序数庞加莱截面：从时间序列的序数分段重构首次返回映射

Zahra Shahriari，[1] Shannon Dee Algar，[1] David M. Walker，[1] 以及 Michael Small[1]，[a)]复杂系统组，数学与统计学系，西澳大利亚大学，克劳利，西澳大利亚州*6009*，澳大利亚

（电子邮箱：zahra.shahriari@research.uwa.edu.au）

（日期：2023年3月2日）

我们提出了一种稳健且计算高效的算法，可在无需嵌入的情况下，从时间序列中通用地构造动力系统的首次返回映射。通常，首次返回映射可通过启发式的便捷方法（例如时间序列的极大值或零交叉）构造，也可采用计算上较为精细的几何方法（显式构造一个与流正交的超曲面上的庞加莱截面，然后通过插值确定其与轨迹的交点）。我们的方法依赖于时间序列的序数划分，并通过与特定序数序列的连续交点构建首次返回映射。一般而言，对于每个序数序列，我们都可以获得不同的首次回归映射。我们定义了基于熵的度量，以指导对序数序列的选择，从而获得“良好”的首次返回映射，并表明该方法能够稳健地应用于来自经典混沌系统的时间序列，以提取其底层的首次返回映射动力学。我们在若干广为人知的动力系统上展示了结果（处于混沌状态的洛伦兹、Rössler和Mackey-Glass系统）。

arXiv:2303.00383v1 [math.DS] 1 Mar 2023

非线性时间序列分析旨在从观测到的（通常为标量）时间序列数据中揭示确定性动力系统的特征。人们已开发出多种方法，用于构建底层向量场的模型、估计动力学不变量，或绘制吸引子及其不稳定周期轨道的几何图景。首次返回映射是描述动力系统动力学最基本的方式之一，通常通过构建复杂的流数值模型，或采用启发式方法并尝试寻找最优方案来估计。尽管如此，只要能够计算出来，首次返回映射仍是理解复杂动力学最简单、最直接的机制之一。尤其对于三维混沌系统，首次返回映射是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的映射，而有趣的行为往往体现在熟悉的“单峰”映射中。

我们提出一种通用的替代方法，其依据是近年来人们对动力学的序数编码以及一般意义上的符号动力学日益关注。该方法简单、稳健、通用且数值计算简便，可根据标量时间序列获取连续动力系统的首次返回映射，因此十分实用。我们展示了该方法不仅能够成功重建简单的低维混沌系统的首次返回映射，也能重建无限维时滞微分系统的首次返回映射。该方法提供了一种简便的途径，可直接根据测量得到的时间序列识别实验系统中混沌动力学的演化。

I. 引言

庞加莱映射（也称首次返回映射）是研究动力系统的有用工具，它将连续动力系统投影为低维映射。庞加莱截面是连续动力系统的状态空间中，轨道与某个特定的低维曲面之间的交集；该曲面横截于系统的流[1]。更具体地说，考虑一条初始条件位于某个空间截面内的轨道，它随后离开该截面，我们观察这条轨道首次返回截面时所在的位置。然后，通过建立映射，将截面上的第一个点连接到第二个点、第二个点连接到第三个点，依此类推，从而构造出首次返回映射（FRM）。庞加莱截面的横截性意味着轨道从子空间内出发并流经该空间，而非与之平行。下文中，我们将把横截于流的$n-1$维曲面称为庞加莱截面，并将根据与该截面的有效交点构造的映射称为首次返回映射。

Kakutani 于 1943 年受庞加莱回归定理的启发，提出了首次回归映射，旨在研究诱导保测变换的性质[2]。庞加莱映射可视为一个维数为$n-1$的离散动力系统，该系统源自维数为n的原连续动力系统。它常用于简化动力系统的分析，因为它保留了原系统的许多性质，并将周期轨道和准周期轨道转化为周期点和准周期点。首次回归映射的状态空间维数较低，且是一种离散映射。

这些首次返回映射是研究振荡动力学的宝贵工具，曾被用于解释特定模型中混沌动力学的起源[3]。图1a 展示了x的极大值曲面，其中 $\dot{x}=0$ 以灰色表示，作为洛伦兹吸引子上的庞加莱截面。进入该截面的点以吸引子上的圆点标出。显然，其中一个

a) 同时任职于矿产资源部、CSIRO，地址：澳大利亚西澳大利亚州肯辛顿，邮编6151

$\dot{x} = 0$ 曲面穿过吸引子的一个区域，此处x 为负（红点）；另一个曲面则穿过x 为正的区域（黑点）。图1b 展示了洛伦兹时间序列经过暂态后的一部分。红点和黑点标出了进入 $\dot{x} = 0$庞加莱截面的局部极大值。由红点和黑点生成的首次回归映射见图1c。从进入庞加莱截面的点构造首次回归映射这一想法，最早于1963年在一幅类似图示中用于洛伦兹吸引子的z时间序列，见Lorenz的著名论文[4]。

尽管首次返回映射具有诸多理想特性，但要找到一个能够正确捕捉系统特征的理想庞加莱截面并非总是易事[5]。此外，假设系统方程并不完全可得，而我们只知道其输出时间序列。在这种情况下，为了使用庞加莱截面，必须将时间序列转换为一种合适的高维结构，以便应用分析高维系统的标准方法[6]。实现这一点最常用的方法之一，是以与系统原始相空间等价的方式从时间序列重构相空间[7]。嵌入技术的典型例子是 Takens 的延迟嵌入定理，它针对无限长、无噪声的时间序列，用于展开其生成系统的吸引子[8]。该方法在实践中被广泛应用；然而，要在嵌入方案中找到合适的维数和延迟，使其既能产生与原始系统拓扑相似的吸引子，又具有较高的计算效率，并非总是容易[9]。

除了嵌入之外，近年来，将时间序列数据转换为复杂网络形式的方法日益流行，使人们能够在更高维度上考察时间序列，并利用复杂网络分析工具提取时间序列特征[10–12]。多种算法都可以根据时间序列生成复杂网络表示[13–16]。本研究将采用的方法是序数分区网络方法[17]。将连续时间序列（尽管是在离散时刻采样的）转换为复杂网络，涉及两项重要的近似。网络中的节点与状态空间的区域相关联，因此对原始观测进行了粗粒化量化。此外，网络表示根据概率对节点之间的转移进行编码。它能够计算与底层不变测度相关的性质，但无法保留确定性动力学[18]。

从时间序列生成复杂网络最常见的方法之一，是构建序数分区网络（OPN）；该方法首次发表于2013[17]。这种动力学符号映射[18], 采用动力系统的马尔可夫建模，通过考察随机模型的统计性质，实现对确定性动力学的近似。简而言之，这种分区定义了观测数据中的时间延迟嵌入与所关注的符号动力学之间的映射。

与 OPN 方法不同，OPN 方法将状态空间划分为互不相连的区域，并对动力学进行随机近似；而我们在此提出的基于序数的首次回归映射方法，在构建确定性离散映射的同时保留了原有的保真度。我们通过为时间序列中的每个点分配一个序数

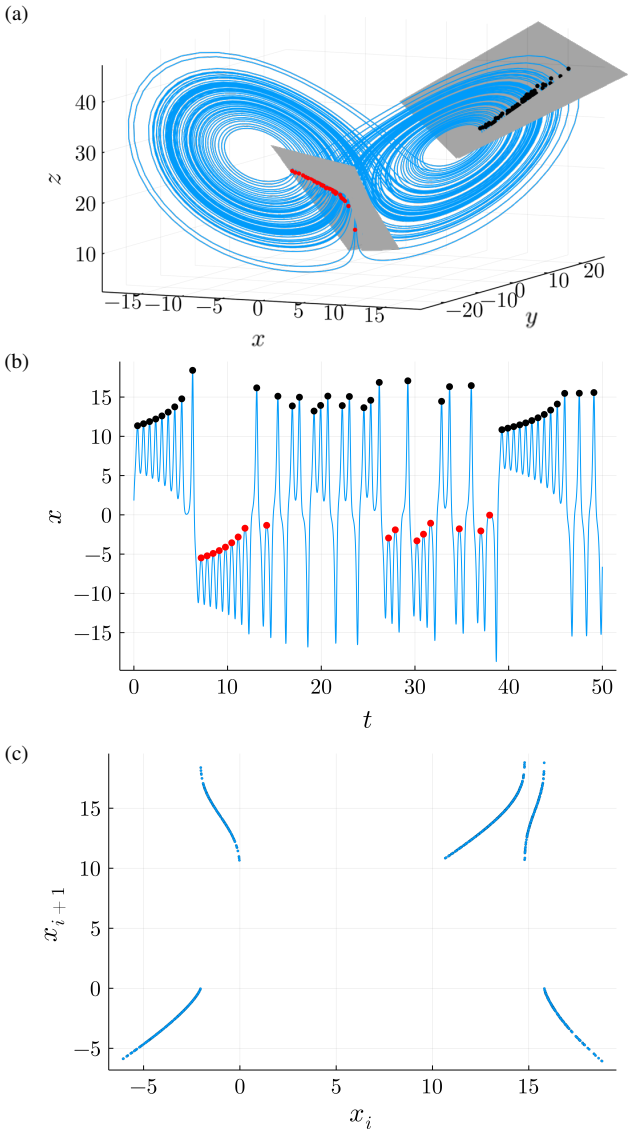

图 1：(a) 洛伦兹吸引子上x 的极大值曲面。这些曲面的入口点以红点和黑点标示。(b) 去除暂态后的部分洛伦兹x 时间序列。$\dot{x} < 0$ 区域内的局部极大值以红点表示，而$\dot{x} > 0$ 区域内的局部极大值以黑点表示。这两组点对应于图 1a 中时间序列上所示的点。(c) x 的相对极大值与随后x的相对极大值所对应的数值，称为首次返回映射（FRM）。

分区，并将相邻两点之间序数分区的变化作为进入相应序数分区截面的入口，来构建该映射。

在本文中，我们提出一种通用方法，将序数分区视为庞加莱截面，以检测时间序列的动力学行为。尽管这些截面与庞加莱截面的基本定义略有不同，但我们表明它们的行为可能相似，并且可用于提取——

系统的主要动力学特征。该方法无需获取整个吸引子或进行完整嵌入，即可从单个时间序列中提取特征。此外，通过结合不同序数分区对应的首次返回映射（FRMs），还可以揭示有关动力学特征的更多信息。由于该方法以序数分区为基础，因此具有抗噪性，可用于噪声污染严重的现实数据[13]。我们使用洛伦兹系统方程8 生成的数值时间序列，验证了我们的理论讨论。我们通过对每个窗口内时间序列点的振幅进行序数划分，为时间序列中的每个点赋予一个符号。接下来，对于每组序数分区，我们根据其中的所有点构建一个多尺度序数划分网络，并计算每组的熵。我们可以根据序数分区网络的熵对序数分区进行排序，并将其对应的首次回归映射与原始庞加莱截面得到的结果进行比较，从而确定哪些序数分区是理想的庞加莱截面。

本文其余部分的组织如下。第 2 节首先介绍用于将时间序列编码为符号序列的方法和度量，以便估计时间序列的动力学特征；同时，我们还将介绍用于对序数划分进行排序的不同类型的排列熵。第 3 节给出将该方法应用于洛伦兹时间序列的结果，第 4 节作出总结。附录中给出了该方法对具有其他序数参数的洛伦兹时间序列，以及来自其他一些动力系统的时间序列进行研究的结果。

II. 方法

A. 序数划分网络

设 x_t 表示从一个已知或未知动力系统中测得的标量时间序列。我们按照以下方式从该时间序列生成序数模式网络（OPN）。我们取长度为 L 的窗口，并将其沿时间序列滑动，以生成序数分区网络（OPN）。每个窗口由 m 个点组成，相邻点之间间隔 τ 个采样点。这意味着窗口大小为 $L = (m-1)\tau$。因此，对于每个向量 $z^{(i)} = (x_i, x_{i+\tau}, ..., x_{i+(m-1)\tau})$，都可以定义相应的序数分区 $o^{(i)} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$，其中 $\pi_j \in \{1, 2, ..., m\} (\pi_j \neq \pi_k \text{ if } j \neq k)$。这样，$o^{(i)}$ 就捕捉了 $z^{(i)}$ 向量元素的相对顺序。这种符号排序可以通过两种不同的方式完成：幅值排序和时间索引排序[18]。幅值排序根据相对幅值对各点进行排序，因此幅值最低的点秩为 m，幅值最高的点秩为 1。另一方面，时间索引排序使用时间索引对各点进行排序，使最低值所在的索引首先置于 o 中。表 I 展示了当 $m = 3$时这两种排序方式。在本文中，我们采用时间索引排序来创建 OPN。

点的顺序	幅值排序	时间顺序索引排序
	(3, 2, 1)	(1, 2, 3)
	(3, 1, 2)	(1, 3, 2)
	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)
	(2, 3, 1)	(2, 1, 3)
	(1, 3, 2)	(2, 3, 1)
	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)

表 I：窗口大小 $m = 3$ 的幅值排序和时间索引排序。

我们还可以考虑这些窗口之间的不重叠点，记作w。也就是说，每个N 点测量时间序列被划分为 $\lfloor \frac{N-(m-1)\tau-1}{w} + 1 \rfloor$ 个窗口。因此，不重叠点最少的情况（$w = 1$）会产生最多的窗口，其数量等于$N - (m-1)\tau$。当窗口之间没有重叠（$w = L = (m-1)\tau$）时，窗口数量达到最少，即 $\lfloor \frac{N}{(m-1)\tau} \rfloor$。

通过对每个窗口中的点使用时间索引排序，我们可以将每个窗口选取的m 个点排列成至多 $m!$ 种不同顺序，如上文所述。由于某些可能的序数排序可能永远不会在时间序列中出现，因此网络至多包含 $m!$ 个节点。我们可以按照以下方式为每个时间序列构建网络。将 $z^{(i)}$ 的每一种顺序与一个网络节点关联起来，就可以构建加权有向图。节点表示状态，节点之间的连线表示从一个状态到另一个状态的变化。当状态返回自身时，我们也允许存在自环。该网络展示了采样时间序列中的有序模式如何随时间发生变化。图2 展示了这一结构在某个映射的采样时间序列上的应用。每个窗口都会考虑 m 个点的相对幅值及其索引，然后通过排列连续的序数符号来创建动力网络的邻接矩阵。

从时间序列生成序数模式网络时，我们可以选择三个变量。第一个是窗口长度L，它决定要分析的时间序列点的范围。第二个是每个窗口中选取的点数m，表示要比较其幅值的窗口内点数。显然，考虑

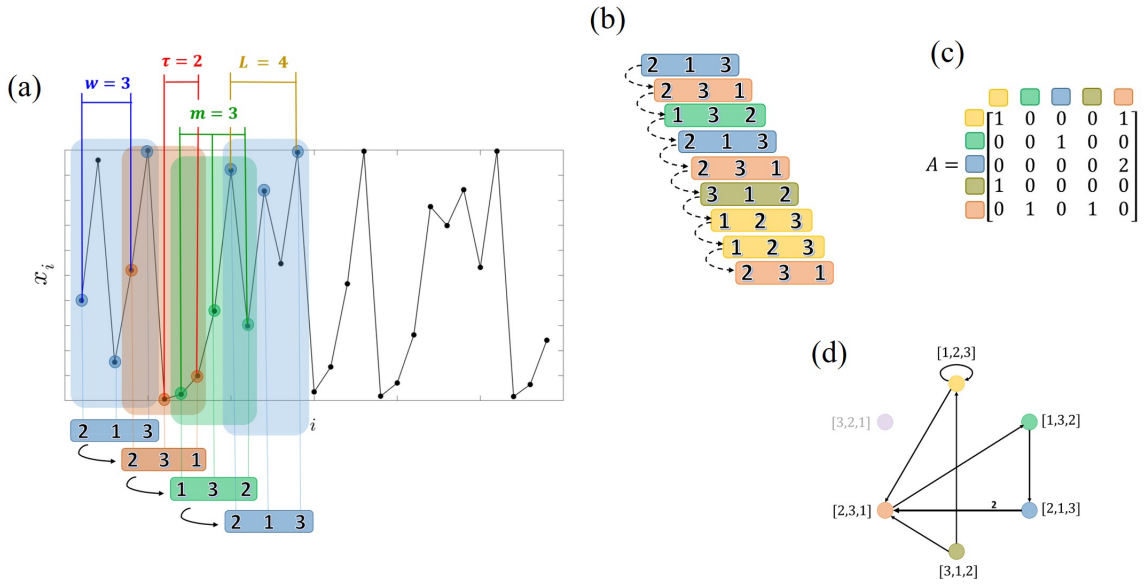

图2：使用样本时间序列构建序数模式网络的过程；a）通过嵌入向量寻找序数模式，其中维数为m，滞后为 τ，相邻窗口之间不重叠点的数量为w，每个窗口的长度为L；根据所选样本按时间顺序排列的索引秩确定序数模式；b）整理连续窗口的序数符号；c）生成邻接矩阵为A 的网络，其中每个节点对应一个唯一的序数模式，并根据时间序列中序数模式之间的转移在节点间建立连边；d）所构建网络的示意图。由于示例时间序列样本中不包含序数模式 [3,2,1], ，因此该节点以淡化形式显示，最终网络中也不包含对应此序数模式的节点。

每个窗口中的点数越多，最终网络中的节点也就越多。需要注意的是，所有参数L、m和 τ 都是整数，并且L 和 m 的取值应使 $\tau = Lm-1$ 也成为整数。第三个变量是w，表示相邻窗口之间不重叠点的数量。在本研究中，我们假设$w = 1$，这意味着窗口之间的重叠最大，并且需要最多的窗口（$N -(m - 1)\tau$）来分析整个时间序列。

选择最适当窗口长度以提取时间序列动力学特征的一种合理方法，是采用传统的嵌入方法。这两项任务（从输出时间序列重构相空间，该相空间等同于系统原有的相空间；以及根据时间序列构建序数模式网络）实际上都围绕着同一个核心问题：窗口中的时间序列需要多长，才能保留信号的拓扑性质。鉴于此，本研究采用 Takens 提出的嵌入方法[19]。

尽管这并非唯一可行的解决方案，而且在某些情况下完全无法奏效。例如，该方法无法应用于具有无限维度的时滞系统。此外，对于其他非时滞系统，由于其动力学的复杂性，很难找到适合在更高维度中嵌入系统的维数和时滞；因此，可以使用其他方法来确定序数划分所适用的窗口长度。由于这些特性，该方法比嵌入方法受到的限制更少，可用于分析具有复杂动力学。

B. 首次返回映射

由于在序数划分中，每组点都被分配给一个且仅一个符号，因此序数分区将系统的吸引子划分为若干区域，使所有这些区域的并集覆盖整个吸引子。每个区域的边界由一组分隔这些区域的点定义。我们认为，这些边界中的每一个都可以被视为吸引子上的一个庞加莱截面，并可在其上研究首次回归映射。根据该序数划分切口位于吸引子的哪一部分，它可以被视为吸引子上适当或不适当的庞加莱截面。

C. 排列熵

排列熵（PE）是广泛使用的一种度量动力系统复杂度的指标。它捕捉时间序列各个数值之间的排列模式和序关系。随后提取序模式的概率分布。由于这一准则是非参数的，因此可以直接根据一维时间序列计算，无需使用参数模型。它还具有抗噪声能力，因此在提取非线性时间序列的动态内容方面极为有效[20]。通过将

时间序列划分为由重叠列向量组成的矩阵，并生成序数符号（图 2a 和 b），即可计算排列熵。于是，m维向量被映射为序数排序的不同排列。Bandt 和 Pompe 将时间序列的排列熵定义为相应序数符号集合的香农熵s[21]：

$$h = -\sum_i p_i \log_2 p_i, \tag{1}$$

其中，$p_i = P(S = s_i)$ 是$s_i \in s$的概率质量函数。这里，s 是符号动力学S中的序数符号集合，而s_i 等于每个符号的相对出现频率。为了计算概率质量函数，我们将其视为S的马尔可夫链的平稳分布。因此，矩阵p 的每个元素可定义为：

$$p_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sum_k a_{i,k}}, \tag{2}$$

其中，$a_{i,j}$ 表示在每个窗口中，从状态i 到状态j之间、最多在$m!$个状态内发生的转移次数。因此，概率质量函数可按以下方式估计：

$$p_i \approx \frac{\sum_j a_{i,j}}{\sum_k \sum_j a_{k,j}}. \tag{3}$$

为了计算每组序数划分点的熵，我们从初始时间序列中选出具有相同序数划分的所有点，并将它们组合成一个新的时间序列。随后，通过比较这一新时间序列中各点的幅值，并据此构建序数模式网络（OPN），计算每个序数划分的熵。我们选用窗口选项$m' = 3$ 和 $\tau' = 1$，以便从每个序数划分对应的时间序列构建 OPN。在此基础上，我们首次提出了两种新的熵类型，将第一条时间序列中每组序数划分点的出现概率与由每组点分别构建的 OPN 联系起来。

第一种是加权熵，它使用主时间序列中每组序数符号出现的概率作为p_i 的缩放因子，如下所示：

$$K = \frac{\mathscr{O}}{\mathscr{T}}, \tag{4}$$

其中 $\mathscr{O}$ 表示各个特定序数分区的出现次数，而 $\mathscr{T}$ 表示时间序列被划分成的窗口总数。在本例中，如第II A节所述，该值等于 $\mathscr{T} = N - (m-1)\tau$，其中 N 是时间序列的总长度，m 是对主时间序列进行序数划分时选取的点数，而 τ 表示每两个连续选取点之间的间隔。利用这一缩放因子，加权熵定义如下：

$$\begin{aligned} h_w &= -\sum_i K p_i \log_2(K p_i) \\ &= -K \sum_i p_i (\log_2 p_i + \log_2 K). \end{aligned} \tag{5}$$

第二种熵称为加权过渡熵，它仅考虑进入某个特定序数符号的可能性，并将其作为p_i 的缩放因子，如下所示：

$$\hat{K} = \frac{\hat{\mathscr{O}}}{\hat{\mathscr{T}}}, \tag{6}$$

ˆ其中，$\mathscr{O}$ 表示进入各个特定序数分区的次数，ˆ$\mathscr{T}$表示进入所有序数分区的进入ˆ点总数。在此例中，对于 $\mathscr{O}$ 和ˆ$\mathscr{T}$，我们只统计进入新序数分区的点；如果同一序数分区中有多个连续点，则只统计第一个点。加权转移熵使用这一缩放因子定义如下：

$$\begin{aligned} h_{wt} &= -\sum_i \hat{K} p_i \log_2(\hat{K} p_i) \\ &= -\hat{K} \sum_i p_i (\log_2 p_i + \log_2 \hat{K}). \end{aligned} \tag{7}$$

III. 结果与讨论

选取洛伦兹混沌系统的x 时间序列，以检验所提出方法在时间序列分析中的有效性。洛伦兹系统的方程如下：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{8}$$

其中，参数设为 $\sigma = 10$、$\rho = 28$ 和 $\beta = 8/3$，以确保系统处于混沌状态。我们使用随机初始条件计算系统在 10,000sec 内的响应，时间分辨率为 $\Delta t = 0.01$sec。因此，得到的时间序列响应包含 1,000,000 个点。我们舍弃该时间序列前 90% 的部分作为过渡阶段，并聚焦于最后 10% 的部分，其中包含 100,000 个点。为研究系统的动力学，我们首先根据 Takens嵌入定理所对应的窗口大小，选择序数划分窗口长度 (L)，具体说明见第 II A 节。每个窗口的采样点数 (m) 由计算约束以及我们希望从系统中提取的细节程度决定。为此，我们选择嵌入维数 $M = 3$ 和嵌入延迟 $T = 9$ 个点；根据所采用的时间分辨率，这大约对应于洛伦兹 x 时间序列周期的四分之一。因此，我们假定每个序数窗口的长度为 $L = (M-1)T = 18$，并假定每个窗口的采样点数 $m = 4$，由此得到每个窗口的序数时滞 $\tau = L m^{-1} = 6$。图 3 展示了洛伦兹时间序列的一小段，以及其上的两个连续序数划分窗口。将每个窗口映射为一个符号后，结果将被赋给时间序列中该窗口的第一个节点。

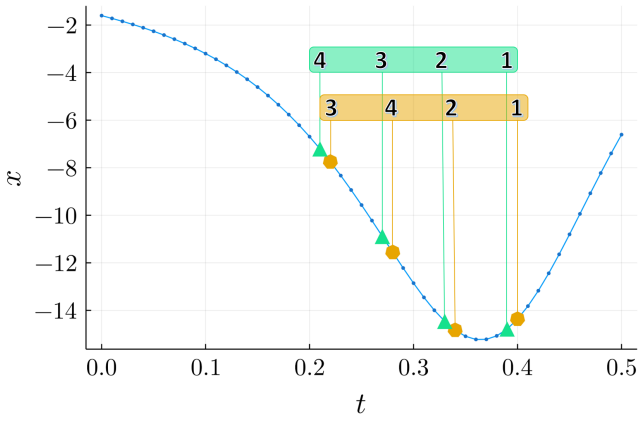

图 3：洛伦兹吸引子时间序列的一小部分。序数窗口的长度设为$x = 18$，每个窗口包含$L = 4$ 个采样点，两两窗口之间相隔 $\tau = 6$ 个点。相邻窗口中不重叠的点数设为$m = 1$，这表示序数划分窗口每一步滑动一个点。点按照时间顺序索引排序法进行排序。

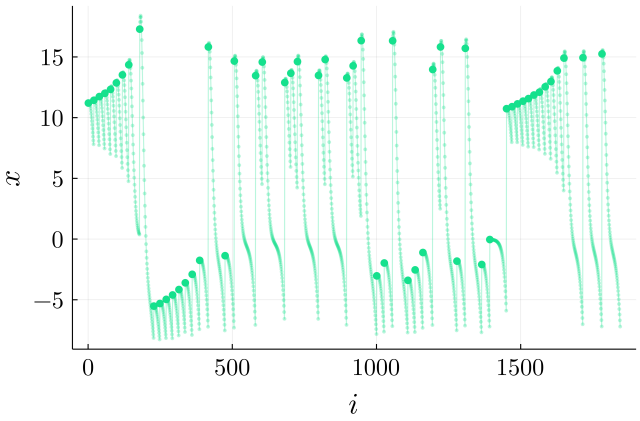

图 4：源自洛伦兹系统x 时间序列的序数划分 [4,3,2,1] 的出现情况。较大的点表示从其他序数划分进入该序数划分的入口点。

A. 加权熵与加权转移熵

为了将时间序列划分为不同的序数分区，我们采用图 3 所示的窗口，并使其沿整个时间序列移动。这样便可为时间序列中的每个点分配一个符号。随后，我们根据这些符号生成序数模式网络 (OPN)，以确定每个集合的 h_w 和 h_{wt}。图 4 展示了下降节点的时间序列，它已从洛伦兹时间序列中分离出来，作为一条独立的新时间序列。比较图 4 和图 5b 可见，该时间序列的这一序数被正确地限制在[-8.3 18.5]范围内。要计算这条新时间序列的h_w 和 h_{wt}，我们首先使用参数 $m' = 3$ 和 $\tau' = 1$从中构建一个序数模式网络。然后，为计算这一特定序数分区的缩放因子，我们将 $\mathcal{O}$ 设为该时间序列片段的长度，并将 $\mathcal{O}$ 设为其中较大点的数量，这些点确定了进入该分区的首个条目。如前所述，$\mathcal{T}$和 $\hat{}\mathcal{T}$是根据系统的整个时间序列计算得出的，对所有序数分区均相同，而不仅限于正在研究的分区。

图 5a 展示了每个序数分区对应的 h_w，并按第一列中的熵值从高到低排序。第二列以类似方式展示了h_{wt}。每个序数分区都被赋予一种颜色，第三列对此有更清晰的展示。这样，我们便可以为每个时间序列点赋予一种颜色，如图 5b 所示。借助这一彩色时间序列，我们可以根据 Takens嵌入定理在三维空间中重建吸引子，得到图5c。将该吸引子的拓扑性质与图 1a 中洛伦兹原始吸引子的拓扑性质进行比较，可以看出，嵌入吸引子再现了洛伦兹吸引子的主要特征，例如它的两个翅膀和两个孔洞。如图所示，每个序数分区在吸引子上都有一个独特的位置；因此，高熵序数分区的入口点值可以被视为吸引子上的庞加莱截面。另一方面，熵值较低的序数分区在时间序列中只是少数几个单独的点，它们随机分布在嵌入吸引子上，不能被视为能够捕捉系统动力学的良好截面。

通过序数划分对吸引子进行分区的现象存在于所有动力系统中，无论其维数或复杂程度如何。附录以 Rössler 系统和 Mackey-Glass 系统为例，展示了类似结果。显然，由于 Mackey-Glass 的动力学更加复杂，它经历了更多不同的序数划分。

图6展示了每个序数分区的 h_{wt} 和 h_w 数值，并按照 h_{wt} 从高到低排序。h_{wt} 的范围显示在左侧坐标轴上，h_w 的范围显示在右侧坐标轴上。尽管这两种熵的取值范围不同，但都呈现出三个熵级别。h_{wt} 用黑线表示，h_w 用绿线表示。h_{wt} 的级别以实线框标出，h_w 的级别以虚线框标出。两者中，蓝色框表示第一熵级，黄色框表示第二级，红色框表示第三级。图中显示，不同熵方法的第一和第二熵级所对应的序数分区互换了，但第三级对应的序数分区组相同。在第一级，h_w 的值高于 h_{wt}，但在第二级和第三级，h_{wt} 的值更高。总体而言，h_w 的方差大于 h_{wt} 的方差。这是因为在 h_w 中，升序和降序序数分区（图5c中的翡翠绿和浅绿色部分）的权重，是根据具有该序数的所有点的数量计算得出的，因此远高于其他所有序数分区的权重。而 h_{wt} 仅根据各分区的入口点计算权重，使其处于同一范围内。

如附录所示，h_w 和h_{wt} 中的层级数量及其熵幅度，可能会因系统的动态特性以及序数分区中每个窗口所考虑的点数而发生变化。h_{wt}中的变化

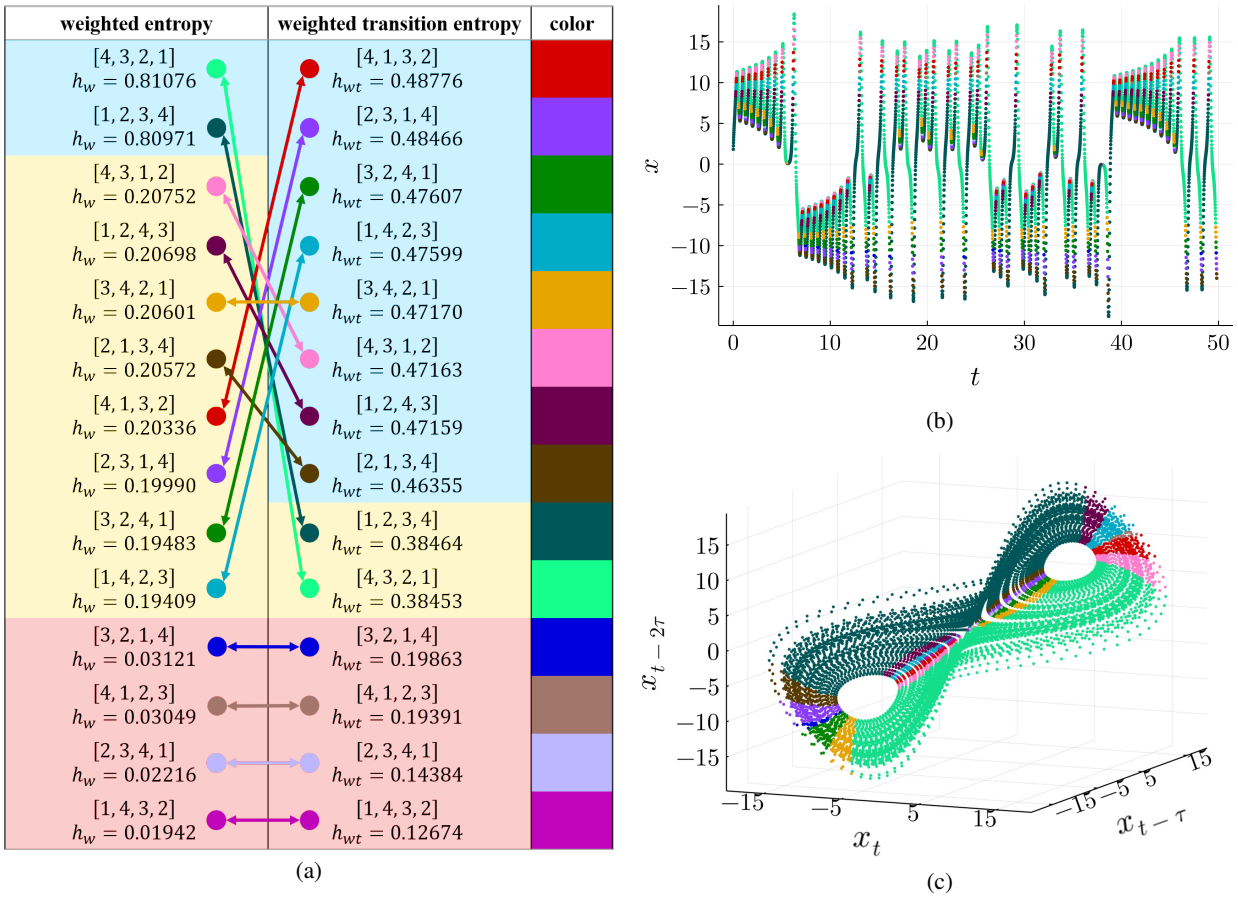

图5：（a）洛伦兹吸引子上出现过的序数划分列表。第一列按加权熵（h_w）排序，第二列按加权转移熵（h_{wt}）排序。每个序数划分都被指定了特定颜色，如第三列所示。第一列和第二列的背景色表示各自组别中的熵级别（见图6）。蓝色单元格表示第一熵级，黄色单元格表示第二熵级，红色单元格表示第三级。（b）洛伦兹x 时间序列根据序数划分着色。每个窗口的序数划分均对应到该窗口的第一个点。（c）根据其x着色时间序列，使用 Takens嵌入定理得到的洛伦兹嵌入吸引子；嵌入维数为$M = 3$，嵌入延迟为$T = 9$。高熵截面可作为吸引子上合适的庞加莱截面。

随着序数窗口中考虑的点数增加，这些变化可能会更加平滑，从而使熵的第一级和第二级相互合并。此外，根据系统的动态特性，h_w 和h_{wt} 中的层级数量可能不同，也可能完全没有明显的层级。

B. 按熵分类的首次返回映射

图 7更清楚地显示了各分区的入口点，时间序列（图 7a）和嵌入吸引子（图 7b）上的点都更大且不透明。这些点用于计算h_{wt}中的权重。每个序数分区中的每组点都生成了一个首次回归映射，如图 7c所示。比较图 7c 和图 1c 可知，下降序数分区 [4, 3, 2, 1] （浅绿色）生成的首次回归映射与局部极大值生成的相同。此外，从以下各项中得到的其他首次回归映射

第一和第二熵级别中的其他序数分区，也能准确表示吸引子的主要特征。而第三熵级别的首次回归映射则只是一些随机点，无法体现吸引子拓扑结构的任何特定信息。

如前所述，任何动力系统的吸引子都可以根据序数窗口中所需的点数划分为不同的序数划分。因此，由这些序数划分推导出的首次返回映射可以体现吸引子的动力学特征。随着吸引子的动力学变得更加复杂，不同序数划分对应的首次返回映射之间的差异也会增大。如附录所示，Rössler 的不同序数划分所对应的首次返回映射之间的差异，大于洛伦兹的相应差异；而在 Mackay-Glass 系统中，这种差异比前两者都更大（因为其动力学复杂得多）。

图8 更清楚地展示了各级熵在

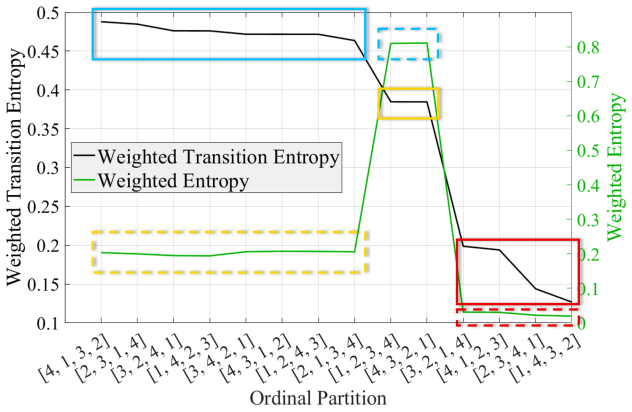

图6：按降序排列的每个序数分区的加权转移熵（黑线）及其对应的加权熵（绿线）。实线框表示不同级别的加权转移熵，虚线框表示不同级别的加权熵：蓝色表示第一级，黄色表示第二级，红色表示第三级熵。该图表明，在加权转移熵和加权熵中，第一级和第二级熵发生了互换，而第三级保持不变。

时间序列上的位置（图8a）以及嵌入吸引子上的位置（图 8b）。可以看出，第一级（蓝色）和第二级（黄色）的点几乎覆盖了整个时间序列和吸引子，而第三级（红色）的点仅是其间的少数几个点。图 8c展示了这些级别中所有序数对应的首次返回映射。每一级中的首次返回映射采用从深到浅的色谱着色，分别对应该级别中熵从高到低的变化。图 8c中间的绿色对角虚线将吸引子的首次返回映射分为上下两翼。可以看出，第一级和第二级的所有首次返回映射都在对角线的上方和下方各有一个截面。然而，属于第三级熵的序数分区的每组红点仅位于对角线的一侧，这表明它们在吸引子上的相应截面无法作为合适的庞加莱截面来研究该系统。

更精确地观察图 8a 和 8b可知，第三级的点始终位于第一级的点之间。这意味着系统不会直接从第二级转移到第三级。这一现象启发我们从该系统构建一个加权有向网络，其中每个节点代表一个熵级别，连边表示熵级别随时间发生的过渡。图 9 展示了使用 h_{wt} 个级别构建的网络。图中清楚地显示，从第二级到第三级没有直接路径，并且第三级节点没有自环。第二级的自环最多；观察图 8b时，这一点是合理的。吸引子的大部分区域都被黄色点覆盖，这些点代表第二个熵级别。

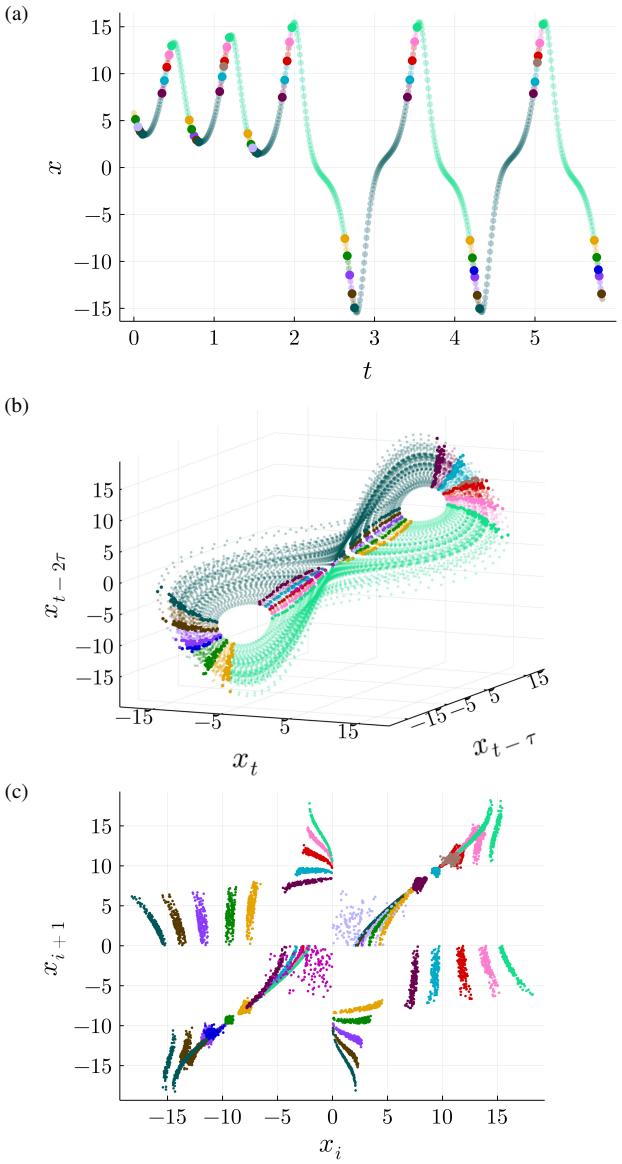

图7：(a) 洛伦兹的x 基于序数分区的加权转移着色时间序列。较大的点表示时间序列中最先进入某个序数分区的点。同一序数分区中的其余点则以较小的透明点绘制。(b) 根据Takens嵌入定理，使用嵌入维数7a的$M = 3$和嵌入延迟$T = 9$得到的图7b 洛伦兹嵌入吸引子时间序列。每个截面的入口点（用于计算加权转移熵中的权重）均以较大且不透明的点绘制。(c) 每个序数分区对应的首次返回映射。注：无需绘制图7c，此处仅用于说明为何高熵序数分区可被视为良好的庞加莱截面。

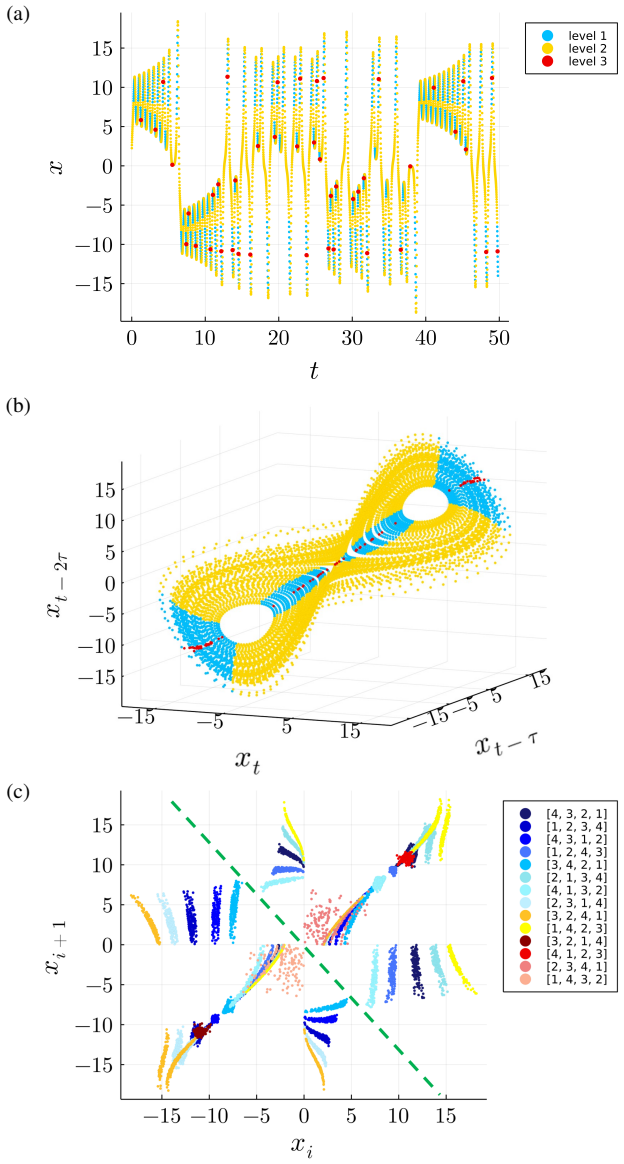

图 8：(a) 洛伦兹的x 时间序列，根据各序数分区的加权转移熵级别着色。蓝色阴影圆点表示第一熵级，

黄色阴影的点表示第二级，红色阴影的点表示第三级。红点显然只包含时间序列中的少量点。(b) 使用Takens嵌入定理，将图 8a中的时间序列嵌入，嵌入维数为 $M = 3$，嵌入延迟为 $T = 9$。(c) 各序数分区对应的首次回归映射，按加权转移熵级别着色。第一级的首次回归映射以蓝色绘制，从深蓝色（第一级中的最高熵值）到浅蓝色（第一级中的最低熵值）。同样，第二级和第三级熵对应的首次回归映射分别以黄色和红色绘制。绿色对角虚线将首次回归映射的曲面分成两部分，分别对应吸引子的一个翼。

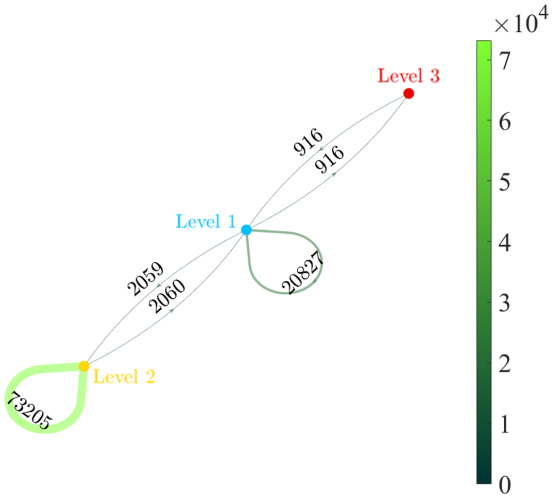

图 9：加权转移熵级别网络。节点表示熵级别，连线表示任意两个级别之间或从某一级别到其自身的转移次数。每条连线的粗细和颜色对应其权重。

IV. 结论

我们提出了一种基于动力系统输出时间序列分析系统的通用新方法，可应用于各种复杂程度的动力系统。该方法利用序数分区提取庞加莱截面，无需使用嵌入吸引子，也无需生成高维复杂网络。本文提出的新型加权排列熵有助于评估这些庞加莱截面的有效性。由于熵值较高的序数分区在吸引子上对应的区域较大，因此可将其视为适用于分析系统动力学行为的庞加莱截面。综合所有这些截面的首次返回映射，可提供一组有助于分析系统的信息。这组首次返回映射既可帮助人们选择自己偏好的映射，也可呈现更全面的动力学图景。

我们研究了该方法在各种动力系统中的应用，并且在所有情况下，都能够准确表示系统的若干一维映射，每个映射都捕捉到了系统的主要动力学特征。尤其是，在更复杂的动力系统（如 Mackey-Glass）中，我们的方法能够生成各种类型的首次返回映射，展现系统动力学的详细特征。嵌入结果说明了为何所有高熵映射都表现良好，并能准确捕捉系统特征。其中一些表现良好的首次返回映射可与广为人知的庞加莱截面（如 $\dot{x} = 0$）相媲美。

虽然我们在此提出的方法针对的是首次返回映射的经典构造——庞加莱截面的连续相交——但该方法本身无需修改即可应用于任何时间序列，因此优于寻找极大值等传统方法。若不存在流的底层连续性，我们只能

考察特定序数类中的连续首次包含。这仍然代表向低维系统的投影，但流与首次返回映射之间的经典联系并没有明显直接的对应物。这或许也能为不连续时间序列分析提供一种有价值的技术，但其分析基础并不那么显而易见（至少对我们而言）。

致谢

我们谨此感谢澳大利亚研究委员会为 DP200102961 提供的资助。SDA 亦感谢福瑞斯特基金会提供的资助。

附录 A：其他动力系统的结果

本节展示了我们的方法应用于其他动力系统的示例。

1. 洛伦兹，m = = 10

图 10 展示了结果，与图 6 和图 7中$m = 10$时的情况相当。

2. Rössler

图11展示了我们的方法应用结果，与图5、图6和图7 中所示的结果相当——针对 Rössler系统。Rössler系统的方程如下：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + \alpha y, \\ \frac{dz}{dt} &= \beta + (x - \gamma)z \end{aligned} \tag{A1}$$

其中 $\alpha = 0.2$、$\beta = 0.2$ 和 $\gamma = 9$。

3. Mackey–Glass

图 12展示了与图5、图6 和图7 中相当的结果，针对 Mackey-Glass 系统。Mackey-Glass 方程如下：

$$\frac{dx}{dt} = \beta \frac{x_\tau}{1 + {x_\tau}^n} - \gamma x \tag{A2}$$

其中，$\gamma = 1$、$\beta = 2$、$\tau = 2$、$n = 9.65$ 和 x_τ 表示变量 x 在时刻（$t - \tau$）的取值。

参考文献

[1]J. Guckenheimer 和 P. Holmes，《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》，第 42 卷（Springer Science & Business Media，2013）。[2]S. Kakutani，“131. 诱导测度保持变换”，《帝国科学院院刊》19，635–641（1943）。[3]G. S. Medvedev，“将可激发细胞模型约化为一维映射”，Physica D: Nonlinear Phenomena 202，37–59（2005）。[4] E. N. Lorenz，“确定性非周期流”，《大气科学杂志》20，130–141（1963）。[5]R. Braddell，“全局横截庞加莱截面的不存在性”，Journal of Geometry and Physics 165，104168（2021）。[6]A. Maus 和 J. Sprott，“用于确定时间序列嵌入维数的神经网络方法”，《非线性科学与数值模拟通讯》16，3294–3302（2011）。[7]M. Qing-Fang、P. Yu-Hua 和 X. Pei-Jun，“一种基于非线性预测确定最优嵌入维数的新方法”，《中国物理》16，1252（2007）。[8]F. Takens，“检测湍流中的奇异吸引子”，载于《动力系统与湍流，沃里克 1980》（Springer，1981），第 366–381 页。[9]H. Kim、R. Eykholt 和 J. Salas，“非线性动力学、延迟时间与嵌入窗口”，Physica D: Nonlinear Phenomena 127，48–60（1999）。[10]M. Small，《应用非线性时间序列分析：物理学、生理学与金融学中的应用》，第 52 卷（世界科技出版公司，2005）。[11]X. Xu、J. Zhang 和 M. Small，“由时间序列诱导的网络的超家族现象与模体”，《美国国家科学院院刊》105，19601–19605（2008）。[12]J. Zhang 和 M. Small，“由伪周期时间序列构建的复杂网络：拓扑与动力学”，Physical Review Letters 96，238701（2006）。[13]J. Zhang 和 M. Small，“由伪周期时间序列构建的复杂网络：拓扑与动力学”，Physical Review Letters 96，238701（2006）。[14]L. Lacasa、B. Luque、F. Ballesteros、J. Luque 和 J. C. Nuno，“从时间序列到复杂网络：可见图”，《美国国家科学院院刊》105，4972–4975（2008）。[15]K. Padberg、B. Thiere、R. Preis 和 M. Dellnitz，“用于检测动力系统中输运屏障的局部扩张概念”，《非线性科学与数值模拟通讯》14，4176–4190（2009）。[16]A. S. Campanharo、M. I. Sirer、R. D. Malmgren、F. M. Ramos 和 L. A. N. Amaral，“时间序列与网络的对偶性”，《公共科学图书馆·综合》6，e23378（2011）。[17]M. Small，“时间序列构建的复杂网络：捕捉动力学”，载于《2013年IEEE国际电路与系统研讨会》（ISCAS）（IEEE，2013），第 2509–2512 页。[18]K. Sakellariou、T. Stemler 和 M. Small，“通过序数划分进行马尔可夫建模：基于网络的时间序列分析的另一种范式”，《物理评论E》100，062307（2019）。[19]F. Takens，“检测湍流中的奇异吸引子”，载于《动力系统与湍流，沃里克 1980》（Springer，1981），第 366–381 页。[20]M. Henry 和 G. Judge，“非线性动态经济时间序列中的排列熵与信息恢复”，《计量经济学》7，10（2019）。[21]O. A. Rosso、H. Larrondo、M. T. Martin、A. Plastino 和 M. A. Fuentes，“区分噪声与混沌”，Physical Review Letters 99，154102（2007）。[22]M. Small，“时间序列构建的复杂网络：捕捉动力学”，载于《2013年IEEE国际电路与系统研讨会》（ISCAS）（IEEE，2013），第 2509–2512 页。[23]J.-P. Eckmann 和 D. Ruelle，“混沌与奇异吸引子的遍历理论”，《混沌吸引子的理论》，273–312（1985）。[24]M. B. Kennel 和 H. D. Abarbanel，“伪近邻与伪线段：一种可靠的最小嵌入维数算法”，《物理评论E》66，026209（2002）。[25]P. Grassberger 和 I. Procaccia，“奇异吸引子的刻画”，Physical Review Letters 50，346（1983）。[26]D. S. Broomhead 和 G. P. King，“从实验数据中提取定性动力学”，Physica D: Nonlinear Phenomena 20，217–236（1986）。

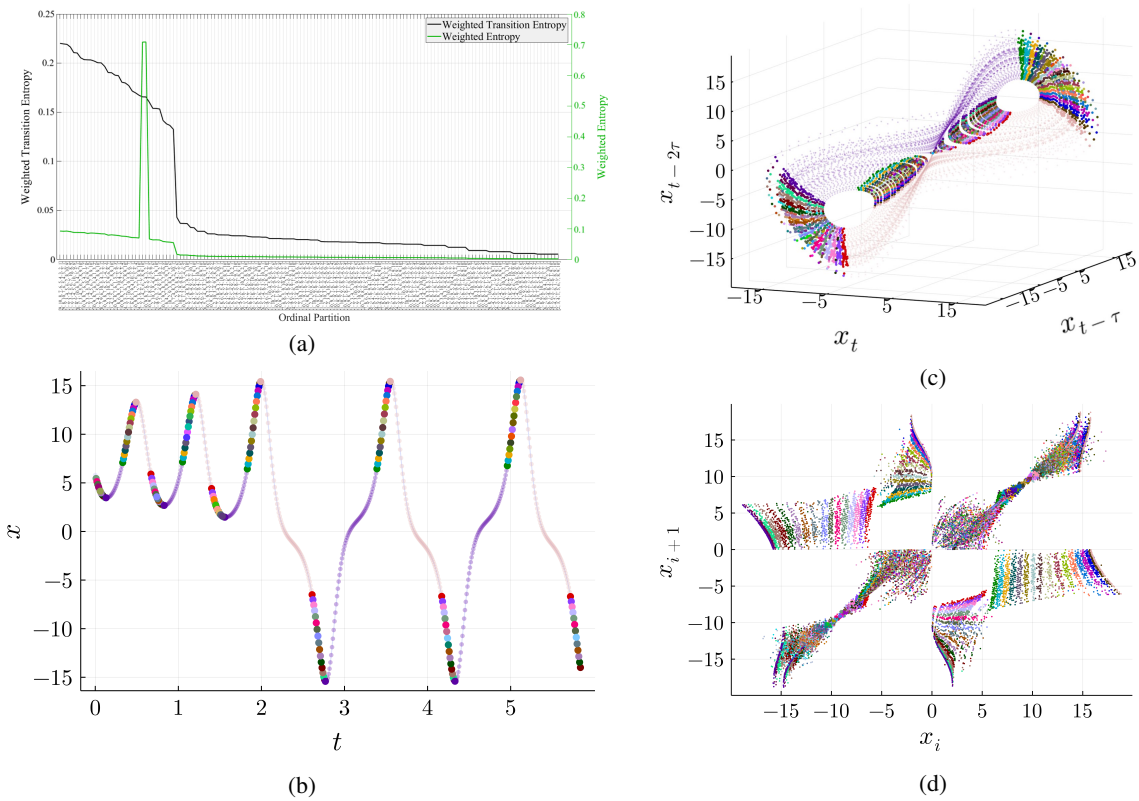

图10： (a) 按降序排列的各序数分区的加权转移熵（黑线）及其对应的加权熵（绿线）。(b) 根据序数分区着色的洛伦兹x 时间序列。每个窗口的序数分区均被分配给该窗口的第一个点。(c) 使用Takens嵌入定理，根据其x着色时间序列得到的洛伦兹嵌入吸引子，嵌入维数为$M = 3$，嵌入延迟为$T = 9$。高熵截面可作为吸引子上合适的庞加莱截面。(d) 各序数分区对应的首次返回映射。注意：绘制图10d 时不需要图10c；提供该图仅为说明为何高熵序数分区可视为良好的庞加莱截面。

[27]M. B. Kennel、R. Brown 和 H. D. Abarbanel，“利用几何构造确定相空间重构的嵌入维数”，Physical Review A **45**，3403（1992）。[28]G. Sugihara 和 R. M. May，“非线性预测：区分时间序列中的混沌与测量误差的一种方法”，Nature **344**，734–741（1990）。[29]M. McCullough、M. Small、H. Iu 和 T. Stemler，“人体心脏动力学的多尺度序数网络分析”，Phil. Trans. R. Soc. A **375**，20160292（2017）。[30]C. Bandt 和 B. Pompe，“排列熵：一种自然的时间序列复杂度度量”，Physical Review Letters **88**，174102（2002）。[31]G. Pianigiani，“首次返回映射与不变测度”，Israel Journal of Mathematics **35**，32–48（1980）。[32]K. M. Rashid 和 J. Louis，“用于工程设备活动识别的时间序列数据增强与深度学习”，Advanced Engineering Informatics **42**，100944（2019）。[33] Y. Yang 和 H. Yang，“基于复杂网络的时间序列分析”，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **387**，1381–1386（2008）。[34]N. Golyandina，“奇异谱分析作为时间序列分析和信号处理方法的特点与共性”，Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics**12**，e1487（2020）。

[35]P. Jay、V. Kalariya、P. Parmar、S. Tanwar、N. Kumar 和 M. Alazab，“用于加密货币价格预测的随机神经网络”，IEEE Access **8**，82804–82818（2020）。[36]S. Aminikhanghahi 和 D. J. Cook，“时间序列变点检测方法综述”，Knowledge and Information Systems **51**，339–367（2017）。[37]E. Bradley 和 H. Kantz，“重新审视非线性时间序列分析”，Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **25**，097610（2015）。[38]G. S. Medvedev，“将可激发细胞模型化简为一维映射”，Physica D: Nonlinear Phenomena **202**，37–59（2005）。[39]S. Boccaletti、V. Latora、Y. Moreno、M. Chavez 和 D.-U. Hwang，“ 复杂网络：结构与动力学 ”，Physics Reports **424**，175–308（2006）。[40]P. Grassberger 和 I. Procaccia，“奇异吸引子的刻画”，Physical Review Letters **50**，346（1983）。[41]D. S. Broomhead 和 G. P. King，“从实验数据中提取定性动力学”，Physica D: Nonlinear Phenomena **20**，217–236（1986）。[42]M. B. Kennel、R. Brown 和 H. D. Abarbanel，“通过几何构造确定相空间重构的嵌入维数”，Physical Review A **45**，3403（1992）。[43]G. Sugihara 和 R. M. May，“非线性预测：区分时间序列中的混沌与测量误差的一种方法”，Nature **344**，734–741（1990）。

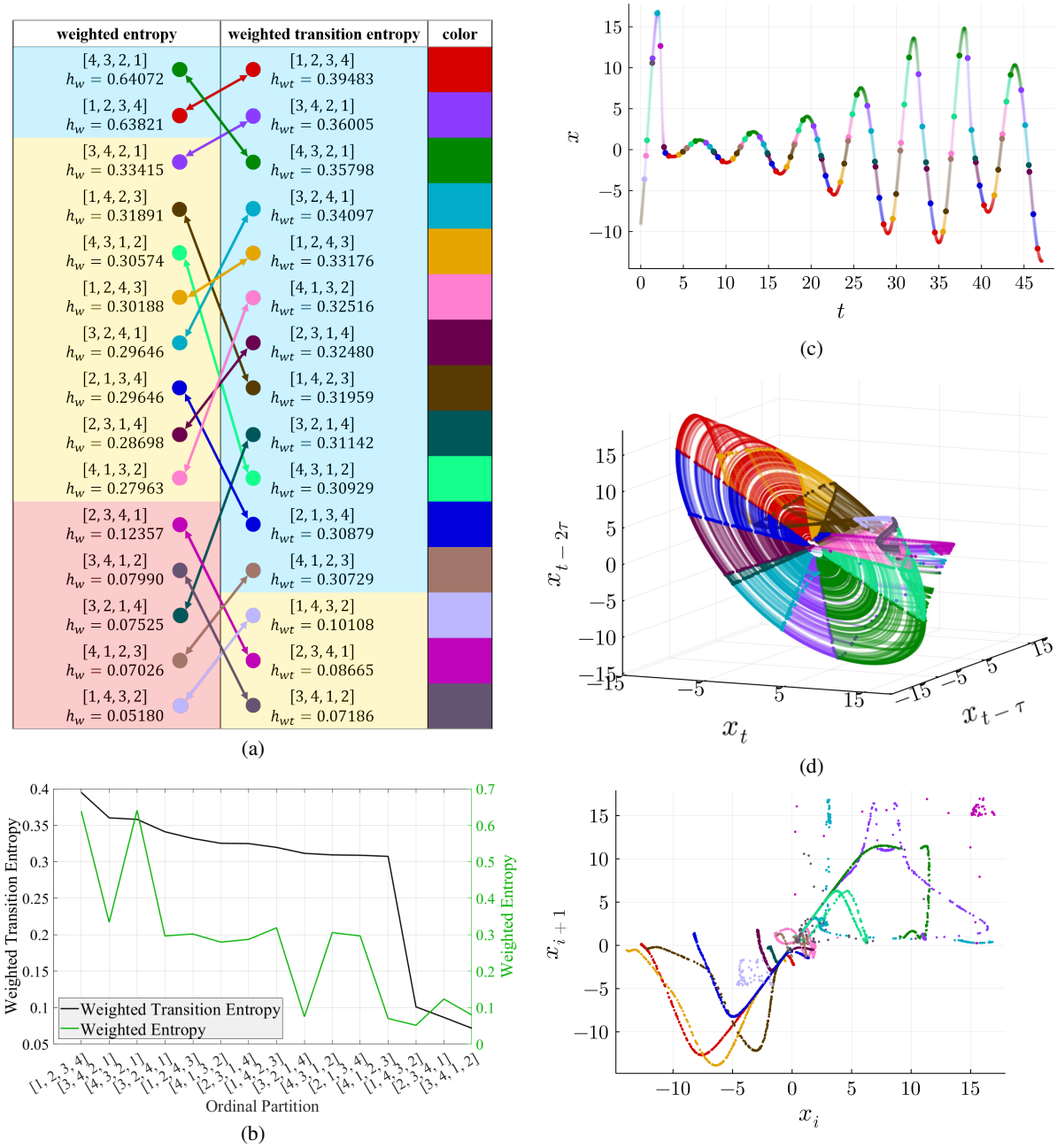

图11：（a）Rössler吸引子上曾出现过的序数划分列表。第一列按加权熵（h_w）排序，第二列按加权转移熵（h_{wt}）排序。每个序数划分都被赋予了一种特定颜色，如第三列所示。第一列和第二列中的背景颜色表示各自组别中的熵级（见图11b）。蓝色单元格属于第一熵级，黄色单元格属于第二级，红色单元格属于第三级。加权熵（h_w）有三个级别，但加权转移熵只有两个级别（h_{wt}）。（b）按降序排列的每个序数划分的加权转移熵（黑线）及其对应的加权熵（绿线）。（c）根据序数划分着色的Rössler的x时间序列。每个窗口的序数划分都被赋予该窗口的第一个点。（d）根据其x着色时间序列，使用Takens嵌入定理得到的Rössler嵌入吸引子，其中嵌入维数为$M = 3$，嵌入延迟为$T = 144$。高熵截面可作为吸引子上合适的庞加莱截面。（e）每个序数划分对应的首次返回映射。注意：绘制图11e并不需要图11d；提供图11d仅用于说明为什么高熵序数划分可以被视为良好的庞加莱截面。

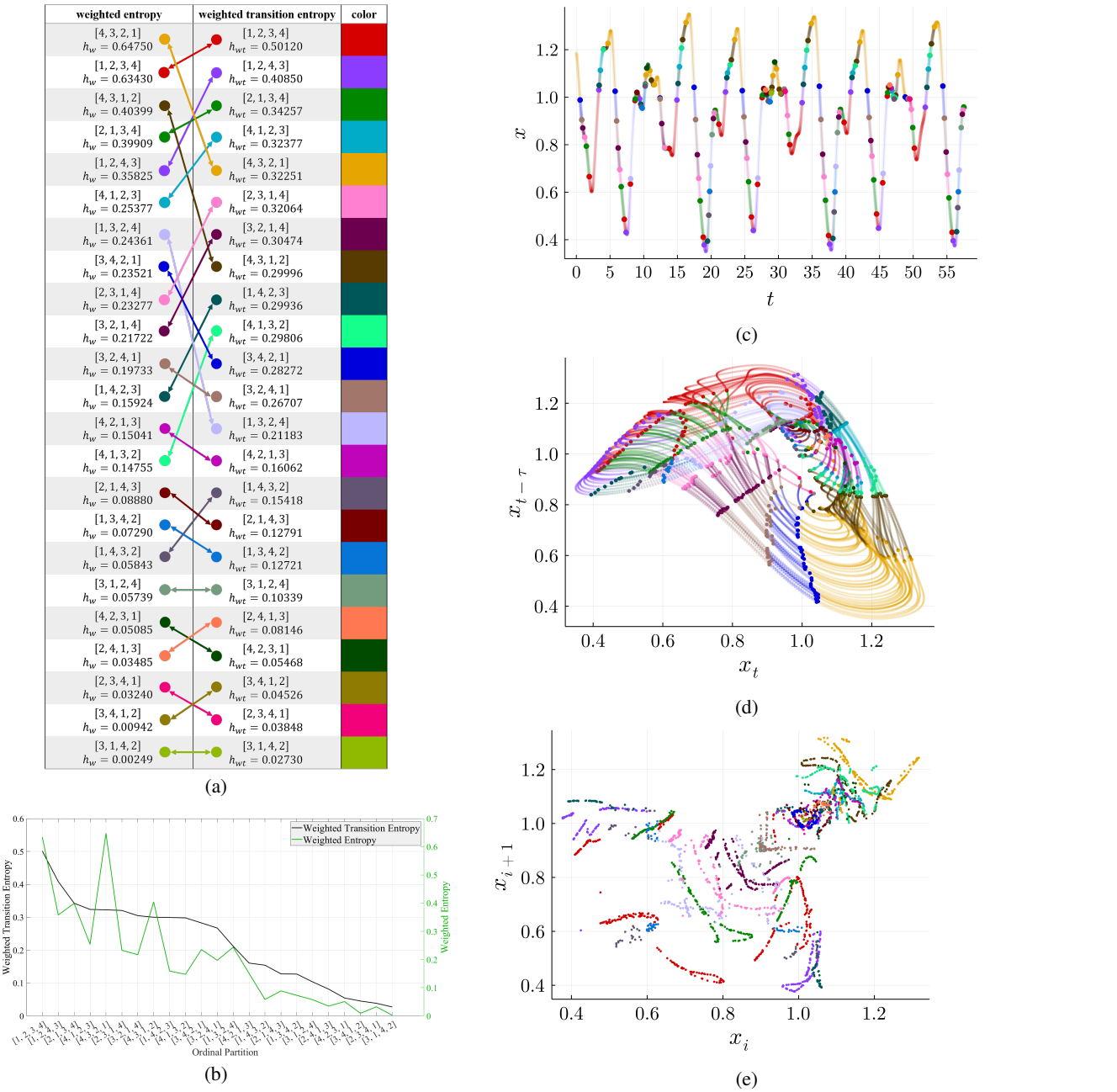

图12：(a) MackeyGlass吸引子上出现过的序数划分列表。第一列按加权熵（h_w）排序，第二列按加权转移熵（h_{wt}）排序。每种序数划分都被指定了一种特定颜色，如第三列所示。由于不同熵值没有明显的层级（参见图12b），第一列和第二列未设置背景颜色。(b) 按降序排列的各序数划分的加权转移熵（黑线）及其对应的加权熵（绿线）。(c) 根据序数划分着色的 MackeyGlass x 时间序列。每个窗口的序数划分均标记在该窗口的第一个点上。(d) MackeyGlass 延迟嵌入吸引子，其嵌入维数为$M = 2$，嵌入延迟为$T = 204$。高熵截面可作为吸引子上合适的庞加莱截面。(e) 各序数划分对应的首次返回映射。注意：绘制图12e 无需图12d；提供图12d仅用于说明为何高熵序数划分可视为良好的庞加莱截面。