理 1 的假设所构成的集合非空。首先，给定 (2.8) 中的调节参数 $\gamma>0$ 和 $\nu_0>0$ 后，需要寻找正定常数 λ_1, λ_2 和 $\varepsilon<1/(2R+(n-1)C_\Omega)$，使得

$$M\prec 0\quad\text{and}\quad -\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\lambda_2 C_\Omega(R+nC_\Omega)<0.$$

记 $a=(n-1)/2$，并将 $M=M_0-\lambda_2 B_0B_0^\top$写为

$$M=\begin{pmatrix}0&0&-a\alpha_1\varepsilon&a\alpha_1\varepsilon\\ 0&-\varepsilon/R^2&-\alpha_1\varepsilon&\alpha_1\varepsilon\\ -a\alpha_1\varepsilon&-\alpha_1\varepsilon&\varepsilon-\alpha_1&\alpha_1/2\\ a\alpha_1\varepsilon&\alpha_1\varepsilon&\alpha_1/2&-\lambda_1/R\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\lambda_2\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

利用芬斯勒引理（例如参见 [26], [8] ，相关内容见附录），我们得到了$M \prec 0$与 $X^\top M_0 X < 0$之间对所有 $X \in \ker B_0 \setminus \{0\}$的等价性。因此，记

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ satisfying } N_0^\top B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_0^\top N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这等价于

$$M_1 = N_0^\top M N_0 = N_0^\top M_0 N_0 = \begin{pmatrix} -\varepsilon/R^2 & -\alpha_1\varepsilon & \alpha_1\varepsilon \\ -\alpha_1\varepsilon & \varepsilon - \alpha_1 & \alpha_1/2 \\ \alpha_1\varepsilon & \alpha_1/2 & -\lambda_1/R \end{pmatrix} \prec 0.$$

同样，我们可以将 $M_1 = M_2 - \dfrac{\lambda_1}{R} B_2 B_2^\top$写为

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon/R^2 & -\alpha_1\varepsilon & \alpha_1\varepsilon \\ -\alpha_1\varepsilon & \varepsilon - \alpha_1 & \alpha_1/2 \\ \alpha_1\varepsilon & \alpha_1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda_1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

再次利用芬斯勒引理，对于所有$X \in \ker B_2 \setminus \{0\}$，我们可得 $M_1 \prec 0$ 与 $X^\top M_2 X < 0$ 等价。记

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ satisfying } N_2^\top B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_2^\top N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这等价于

$$M_3 = N_2^\top M_1 N_2 = N_2^\top M_2 N_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon/R^2 & -\alpha_1\varepsilon \\ -\alpha_1\varepsilon & \varepsilon - \alpha_1 \end{pmatrix} \prec 0.$$

现在很容易验证这样的线性矩阵不等式：只要 $\varepsilon > 0$和 $\varepsilon - \alpha_1 + \alpha_1^2 \varepsilon R^2 < 0$， M_3就是负定的（例如，利用舒尔补）。因此，我们证明了存在 $\lambda_1 \geq 0$ 和$\lambda_2 \geq 0$ 以及 ε ，使得

$$0 < \varepsilon < \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1^2 R^2}$$

可为线性矩阵不等式假设 $M \prec 0$提供一个可行解。此外，请记住，我们还必须满足

$$\varepsilon < \frac{1}{2R + (n-1)C_\Omega}.$$

最后，我们只需确保仍然可以做到

$$\frac{\lambda_1 \gamma}{2} + \lambda_2 C_\Omega (R + n C_\Omega) < \varepsilon$$

并且，选择足够小的 λ_1 和 λ_2 将是定理1中假设可解的充要条件。

□

4 数值示例与结论

我们通过考虑定义在 $\Omega = (0, \pi)$ 上、在 $\Gamma_1 = \{\pi\}$ 处施加$\partial_\nu z = u$ 诺伊曼边界控制的一维波动方程示例，说明本文所提出事件触发机制的有效性。我们考虑初始位置和速度条件

$$z_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \qquad z_1(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$$

以及控制输入中的阻尼系数 $u(t,\pi) := -\alpha(\pi)\partial_t z(t,\pi)$

$$\alpha(\pi) = \alpha_1(\pi - x_0), \quad \text{with } \alpha_1 = 0.1 \text{ and } x_0 = -1.$$

我们旨在比较闭环系统的连续时间版本与事件触发的闭环版本。换言之，我们比较系统 (2.1)-(2.2) 与系统 (2.6) 在事件触发规则 (2.8) 下的行为。

取 $\gamma = 0.2$ 和 $\nu_0 = 0.1$，定理 3 条件的一个可行解为 $\lambda_1 = 0.1$,$\lambda_2 = 0.01$, $\epsilon = 0.08$。

现在，为了更好地理解采样对稳定性结果的影响，我们在图2中展示更新时刻的分布，并在图1中展示以下情况下闭环系统 (2.6)-(2.8) 的自然能量 $E(t)$ 的演化：

- 在连续时间控制下（深色线）；
- 在事件触发控制器下（蓝线），其中 t_k 由事件触发规则 (2.8) 给出；
- 在固定控制器 $u(t) = -\alpha_1(\pi - x_0)z_1(\pi)$ 下（红线）；
- 使用控制器 $u(t) = -\alpha_1(\pi - x_0)\partial_t z(k\tau, \pi)$，当 $k\tau < t < (k+1)\tau$（绿色）时，采用周期采样构建，其采样周期为 $\tau = 0.36$，使更新次数与按照 (2.8) 在时间 $\mathrm{T} = 10$ 内观察到的更新次数相同。

可以测试其他采样周期，以比较两种方法（周期采样或事件驱动）的效率，但应记住，我们仅在事件触发控制情形下证明了向吸引子的指数收敛。事实上，对于波动方程的边界控制情形，即使采样周期足够小，我们也不知道有任何关于周期采样情形下收敛性的证明。然而，用 τ 表示周期，我们的数值模拟表明，若 $0.25 \le \tau \le 0.36$，则能量会下降，但始终高于按照 (2.8) 时的能量；若 $\tau \le 0.25$，则能量会下降并始终低于该能量。此外，若 $\tau = 0.05$，能量的演化与连续阻尼情形下的演化非常接近。

此外，通过考虑 $\tau = 0.36$ 或 $\tau \ge 3$，可以从图 4 中观察到，与图 3 所示更新的分布相对应的能量呈非递减趋势。

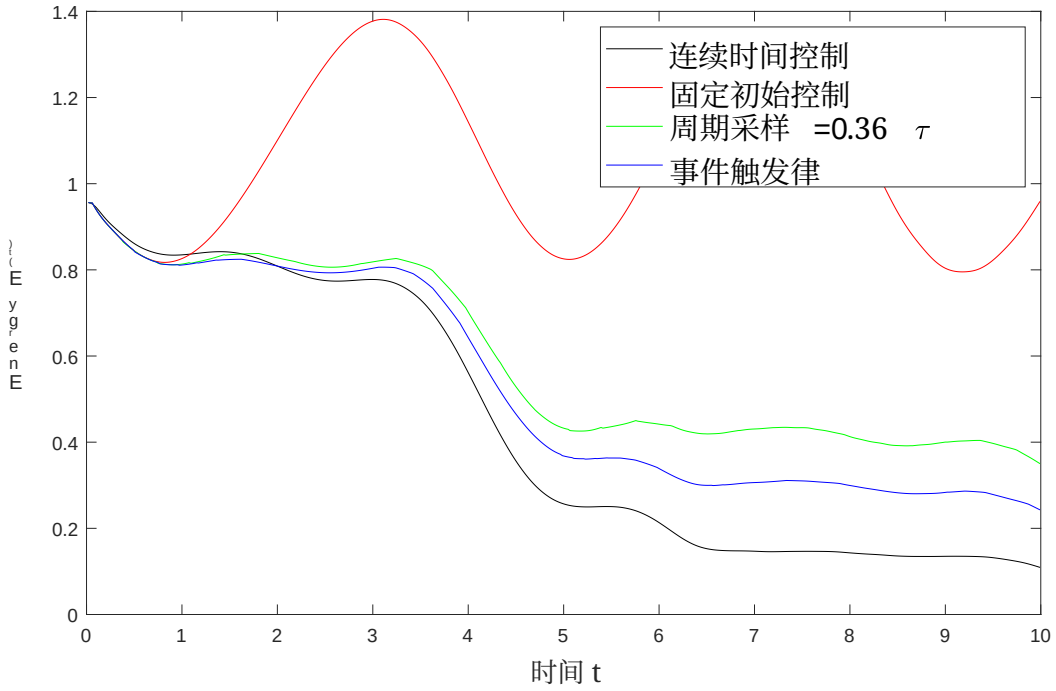


图1：式（2.7）中定义的能量 $E(t)$ 的演化。

4.1 结论

本文研究了受边界事件触发控制作用的多维波动方程。首先，给出了该系统适定性以及芝诺现象不存在的证明。其次，利用基于线性矩阵不等式条件的适当李雅普诺夫泛函，确保了系统指数收敛至一个包含原点的吸引子。值得注意的是，本文给出了该吸引子的外逼近，该外逼近由李雅普诺夫函数的水平集构造。此外，还借助与这一框架相关的经典工具检验了线性矩阵不等式条件的可行性。

这项工作为无限维系统自动控制理论领域的其他研究方向打开了大门。其中，研究数字化实现的各种影响（甚至考虑闭环中的特定约束）对其他多维偏微分方程的作用，将会是一个有趣的课题。偏微分方程的局部控制或边界控制涉及颇具挑战性的数学问题，而事件触发更新律或输入饱和发生时对稳定性的影响等问题，仍然相当开放。

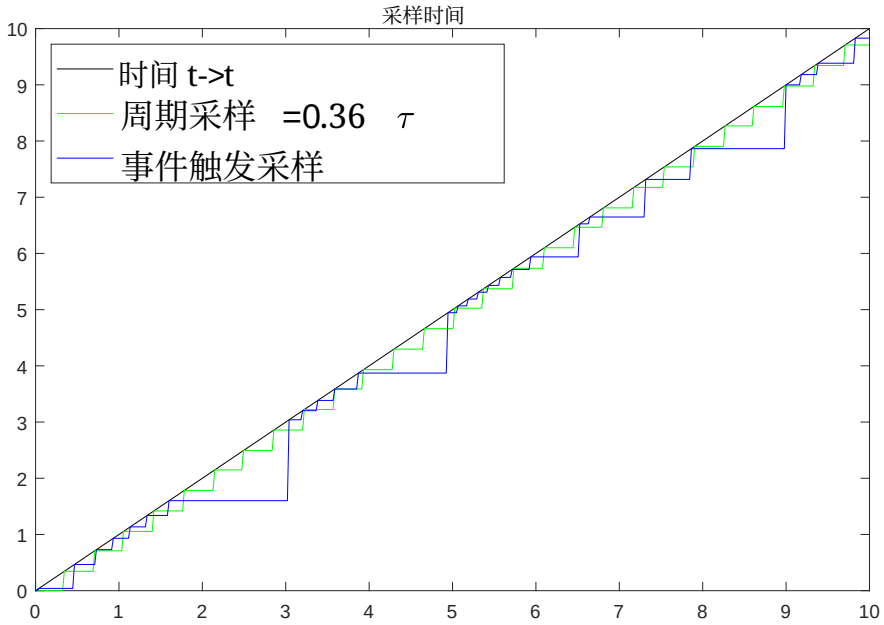


图 2：事件触发机制 (2.8) 与 τ-周期采样的时间演化。

5 附录

引理 1（杨氏不等式）。

$$2ab \le \eta a^2 + \frac{1}{\eta} b^2, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0.$$

引理 2 (芬斯勒引理 [26])。 给定 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 和 $Q \in \mathbb{S}^n$，以下命题等价：

- $\exists \mu \in \mathbb{R}$ 使得 $Q - \mu B B^\top \prec 0$
- $\forall X \in$ 核 $B \setminus \{0\}, \qquad X^\top Q X < 0.$

芬斯勒引理的另一种表述见 [8] with $\mu > 0$，但这种情况可以由引理 2 推出。

引理 3 (庞加莱不等式)。 存在一个常数 $C_\Omega > 0$，它取决于有界区域 Ω 的大小、几何形状和正则性，使得对任意函数 $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，$\|u\|_{L^2} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}$.

最优常数 C_Ω 通常称为区域 Ω 的“庞加莱常数”。例如，若 $N = 1$，则利用维廷格不等式可得 $C_{[a,b]} = (b-a)/(2\pi)$。一般而言，若 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是直径为 d的凸利普希茨域，则 $C_\Omega \le d/\pi$。

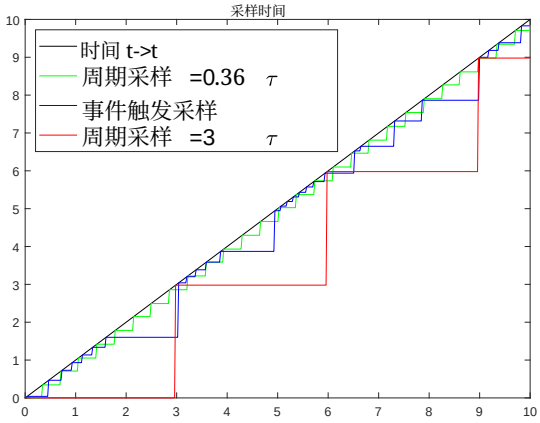


图 3：事件触发机制 (2.8) 和周期为$\tau = 0.36$ 和 $\tau = 3$的周期采样的时间演化。

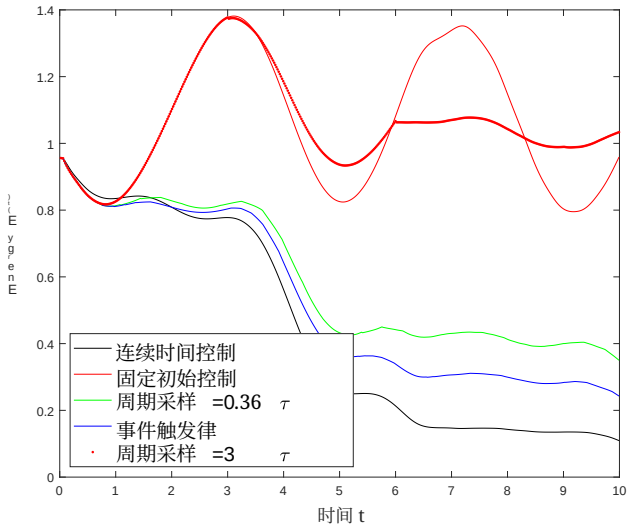


图 4：式 (2.7) 中定义的能量 $E(t)$ 的演化。

引理 4 （迹不等式）。 假设 $\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega,\ (x - x_0) \cdot \nu(x) \le 0\}$， 则

$$\forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_0} |u(x)|^2 (x - x_0) \cdot \nu(x)\, d\sigma \le \beta \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx.$$

证明。 - 这源自庞加莱不等式以及 $H^1(\Omega)$ 中的迹估计。事实上，通过分部积分进行简单计算可得

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 (x - x_0) \cdot \nu(x)\, d\sigma = 2 \int_\Omega u(x) \nabla u(x) \cdot (x - x_0)\, dx + \int_\Omega n|u|^2\, dx.$$

然后，利用 $R = \max_{x\in\Gamma_1} |x - x_0|$、柯西–施瓦茨不等式和庞加莱不等式，可得

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 (x - x_0) \cdot \nu(x)\, d\sigma \le R\|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} + n\|u\|^2_{L^2} \le \beta \|\nabla u\|^2_{L^2}$$

其中 $\beta = RC_\Omega + nC^2_\Omega$。 因此， $u = 0$ 在 Γ_0 上允许我们得出证明。 □

参考文献

[1] K. J. ˚Astr¨om 和 B. Bernhardsson。（1999）。一阶随机系统周期采样与事件驱动采样的比较。*IFAC* 会议论文集，32(2)，5006–5011。[2] S. R. Bernfeld 和 V. Lakshmikantham（1980）。实用稳定性与李雅普诺夫函数。*T´ohoku Math. Jounral.*，32，607–613。[3] C. Bardos、G. Lebeau 和 J. Rauch。（1992）。从边界观测、控制和稳定化波动的精确充分条件。*SIAM* 控制与优化杂志，30(5)，1024–1065。[4] L. Baudouin、S. Marx 和 S. Tarbouriech。线性波动方程的事件触发阻尼。*IFAC-PapersOnLine*，52(2):58?63，2019。[5] G. Chen。（1979）。有界区域内波动方程的控制与稳定化。*SIAM* 控制与优化杂志，17(1)，66–81。[6] G. Chen。（1981）。有界区域内波动方程的控制与稳定化。II。*SIAM* 控制与优化杂志，19(1)，114–122。[7] M. A. Davo、D. Bresch-Pietri、C. Prieur 和 F. D. Meglio（2018）。利用反步法和环路泛函，通过采样数据控制器对 2x2 线性双曲系统进行稳定性分析。*IEEE* 自动控制汇刊，64 (4)，1718–1725。[8] Y. Ebihara、D. Peaucelle 和 D. Arzelier（2015）。基于线性矩阵不等式的鲁棒控制 S变量方法通信与控制工程，施普林格，伦敦。[9] N. Espitia、A. Girard、N. Marchand 和 C. Prieur。（2016）。守恒律线性双曲系统的事件驱动控制。*Automatica*，70，275–287。

[10] N. Espitia、A. Tanwani 和 S. Tarbouriech。（2017）。通过基于李雅普诺夫的事件触发采样与量化，实现边界控制双曲型偏微分方程的稳定化。载于第*56*届*IEEE*决策与控制会议，1266–1271。[11] N. Espitia、I. Karafyllis 和 M. Krstic（2021）常参数反应扩散偏微分方程的事件触发边界控制：一种小增益方法。Automatica，128。[12] L. C. Evans。偏微分方程 第2版，美国数学学会，2010。[13] R. Goebel、R. G. Sanfelice 和 A. R. Teel。（2012）。混杂动力系统：建模、稳定性与鲁棒性。普林斯顿大学出版社。[14] A. Haraux。（2018）。非线性振动与波动方程。数学 SpringerBriefs 丛书。[15] W. P. M. H. Heemels、M. C. F. Donkers 和 A. R. Teel。（2013）。线性系统的周期性事件触发控制。*IEEE* 自动控制汇刊，58(4)，847–861。[16] H. K. Khalil（1996）。非线性系统。第*2*版，普伦蒂斯·霍尔出版社，萨德尔河上游（新泽西州）。[17] V. Komornik（1991）波动方程的快速边界稳定化。*SIAM* 控制与优化杂志，29(1)，197–208[18] V. Komornik。（1997）。精确可控性与稳定化；乘子方法。美国数学学会公报，34，203–204。[19] V. Komornik 和 E. Zuazua（1990）波动方程边界稳定化的直接方法。纯粹与应用数学杂志´ematiques Pures et Appliqu´ees，69(1)，33–54。[20] F. Koudohode、L. Baudouin 和 S. Tarbouriech（2022）。阻尼线性波动方程的事件驱动控制。$Automatica$，146。[21] F. Koudohode、L. Baudouin 和 S. Tarbouriech（2022）。阻尼线性薛定谔方程的事件驱动控制。欧洲控制会议，伦敦，英国（ECC 2022）。

[Lasiecka 等（1986）Lasiecka, Lions 和 Triggiani] I. Lasiecka, J. L. Lions 和 R. Triggiani。（1986）。二阶双曲算子的非齐次边值问题。纯粹与应用数学杂志（第*9*辑），65(2)，149–192。[22] G. Lebeau。（1996）。阻尼波动方程。载于数理物理中的代数与几何方法，73–109。施普林格。[23] J. L. Lions。（1988）。分布参数系统的精确可控性、稳定化与扰动。*SIAM*评论，30(1)，1–68。[24] J. L. Lions 和 E. Magenes。（1972）。非齐次边值问题及其应用。第一卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，xvi+357。[25] S. Nicaise、C. Pignotti 和 J. Valein（2011）。具有边界时变时滞的波动方程的指数稳定性。离散与连续动力系统-S，4(3)，693。

[26] M. C. de Oliveira 和 R. E. Skelton（2001）。受约束线性系统的稳定性检验，载于《鲁棒控制展望》。《style id='2'>纽约，纽约州，美国：施普林格，第 241?257 页。[27] J. Peralez、V. Andrieu、M. Nadri 和 U. Serres。（2018）。通过动态高增益缩放实现事件触发输出反馈镇定。*IEEE* 自动控制汇刊。[28] R. Postoyan、P. Tabuada、D. Ne˘si´c 和 A. Anta。（2015）。非线性系统事件触发镇定的框架。*IEEE* 自动控制汇刊，60(4)，982–996。[29] L. Rosier 和 B.Y. Zhang。（2006）。有限区域上广义科尔特韦格–德弗里斯方程的全局镇定。*SIAM* 控制与优化杂志，45(3)，927–956。[30] J. C. Saut 和 B. Scheurer。（1987）。某些演化方程的唯一延拓。微分方程杂志，66(1)，118–139。[31] A. Selivanov 和 E. Fridman。（2016）。扩散半线性偏微分方程的分布式事件触发控制。$Automatica$，68，344–351。[32] A. Seuret、C. Prieur、S. Tarbouriech 和 L. Zaccarian。（2016）。饱和线性系统基于线性二次型的事件触发控制器协同设计。$Automatica$，74，47–54。[33] A. Smyshlyaev、E. Cerpa 和 M. Krstic。（2010）。具有域内反阻尼的一维波动方程的边界稳定化。*SIAM* 控制与优化杂志，48(6)，4014–4031。[34] P. Tabuada。（2007）。镇定控制任务的事件触发实时调度。*IEEE* 自动控制汇刊，52(9)，1680–1685。[35]M. Tucsnak 和 G. Weiss。（2009）。算子半群的观测与控制。$Birkh¨$***auser*** 高级教材：巴塞尔教科书，xii+483。[36] M. Wakaiki 和 H. Sano（2022）。具有Lipschitz扰动的无限维事件触发与自触发控制系统的稳定性分析 数学控制与相关领域，12，245–273。