arXiv:2303.00389v1 [math.AP] 1 Mar 2023

LOW ENERGY LEVELS OF HARMONIC MAPS INTO ANALYTIC MANIFOLDS

MELANIE RUPFLIN

Abstract. 我们研究从球面到闭黎曼流形 N的调和映射的能量谱 $\Xi_E(N)$。一个广为人知的猜想断言，只要 N 是解析的， $\Xi_E(N)$就是离散的；然而，对于大多数解析目标空间，目前仅知能量谱的任何潜在聚点都必定是至少两个调和球面的能量之和。因此， Ξ_E 可能成为聚点的最低能级为 $2E_{\min}$。本文排除了这一情形对一般三维流形成立的可能，并证明了其他结果，确立了调和球面粘合的障碍，以及针对近似调和映射的Łojasiewicz估计。

1. Introduction

设(N, g_N)为一个闭黎曼流形。不失一般性，我们可以借助Nash嵌入定理将其嵌入适当的欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 中。回顾一下，映射 $u\colon S^2 \to N$ 称为调和映射，若它是Dirichlet能量的临界点

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla u|^2 dv_{g_{S^2}}.$$

这类调和映射的特征是 $\tau_{g_{S^2}}(u) = 0$ 其中张力场由$\tau_{g_{S^2}}(u) = -\nabla^{L^2}E(u) = \Delta_{g_{S^2}}u + A(u)(\nabla u, \nabla u)$给出， A $N \hookrightarrow \mathbb{R}^N$的第二基本形式。

我们回顾一下，任何从 S^2 出发的调和映射都是（弱）共形的，因此，从球面出发的调和映射集合与 N中极小球面的（弱）共形参数化集合相重合。特别地，调和球面的能量谱

$$\Xi_E(N, g_N) := \{E(u) : u : S^2 \to N \text{ harmonic, not constant }\}$$

与（按重数计的）可能具有分支的浸入极小球面的面积一致。

虽然构造光滑流形（N、 g_N）使得 Ξ_E（N、 g_N）具有聚点并不困难，但 Leon Simon 和 Fang-Hua Lin 的一个著名猜想 [5] 断言，从 S^2 到任意闭解析流形的调和映射的能量谱都是离散的。

在某些非常特殊的情形下，这可以由强得多的结果推得，例如对 N 中所有极小球面的明确刻画，以及由此对$\Xi_E(N)$的明确了解。例如，若目标空间是圆球面，那么所有调和球面都可用立体投影坐标 $z \in \mathbb{C}$ 表示为 z 或 $\bar{z}$ 中的有理映射，因此 $\Xi(S^2, g_{S^2})$由 4π的倍数组成。

相反，对于更一般的解析目标空间，关于 Ξ_E 人们所知甚少，现有的少数结果已可由 20 世纪 90 年代发展起来的（近）调和映射紧性理论 [14, 1, 10, 4] 以及 Simon [13] 于 1983 年提出的开创性结果推出。

Date: 2023年3月2日。

为了描述 Ξ_E 的已知性质，我们首先回顾：映射序列 u_j 具有有界能量，并且在以下意义下近调和：

$$\|\tau_{g_{S^2}}(u_j)\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} \to 0 \tag{1.1}$$

子列收敛到一棵泡树，既没有能量损失，也没有形成颈部：也就是说，存在一个调和基映射 $\omega_0: S^2 \to N$ 以及一个有限集 $S \subset S^2$，使得 $u_j \to \omega_0$ 在 $H^2_{loc}(S^2\setminus S)$ 中强收敛，并在 $H^1(S^2)$ 中弱收敛；此外，在每个点 $p \in S$ 附近，u_j 基本上可由一组高度集中的调和球面来描述。具体而言，对每个这样的 p，存在一个有限的调和映射族 $\omega_k: \mathbb{R}^2 \to N$、点 $p_j^k \to p$ 和尺度 $\mu_j^k \to \infty$，使得在以 p 为中心的立体投影坐标下，

$$u_j(x) - \sum \big(\omega_k(\mu_j^k(x-p_j^k)) - \omega_k(\infty)\big) - \omega_0(x) \to 0 \text{ strongly in } L^\infty \cap H^1(B_r(p)). \tag{1.2}$$

我们回顾一下，能量的共形不变性以及 Sacks-Uhlenbeck 的结果 [12] 表明，一个有限能量映射 $u: \mathbb{R}^2 \to N$ 是调和映射，当且仅当 $u \circ \pi^{-1}: S^2 \to N$是从球面出发的调和映射，$\pi(x) = (\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2})$: $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to S^2$ 逆立体投影。在下文中，我们因此可以转换视角，在 $\mathbb{R}^2$上，或等价地在 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$上进行研究，视方便而定；并且，除去平凡情形 $E(u_j) \to 0$之外，可以通过适当的 M¨obius 变换拉回一列满足 (1.2) 的映射 u_j，从而确保基映射 ω_0 为非常值映射。

如果没有形成泡，即映射在 $H^2(S^2)$ 中强收敛，并且 N 是解析的，那么 Simon 的开创性成果 [13] 便适用。这些成果表明，对于每个调和映射$u^*: S^2 \to N$ 存在一个 $\varepsilon = \varepsilon(u^*) > 0$，使得如下形式的 Łojasiewicz 估计成立

$$|E(u) - E(u^*)| \le C\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^\gamma_{L^2(S^2,g_{S^2})} \text{ for some } \gamma = \gamma(u^*) \in (1,2] \tag{1.3}$$

对邻域中的所有映射均成立

$$\mathcal{U}(u^*) = \{u : S^2 \to N : \|u-u^*\|_{L^\infty} < \varepsilon \text{ and } \|u-u^*\|_{H^1} < \varepsilon\}.$$

相反，这些结果不能用于研究发生起泡的调和映射序列，因为这类映射不会 H^1 接近某个固定的调和映射，甚至不会接近任何一个调和映射集合；对于该集合，[13] 可在一个 一致的 ε-邻域上给出 Łojasiewicz估计，参见注 4.3。据作者所知，目前关于映入一般解析流形的调和映射的能量谱，唯一已知的性质是由上述紧性理论和 Simon 的工作所推出的性质，即

- 最低非平凡能级 $E_{\min} := \inf \Xi_E(N)$ 在能量谱中能够达到且是孤立的。
- 任何 $\Xi_E(N)$的潜在聚点都必须具有如下形式：$\bar{E} = \sum_{i=0}^n E(\omega_i)$，其中 ω_i, $i = 0, \dots, n \ge 1$是非平凡调和球面；且此类聚点¯ ¯必定源于存在一列调和映射 u_j，其能量为 $E \ne E(u_j) \to E$，并收敛到一个非平凡泡树。

因此，能量谱可能出现聚点的最低层级是 $2E_{\min}$。要更好地理解 Ξ_E并进一步认识上述猜想，一个自然的起点是考察调和映射的能量是否可能在 $2E_{\min}$ 处聚集。本文在对极小能量调和球面作出一些自然假设的条件下，排除了三维流形中这种可能性

定理 1.1. 设 (N, g_N) 为任意解析三维流形，且令 $E_{min} = \min \Xi_E(N, g_N)$ 为 N 中非平凡调和球面的最小能量。假设具有此能量 E_{min} 的调和球面$\omega: S^2 \to N$ 是无分歧的非退化临界点，并且此类极小球面之间的任何交点或自交都是横截的，即相应的切空间不重合。

那么，$2E_{min}$不可能是能量谱 $\Xi_E(N, g_N)$ 的聚点。

由于能量在共形变换下保持不变，我们知道，形如$Y = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\,\omega \circ M_\varepsilon$, M_ε 的一族 M¨obius 变换（其中 $M_{\varepsilon=0} = \mathrm{Id}$）的向量场，沿着$\omega$是 Jacobi场，也就是说 $d^2E(\omega)(Y,\cdot) = 0$。因此，如果沿着$\omega$ 的所有 Jacobi场都由这种方式生成，我们就称 ω 是非退化的。

我们回顾一下，Gulliver、Osserman 和 Royden 的结果[2] 保证了三维流形中局部面积极小的极小曲面不会有真正的分支点。因此，能量为 $E_{\min}$ 且为局部面积极小曲面的任何调和球面都会自动是无分歧的。当然， S^3 中的赤道球面这一例子表明，具有最小能量的调和球面未必是面积的局部极小曲面。据作者所知，目前尚不清楚三维流形中是否存在分支的最小能量调和球面。

上述定理对于非解析的流形也成立，只要已知能量为 $2E_{\min}$ 的素调和球面是非退化临界点。

White 在 [19, 20, 21] 中以及 Moore 在 [8] 中得到的鼓包度量定理，还有 [9], 中的定理 5.1.1 和 5.1.2，保证了对于维数至少为 3 的流形上的一般度量，所有素调和映射都是非退化临界点、无分歧的，并且所有可能的交点和自交点都是横截的。因此我们得到

推论 1.2。 对于一般的 3 维流形，排除 $2E_{min}$ 是能量谱 $\Xi_E(N)$ 的聚点这一可能性后，以下定理 *1.3*、*1.5* 和 *1.7* 中所述的 Łojasiewicz 估计对任何收敛到仅含一个泡的泡树的近似调和映射序列均成立。

我们指出，尽管标准论证表明，Łojasiewicz 估计（1.3）在 $\gamma = 2$ 的 $\varepsilon = \varepsilon(u^*) > 0$ 邻域内对任意取值于光滑流形的非退化调和映射 u^* 均成立，但这些论证无法用于得到上述结果，因为发生起泡的调和映射序列不会位于某个固定此类映射的邻域内。

为证明定理 1.1 及上述推论，我们需要排除存在如下调和映射序列的可能性： $u_j : S^2 \to N$ 其能量为 $2E_{\min} \neq E(u_j) \to 2E_{\min}$。我们知道，这样的序列不可能强收敛，否则将与 [13], 矛盾，因此（经适当的莫比乌斯变换拉回后）必须收敛到一个具有基映射 ω_0和一个能量为 $E(\omega_0) = E(\omega_1) = E_{\min}$的泡 ω_1。

因此，我们需要探讨是否能够将越来越集中的调和球面粘合到调和基映射上，使所得调和映射的能量接近但不等于 $E(\omega_0) + E(\omega_1)$。我们不仅会排除定理1.1中所考虑的调和球面存在这种情况的可能性，还将证明调和球面粘合存在一些障碍，这些障碍适用于更一般的情形，包括所涉及的调和球面是分支的，且具有非平凡、甚至不可积的 Jacobi场的情况。

自然可以区分这样的泡树：其中泡 ω_1 和基底 ω_0

(1) 以相同定向参数化同一个极小曲面；(2) 以相反定向参数化同一个极小曲面；(3) 参数化横截相交的极小曲面。

我们注意到，收敛到泡树时的无颈性质保证，我们只需考虑满足 $\omega_0(p) = \omega_1(\infty)$ 的映射 ω_0 和 ω_1，其中 p 是泡形成的点。对定义域进行旋转后，不失一般性，可假设泡附着在北极，因此在 $z = 0$处使用立体投影坐标。接下来，我们因此只需考虑映射 $u_j : \mathbb{C} \to N$，对于这些映射，存在 $\mu_j \to \infty$ 和 $z_j \to 0$，使得

$$u_j(z) - \omega_0(z) - [\omega_1(\mu_j(z - z_j)) - \omega_1(\infty)] \to 0 \text{ in } \dot{H}^1 \cap L^\infty(\mathbb{C}). \tag{1.4}$$

我们的分析并不限于 ω_0 和 ω_1 无分歧的泡树；更一般地，我们可以考虑基映射和泡由调和球面 $U^*\colon \mathbb{C} \to N$与满足 $dU^*(q^*(0)) \neq 0$的有理映射 $q^*\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ 复合而成的泡树，其中有理映射的次数任意；也就是说，这类映射的形式为 $q^*(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}, p_{1,2}$ 多项式。由于可以将旋转与 U^* 预复合，我们可以将注意力限制在把 0 映射到 0 的有理映射 $q^*(z)$ 上，因此总是假设 $dU^*(0) \neq 0$。

注意到，能量的共形不变性保证，任何形如 $U \circ q$,U 调和且 q 有理的映射都是调和映射；任何形如$Y = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(U \circ q_\varepsilon)$、 q_ε有理映射的向量场，都是沿着 $U \circ q_{\varepsilon=0}$的Jacobi场。因此，对于调和球面的高阶覆盖，自然可以这样定义：

定义 1. 若形如 $\omega = U \circ q$ 的调和映射 ω满足：沿着 ω 的每个Jacobi场 Y 均由有理映射 q_ε 的变分生成，即由 $Y = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(U \circ q_\varepsilon)$给出，则称能量的二阶变分沿该映射非退化。

我们首先考虑基底与泡以相同定向参数化同一极小曲面的情形。这里也包括以下情况：$U^*(0)$ 是浸入的极小球面 $U^*(\hat{\mathbb{C}})$ 上一个高重数点，且 ω_0并且 $\omega_1(\frac{1}{z})$ 在 $z = 0$附近参数化 $U^*(\mathbb{C})$ 的同一叶 $\hat{}$；但在第三种情形中，我们将改为考虑它们参数化横截相交的叶的情况，参见下文定理 1.7 。

$\hat{}$ 因此，假设 ω_0 和 ω_1 是由同一个调和映射 $U^*\colon \mathbb{C} \to N$ 分别与有理映射 $q_0^*(z)$ 和 $q_1^*(\frac{1}{z})$复合得到的，其中 $q_0^*(0) = q_1^*(0) = 0$。我们想证明，收敛到此类泡树的调和映射序列 u_j 只能是 $U^*\colon S^2 \to N$的高次数覆盖。

这并不能由现有理论推出，因为随着映射发生起泡，已知 Łojasiewicz 估计成立的邻域大小会趋于零，参见注释 4.3。如果 u_j 是一个收敛到此类泡树的调和映射序列，那么 [14, 1, 10, 4] 中的紧性理论保证 $\|u_j - U^* \circ r_j\|_{L^\infty \cap \dot{H}^1} \to 0$ 对某些有理映射 r_j成立。然而，现有理论无法提供这种收敛速率的定量估计，因此无法确定映射 u_j 是否处于不断缩小的邻域 $\mathcal{U}(U^* \circ r_j)$内，而 Simon 的结果正适用于这些邻域。

反过来，我们的方法使我们能够证明，在此类调和映射非紧集合周围的某个一致 ε 邻域内，Łojasiewicz估计确实成立 $\{U^* \circ r\}$，因此，此类调和映射序列不可能导致能量谱出现聚点。更准确地说，我们证明

定理 1.3. 设 (N, g_N) 是任意维数的光滑黎曼流形。假设$U^*\colon \hat{\mathbb{C}} \to N$是一个调和映射，满足 $dU^*(0) \neq 0$，且 $q_0^*, q_1^*\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$是有理映射，满足$q_1^*(0) = q_0^*(0) = 0$，使得 d^2E在 $\omega_0(z) := U^* \circ q_0{}^*$和 $\omega_1(z) := U^* \circ q_1{}^*(\frac{1}{z})$ 处按定义 1 的意义是非退化的。

设 (u_j) 是任意一个近似调和映射序列，该序列收敛于一个泡树，其基映射为 ω_0，泡为 ω_1，如 (1.1) 和 (1.4)中所述。那么存在常数 C 使得

$$|E(u_j) - [E(\omega_0) + E(\omega_1)]| \leq C \min(\|dE(u_j)\|_*, \log \mu_j \|dE(u_j)\|_*^2), \tag{1.5}$$

对所有充分大的 j 以及 $\mu_j \to \infty$ 如 (1.4)所示。
此外，如果映射 u_j 是调和映射，那么在对定义域进行适当的旋转 R_j的复合之后，它们可以写成

$$u_j(z) = U^*\big(q_0^j(z) + q_1^j(\tfrac{1}{\mu_j z})\big)$$

对于有理映射 q_i^j，当将其视为从 S^2 到 S^2 的映射时，它们平滑收敛至 q_i^*。

此处及下文中 $\|\cdot\|_*$ 表示一种加权 H^{-1} 范数，其定义见注 4.1，选取该范数是为了使上述估计（1.5）在经 M¨obius 变换拉回后保持不变。注意， $\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,g_{S^2})}$虽然支配 $\|dE(u)\|_*$，却不具有这一性质。然而，尽管采用 $\|dE(u)\|_*$ 来分析能量谱是很自然的，获得 L^2-Łojasiewicz估计也很有意义，例如可用于分析调和映射热流的渐近行为

$$\partial_t u = \tau_{g_{S^2}}(u). \tag{1.6}$$

因此，我们还将证明

推论 1.4。 对于满足定理 u_j 中的条件的映射序列 *1.3* ，我们可以给出界

$$|E(u_j) - E^*| \le C\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2,g_{S^2})}. \tag{1.7}$$

这一推论的一个结果是，对于流（ $u(t)$）的解（1.6），若其序列 $u(t_j)$,$t_j \to \infty$已知会如定理 1.3 所述子收敛到一棵泡树，则它们必定以指数速度收敛到唯一的基映射 u_∞： $S^2 \to N$ 当 $t \to \infty$ 远离唯一点 $p_\infty \in S^2$ 时，在 $L^2(S^2,g_{S^2})$ 和 $C^k_{loc}(S^2 \setminus \{p_\infty\})$ 两种意义下皆如此。

在只有一个泡的情形下，这推广了 Topping 此前在 [15] 为 N 标准二维球面的情形下得到的结果；Liu 和 Yang 后来又在 [6] 将其推广到紧致 K¨ahler 流形，且其全纯双截面曲率非负。我们注意到， [15, 6] 中的结果并不限于只有一个泡的情形，还适用于收敛到任意泡树的映射序列及流的解；这些泡树的基映射和各个泡都是具有相同定向的同一类极小球面的参数化。

上述推论表明，尽管在证明 [15, 6]，时至关重要地用到了目标空间的特殊几何结构，但类似结果或许对更一般的目标空间也成立；人们可以预期，所需的主要性质是底层调和球面 $U^* \circ q_i^*$ 处能量的二阶变分非退化，而对于 $N = S^2$ ，这一点可由 [3] 得出。

接下来，我们要证明，不可能将一个高度集中的泡粘接到一个以相反定向参数化同一极小曲面的基映射上。事实上，我们将更一般地证明，对于收敛到这种泡树的近似调和映射，其能量缺陷和泡尺度可由 $\|dE(u)\|_*$ 控制。

ˆ 定理 1.5. 设 (N, g_N) 是任意维数的光滑黎曼流形，设 $U^*\colon \mathbb{C} \to\hat{}\, \hat{}N$ 是任意满足 $dU^*(0) \neq 0$ 的调和映射，并设 $q_0^*, q_1^*\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是任意满足 $q_1^*(0) = q_0^*(0) = 0$ 的有理映射，使得 d^2E 在 $\omega_0(z) := U^* \circ {q_0}^*$ 和 $\omega_1(z) := U^* \circ {q_1}^*(\frac{1}{z})$ 处按照定义 1 的意义非退化。

设 (u_j) 是任意一个收敛到泡树的近似调和映射序列，其基映射为 ω_0 ，泡为 ω_1 ，如 (1.1) 和 (1.4)所述。那么泡尺度必须满足

$$\mu_j^{-\min(n_0^*, n_1^*)} \le C\|dE(u_j)\|_*,$$

$n_i^* \in \mathbb{N}$ $z = 0$处 q_i^*零点的阶，而能量缺陷则由以下量控制

$$|E(u_j) - [E(\omega_0) + E(\omega_1)]| \le C\|dE(u_j)\|_*.$$

特别地，不存在收敛到这种泡树的调和映射序列。

对于映射到圆球面的情形 L^2，Topping 在 $\gamma = 2$ 中证明了指数为[16]的 Łojasiewicz 估计以及关于泡尺度的指数界。在这一设定中，调和球面只有两种类型，即全纯映射或反全纯映射。 [16]的结果适用于收敛到任意泡树的映射，条件是对于每个奇点 p ，在 p 处形成的泡类型都相同；对于 p 处形成的泡，若其类型

与基映射不同，则还需要额外要求基映射不是分支映射。

Topping 已经在 [17] 中观察到，即使对于映射到（S^2，g_{S^2}）的映射，也不能指望证明L^2-Łojasiewicz 估计，其指数为 $\gamma = 2$，如果基映射在形成不同类型泡的点处分支。

与此同时，任何指数为 $\gamma > 1$ 的 L^2-Łojasiewicz 估计都足以证明调和映射流解的收敛性结果。由于这也是我们要证明涉及 $\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,\, g_{S^2})}$ 的 Łojasiewicz 估计的主要动机，而不是较弱且具有尺度不变性的 $\|dE(u)\|_*$，因此我们只需证明

推论 1.6。对于任意序列 (u_j)，其中的近似调和映射如定理 *1.5* 所述，我们可以估计

$$|E(u_j) - [E(\omega_0) + E(\omega_1)]| \leq C\|\tau_{g_{S^2}}(u_j)\|^{\gamma}_{L^2(S^2, g_{S^2})} \tag{1.8}$$

对于一个仅取决于 U^* 和 q_0^*、$_1$ 的指数 $\gamma > 1$。

最后，我们想证明，对于映射到三维流形的情形，不可能将两个调和球面 ω_0 和 ω_1 粘合起来，使得 ω_0 和 ω_1（$\frac{1}{z}$）分别参数化在 $z = 0$ 附近横截相交的极小曲面，或同一极小曲面上横截相交的叶。

在这种情形下，我们的结果也适用于作为退化临界点的调和球面，即其 Jacobi场并非由有理映射的变分生成。事实上，我们甚至可以处理具有不可积 Jacobi场的调和球面 ω_i；也就是说，对于这些调和球面，d^2E（ω_i）存在不切向于 ω_i 附近调和映射集合的零方向。

我们唯一要求的是：对于通过对映射 U_i^* 进行高阶覆盖而得到的映射 ω_i，这种结构也反映在 Jacobi场这一层面上。具体而言，若 q_i^* 的次数严格大于 1，则我们要求沿 $\omega_i = U_i^* \circ q^*$ 的所有 Jacobi场都由沿 U_i^* 的 Jacobi场与由有理映射变分生成的 Jacobi场的组合生成，即

$$\ker(L_{\omega_i}) = \{W \circ q^*,\, W \in \ker(L_{U_i^*})\} + T_{\omega_i}\{U_i^* \circ q : q : S^2 \to S^2 \text{ rational }\}, \tag{1.9}$$

L_u 沿着 u的雅可比算子。这里我们注意到，$W \circ q^*$ 沿着$U^* \circ q^*$是雅可比场，只要 W沿着 U^* 是雅可比场；这一事实源于能量的共形不变性，以及由此得到的

$$\tau(U \circ q) = \tfrac{1}{2}|\nabla q|^2 \tau(U \circ q) \tag{1.10}$$

共形变换下张力的变换公式。

作为最后一个主要结果，我们证明

定理1.7. 设(N, g_N)是任意解析三维流形，且U_0^*,1：$\hat{\mathbb{C}} \to N$是任意调和$\hat{}$球面，其中 U_1^*(0) $= U_0^*$(0)，且dU_0^*,1(0) $\neq 0$，并且相应极小曲面 U_i(ℂ)在$T_{U_i^*}$(0)U_i^*(ℂ)处的切空间不重合。设 q_0^*, q_1^* 是任意有理映射，满足 q_0^*(0) $= q_1^*$(0) $= 0$；若其次数至少为2，则假设它们满足(1.9)。

那么，对于任何(u_j) 近似调和映射序列，若其收敛到具有基映射 $\omega_0 = U_0^* \circ q_0^*$和泡 $\omega_1(z) = U_1^*(q_1^*(\frac{1}{z}))$的泡树，如(1.1)和(1.4)所述，则可将泡尺度界定为

$$\mu_j^{-\min(n_0^*, n_1^*)} \leq C\|dE(u_j)\|_*$$

并且我们有如下形式的 Łojasiewicz 估计

$$|E(u) - [E(\omega_1) + E(\omega_0)]| \leq C\|dE(u_j)\|_*.$$

特别地，不存在任何一列调和映射收敛到这样的泡树。

注 1.8. 如果 $U^*_{0,1}$ 是非退化临界点，那么即使不假设 (N, g_N) 是解析的，上述定理仍然成立。

我们注意到，与定理1.3和1.5不同，后两者对于任意维数的目标流形均成立，而在这里我们必须要求目标空间是3维的。如果考虑映射到高维流形（例如 $N = S^2 \times S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$），我们无法期待获得相同的排斥效应，其中例如 $u_j(\cdot) := (\pi(\cdot)\ \pi(\frac{1}{\mu_j \cdot})) : \mathbb{R}^2 \to N$, $\mu_j \to \infty$是调和映射，并且它们收敛到一棵泡树；对于这棵泡树，基底$\omega_0 = (\pi, \pi(\infty))$的切空间与泡 $\omega_1 = (\pi(\infty)\ \pi(\frac{1}{\cdot}))$ 的切空间在一点横截相交。

本文提纲：
为了证明我们的主要结果，我们采用了一种一般方法。这一方法最早是在[7] Malchiodi、Sharp与作者关于 H-曲面的合作成果中发展起来的。该方法的一个关键方面是，它使我们能够对能量 E的（几乎）临界点序列证明Łojasiewicz估计；这些序列收敛到一个奇异极限——这里即一棵泡树，而无需分析这类一般（几乎）临界点的性质。

相反，如果我们能够构造一个合适的有限维（非紧）流形 $\mathcal{Z}$，由奇点模型组成，使得能量在 $\mathcal{Z}$ 上的限制具有恰当的性质，那么根据能量及其在 $\mathcal{Z}$上的变分的性质，该方法便能得到在以 $\mathcal{Z}$为基底的统一 ε 邻域内有效的 Łojasiewicz 估计。

一般而言，这些奇点模型并不是能量的临界点，但它们始终满足 $\|dE(\mathfrak{z})\|_*$ 很小，因为它们充当近临界点行为的模型。 $\mathcal{Z}$ 需要满足的关键性质是：

（i）能量的二阶变分在正交于 $\mathcal{Z}$的方向上是一致定号的；（ii）对于每个不是 E 的临界点的 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$，我们都能在 $\mathcal{Z}$ 上确定一个方向，使得 E 的变分具有确定的符号和适当的尺度。更准确地说，我们需要对于每个这样的 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$，存在一个单位元 $y_{\mathfrak{z}} \in T_{\mathfrak{z}}\mathcal{Z}$，使得

$$Q(\mathfrak{z}, y_{\mathfrak{z}}) := \frac{\|dE(u)\|_*\big(\|dE(u)\|_* + \|d^2E(u)(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_*\big)}{dE(u)(y_{\mathfrak{z}})} \text{ is small .} \tag{1.11}$$

因此，我们的证明主要分为三个步骤：构造 $\mathcal{Z}$ 奇点模型流形，分析 $\mathcal{Z}$ 上的能量及其变分，最后论证 E 在 $\mathcal{Z}$ 上的这些性质如何导出我们的主要结果。在第2 节说明奇点模型的构造之后，我们会在接下来的第 E 节 $\mathcal{Z}$ 中通过一系列引理陈述 E 在 $\mathcal{Z}$ 上的相关性质，但将较为技术性的证明留到第3节之后的第5 节和第6节，因为理解这些证明并非完成第4节中主要结果证明所必需。

2. Construction of the singularity models

本节构造奇点模型，它们是映射 $\mathfrak{z} : S^2 \to N$，用于刻画收敛到具有基底$\omega_0 = U^*_0 \circ q^*_0$和泡 ω_1 的泡树（z） $= U^*_1 \circ q^*_1$（$\frac{1}{z}$）的近似调和映射序列的行为。这里以及下文中， U^*_i: $\hat{\mathbb{C}} \to N$始终表示满足 $dU^*_i(0) \neq 0$ 的调和映射，而 q^*_i是.....的元素

$$\mathcal{R} := \{q : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ rational with } q(0) = 0\}. \tag{2.1}$$

只需构造奇点模型 $\mathfrak{z}$: $S^2 \to N$，使泡附着在北极处，并将相应的映射集合记为 $\mathcal{Z}_0$。构造出 $\mathcal{Z}_0$ 后，我们便可得到完整的奇点模型流形：

$$\mathcal{Z} := \{\mathfrak{z}_0 \circ R_p : p \in S^2, \mathfrak{z}_0 \in \mathcal{Z}_0\}, \tag{2.2}$$

其中， $R_p \in SO(3)$ 表示将包含 0、 p 和北极 $\pi(0)$ 的平面映射到自身的旋转，并且该旋转满足 $R_p(p) = \pi(0)$（约定若 $p = \pi(0)$，则 $R_p = \mathrm{Id}$）。

为构造这些映射 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，我们在固定的立体投影坐标中工作，其中基底和泡将分别由调和映射 $U_i^* : \mathbb{C} \to N$ 和有理映射 $q_i^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 表示。正如引言中所讨论的，我们需要分析以下三种情形：要么 $U_0^* = U_1^*$，要么 $U_0^*(\bar{z}) = U_1^*(z)$，要么 $U_{0,\,1}^*$ 参数化三维流形中的极小球面，并在 $U_1^*(0) = U_0^*(0)$ 处横截相交。

不失一般性，我们可以假设有理映射 q_0^*,1 满足： $q_i^*(z) = a_{n_i^*}(q_i^*) z^{n_i^*} + \sum_{j>n_i^*} a_j(q_i^*) z^j$ 中的首项系数满足 $|a_{n_i^*}(q_i^*)| = 1$。事实上，为了使 q_0^* 满足这一条件，我们只需将 U_0^* 替换为 $U_0^*(c\cdot)$，其中 $c > 0$ 取适当值；同时，将泡树收敛 (1.4) 中选定的尺度 μ_i 替换为 $c\mu_i$，即可假设这一条件对 q_1^* 也成立，同时仍保留关系 $U_0^* = U_1^*$，以及 $U_0^*(z) = U_1^*(\bar{z})$。

为构造一个满足 d^2E 与 $\mathcal{Z}$ 正交的流形 $\mathcal{Z}$，我们首先需要确定合适的映射集合 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$，使得其切空间

$$\mathcal{H}^\sigma(\omega_i) := \{U \circ q : U \in \mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*), \quad q \in \mathcal{R}^\sigma(q_i^*)\} \tag{2.3}$$

在 $\omega_i = U_i^* \circ q_i^*$ 处与沿 ω_i 的 Jacobi场空间 $\ker(L_{\omega_i})$ 重合。此处及下文中， $\sigma > 0$ 表示一个稍后选定的小常数，且该常数足够小，从而保证其中所有映射

$$\mathcal{R}^\sigma(q_i^*) : \{q \in \mathcal{R} : \|\pi \circ q \circ \pi^{-1} - \pi \circ q_i^* \circ \pi^{-1}\|_{C^k(S^2)} < \sigma\} \tag{2.4}$$

与 q_i^* 具有相同的次数，并且满足 $|a_{n_i^*}(q_i)| \in (\frac{1}{2}, 2)$。此处及下文中，我们可以将 $k \geq 2$ 选为任意固定数。

若 ω_i 非退化，即所有 Jacobi场均由有理映射的变分生成，那么我们只需取

$$\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*) := \{U_i^*(\cdot + c) : c \in \mathbb{C}, |c| < \sigma\}.$$

更一般地，若沿 U_i^* 的所有雅可比场均可积，我们首先选取一个调和映射流形 $\mathcal{H}_0(U_i^*)$，其维数为 $\dim(\ker L_{U_i^*}) - 6$，并且使得每个接近 U_i^* 的调和映射都能唯一地写成 $U \circ M$ 的形式，其中 M 是一个 M¨ Möbius变换，且 U 属于 $\mathcal{H}_0(U_i^*)$。然后我们令

$$\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*) := \{U(\cdot + c) : c \in \mathbb{C}, |c| < \sigma, U \in \mathcal{H}_0(U_i^*) \text{ with } \|(U - U_i^*) \circ \pi^{-1}\|_{C^k(S^2)} < \sigma\} \tag{2.5}$$

并注意到 (1.9) 确保所得的 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_i)$ 确实满足 $T_{\omega_i}\mathcal{H}^\sigma(\omega_i) = \ker(L_{\omega_i})$。

在更复杂的情形下，若 U_i^* 具有不可积Jacobi场，我们还需要在 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_i)$ 中额外加入某些非调和映射，因此也要加入 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 和 $\mathcal{H}_0(U_i^*)$，以确保这些不可积Jacobi场也对应于与 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_i)$ 相切的方向。在这种情形下，我们首先按照 $\mathcal{H}_0(U_i^*$的附录 A 中的详细描述，选择 [11] 作为由光滑映射构成的流形

$$T_{U_i^*}\{U \circ M : U \in \mathcal{H}_0(U_i^*), M \text{ Möbius transform}\} = \ker(L_{U_i^*}) \tag{2.6}$$

它具有以下关键性质：对于每个 $U \in \mathcal{H}_0(U_i^*)$，我们都可以给出界

$$\|\tau_{g_{S^2}}(U \circ \pi^{-1})\|_{C^k(S^2)} \leq C\|\tau_{g_{S^2}}(U \circ \pi^{-1})\|_{L^2(S^2, g_{S^2})} \tag{2.7}$$

并在 $\mathcal{H}_0(U_i^*)$ 中找到 U 的一个变分 U_ε，满足 $\|\partial_\varepsilon(U_\varepsilon \circ \pi^{-1})\|_{C^k} \leq C$，使得

$$\tfrac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} E(U_\varepsilon) \geq \|\tau_{g_{S^2}}(U \circ \pi^{-1})\|_{L^2(S^2, g_{S^2})}, \tag{2.8}$$

参见 [11] 的引理 2.1。

然后我们再次定义 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$，由 (2.5) 给出，并注意到这个流形继承了性质 (2.7) 和 (2.8)，而 (1.9) 保证 $T_{\omega_i}\mathcal{H}^\sigma(\omega_i) = \ker(L_{\omega_i})$，对于 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_i)$，其定义见 (2.3)。

以这种方式选定 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 后，我们现在通过将 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_1^*)$ 中某个元素的高度集中的副本粘合到 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_0^*)$ 中的一个元素上，来构造奇点模型。也就是说，我们希望以这样的方式构造 $\mathcal{Z}_0$ 中的元素 $\mathfrak{z}$：当 $z=0$ 时，$\mathfrak{z}\approx U_0(q_0(z))$；而对于映射 $U_i\in\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$、$q_i\in\mathcal{R}^\sigma(q_i^*)$、$i=0$、1 和较大的缩放因子 μ，当远离零点时，$\mathfrak{z}(z)\approx U_1\circ q_1(\frac{1}{\mu z})$。

注 2.1. 我们始终考虑由 $\mathcal{H}_1^\sigma(\omega_i)$ 中的映射和缩放因子 $\mu>\bar\mu$ 得到的元素，其中 $\bar\mu$ 足够大，$\sigma>0$ 足够小（仅取决于 U_i^*、q_i^*）。下文中的所有断言和估计均应理解为：必要时增大 $\bar\mu$ 并减小 σ 后成立。

为了描述这一构造，我们首先为每个 $q_0\in\mathcal{R}^\sigma(q_0^*)$ 以及每个由 $q_1\in\mathcal{R}^\sigma(q_1^*)$ 中的一个元素和缩放因子 $\mu>\bar\mu$ 得到的 $q_1(\frac{1}{\mu z})$，赋予以下数值

$$\mu_0:=|a_{n_0^*}(q_0)|^{-1/n_0^*}\text{ and }\mu_1:=\mu|a_{n_1^*}(q_1)|^{-1/n_1^*}. \tag{2.9}$$

我们注意到，虽然可以用 $\mathcal{R}^\sigma(q_1^*)$ 中的一个元素和因子 $\mu>\bar\mu$ 以多种方式表示同一个有理映射 $q_1(\frac{1}{\mu z})$，但数值 μ_1 由 $q_1(\frac{1}{\mu z})$ 唯一确定；并且，虽然 μ_0 的量级为 1，μ_1 的量级将为 μ。

下面的某些粘合构造将在环域上进行

$$A=\mathbb{D}_{r_0}\setminus\mathbb{D}_{r_1},\quad A^*:=(\mathbb{D}_{2r_1}\setminus\mathbb{D}_{r_1})\cup(\mathbb{D}_{r_0}\setminus\mathbb{D}_{\frac12 r_0})\text{ and }\hat A=\mathbb{D}_{2\hat r}\setminus\mathbb{D}_{\frac12\hat r} \tag{2.10}$$

其半径 $\mu^{-1}\ll r_1\ll\hat r\ll r_0\ll 1$ 由以下条件确定

$$r_0:=\mu_0 f^{-1}_{\mu_0/\mu_1},\quad r_1:=\mu_1^{-1}f_{\mu_0/\mu_1}\text{ and }\hat r:=\mu_0^{\frac12}\mu_1^{-\frac12}\quad. \tag{2.11}$$

这里，$\mu\mapsto f_\mu$ 是一个固定的非递减函数，满足

$$\mu|\partial_\mu f_\mu|\le f_\mu\text{ while }\tfrac{\log f_\mu}{\log\mu}\le\sigma_1\text{ and }f_\mu^{-1}\le\sigma_1 \tag{2.12}$$

对于 $\mu>\bar\mu$ 以及一个小常数 $\sigma_1\in(0,\frac14]$。我们对 σ_1 采用与 σ 相同的约定，即在下文中要求，若 f_μ 满足此假设，且数值 $\sigma_1>0$ 足够小并且仅依赖于 $U_{0,\,1}^*$ 和 $q_{0,\,1}^*$，则所有断言均成立。

在构造中，f_μ 的具体选取并不重要；之后我们可以根据需要固定 f_μ，这一点会很有用。例如，在定理1.7 的证明中，使用 $f_\mu=\log\mu$ 会比较方便；而在推论1.6 的证明中，我们希望选取 $f_\mu=\mu^{\sigma_1}$。

注 2.2. 我们注意到，上述半径和环域的选择使得该构造在对立体投影坐标进行缩放 $z\mapsto\lambda z$ 时保持不变，并且当我们根据 $z\mapsto\frac{\mu_0}{\mu_1 z}$改变坐标时，交换基底与泡的角色后该构造具有对称性。

为了构造奇点模型，我们首先将映射

$$u_1:=U_1\circ q_\mu\text{ and }u_0:=U_0\circ q_\mu\text{ for }q_\mu(z):=q_0(z)+q_1(\tfrac{1}{\mu z}) \tag{2.13}$$

在 A 上作修改，使它们在 $|z|+|\mu z|^{-1}$ 上相差至多一阶误差；随后进一步修改所得映射，使其在整个 $\mathbb{R}^2$ 上相差至多二阶，然后在中心环带 A 上将这些映射粘合起来，并投影到 N 上。

为此，我们令 $\hat\gamma=\hat\gamma_{U_1(0)\,U_0(0)}:[0,1]\to N$ 为从 $\hat\gamma(0)=U_1(0)$ 到 $\hat\gamma(1)=U_0(0)$ 的最短测地线。我们注意到，$\hat\gamma$是良定义的，因为对于 $\mathcal{H}^\sigma(U_i^*)$ 中的所有元素，$\delta(U_0,U_1):=\mathrm{dist}_N(U_0(0)\ U_1(0))$ 都很小；这是因为这些映射与 U_i^* 及 $U_0^*(0)=U_1^*(0)$ C^k 很接近。

为了在 A 上从 $U_1(0)$ 过渡到 $U_0(0)$，我们使用

$$\gamma:=\hat\gamma\circ\phi_{r_0,r_1} \tag{2.14}$$

其中 $\phi_{r_0,r_1} = \phi_{r_0,r_1}(|x|)$: $\mathbb{R}^2 \to [0,1]$ 定义为

$$\phi_{r_0,r_1}(r) := \begin{cases} (1-\phi(\frac{r}{r_1}))c_{r_0,r_1}\log(\frac{r}{r_1}) & \text{for } r \le 2r_1 \\ c_{r_0,r_1}\log(\frac{r}{r_1}) = 1 - c_{r_0,r_1}\log(\frac{r_0}{r}) & \text{for } r \in (2r_1, \frac{1}{2}r_0) \\ 1-\phi(\frac{2r}{r_0})c_{r_0,r_1}\log(\frac{r_0}{r}) & \text{for } r \ge \frac{1}{2}r_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

对于 $c_{r_0,r_1} := (\log(\frac{r_0}{r_1}))^{-1}$ 以及固定的截断函数 $\phi \in C_c^\infty([0,2),[0,1])$，其中 $\phi \equiv 1$ 位于 $[0,1]$上。

注意，ϕ_{r_0,r_1} 的选取满足：$\Delta\phi_{r_0,r_1} \equiv 0$ 在 A^* 之外，并且 $\phi_{r_0,r_1}|_{\mathbb{D}_{r_1}} \equiv 0$，而$\phi_{r_0,r_1}|_{(\mathbb{D}_{r_0})^c} \equiv 1$。因此，$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to N$ 在 A^* 之外由调和映射给出，并在 $\gamma|_{\mathbb{D}_{r_1}} \equiv U_1(0)$ 与 $\gamma|_{\mathbb{D}^c_{r_0}} \equiv U_0(0)$ 之间过渡。令

$$\tilde\gamma_{U_1} := \gamma - U_1(0) \text{ and } \tilde\gamma_{U_0} := \gamma - U_0(0) \tag{2.16}$$

因此，我们可以将原始映射 $u_{0,1}$改为映射 $u_1(z) + \tilde\gamma_{U_1}(z)$ 和 $u_0(z) + \tilde\gamma_{U_0}(z)$，使它们在 A上相差的误差项阶为 $O(|z| + \frac{1}{\mu|z|})$。接下来令

$$\beta := U_0 - U_1, \quad j_0 := -d\beta(0)(q_1(\tfrac{1}{\mu z})) \text{ and } j_1 := d\beta(0)(q_0(z)) \tag{2.17}$$

以获得映射

$$v_1(z) := u_1(z) + \tilde\gamma_{U_1}(z) + d\beta(0)(q_0(z)) = u_1(z) + \tilde\gamma_{U_1}(z) + j_1(z) \tag{2.18}$$

and

$$v_0(z) := u_0(z) + \tilde\gamma_{U_0}(z) - d\beta(0)(q_{1,\mu}(z)) = u_0(z) + \tilde\gamma_{U_0}(z) + j_0(z), \tag{2.19}$$

它们现在只相差一个二阶误差项 $v_0 - v_1 = \beta(q_\mu) - \beta(0) - d\beta(0)(q_\mu)$。

ˆ 最后，我们在中心环带 A 上对这些映射进行插值，并投影到 N上。也就是说，我们将奇点模型定义为

$$\mathfrak{z} := \pi_N((1-\varphi_{\hat r})v_1 + \varphi_{\hat r}v_0), \tag{2.20}$$

其中，对于一个固定的光滑函数 $\bar\varphi\colon [0,\infty) \to [0,1]$，我们令 $\varphi_{\hat r}(z) := \bar\varphi(\hat r^{-1}|z|)$，该函数满足$\bar\varphi(t) = 0$ （当 $t \le \frac{1}{2}$时），而 $\bar\varphi(t) = 1$ （当 $t \ge 2$时）。

我们注意到，当 $U_{0,1} \in \mathcal{H}^\sigma(U^*_{0,1})$ 且 $q_{0,1} \in \mathcal{R}^\sigma(q^*_{0,1})$ 时，这些映射是良定义的，因为 $(1-\varphi_{\hat r})v_1 + \varphi_{\hat r}v_0$的像将包含在 N的一个小管状邻域内，而最近点投影在该邻域上有定义。

注 2.3。 我们构造的一个重要特征是，对映射的修改u_i 并非仅支撑在一个环带上，而是支撑在 $\mathbb{R}^2$ 的整个区域上。与通过较为任意的粘合构造得到的映射相比，这意味着 $dE(\mathfrak{z})$ 有相当大的一部分支撑在 $\mathbb{D}_{r_1}$ 和 $\mathbb{D}^c_{r_0}$上。这一点对于稍后证明我们的主要结果至关重要，因为由有理映射之一的变分所诱导的 $\mathcal{Z}_0$ 的元素的变分主要集中在 $\mathbb{D}_{r_1}$，分别集中在 $\mathbb{D}^c_{r_0}$，因此只能用于获得满足（1.11）的方向，当且仅当 $dE(\mathfrak{z})$ 具有适当的形式，从而能与这些方向发生恰当的相互作用。

3. Key lemmas

这里汇总我们需要用来证明主要结果的、关于 $\mathcal{Z}$ 上的能量及其变分行为的关键性质。我们将这些引理的证明推迟到第 5 节和第 6节，因为理解这些技术性证明并非证明主要结果所必需。

由于这些估计在与旋转进行前复合时均保持不变，因此只需对集合 $\mathcal{Z}_0$ 中泡附着于北极的奇点模型元素陈述并证明这些估计。此外，我们可以假设 $q_1(\frac{1}{\mu z})$ 由映射 q_1 表示，且该映射满足$|a_{n_1^*}(q_1)| = 1$，因此可利用 μ_1 以及在 (2.9) 中定义的 μ_0，它们满足 $\mu_1 = \mu$，而 $\mu_0 \sim 1$则满足相应条件。

给定 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(U_0 \circ q_0, U_1 \circ q_1(\frac{1}{\mu}\cdot)) \in \mathcal{Z}_0$，我们将使用加权 H^1-范数 $\|\cdot\|_{\mathfrak{z}}$及其对应的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{z}}$；在立体投影坐标下，它们定义为

$$\|w\|_{\mathfrak{z}}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w|^2 + \rho_{\mathfrak{z}}^2 |w|^2 dx \text{ for } \rho_{\mathfrak{z}}^2 := |\nabla \pi_{\mu_0(\mathfrak{z})^{-1}}|^2 + |\nabla \pi_{\mu_1(\mathfrak{z})}|^2, \tag{3.1}$$

$\pi_\lambda(z) \colon = \pi(\lambda z)$。注意到，此定义保留了构造的对称性，参见注记 2.2；并且对于 $\|\cdot\|_{\mathfrak{z}}$，我们将其定义推广到 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 \circ R_p$ 中的一般元素 $\mathcal{Z}$，方法是在以 p 为中心的立体投影坐标中使用相应的公式。

我们回顾一下，能量的二阶变分由下式给出

$$d^2E(\mathfrak{z})(v,w) = \int \nabla v \nabla w - A(u)(\nabla u, \nabla u)A(u)(v,w) \text{ for } v, w \in \Gamma(\mathfrak{z}^* TN), \tag{3.2}$$

参见例如 [11, 引理 3。1], 并注意到， d^2E 相对于此范数是一致有界的，即满足

$$|d^2E(\mathfrak{z})(w,v)| \lesssim \|w\|_{\mathfrak{z}} \|v\|_{\mathfrak{z}} \text{ for all } v, w \in \Gamma(\mathfrak{z}^* TN), \tag{3.3}$$

参见第 6 节。此处及下文中，若能以仅取决于极限构型的常数 C 控制 $T_1 \le C T_2$，即仅取决于 $U_{0,\,1}^*$ 和 $q_{0,\,1}^*$，则记作 $T_1 \lesssim T_2$；若 $T_1 \lesssim T_2$ 和 $T_2 \lesssim T_1$ 均成立，则记作 $T_1 \sim T_2$。

我们需要的第一个关键性质是，在构造 $\mathcal{Z}_0$ 时选择 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_{0,\,1}^*)$，可确保二阶变分在与 $\mathcal{Z}$ 正交的方向上一致定号，即

引理 3.1. 存在仅依赖于 $U_{0,\,1}^*$ 和 $q_{0,\,1}^*$ 的 $c_0 > 0$，使得对任意 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，都可以将 $T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z}$ 正交分解为子空间 $\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^\pm$，并满足

$$\pm d^2E(\mathfrak{z})(w^\pm, w^\pm) \ge c_0 \|w^\pm\|_{\mathfrak{z}}^2 \text{ and } d^2E(\mathfrak{z})(w^+, w^-) = 0 \text{ for all } w^\pm \in \mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^\pm. \tag{3.4}$$

为陈述能量 E 在 $\mathcal{Z}$ 上的所有其他性质，我们现在为每个 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(U_i, q_i, \mu)$ 关联以下量：

$$\delta := \operatorname{dist}_N(U_1(0), U_0(0)), \quad \mathcal{T} := \max(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1) \text{ and } \bar\nu := \max(\nu_1, \nu_0) \tag{3.5}$$

其中我们令 $\mathcal{T}_i := \|\tau_{g_{S^2}}(U_1 \circ \pi^{-1})\|_{L^2(S^2,\, g_{S^2})}$，并在 $z = 0$ 附近写作 $q_i(z) = \sum_j a_j(q_i) z^j$，以定义

$$\nu_1 := \max_{j=1,\dots,n_1^*} |a_j(q_1)| \mu^{-j}, \quad \nu_0 := \max_{j=1,\dots,n_0^*} |a_j(q_0)| \mu_1^{-j}, \tag{3.6}$$

$n_{0,\,1}^* \ge 1$ 固定有理映射 在 $z = 0$ 处零点的阶数。我们指出，这些量具有备注 2.2 中讨论的对称性，并进一步回顾， $\mathcal{T}_i$ 也能控制张力的 C^k-范数，参见（2.7）。

我们需要的第一个定量估计，是对一阶变分的对偶范数 $\|dE(\mathfrak{z})\|_* \colon = \sup\{dE(\mathfrak{z})(w) \colon \|w\|_{\mathfrak{z}} = 1\}$，我们将在第 6 节证明

引理 3.2。对于任意 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，我们有

$$\|dE(\mathfrak{z})\|_* \lesssim \|\beta\| \bar\nu (\log \mu)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta (\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}}{\log \mu} + \mathcal{T}.$$

这里以及下文中，我们将 $\beta = U_0 - U_1$ 和 $\partial_\varepsilon \beta$ 的范数视为相应映射从 S^2 出发的范数，即令

$$\|\beta\| := \|\beta \circ \pi^{-1}\|_{C^2(S^2)} \text{ and } \|\partial_\varepsilon \beta\| := \|\partial_\varepsilon \beta \circ \pi^{-1}\|_{C^2(S^2)}.$$

在下文中，我们考虑由 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 中 $U_{(\varepsilon)\,i}$ 的变分以及 $\mathcal{R}^\sigma(q_i^*)$ 中 $q_i^{(\varepsilon)}$ 的变分所诱导的 $\mathcal{Z}$中的变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon = \mathfrak{z}(U_{0\,1}^{(\varepsilon)}, q_{0\,1}^{(\varepsilon)}, \mu)$。我们不要求 $|a_{n_i}^*(q_i^{(\varepsilon)})| = 1$对 $\varepsilon \neq 0$ 成立，而是允许 $\mathcal{R}^\sigma(q_i)$ 中 q_i 的一般变分，因为这样我们便能表示变分

例如 $\mu_\varepsilon = \mu(1+\varepsilon)$ 这样的 μ 变分，可表示为形式为 $q_1^{(\varepsilon)}(z) = q_1(\frac{1}{1+\varepsilon}z)$ 的 q_1 变分。因此，下文无需单独考虑 μ 的变分。

为简化记号，在不会引起混淆时，我们将省略指标 ε，并约定除非另有说明，∂_ε 在 $\varepsilon = 0$ 处取值。我们只考虑满足以下条件的变分：

$$\|\partial_\varepsilon(\pi \circ q_i \circ \pi^{-1})\|_{C^k(S^2)} \lesssim 1 \text{ and } \|\partial_\varepsilon U_i\|_{C^k(S^2)} \lesssim 1, \quad i = 0, 1 \tag{3.7}$$

因为这些对应于 $\mathcal{Z}_0$ 中满足 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}} \lesssim 1$的变分。我们注意到，对于这类变分，还有 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\|_{L^\infty} \lesssim 1$，而 $|\partial_\varepsilon \mu_i| \lesssim \mu_i$。

我们为每个这样的变分定义以下量：

$$\eta_0 := |\partial_\varepsilon U_1(0)| + |\partial_\varepsilon U_0(0)| \text{ and } \eta_\tau := \|\partial_\varepsilon \tau_{g_{S^2}}(U_1 \circ \pi^{-1})\|_{C^0(S^2)} + \|\partial_\varepsilon \tau_{g_{S^2}}(U_0 \circ \pi^{-1})\|_{C^0(S^2} \tag{3.8}$$

此外，当 $\partial_\varepsilon q_0 = \partial_\varepsilon q_1 = 0$ 时，令 $\eta_{rat} = 0$；否则，令 $\eta_{rat} := 1$，并选取 $j^* \geq 1$，使得 $\partial_\varepsilon q_0$ 和 $\partial_\varepsilon q_1$ 在 $z = 0$附近的阶均为 $O(z^{j^*})$。

对偶范数 $\|d^2E(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}, \cdot)\|_* :=$ 上确界$\{\partial_\varepsilon dE(\mathfrak{z}_\varepsilon)(w) : w \in \Gamma(\mathfrak{z}^*TN) \ \|w\|_{\mathfrak{z}} = 1\}$ 沿此类变分的二阶变分 E 受以下引理控制，我们将在第6节证明该引理。

引理 3.3. 对于任何满足 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 且(3.7) 成立的变分，我们可以估计

$$\|d^2E(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}, \cdot)\|_* \lesssim \left[(\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon \beta\|)\bar{\nu} + \eta_{rat}\mu^{-j^*}\right]\log(\mu)^{\frac{1}{2}} + \frac{(\delta+\eta_0)(\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}}{\log \mu} + \mathcal{T} + \eta_\mathcal{T}. \tag{3.9}$$

注意，对于由定义域上的平移诱导的 U_i 的变化，我们可以估计$\eta_\tau \lesssim \mathcal{T}$，因为 $\mathcal{T}_i$ 控制了 C^k 的张力范数，参见（2.7）。对于 $\mathcal{H}_1^q(U_i^*$中的更一般变分，我们可以利用雅可比算子的连续性，以及 $T_{U_i^*}\mathcal{H}_0(U_i^*$中的元素是沿着 U_i^*的雅可比场这一事实，得到

$$\eta_\mathcal{T} \lesssim \mathcal{T} + \|P_{U_1}(\partial_\varepsilon \tau_{g_{S^2}}(U_{1,\varepsilon} \circ \pi^{-1}))\|_{C^0(S^2)} + \|P_{U_1}(\partial_\varepsilon \tau_{g_{S^2}}(U_{0,\varepsilon} \circ \pi^{-1}))\|_{C^0(S^2)} \tag{3.10}$$

只要将 $\sigma > 0$ 选得足够小，该值就会小于任意给定的正常数。

此外，我们还需要理解 E 在 $\mathcal{Z}$ 上的行为，并将证明

引理 3.4. 设 $U_{0,1}^*$ 是从 S^2 到任意维数的光滑黎曼流形 $N\hat{}$ $\hat{}$的任意调和映射，设 $q_{0,1}^*$：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是满足 $q_{0,1}^*(0) = 0$ 的任意有理映射，并设 $\mathcal{Z}_0$ 为第 2 节中定义的相应奇点模型集合。则有

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}) = \sum_{i=0,1} \int_{\Omega_i} j_i \partial_\varepsilon \Delta u_i + \pi c_{r_0,r_1} \tfrac{d}{d\varepsilon}\delta(U_0, U_1)^2 + \sum_{i=0,1} \deg(q_i)\tfrac{d}{d\varepsilon}E(U_i) + err \tag{3.11}$$

对于满足 (3.7) 的任意变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，其中 $\mathcal{Z}_0$。这里，对于 $\Omega_1 := \mathbb{D}_{\hat{r}} = \Omega_0^c$, $c_{r_0,r_1} = (\log(\frac{r_0}{r_1}))^{-1}$, err 表示一个误差项，其上界为 $|\text{err}| \lesssim R_0$，其中

$$\begin{aligned} R_0 :=& \bar{\nu}\|\beta\|\left[\mu^{-\frac{1}{2}} + \eta_0 + \eta_\tau\right] + \tfrac{\delta}{\log \mu}\left[\delta + {f_\mu}^{-2} + \eta_0[(\log \mu)^{-1} + {f_\mu}^{-1}]\right] \\ &+ \mathcal{T}\left[\mu^{-1}\log \mu + \eta_0(\log \mu)^{-1}{f_\mu}^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

当 $c_{r_0,r_1} \sim (\log\ \mu)^{-1}$ 时，并且正如我们将看到的，对于 $\nu_{1^*} = \nu_0$，有$|\int_{\Omega_i} j_i \partial_\varepsilon \Delta u_i| \lesssim \|\beta\|($ $\nu_i^* + \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu})$，且 $\nu_{0^*} = \nu_1$，这尤其保证了

$$|\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)| \lesssim \|\beta\|\bar{\nu} + \tfrac{\delta}{\log \mu} + \mathcal{T} \tag{3.13}$$

对于任意满足 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\| \lesssim 1$的变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，其中 $\mathcal{Z}$。对于仅由 q_1 的变化所诱导的变分，我们得到一个更优的界

$$|\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)| \lesssim \|\beta\|\nu_0 + \|\beta\|\nu_1\mu^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta^2}{\log \mu} + \tfrac{\delta}{f_\mu^2 \log \mu} + \mathcal{T}\mu^{-1}\log \mu. \tag{3.14}$$

同一界也适用于 $\mu|\partial_\mu E(\mathfrak{z}(U_{0,1}, q_{0,1}, \mu)|$，因为 μ 的变分可以表示为 q_1 的变分。另一方面，对于由定义域上的平移所诱导的 U_i 的变分，我们得到

$$|\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)| \lesssim \bar{\nu} + \tfrac{\delta}{\log \mu} + \tfrac{\mathcal{T}}{\log \mu}. \tag{3.15}$$

为了证明主要结果，我们现在要确定一些变分，使得 $dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z})$ 的尺度与上述估计中的主导项相当。

为了以适用于所有主要结果的方式陈述这些引理，我们回顾一下：我们讨论的情形总是满足以下假设。

假设 1. 我们要求 $U^*_{0,1}\colon \hat{\mathbb{C}} \to N$ 是调和映射，且 $U^*_0(0) = U^*_1(0)$ 和 $dU^*_{0,1}(0) \neq 0$，并且满足以下条件之一

(i) 有 $U^*_0 = U^*_1$ 或 $U^*_0(z) = U^*_1(\bar{z})$，且这些映射是非退化临界点；或者 (ii) 目标流形 N 是 3 维的，并且切空间 $T_{U^*_i(0)}U^*_i(\mathbb{C})$ 不重合。

对于元素 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，若 $\|\beta\|\nu_0$，或分别若 $\|\beta\|\nu_1$，相较于涉及 δ 和 $\mathcal{T}$ 的误差项足够大，我们将考虑由有理映射 q_1 或分别由 q_0 的适当变分所诱导的变分。此情形仅在 $U^*_1 \neq U^*_0$ 时出现，并且在第 5.3 节中我们将证明

引理 3.5。设 $U^*_{0,1}$ 为调和映射，且满足 $U^*_0 \neq U^*_1$，并且假设 1 成立。设 $q^*_{0,1} \in \mathcal{R}$，并设 $\mathcal{Z}_0$ 为第 2 节中定义的相应奇点模型集合。

则存在常数 $c_1 > 0$，使得对于每个 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$ 及每个 $i \in \{0,1\}$，存在一个变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，它由 q_i 的一个变分诱导，并满足 (3.7)，其中

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon) \geq c_1 |d\beta(0)|^2 \nu_{i^*} - C\big[\|\beta\|\bar{\nu}\mu^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta^2}{\log \mu} + \tfrac{\delta}{f^2_\mu \log \mu} + \mathcal{T}\mu^{-1}\log \mu\big], \tag{3.16}$$

其中，为简便起见，我们记作 $\nu_{0^*} = \nu_1$ 和 $\nu_{1^*} = \nu_0$。

反之，若 $\frac{\delta}{\log \mu}$ 相较于 $\|\beta\|\bar{\nu}$ 和 $\mathcal{T}$ 较大，我们就想考虑能够减小 δ 的变分。为此，我们可以使用

引理 3.6. 设 U^*_i 满足假设 1，且令 $U_{0,1} \in \mathcal{H}^\tau_1(U^*_{0,1})$。则存在形如 $U_{i,\varepsilon} = U_i(\cdot + \varepsilon a)$，$a \in \mathbb{R}^2$ 的变分，其中 $|a| \lesssim 1$，使得

$$\tfrac{d}{d\varepsilon}\delta(U_0, U_1)^2 = \delta(U_0, U_1), \tag{3.17}$$

对于满足假设 1 第一部分的情形，我们可以自由选择改变 U_0 还是 U_1；而对于满足假设 1 第二部分的情形，上述结论至少对 $i \in \{0,1\}$ 中的一个成立。

对于这样的变分，我们进而得到

引理 3.7. 设 $U^*_{0,1}$ 满足假设 1，设 $q^*_{0,1}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的任意映射，且设 $\mathcal{Z}_0$ 是第 2 节中定义的相应奇点模型集合。则

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}) \geq \tfrac{\delta}{\log \mu} - C\big(\|\beta\|\bar{\nu} + \mathcal{T}(\log \mu)^{-1} f_\mu^{-1}\big) \tag{3.18}$$

关于变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{Z}_0$ 由改变 U_i 所诱导的，如引理 3.6 中所述。

最后，在非可积情形下，我们必须处理非调和映射 U_i，也希望考虑能够降低 $E(U_i)$ 的变分，从而证明

引理 3.8. 设 $U_{0,1}^*: S^2 \to N$ 是映入任意维解析黎曼流形的调和映射，且满足 $U_0^*(0) = U_1^*(0)$。那么对于任意 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，存在一个变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 属于 $\mathcal{Z}_0$，它由 U_i 在 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 上的一个变分诱导，并满足 (3.7)，使得

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}) \geq \mathcal{T}_i - C\big[\|\beta\|\bar{\nu} + \tfrac{\delta}{\log \mu} + f_\mu^{-1}(\log \mu)^{-1}\mathcal{T}\big]. \tag{3.19}$$

4. Proof of the main theorems

在这里，我们基于上一节陈述的引理，给出主要结果的证明。设 (u_j) 是从 S^2 到 N 的一列近似调和映射，并且该序列收敛到一个带有泡 $\omega_1(z) = U_1^*(q_1^*(\frac{1}{z}))$ 和基底 $\omega_0 = U_0^* \circ q_0^*$ 的泡树；再设 $\mathcal{Z} = \{\mathfrak{z}: S^2 \to N\}$ 是第 2节构造的相应奇点模型集合。

对于充分大的 j，我们的构造和（1.4）保证函数 $\mathfrak{z} \mapsto \|u_j - \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 上取得其最小值，并且相应的 $\mathfrak{z}_j \in \mathcal{Z}$（其中 $\|u_j - \mathfrak{z}_j\|_{\mathfrak{z}_j} = \operatorname{dist}(u_j, \mathcal{Z}) := \inf_{z\in\mathcal{Z}} \|u_j - \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}}$）由映射 $U_0^{(j)}, 1 \to U_{0,1}^*$、有理函数 $q_0^{(j)}, 1 \to q_{0,1}^*$ 以及尺度 μ（$\mathfrak{z}_j$）得到；这些尺度与（1.4）中的数值 μ_j 具有可比性。此外，可以利用（1.4）看出，不仅 $\|u_j - \mathfrak{z}_j\|_{\mathfrak{z}_j} \to 0$，而且 $\|u_j - \mathfrak{z}_j\|_{L^\infty(S^2)} \to 0$也成立。

因此，只需证明存在常数 $\varepsilon > 0$，使得对于所有满足以下条件的映射 u，我们的主要结果中的结论都成立

$$\|u - \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}} = \operatorname{dist}(u, \mathcal{Z}) < \varepsilon \text{ and } \|u - \mathfrak{z}\|_{L^\infty(S^2)} < \varepsilon \text{ for some } \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}, \tag{4.1}$$

此时，对定义域进行旋转后，不失一般性地假设 u 满足上述条件，且对应于一个 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$。

这里以及下文中，我们继续采用这样的约定：在构造 $\mathcal{Z}$ 时，只要分别将数 σ、$\sigma_1 > 0$ 和 $\bar{\mu}$ 选得足够小、足够大，所有结论均视为成立。

备注 4.1. 对于任意满足 u （4.1）的情形，我们约定

$$\|dE(u)\|_* := \sup\{dE(u)(w) : \|w\|_{\mathfrak{z}} = 1\} \tag{4.2}$$

是相对于加权范数 $\|\cdot\|_{\mathfrak{z}}$ 计算的，该加权范数由（3.1）定义，适用于 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ 满足（4.1）的情形。

我们并未声称 $\mathfrak{z}$ 由此关系唯一确定，但注意到，若（4.1）对 $\mathfrak{z}$ 和 $\tilde{\mathfrak{z}}$ 均成立，则 $\|\cdot\|_{\tilde{\mathfrak{z}}} \sim \|\cdot\|_{\mathfrak{z}}$，因此，定义主要结果中的 $\|dE(u)\|_*$ 时，使用 $\mathcal{Z}$中的任意一个此类元素都无关紧要。

我们将把上一节的结果与下面的引理结合起来。该引理描述了我们通过证明方法可以得到的基本估计；另见 [7, 第 2]节。

引理 4.2. 设 $U_{0,1}^*: S^2 \to N$ 是任意给定的取值于光滑黎曼流形的调和映射，设 $q_{0,1}^* \in \mathcal{R}$，并令 $\mathcal{Z}$ 为相应的奇点模型集合。那么存在常数 $\varepsilon > 0$, $\bar{\Lambda} < \infty$ 和 C，使得对于任意满足 $\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2, g_{S^2})} \leq 1$ 的 $u \in H^1(S^2, N)$，只要存在 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ 使得 (4.1) 成立，以下结论便成立。

我们可以将 $w := u - \mathfrak{z}$ 控制为

$$\|w\|_{\mathfrak{z}} \leq C\|dE(u) - dE(\mathfrak{z})\|_* \tag{4.3}$$

并且进一步得到

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \leq C|dE(u)(y_{\mathfrak{z}})| + C\|dE(u)\|_*^2 \tag{4.4}$$

对于任意 u、$\mathfrak{z}$，若存在一个满足以下条件的单位元 $y_{\mathfrak{z}} \in T_{\mathfrak{z}}\mathcal{Z}$

$$Q(\mathfrak{z}, y_{\mathfrak{z}}) := \frac{\|dE(\mathfrak{z})\|_*^2 + \|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_*\|dE(\mathfrak{z})\|_*}{dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}})} \leq \bar{\Lambda}^{-1}. \tag{4.5}$$

对于定义在固定希尔伯特空间上的 C^2能量，可以通过一个基于微积分基本定理的简单论证得到上述引理的类似结论，参见 [7]。在当前问题这样的更复杂情形中，我们考虑定义在适当的映射希尔伯特流形上的能量，并且使用通过依赖于相应 $\mathcal{Z}$ 元素的加权范数计算得到的距离，因此需要更加谨慎地处理。对于来自高亏格曲面的、接近简单泡树的近似调和映射，作者在 [11], 第4节中 [11] 得到了类似的结果，其中的大部分论证同样适用于当前情形。为方便读者，我们因此给出该引理证明的概要，但省略技术细节，仅说明估计式（4.3）为何比 [11, 引理44]中得到的估计更简单。

引理 *4.2* 的证明思路。给定 u， $\mathfrak{z}$和 $w = u - \mathfrak{z}$，如引理中所述，令 $w_{\mathfrak{z}} := P_{\mathfrak{z}} w$， P_p 为到 $T_p N$ 的投影。首先注意到，式（4.1）保证 $\|w - w_{\mathfrak{z}}\|_{\mathfrak{z}} \le C\|w\|_{L^\infty}\|w\|_{\mathfrak{z}}$，其中下文所有 L^p 范数均在（S^2，g_{S^2}）上计算，除非另有说明。

我们很容易验证，当 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}} \le 1$时，式（3.1）中的权重的变分由 $\|\partial_\varepsilon \rho_{\mathfrak{z}}\|_{L^2} \lesssim 1$控制。由于 $\mathfrak{z}$ 使到 u 的距离最小，因此

$$0 = \tfrac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\|u - \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}}^2 = -2\langle u - \mathfrak{z}, \partial_\varepsilon \mathfrak{z}\rangle_{\mathfrak{z}} + 2\int \rho_{\mathfrak{z}} \partial_\varepsilon \rho_{\mathfrak{z}} |w|^2$$

因此我们得到 $\|P^{T_{\mathfrak{z}}\mathcal{Z}} w_{\mathfrak{z}}\|_{\mathfrak{z}} \le C\|w\|_{L^\infty}\|w\|_{\mathfrak{z}}$，即 $w_{\mathfrak{z}}$几乎与 $T_{\mathfrak{z}}\mathcal{Z}$正交。

接着令 $\tilde{w}_{\mathfrak{z}} := P^{\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^+} w_{\mathfrak{z}} - P^{\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^-} w_{\mathfrak{z}}$，其中 $P^{\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^\pm}$: $\Gamma(\mathfrak{z}^* TN) \to \mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^\pm$表示 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}}$为子空间 $\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^\pm$中到 $T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z}$ 的正交投影，这些子空间来自引理 3.3。 $d^2 E$ 在这些空间上的一致定性保证

$$(c_0 - C\|w\|_{L^\infty})\|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \le d^2 E(\mathfrak{z})(w_{\mathfrak{z}}, \tilde{w}_{\mathfrak{z}}) \le (dE(u) - dE(\mathfrak{z}))(\tilde{w}_{\mathfrak{z}}) + \mathrm{err}_1, \tag{4.6}$$

在这里，我们可以按照[11],中的引理 4.4 的证明所详述的方法分析由此产生的误差项，从而得到

$$|\mathrm{err}_1| \lesssim \|w\|_{L^\infty}\|w\|_{\mathfrak{z}}^2 + \|w\|_{L^\infty}\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2}\|\tilde{w}_{\mathfrak{z}}\|_{L^4}^2. \tag{4.7}$$

与 [11] 中的证明唯一的区别在于，在当前情形下

$$\|\tilde{w}_{\mathfrak{z}}\|_{L^4} \lesssim \|\tilde{w}_{\mathfrak{z}}\|_{H^1} \lesssim \|\tilde{w}_{\mathfrak{z}}\|_{\mathfrak{z}} \le \|w_{\mathfrak{z}}\|_{\mathfrak{z}} \lesssim \|w\|_{\mathfrak{z}}$$

并且因此可以将右端的第二项（4.7）界定为第一项的某个倍数。在[11], 中无法做到这一点，因为该情形下正确的加权范数无法以一致的方式控制 H^1 范数。

因此，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，我们得出

$$\|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \le C(dE(u) - dE(\mathfrak{z}))(\tilde{w}_{\mathfrak{z}}) \tag{4.8}$$

由此得到该引理的第一个结论。

若存在一个单位元$y_{\mathfrak{z}}$ 使得（4.5）成立，则我们可以利用

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) = dE(u)(y_{\mathfrak{z}}) + d^2 E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, w_{\mathfrak{z}}) + \mathrm{err}_2$$

误差阶为 $|\mathrm{err}_2| \lesssim \|w\|_{\mathfrak{z}}^2$。由此我们得出

$$\begin{aligned} dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) &\le |dE(u)(y_{\mathfrak{z}})| + |d^2 E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, w_{\mathfrak{z}})| + C\|dE(u)\|_*^2 + C\|dE(\mathfrak{z})\|_*^2 \\ &\le C|dE(u)(y_{\mathfrak{z}})| + C\|dE(u)\|_*^2 + C\bar{\Lambda}^{-1} dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中常数 C仅依赖于 U_i^* 和 q_i^*。当 $\Lambda = \Lambda(U_i^*, q_i^*)$ 足够大时，即可得到该引理的第二个结论。□

为了证明我们的主要结果，下面我们将在这些方向上应用上述引理 $y_{\mathfrak{z}}$，它们对应于变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，正如三条引理之一 3.5、3.7、3.8中所考虑的那样。

4.1. 定理 **1.3**和推论 **1.4**的证明。
我们首先考虑这样的情形：基底和泡由同一个具有相同定向的非退化极小球面的参数化给出。

因此，设 $U^*\colon \mathbb{R}^2 \to N$, $q^*_{0,1} \in \mathcal{R}$ 和 $\omega_{0,1}$ 如定理 1.3中所述，令 $\mathcal{Z}$ 为相应的奇点模型集合，并令 u 为一个映射，使得对于按引理 4.1中选取的 $\varepsilon > 0$，（4.2 和 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$）成立。

接着，我们考虑通过固定 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，对 $\mathfrak{z}$ 作变分 U_0, $q_{0,1}$ 和 μ，并按照 U_1变化 $U_{1,\varepsilon} = U_1(\cdot + \varepsilon a)$, 其中 $|a| \sim 1$ 按引理 3.6中的方式选取。根据 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon\|_{\mathfrak{z}} \sim 1$，由引理 3.7可得

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \geq 2c\tfrac{\delta}{\log \mu} - C\|\beta\|\bar{\nu} \tag{4.10}$$

对于相应的单位元 $y_{\mathfrak{z}} = \frac{\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon}{\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon\|_{\mathfrak{z}}}$，以及仅依赖于$U^*$和 q^*_0,1 的常数 $C, c > 0$。这里我们利用了 $\mathcal{T} = 0$，因为映射 U_i由 $U_i(\cdot) = U^*(\cdot + c_i)$ 给出，其中某个$|c_i| < \sigma$满足这一点，因为假设 U^* 是非退化的。由于 $dU^*(0) \neq 0$，这还意味着 $\delta \sim \|\beta\|$，因为这两个量都按 $|c_0 - c_1|$缩放。由于 $\bar{\nu} \lesssim \mu^{-1} \ll (\log \mu)^{-1}$，因此我们从 (4.10) 得出

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \geq c\tfrac{\delta}{\log \mu}$$

而引理3.2 和3.3 则保证

$$\|dE(\mathfrak{z})\|_* \leq C\tfrac{\delta(\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}}{\log \mu} \text{ and } \|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_* \leq C\tfrac{(\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}}{\log \mu}, \tag{4.11}$$

再次，对于仅依赖于极限构型的常数。

由此我们推得

$$Q(\mathfrak{z}, y_{\mathfrak{z}}) \leq C\tfrac{\log f_\mu}{\log \mu} \leq C\sigma_1 \leq \bar{\Lambda}^{-1},$$

$\bar{\Lambda}$ 如引理4.2 中所述，因为 f_μ 满足（2.12），其中常数为 $\sigma_1 = \sigma(U_i^*, q_i^*) > 0$，必要时还可进一步减小。因此，此引理意味着

$$\|w\|_{\mathfrak{z}} \lesssim \|dE(u)\|_* + \|dE(\mathfrak{z})\|_* \tag{4.12}$$

and

$$\tfrac{\delta}{\log \mu} \leq dE(u)(y_{\mathfrak{z}}) + C\|dE(u)\|_*^2. \tag{4.13}$$

若 u是调和的，则（4.13）保证 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$，从而 $\mathfrak{z}(z) = U^*(q_0(z) + q_1(\frac{1}{\mu z}) + c_0)$。因此 $dE(\mathfrak{z}) = 0$，所以（4.12）保证 $u = \mathfrak{z}$，由此我们得到定理中关于调和映射的结论。

为证明定理及其后续推论1.4 中关于近似调和映射的结论，我们现在证明

$$|E(u) - E^*| \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log \mu} + \|dE(u)\|_*^2, \tag{4.14}$$

其中，为简便起见，我们记作 $E^* = E(\omega_0) + E(\omega_1) = [\text{次数}(q_0^*) + \text{次数}(q_1^*)]E(U^*)$。

为说明这一点，我们首先利用（4.11）和（4.12）来估计

$$\begin{aligned} |E(u) - E(\mathfrak{z})| &\lesssim |dE(\mathfrak{z})(w)| + \|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \lesssim \|dE(\mathfrak{z})\|_*^2 + \|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \lesssim \|dE(\mathfrak{z})\|_*^2 + \|dE(u)\|_*^2 \\ &\lesssim \tfrac{\delta^2 \log f_\mu}{(\log \mu)^2} + \|dE(u)\|_*^2 \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log \mu} + \|dE(u)\|_*^2. \end{aligned}$$

为了得到（4.14），因此只需验证

$$|E(\mathfrak{z}) - E^*| \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log \mu} \text{ for all } \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0. \tag{4.15}$$

若 $\delta = 0$，即若 $c_0 = c_1$，则这显然成立。反过来，若 $c_0 \neq c_1$，那么考虑由 $U_{1,t} = U^*(\cdot + c_1 + t\frac{c_0 - c_1}{|c_1 - c_0|})$ 生成的族 $(\mathfrak{z}_t)_{t \in [0, |c_1 - c_0|]}$，便可在 $\mathfrak{z}$ 与 $\hat{\mathfrak{z}} = U^* \circ (q_\mu + c_0)$ 之间插值；后者满足 $E(\hat{\mathfrak{z}}) = E^*$。由于 $\|\partial_t \mathfrak{z}_t\| \lesssim 1$ 和 $\|\beta(\mathfrak{z}_t)\| \lesssim \delta(\mathfrak{z}_t) \lesssim \delta := \delta(\mathfrak{z})$

我们可以利用 (3.15) 来估计 $|\partial_t E(\mathfrak{z}_t)| \lesssim \frac{\delta}{\log\mu}$ 对 $0 \le t \le |c_0 - c_1| \sim \delta$积分后，得到 (4.15)，进而得到 (4.14)。

由（4.13）和（4.14），我们现在立即推出

$$|E(u) - E^*| \lesssim \min(\|dE(u)\|_*, \log\mu \|dE(u)\|_*^2)$$

至此，定理1.3的证明完成。

接下来要证明推论 1.4 中所声称的 L^2- Łojasiewicz 估计（1.7）。为此，我们先将（4.13）与以下事实结合起来：$\|\cdot\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} \lesssim \|\cdot\|_{\mathfrak{z}}$，因此 $\|dE(u)\|_* \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,g_{S^2})}$，从而得到如下界

$$\tfrac{\delta}{\log\mu} \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,g_{S^2})}\|y_{\mathfrak{z}}\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} + \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2,g_{S^2})}.$$

由于$y_{\mathfrak{z}}$ 是仅由泡 U_1的一个变分得到的，因此它主要集中在泡附着点周围的一个小球内，故其 L^2 范数相较于 $\|y_{\mathfrak{z}}\|_{\mathfrak{z}} = 1$很小。更精确地说，对于满足（3.7）且 q_0 和 U_0 固定的变分，我们将在（5.19）中看到

$$\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} \lesssim \mu^{-1}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta+\eta_0}{f_\mu \log\mu}. \tag{4.16}$$

在当前情形下，由于 $\eta_0 \sim 1$，我们因此得到$\|y_{\mathfrak{z}}\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} . (\log\ \mu)^{-1} f_\mu^{-1}$，从而可以得出结论 (4.13)

$$\tfrac{\delta^2}{\log\mu} \le \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2,g_{S^2})}. \tag{4.17}$$

结合（4.14）立即得出推论 $|E$（u）$-E^*| \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}$（$u$）$\|^2_{L^2\ (S^2,\ g_{S^2})}$ 中提出的主张1.4。

注 4.3。 正如引言中所指出的，我们无法从现有理论中得到这些结果，原因在于， U^*（q_μ）处雅可比算子在零点处的谱隙随着 $\mu \to \infty$ 趋于零，而且现有理论给出 Łojasiewicz 估计的邻域大小与该谱隙同阶。更准确地说，由于能量缺陷与$\delta^2\ \log\mu$ 同阶，我们可以看出，雅可比算子必定有一个特征值与下式同阶：$1 \log\ \mu$。若我们不将这些方向纳入奇点模型集合 $\mathcal{Z}$，那么引理 4.2 的论证即使对于调和映射也会 u 失效，除非我们预先知道 $\|w\|_{\mathfrak{z}}$被$^1 \log\ \mu$的一个足够小的倍数所界定；参见（4.6）。

4.2. 定理**1.5**和**1.7** 及推论**1.6**的证明。
本节始终考虑满足定理1.5 或定理1.7 的假设的情形，并令 $\mathcal{Z}$ 为相应的奇点模型集。我们注意到，在这些情形下， $|d\beta(0)|$ 和 $\|\beta\|$ 均为一阶，并且有

引理**4.4**。元素 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}$ 的能量缺陷有界，满足

$$|E(\mathfrak{z}) - E^*| \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log\mu} + \min(\nu_0,\nu_1) + \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} + \mathcal{T}_1^{\gamma_1} + \mathcal{T}_0^{\gamma_0} + \mathcal{T}\mu^{-1}\log\mu, \tag{4.18}$$

其中 $\gamma_{0,1} \in (1,2]$ 是经典 Lojasiewicz-Simon 估计（1.3）在 $U^*_{0,1}$附近成立时的指数，而 E^*: $= E(\omega_0) + E(\omega_1)$ $=$次数$(q_0)E(U_0^*)$ $+$次数$(q_1)E(U_1^*)$。

引理*4.4*的证明。 只需对 $\mathcal{Z}_0$ 中的元素完成证明，并利用备注2.2 中所述的对称性，不妨假设 $\nu_0 \le \nu_1$。

我们首先证明特殊情形下的引理，其中 $\delta = 0$。为此，我们考虑如下族 $\mathfrak{z}(t)$, $t > 0$，它是通过按照 $\mu(t) = \mu(\mathfrak{z})e^t$ 改变泡尺度而得到的，同时保持映射 U_i 和 q_i 不变，并利用（3.14）可知

$$|\tfrac{d}{dt}E(\mathfrak{z}(t))| = \mu(t)|\partial_\mu E(\mathfrak{z}(t))| \lesssim \nu_0(t) + \mu(t)^{-\frac{1}{2}}\nu_1(t) + \mathcal{T}\mu(t)^{-1}\log\mu(t) \text{ for } t \in [0,\infty).$$

由于 $\nu_i(t) = \max_{j\le n_i^*} |a_j(q_i)|\mu(t)^{-j} \lesssim e^{-t}\nu_i(0)$，且对于 $t\to\infty$， $E(\mathfrak{z}(t)) \to \deg(q_0)E(U_0) + \deg(q_1)E(U_1)$，因此我们可推得

$$|E(\mathfrak{z}) - E^*| \le \sum_i \deg(q_i)|E(U_i) - E(U_i^*)| + C\big[\nu_0 + \mu^{-\frac12}\nu_1 + \mathcal{T}\mu^{-1}\log\mu\big]$$

它与（1.3）结合后，便得到了此特殊情形下的结论，其中 $\delta = 0$。

因此，设 $\delta = \delta(U_1, U_0) \neq 0$。在此情形下，我们可以选择 $U_{i,t} = U_i(\cdot + c_i(t))$，$t\in[0,\delta]$，使得 $|\dot c_i(t)| \lesssim 1$，并令其满足 $\delta(U_{0,t}, U_{1,t}) = \delta - t$，参见引理 3.6。由此得到的族 $\mathfrak{z}_t \in \mathcal{Z}$ 满足

$$|\tfrac{d}{dt}E(z_t)| \lesssim \bar\nu + \tfrac{\delta}{\log\mu} + \tfrac{\mathcal{T}}{\log\mu},$$

参见（3.15），这便将 $\mathfrak{z}$ 变为一个元素 $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_{t=\delta}$，其满足 $\delta(\hat{\mathfrak{z}}) = 0$ 且

$$|E(\mathfrak{z}) - E(\hat{\mathfrak{z}})| \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log\mu} + \delta\bar\nu + \tfrac{\delta}{\log\mu}\mathcal{T} \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log\mu} + \bar\nu^2\log\mu + \mathcal{T}^2.$$

由于 $\bar\nu\log\mu \lesssim \mu^{-1}\log\mu \lesssim \mu^{-\frac12}$，且我们已证明（4.18）对 $\hat{\mathfrak{z}}$ 成立，因此也得到了 $\mathcal{Z}_0$中一般元素的能量缺陷的所述界。□

现在令 u 为一个映射，满足 $\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} \le 1$，并且对 4.1，满足 $\varepsilon > 0$，如引理4.2所述。

将上述引理 4.4 与以下估计结合

$$|E(u) - E(\mathfrak{z})| \lesssim \|dE(\mathfrak{z})\|_*^2 + \|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \lesssim \bar\nu^2\log\mu + \tfrac{\delta^2(\log f_\mu)^2}{(\log\mu)^2} + \mathcal{T}^2 + \|dE(u)\|_*^2$$

我们由（4.3）和引理 3.2 得到该估计，从而可知

$$|E(u) - E^*| \lesssim \tfrac{\delta^2}{\log\mu} + \min(\nu_0,\nu_1) + \mu^{-\frac12}\bar\nu + \mathcal{T}^\gamma + \mathcal{T}\mu^{-1}\log\mu + \|dE(u)\|_*^2 \tag{4.19}$$

对任意这样的 u，以及对 $\gamma := \min(\gamma_1,\gamma_2) \in (1,2]$。

为了证明定理 $|E(u) - E^*|$ 1.5 和 1.7 中关于这些量的界，因此我们需要证明所有这些量都受以下量控制：$\|dE(u)\|_*$。为此，方便起见，取$f_\mu := \log\mu$，显然当 2.12 满足 $\bar\mu$ 充分大时成立。

我们区分三种不同情形，具体取决于涉及 δ、 $\mathcal{T}$ 或 $\bar\nu$ 的项是否占主导，首先考虑

情形1：假设 $\mathfrak{z}$ isso that

$$\bar\nu(\log\mu)^{\frac12} \le \tfrac{\delta}{\log\mu} \text{ and } \mathcal{T}(\log\log\mu)^{-1/2} \le \tfrac{\delta}{\log\mu}. \tag{4.20}$$

在此情形下，我们令 $y_{\mathfrak{z}}$ 为变分 $\partial_{\varepsilon\mathfrak{z}\varepsilon}$ 方向上的单位元，如引理 3.7 中所得到的。将 (4.20) 代入引理 3.2、3.3 和 3.7 中得到的估计，可得

$$\|dE(\mathfrak{z})\|_* \lesssim \tfrac{\delta(\log\log\mu)^{\frac12}}{\log\mu}, \|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}})\|_* \lesssim \tfrac{(\log\log\mu)^{\frac12}}{\log\mu} \text{ and } dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \ge c\tfrac{\delta}{\log\mu}. \tag{4.21}$$

这保证了 $Q(\mathfrak{z},\ y_{\mathfrak{z}})$。 双重对数~~$\mu$对数$\mu$~~很小，因此引理 4.2 给出

$$\tfrac{\delta}{\log\mu} \lesssim |dE(u)(y_{\mathfrak{z}})| + \|dE(u)\|_*^2 \lesssim \|dE(u)\|_*.$$

结合 (4.20) 可立即推出 $\mu^{-\min(n_0^*,n_1^*)} \lesssim \bar\nu \lesssim \|dE(u)\|_*$，并将这些估计代入 (4.19) 可得

$$|E(u) - E^*| \lesssim \tfrac{\delta}{\log\mu} + \big(\tfrac{\delta}{\log\mu}\big)^\gamma(\log\log\mu)^{\gamma/2} + \|dE(u)\|_*^2 \lesssim \tfrac{\delta}{\log\mu} + \|dE(u)\|_*^2 \lesssim \|dE(u)\|_*.$$

由此可见，在这种情况下，定理 1.5 和 1.7 的结论成立，其中 δ 占主导地位。现在我们考虑

情形 2：假设 $\mathfrak{z}$ 满足

$$\frac{\delta(\log\log\mu)^{1/2}}{\log\mu} \leq \mathcal{T} \text{ and } \bar{\nu}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{T}. \tag{4.22}$$

在这种情况下（4.19）保证 $|E(u) - E^*| \lesssim \mathcal{T}$，并且我们利用 $y_{\mathfrak{z}}$ 构造它，其中使用了引理 3.8 中所考虑的变分，令 i，从而 $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$。引理 3.8 和 3.2 给出

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \gtrsim \mathcal{T} \text{ and } \|dE(\mathfrak{z})\|_* \lesssim \mathcal{T} \tag{4.23}$$

而引理 3.3 和（3.10）保证我们可以通过相应地减小 $\|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_*$，使其小于任意给定的常数。于是我们可以保证 $Q(\mathfrak{z}, y_{\mathfrak{z}}) \lesssim \bar{\Lambda}^{-1}$，并应用引理4.2 得到

$$\mathcal{T} \lesssim \|dE(u)(y_{\mathfrak{z}})\| + \|dE(u)\|_*^2 \lesssim \|dE(u)\|_*.$$

结合（4.19）和（4.22），即可立即得到定理的结论。

最后，如果 $\mathfrak{z}$ 使得上述两种情况均不适用，那么必有

情况 3：

$$\frac{\delta}{\log\mu} \leq \bar{\nu}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} \text{ and } \mathcal{T} \leq \bar{\nu}(\log\mu). \tag{4.24}$$

在这种情况下，我们可以选取引理 3.5 中的变分，从而得到 $y_{\mathfrak{z}}$，其中

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \gtrsim \bar{\nu} \text{ and } \|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_* \lesssim \mu^{-1}\log\mu.$$

同时，引理 3.2 和（4.24）保证 $\|dE(\mathfrak{z})\|_* \leq \bar{\nu}\log\mu$，因此 $Q(\mathfrak{z}, y_{\mathfrak{z}}) \lesssim \mu^{-1}(\log\mu)^2$ 会很小。

因此，引理 4.2 意味着 $\bar{\nu} \lesssim \|dE(u)\|_*$。这立即得出所声称的泡尺度界；此外，由于（4.24）保证（δ 或 $\mathcal{T}$）在（4.19）中涉及的所有项都远小于 $\bar{\nu}$，还可得出 $|E(u) - E^*| \lesssim \|dE(u)\|_*$。

至此，我们已完成定理 1.5 和 1.7 的证明，最后说明为得到以下结果，必须如何修改上述论证

推论 *1.6*的证明。
这里方便取 $f_\mu := \mu^{\sigma_1}$ 其中固定 $\sigma_1 > 0$ 足够小，使得第 3 节中的所有结果对该 σ_1 均成立，且对所有充分小的 σ 及充分大的 $\bar{\mu}$也成立。与前一个证明相比，选择 f_μ 使我们在选择变分类型时更加灵活，因为这样可以更好地控制能量展开中的误差项。这一点很有用：在证明 L^2-Lojasiewicz- 估计时，泡的变分优于基底的变分，因为前者得到的元素 $y_{\mathfrak{z}}$ 具有更小的 L^2-范数。

为证明此推论，我们首先注意到，在这种情形下，(4.19) 化为

$$|E(u) - E^*| \lesssim \frac{\delta^2}{\log\mu} + \min(\nu_0, \nu_1) + \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} + \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2, g_{S^2})} \tag{4.25}$$

因为 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 的所有元素都是调和的，且 $\|dE(u)\|_* \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2,\ g_{S^2})}$。

W我们固定 $c_1 = \frac{\sigma_1}{4} \Subset (0,\ 1\,16)$，并根据 $\mu^{c_1}\bar{\nu} \leq \ ^{\delta}\log$ 是否成立来区分情形 $\overline{\qquad}_{\mu}$.

若 $\mu^{c_1}\bar{\nu} \leq \underline{\quad}^{\delta}\log\mu$，则可完全仿照推论 1.4 的证明，得到

$$\frac{\delta}{(\log\mu)^2} \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2, g_{S^2})},$$

比较式（4.17）。由于 $\bar{\nu} \gtrsim \mu^{-n^*}$，$n^* := \min(n_1^*,\ n_0^*$，我们还知道在这种情况下

$$\bar{\nu}^{1-\frac{c_1}{n^*}} \lesssim \mu^{c_1}\bar{\nu} \leq \frac{\delta}{\log\mu} \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2, g_{S^2})}$$

因此可立即由式（4.25）得出

$$|E(u) - E^*| \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^{\alpha}_{L^2(S^2, g_{S^2})} \text{ for } \alpha := (1 - \tfrac{c_1}{n^*})^{-1} > 1.$$

因此，接下来只需考虑$^{\delta}$对数$_{\mu}$ $\leq \mu^{c_1}\bar{\nu}$满足（4.25）且引理3.2给出的情形

$$|E(u) - E^*| \lesssim \min(\nu_0, \nu_1) + \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} + \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2, g_{S^2})} \text{ and } \|dE(z)\|_* \lesssim \mu^{c_1}(\log \mu)^{\frac{1}{2}}\bar{\nu}, \tag{4.26}$$

while Lemmas 3.5 and 3.3 give

$$dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \geq c\nu_{i^*} - C\mu^{-2c_1}\bar{\nu} \text{ and } \|d^2E(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}, \cdot)\|_* \lesssim \mu^{-1+c_1}(\log \mu)^{\frac{1}{2}} \tag{4.27}$$

for 由$y_{\mathfrak{z}}$ 的一个变分生成的单位元 q_i ，如引理3.5中所考虑的 .

如果 $\mu^{c_1}\nu_0 \geq \nu_1$ 我们对泡的有理映射作变分，便可得到一个满足以下条件的 $y_{\mathfrak{z}}$

$$\|y_{\mathfrak{z}}\|_{L^2(S^2, g_{S^2})} \lesssim \mu^{-1}(\log \mu)^{\frac{1}{2}} \text{ and } dE(\mathfrak{z})(y_{\mathfrak{z}}) \gtrsim \nu_0 \gtrsim \mu^{-c_1}\bar{\nu},$$

比较（4.16）和（4.27）。因此 Q（$\mathfrak{z}$） （$y_{\mathfrak{z}}$）$\lesssim \mu^{-1+3c_1}$ 对数μ 很小，我们可以应用引理4.2中的估计（4.2 ）得到

$$\nu_0 \lesssim \mu^{-1}(\log \mu)^{\frac{1}{2}}\|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2, g_{S^2})} + \|dE(u)\|^2_*.$$

因此我们可以估计

$$\mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} + \nu_0 \lesssim \nu_0 \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^{\alpha}_{L^2(S^2, g_{S^2})} \text{ for any } \alpha \in (1, (1 - \tfrac{1}{n^*})^{-1})$$

以及（4.26）意味着推论的结论对任意这样的指数都成立。

在最后一种情形中， $\nu_0 \leq \mu^{-c_1}\nu_1$ 并且 $^{\delta}$~~log μ~~ $\leq \mu^{c_1}\bar{\nu}$ 我们转而考虑 q_0 的一个变分，并利用上述估计和引理 3.2 可知 $\bar{\nu} \lesssim \nu_1 \lesssim \|dE(u)\|_* \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|_{L^2(S^2, g_{S^2})}$ 。由（4.26）因此得到

$$|E(u) - E^*| \lesssim \mu^{-c_1}\bar{\nu} + \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2, g_{S^2})} \lesssim \bar{\nu}^{\alpha} + \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^2_{L^2(S^2, g_{S^2})} \lesssim \|\tau_{g_{S^2}}(u)\|^{\alpha}_{L^2(S^2, g_{S^2})}$$

·对任意 $\alpha \in (1, 1 + \frac{c_1}{n^*})$均成立。 □

5. Variations of the energy along $\mathcal{Z}_0$

本节将证明关于奇异模型流形上能量行为的关键引理 $\mathcal{Z}_0$ ，即第3.4、3.5、3.7 和3.8，这些引理已在第3节中陈述。

在转入这些证明之前，我们先汇集若干估计；这些估计既将在本节中广泛使用，也将在随后的第6 节中使用，届时我们将证明引理 $dE(\mathfrak{z})$和 $d^2E(\mathfrak{z})$中所述的性质，这些引理为3.1、3.2 和3.3。

5.1. 技术估计。

给定任意 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$ ，我们在固定的立体投影坐标中工作，并可假设这些坐标经过适当缩放，使得相应的函数 q_0 满足$|q_{n_0^*}(q_0)| = 1$。由于对于任意固定的 $\mathfrak{z}$ ，我们将 $q_1(\frac{1}{\mu})$ 表示为满足 $|a_{n_1^*}(q_1)| = 1$ 的函数 q_1 ，因此得到 $\mu_1(\mathfrak{z}) = \mu, \mu_0(\mathfrak{z}) = 1$ 并

$$r_1(\mathfrak{z}) = f_\mu\mu^{-1} \ll \hat{r}(\mathfrak{z}) = \mu^{-\frac{1}{2}} \ll r_0(\mathfrak{z}) = {f_\mu}^{-1}. \tag{5.1}$$

为简化记号，以下我们将简写为$\phi_\mu = \phi_{r_0, r_1}$ 表示定义中所用的截断函数（2.15），并且也稍微滥用记号，写作 $\mathfrak{z}\ \partial_\varepsilon\phi_\mu := \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0}\phi_{r_0(\mathfrak{z}_\varepsilon)\ r_1(\mathfrak{z}_\varepsilon)}$ 尽管（5.1）仅适用于 $\varepsilon = 0$。

在大多数证明中，将有理映射 q_i 视为映射到球面 $S^2_{p^*} := S^2 - (0, 0, 1)$ 会更加方便；该球面经过平移，使得 $\mathcal{R}$ 中的元素将 0 映射到原点

$\mathbb{R}^3$ 中。因此，对于任意给定的 $U:\hat{\mathbb{C}}\to N$ 以及任意有理映射 $q:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$，我们将映射 $\hat{U}:=U\circ\pi_{p^*}^{-1}:S^2_{p^*}\to N$ 和 $\hat{q}=\pi_{p^*}\circ q:\hat{\mathbb{C}}\to S^2_{p^*}$ 分别与 $\pi_{p^*}:=\pi-(0,0,1):\mathbb{R}^2\to S^2_{p^*}$ 关联起来。

由于对每个 $z\in\mathbb{C}$，$q_0(z)$ 或 $q_{1,\mu}(z):=q_1(\frac{1}{\mu z})$ 至少有一个会很小，因此我们可以容易地验证，表示 $q_\mu=q_0+q_{1,\mu}$ 的映射 $\hat{q}_\mu=\pi_{p^*}\circ(\hat{q}_0\circ\pi_{p^*}^{-1}+\hat{q}_{1,\mu}\circ\pi_{p^*}^{-1})$ 满足

$$|\hat{q}_\mu|\lesssim|\hat{q}_{1,\mu}|+|\hat{q}_0|\text{ and }|\nabla\hat{q}_\mu|\lesssim|\nabla\hat{q}_0|+|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|. \tag{5.2}$$

此处及下文中，除非另有说明，所有量均相对于 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得度量计算，而非相对于由 g_{S^2} 诱导的度量计算。

因此，我们可以估计映射 $\tilde{u}_i:=u_i-U_i(0)=\hat{U}_i\circ\hat{q}_\mu-U_i(0)$：

$$|\tilde{u}_i|\lesssim|\hat{q}_{1,\mu}|+|\hat{q}_0|,\quad|\nabla u_i|\lesssim|\nabla\hat{q}_0|+|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|\text{ and }|\Delta u_i|\lesssim|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|^2+|\nabla\hat{q}_0|^2, \tag{5.3}$$

其中，最后一个估计成立，是因为映射 $\hat{q}_i$ 是到球面中的调和映射。

由于 映射 $\hat{q}_i\circ\pi_{p^*}^{-1}:S^2_{p^*}\to S^2_{p^*}$ 及其变分在 C^k 中一致有界，因此我们有

$$|\hat{q}_0(z)|+|\partial_\varepsilon\hat{q}_0|\lesssim|\pi(z)-\pi(0)|\lesssim\tfrac{|z|}{1+|z|},\quad|\nabla\hat{q}_0|+|\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_0|\lesssim|\nabla\pi(z)|\lesssim\tfrac{1}{1+|z|^2} \tag{5.4}$$

and

$$|\hat{q}_{1,\mu}|+|\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_0|\lesssim|\pi(\tfrac{1}{\mu z})-\pi(0)|\lesssim\tfrac{1}{1+|\mu z|},\quad|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|+|\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_{1,\mu}|\lesssim|\nabla(\pi(\tfrac{1}{\mu z}))|\lesssim\tfrac{\mu}{1+|\mu z|^2}. \tag{5.5}$$

特别地，我们总能估计 $|\nabla\hat{q}_\mu|\lesssim\rho_\mathfrak{z}$，不过在处理有理映射 q_0^* 时，之后还需要更精细的界，1 其分支点位于 $z=0$；参见下文的（5.45）和（5.46）。

上述估计特别意味着

$$\||\hat{q}_{1,\mu}|+|\hat{q}_0|+|\partial_\varepsilon\hat{q}_{1,\mu}|+|\partial_\varepsilon\hat{q}_0|\|_{L^\infty(A)}+\||\nabla\hat{q}_{1,\mu}|+|\nabla\hat{q}_0|\|_{L^2(A)}\lesssim f_\mu{}^{-1}, \tag{5.6}$$

w这里回顾一下，环域 A, $\hat{}A$ 和 A^* 的定义见（2.10）。类似地，我们有

$$\int_{\Omega_1}\phi_\mu{}^2\rho_\mathfrak{z}^2\lesssim f_\mu{}^{-2}(\log\mu)^{-2},\ \int_{\Omega_1}\phi_\mu\rho_\mathfrak{z}^2\lesssim f_\mu{}^{-2}(\log\mu)^{-1},\ \int_A|\nabla\phi_\mu|\rho_\mathfrak{z}\lesssim f_\mu{}^{-1}(\log\mu)^{-1} \tag{5.7}$$

对于截断函数 ϕ_μ，其定义见（2.15），并且满足

$$|\nabla\phi_\mu|\lesssim c_\mu r^{-1}{}_{\mathbb{I}A},\quad|\Delta\phi_\mu|\lesssim c_\mu r^{-2}{}_{\mathbb{I}A^*}\text{ for }c_\mu:=\log(\tfrac{r_0}{r_1}). \tag{5.8}$$

由于$\hat{\gamma}$是一条测地线，且$\hat{\gamma}(0)=U_1(0)$以及 $|\hat{\gamma}'|=\delta$，我们有

$$|\tilde{\gamma}_{u_1}|\le\delta\phi_\mu\text{ with }|\nabla\gamma|\lesssim\delta|\nabla\phi_\mu|\lesssim c_\mu\delta r^{-1}{}_{\mathbb{I}A} \tag{5.9}$$

and

$$\tau(\gamma)=\Delta\phi_\mu\cdot\hat{\gamma}'\circ\phi_\mu\text{ while }P_\gamma^\perp(\Delta\gamma)=|\nabla\phi_\mu|^2\cdot A(\hat{\gamma})(\hat{\gamma}',\hat{\gamma}')\circ\phi_\mu \tag{5.10}$$

so

$$|\tau(\gamma)|\lesssim\delta|\Delta\phi_\mu|\lesssim\delta c_\mu r^{-2}{}_{\mathbb{I}A^*}\quad\text{and}\quad|P_\gamma^\perp(\Delta\gamma)|\lesssim\delta^2|\nabla\phi_\mu|^2\le c_\mu^2r^{-2}\delta^2{}_{\mathbb{I}A}. \tag{5.11}$$

由于 $c_\mu\sim(\log\mu)^{-1}$，因此得到

$$\|\tau(\gamma)\|_{L^1}\lesssim\delta(\log\mu)^{-1},\quad\|P_\gamma^\perp(\Delta\gamma)\|_{L^1}\lesssim\delta^2(\log\mu)^{-1}\text{ and }\|\Delta\gamma\|_{L^1}\lesssim\delta(\log\mu)^{-1}. \tag{5.12}$$

为获得关于 ϕ_μ 的变分的适当界，我们回顾 $|\partial_\varepsilon\mu_i|\lesssim\mu_i$ 以及 $|\partial_\mu f_\mu|\mu\le f_\mu$。这确保了

$$|\partial_\varepsilon r_i|\lesssim r_i,\quad|\partial_\varepsilon\hat{r}|\lesssim\hat{r}\text{ and }|\partial_\varepsilon c_{r_0,r_1}|\lesssim c_\mu{}^2\lesssim(\log\mu)^{-2} \tag{5.13}$$

这进而意味着

$$|\partial_\varepsilon\phi_\mu|\leqslant c_\mu{}_{\mathbb{I}A},\quad|\partial_\varepsilon\nabla\phi_\mu|\leqslant c_\mu^2r^{-1}{}_{\mathbb{I}A}+c_\mu r^{-1}{}_{\mathbb{I}A^*},\quad|\partial_\varepsilon\Delta\phi_\mu|\leqslant c_\mu r^{-2}{}_{\mathbb{I}A^*}. \tag{5.14}$$

我们还注意到， ϕ_μ 的定义和上述估计确保了

$$\|\nabla\phi_\mu\|_{L^2}^2 = 2\pi c_\mu + O((\log\mu)^{-2}) \text{ and that } |\partial_\varepsilon\|\nabla\phi_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}| \lesssim (\log\mu)^{-2}. \tag{5.15}$$

如 $|\partial_\varepsilon\hat{}\gamma| + |\partial_\varepsilon\nabla\hat{}\gamma| \lesssim \eta_0$, η_0 定义于 (3.8) 中，我们还可以进一步给出界

$$|\partial_\varepsilon\gamma| \lesssim \eta_0 + c_\mu\delta_{\mathbb{I}A}, \quad |\partial_\varepsilon\tilde{\gamma}_{u_1}| \lesssim \eta_0\phi_\mu + c_\mu\delta_{\mathbb{I}A}, \quad |\partial_\varepsilon\tilde{\gamma}_{u_0}| \lesssim \eta_0(1-\phi_\mu) + c_\mu\delta_{\mathbb{I}A} \tag{5.16}$$

and

$$|\partial_\varepsilon\nabla\gamma| \lesssim (\eta_0 + \delta c_\mu)c_\mu r^{-1}{}_{\mathbb{I}A} + \delta c_\mu r^{-1}{}_{\mathbb{I}A^*} \text{ so } \|\partial_\varepsilon\nabla\gamma\|_{L^2} \lesssim \eta_0(\log\mu)^{-\frac{1}{2}} + \delta(\log\mu)^{-1}. \tag{5.17}$$

我们还注意到， $|q_0(z)| \lesssim |z|$ 在集合 $\{z\colon |z| \le 2\mu^{-\frac{1}{2}}\}$ 上很小，其中我们考虑 v_1，因此 $j_1 = d\beta(0)(q_0(z))$。由此可在该集合上对 $|q_0(z)| \lesssim \Upsilon q_0(z)|$ 给出界，从而得到

$$|j_1| \lesssim |d\beta(0)||\hat{q}_0|, \quad |\nabla j_1| \lesssim |d\beta(0)||\nabla\hat{q}_0|, \quad \Delta j_1 = 0$$

以及

$$|\partial_\varepsilon j_1| \lesssim |d\beta(0)||\partial_\varepsilon\hat{q}_0| + |\partial_\varepsilon d\beta(0)||\hat{q}_0|, |\partial_\varepsilon\nabla j_1| \lesssim |d\beta(0)||\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_0| + |\partial_\varepsilon d\beta(0)||\nabla\hat{q}_0|. \tag{5.18}$$

在集合 $|z| \ge \frac{1}{2}\mu^{-\frac{1}{2}}$ 上， v_0，因此 j_0，也有类似的估计，其中考虑的是 j_0。

我们还注意到，可以将上述估计与 (5.57) 结合起来，从而得出：若 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 是一个变分，沿此变分 q_0 和 U_0 保持固定，则

$$\begin{aligned}\|\partial_\varepsilon\mathfrak{z}\|_{L^2(S^2,g_{S^2})} &\lesssim \|\partial_\varepsilon v_1|\nabla\pi|\|_{L^2(\mathbb{D}_{2\hat{r}})} + \|\partial_\varepsilon v_0|\nabla\pi|\|_{L^2(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{\frac{\hat{r}}{2}})} + |\hat{A}|^{\frac{1}{2}}\|v_1 - v_0\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \|z\|_{L^2(\mathbb{D}_{2\hat{r}})} + \|\tfrac{1}{1+\mu|z|}|\nabla\pi|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \tfrac{\delta+\eta_0}{\log\mu}(\|\phi_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |\mathbb{D}_{2\hat{r}}|^{\frac{1}{2}}) + \mu^{-1} \\ &\lesssim \mu^{-1}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta+\eta_0}{f_\mu\log\mu}\end{aligned} \tag{5.19}$$

正如推论1.4 和1.6的证明中所声称的。

5.2. 沿 $\mathcal{Z}$ 的能量的一般变分。

本节旨在推导引理 $\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)$ 中所声称的表达式（见引理 3.4）。

由于构造具有对称性，并且在 $\Omega_1 = \{z\colon |z| \le \mu^{-\frac{1}{2}}\}$ 上，我们的映射 $\mathfrak{z}$ 基本上由 $\mathfrak{z}_1 = \pi_N(v_1)$ 描述，因此证明的关键步骤是证明

引理 5.1。 若 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 是 $\mathcal{Z}_0$ 中的一个变分，且满足 (3.7) ，则

$$\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta_{\mathfrak{z}_1} = -\int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 - \partial_\varepsilon u_1\tau(u_1) + \int_{A\cap\Omega_1}\Delta\gamma\partial_\varepsilon\gamma + err_1 \tag{5.20}$$

对于一个满足以下界的误差项 $|\mathrm{err}_1| \le R_1$ for

$$\begin{aligned}R_1 :=& \delta(\log\mu)^{-1}{f_\mu}^{-2} + \delta^2(\log\mu)^{-1} + \eta_0[|d\beta(0)|I_3 + \delta(\log\mu)^{-1}{f_\mu}^{-1}] \\ &+ |d\beta(0)|^2(I_1+I_2) + |d\beta(0)||\partial_\varepsilon d\beta(0)|I_1 + |d\beta(0)|I_{\partial\Omega_1} \\ &+ \mathcal{T}[|d\beta(0)|(I_3+I_4) + \eta_0(\log\mu)^{-1}{f_\mu}^{-2} + |\partial_\varepsilon d\beta(0)|I_3] + \eta_\tau|d\beta(0)|I_3.\end{aligned} \tag{5.21}$$

此处的 δ、τ、η_0 和 η_τ 与（3.5）及（3.8）中的定义相同，而积分 $I_\cdot = I_\cdot(q_0,q_1,\mu)$ 的定义见

引理 5.2。对于任意满足 $q_0^{(\varepsilon)}$，属于 $\mathcal{R}^\sigma$（$q_{0,1}^*$）和（3.7）的变分，我们可以给出上界

$$I_1 := \int_{\Omega_1} |\hat{q}_0|^2\rho_q^2 + |\hat{q}_{1,\mu}|^2|\nabla\hat{q}_0|^2 \le \bar{\nu}^2\log\mu \tag{5.22}$$

$$I_2 := \int_{\Omega_1} |\hat{q}_0||\partial_\varepsilon\hat{q}_0|\rho_q^2 + |\partial_\varepsilon\hat{q}_0||\hat{q}_{1,\mu}||\nabla\hat{q}_0||\nabla q_{1,\mu}| + |\hat{q}_{1,\mu}||\nabla\hat{q}_0|^2 + |\hat{q}_0|\rho_q|\nabla\hat{q}_0| \le \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} \tag{5.23}$$

$$I_3 := \int_{\Omega_1} |\hat{q}_0|\rho_q^2 + |\nabla\hat{q}_0||\hat{q}_{1,\mu}|\rho_q \le \bar{\nu} \tag{5.24}$$

$$I_4 := \int_{\Omega_1} |\partial_\varepsilon\hat{q}_0|\rho_q^2 + |\hat{q}_0||\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_\mu|\rho_q \lesssim \mu^{-1} \tag{5.25}$$

$$I_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega_1} |\hat{q}_0|^2 + |\hat{q}_{1,\mu}|^2 dS \le \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu} \tag{5.26}$$

简记 ρ_q 为：$= |\nabla\hat{} q_0| + |\nabla\hat{} q_{1,\ \mu}|$.

该引理保证 R_1 由（5.21）定义的量有界于 R_0 由（3.12）定义的量，因此 err_1 可以并入引理3.4中的误差项。

$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1$ 对 $\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)$的贡献同样是低阶项，即

引理 5.3. 对于上文所考虑的 $\mathcal{Z}_0$ 中的任意变分，我们可以估计

$$\left|\int_{\Omega_1} \partial_\varepsilon\mathfrak{z}\Delta\mathfrak{z} - \partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta\mathfrak{z}_1\right| \le \|\beta\|\bar{\nu}(\mu^{-\frac{1}{2}} + \eta_0) + \delta\mu^{-1} + \mathcal{T}\bar{\nu}\mu^{-1}(\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|). \tag{5.27}$$

结合　这三个引理及其在 Ω_0，上由对称性可得的对应结果，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}) &= -\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon\mathfrak{z}\Delta\mathfrak{z} - \int_{\Omega_0}\partial_\varepsilon\mathfrak{z}\Delta\mathfrak{z}\\ &= \int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 - \partial_\varepsilon u_1\tau(u_1) + \int_{\Omega_0} j_0\partial_\varepsilon\Delta u_0 - \partial_\varepsilon u_0\tau(u_0) - \int_A \Delta\gamma\partial_\varepsilon\gamma + \mathrm{err}_2\end{aligned} \tag{5.28}$$

对于满足所需界 $|\mathrm{err}_2| \lesssim R_0$ 的误差项。

由于 $|\hat{}\gamma'| = \delta$ 我们可以利用（5.15）得到

$$-\int_A \partial_\varepsilon\gamma\Delta\gamma = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d\varepsilon}\|\nabla\gamma\|_{L^2}^2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{d\varepsilon}\left(|\hat{\gamma}'|^2\|\nabla\phi_\mu\|_{L^2}^2\right) = \pi c_\mu\tfrac{d}{d\varepsilon}\delta(U_0,U_1)^2 + \mathrm{err}_3 \tag{5.29}$$

对于有界于 $|\mathrm{err}_3| \lesssim {}^{\delta}\ {}_{(\delta+\eta_0)}\ \ {}_{(\log\mu)^{\ 2}} \lesssim R_0$ 的误差项。

最后，我们可以利用

$$\begin{aligned}\deg(q_1)\tfrac{d}{d\varepsilon}E(\hat{U}_1) = \tfrac{d}{d\varepsilon}E(\hat{U}_1\circ\hat{q}_{1,\mu}) &= -\int_{\mathbb{R}^2}\tau(\hat{U}_1\circ\hat{q}_{1,\mu})\cdot\partial_\varepsilon(\hat{U}_1\circ\hat{q}_{1,\mu})\\ &= -\int_{\Omega_1}\tau(u_1)\cdot\partial_\varepsilon u_1 + \mathrm{err}_3 + \mathrm{err}_4.\end{aligned} \tag{5.30}$$

其中我们利用（5.5）来界定

$$|\mathrm{err}_3| \lesssim |\int_{\Omega_0}\tau(\hat{U}_1\circ\hat{q}_{1,\mu})\cdot\partial_\varepsilon(\hat{U}_1\circ\hat{q}_{1,\mu})| \lesssim \mathcal{T}\int_{\Omega_0}|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|^2 \lesssim \mu^{-1}\mathcal{T} \lesssim R_0$$

并令 $\mathrm{err}_4 := \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon u_1\tau(u_1) - \partial_\varepsilon(\hat{}U_1\circ\hat{}q_{1,\mu})\tau(\hat{}U_1\circ\hat{}q_{1,\mu})$。要估计这一项，我们可以利用$|\partial_\varepsilon(u_1 - \hat{}U_1\circ\hat{}q_{1,\mu})| \lesssim |\hat{}q_0| + |\partial_\varepsilon\hat{}q_0|$，而 (1.10) 保证

$$|\tau(u_1) - \tau(U_1\circ\hat{q}_{1,\mu})| = |\tau(\hat{U}_1)\circ\hat{q}_\mu|\nabla\hat{q}_\mu|^2 - \tau(\hat{U}_1)\circ\hat{q}_{1,\mu}|\nabla\hat{q}_{1,\mu}|^2| \lesssim \mathcal{T}\cdot(|\hat{q}_0|\rho_q^2 + |\nabla\hat{q}_0|\rho_q).$$

结合（5.4）和（5.5）可得

$$|\mathrm{err}_4| \lesssim \mathcal{T}\int_{\Omega_1}(|\hat{q}_0|+|\partial_\varepsilon \hat{q}_0|)\rho_q^2 + |\nabla \hat{q}_0|\rho_q \lesssim \mu^{-1}\log\mu\mathcal{T} \lesssim R_0.$$

这将引理 3.4 的证明归结为上述三个引理的证明，我们将在本节余下部分完成这些证明。

为了证明引理 5.1，以及稍后证明引理 3.2 和 3.3，展开下式很有用：

$$\mathfrak{z}_1 = \pi_N(v_1) = u_1 + P_{u_1}(\tilde{\gamma}_{u_1}+j_1) + \mathrm{err}_{u_1} = u_1 + \tilde{\gamma}_{u_1} + j_1 - P_{u_1}^{\perp}(\tilde{\gamma}_{u_1}+j_1) + \mathrm{err}_{u_1} \tag{5.31}$$

并注意到所得的误差项可以写成

$$\mathrm{err}_{u_1} = \int_0^1 \big(d\pi_N(u_1 + t(\tilde{\gamma}_{u_1}+j_1)) - d\pi_N(u_1)\big)(\tilde{\gamma}_{u_1}+j_1)dt \tag{5.32}$$

因此可由下式界定

$$|\mathrm{err}_{u_1}| \lesssim |j_1|^2 + |\tilde{\gamma}_{u_1}|^2 \lesssim |d\beta(0)|^2|\hat{q}_0|^2 + \delta^2\phi_\mu \tag{5.33}$$

因为当 $p \in N$ 时，$d\pi_N(p)$ 与到切空间 T_pN 上的投影 P_p 一致。

引理的证明 *5.1*。将 $\mathfrak{z}_1$ 按（5.31）中的形式写出，并利用 $\Delta j_1 = 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta\mathfrak{z}_1 &= \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon u_1\,\Delta u_1 + \partial_\varepsilon(P_{u_1}j_1)\,\Delta u_1 - \partial_\varepsilon u_1\,\Delta(P_{u_1}^{\perp}j_1) + \partial_\varepsilon\gamma\,\Delta\gamma + T_1\\ &= \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon u_1\,\tau(u_1) - P_{u_1}j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 - \partial_\varepsilon u_1\,\Delta(P_{u_1}^{\perp}j_1) + \partial_\varepsilon\gamma\,\Delta\gamma + T_1 + T_2\end{aligned} \tag{5.34}$$

对于 $T_2 := \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon(P_{u_1}j_1\Delta u_1) - \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon(j_1\tau(u_1))$，以及

$$\begin{aligned}|T_1| &\le \int_{\Omega_1}|\partial_\varepsilon(P_{u_1}\tilde{\gamma}_{u_1})\,\Delta u_1| + |\partial_\varepsilon\mathrm{err}_{u_1}|\,|\Delta u_1| + |\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1-u_1)\,\Delta(P_{u_1}^{\perp}j_1)|\\ &\quad + \int_{\Omega_1}|\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\,\Delta\mathrm{err}_{u_1}| + |\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta(P_{u_1}^{\perp}\tilde{\gamma}_{u_1})| + |\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1-\gamma)\Delta\gamma|\\ &=: T_1^{(1)} + \ldots + T_1^{(6)}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

利用分部积分，我们可以改写（5.34）中的第三项，从而得到如下形式的边界项

$$B_1 := -\int_{\partial\Omega_1}\partial_n(P_{u_1}^{\perp}j_1)\cdot\partial_\varepsilon u_1 - P_{u_1}^{\perp}j_1\cdot\partial_n\partial_\varepsilon u_1 dS, \tag{5.36}$$

从而得到所需的表达式

$$\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta\mathfrak{z}_1 = \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon u_1\,\tau(u_1) - \int_{\Omega_1}j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 + \int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon\gamma\Delta\gamma + T_1 + T_2 + B_1. \tag{5.37}$$

这样，证明该引理就归结为证明上述所有误差项 $T_1^{(i)}$、T_2 和 B_1 均可由在（R_1 中定义的量 5.21）控制。

为了估计 $T_{(1)1}$，我们将 $A(p)$ 视为整个空间上的双线性形式 $A(p): \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to T_p^{\perp}N$，该形式在法向方向上为零，并写作

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon(P_{u_1}\tilde{\gamma}_{u_1})A(u_1)(\nabla u_1,\nabla u_1) &= -P_{u_1}(\tilde{\gamma}_{u_1})\partial_\varepsilon\big(A(u_1)(\nabla u_1,\nabla u_1)\big)\\ &= -P_{u_1}(\tilde{\gamma}_{u_1})\cdot(\partial_\varepsilon A(u_1))(\nabla u_1,\nabla u_1).\end{aligned}$$

结合（1.10）、（5.9）和（5.16），因此我们可以得到界

$$\begin{aligned}T_1^{(1)} &\lesssim \int|\partial_\varepsilon(P_{u_1}(\tilde{\gamma}_{u_1})||\tau(u_1)| + \int|P_{u_1}(\tilde{\gamma}_{u_1})||(\partial_\varepsilon A(u_1))(\nabla u_1,\nabla u_1)|\\ &\lesssim \big[(\delta+\eta_0)\mathcal{T}+\delta\big]\int_{A\cap\Omega_1}(\phi_\mu+c_\mu)|\nabla\hat{q}_\mu|^2 \lesssim (\eta_0\mathcal{T}+\delta)(\log\mu)^{-1}{f_\mu}^{-2},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了（5.6）和（5.7）。因此 $T_1^{(1)} \lesssim R_1$ 如所需。

接下来，我们利用关于误差项的公式（5.32），结合（u_1（5.16）和（5.18），得到

(5.38) $|\partial_\varepsilon 误差_{u_1}| \lesssim |j_1|^2 + |\tilde\gamma_{u_1}|^2 + (|j_1| + |\tilde\gamma_{u_1}|)(|\partial_\varepsilon j_1| + |\partial_\varepsilon \tilde\gamma_{u_1}|)$

$$\lesssim |d\beta(0)|^2|\hat q_0|^2 + \delta^2\phi_\mu + (|d\beta(0)||\hat q_0| + \delta\phi_\mu)(|d\beta(0)||\partial_\varepsilon \hat q_0| + |\partial_\varepsilon d\beta(0)||\hat q_0| + \eta_0\phi_\mu + c_\mu \delta_{\mathbb{I}A}).$$

另外利用（5.3）、（5.6）和（5.7），由此可知

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} \lesssim & |d\beta(0)|^2(I_1 + I_2) + |d\beta(0)||\partial_\varepsilon d\beta(0)|I_1 + (\log\mu)^{-1} {f_\mu}^{-3}\delta + \eta_0|d\beta(0)|I_3 \\ & + \eta_0\delta(\log\mu)^{-2}{f_\mu}^{-2} + \delta^2(\log\mu)^{-1}{f_\mu}^{-2} \end{aligned}$$

从而 $T_1^{(2)} \lesssim R_1$。

接着我们将其拆分

$$T_1^{(3)} \le \int_{\Omega_1} |P_{u_1}^\perp(\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1 - u_1))||\Delta P_{u_1}^\perp j_1| + \int_{\Omega_1} |\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1 - u_1)||P_{u_1}(\Delta P_{u_1}^\perp j_1)|.$$

由于 $|\Delta u_1| + |\nabla u_1|^2 \lesssim |\nabla \hat q_\mu|^2 \lesssim \rho_q^2$ 且由于 $\Delta j_1 = 0$，我们当然可以估计

$$|\Delta(P_{u_1}^\perp j_1)| \lesssim |j_1|(|\nabla u_1|^2 + |\Delta u_1|) + |\nabla j_1||\nabla u_1| \lesssim |d\beta(0)|(|\hat q_0|\rho_q + |\nabla \hat q_0|)\rho_q.$$

为了得到该量切向部分的改进估计，我们写作 $P_{u_1}^\perp j_1 = \sum_j \langle j_1, \nu_{u_1}^j\rangle \nu_{u_1}^j$，从而得到 $|P_{u_1}(\Delta(P_{u_1}^\perp j_1)| \lesssim |j_1|\rho_q^2 + \rho_q|P_{u_1}^\perp(\nabla j_1)|$，并写作

(5.39) $$j_1 = dU_0(0)(q_0) - dU_1(0)(q_0) = P_{U_1(0)}(j_1) + (P_{U_0(0)} - P_{U_1(0)})(dU_0(0)(q_0))$$

从而得到

(5.40) $$|P_{u_1}^\perp(\nabla j_1)| \lesssim |u_1 - U_1(0)||\nabla j_1| + |U_0(0) - U_1(0)||\nabla \hat q_0| \lesssim |d\beta(0)|(|\hat q_0| + |\hat q_{1,\mu}|)|\nabla \hat q_0| + \delta|\nabla \hat q_0|.$$

Combined we hence get

$$|P_{u_1}(\Delta(P_{u_1}^\perp j_1))| \lesssim |d\beta(0)||\hat q_0|\rho_q^2 + |d\beta(0)||\hat q_{1,\mu}||\nabla \hat q_0|\rho_q + \delta|\nabla \hat q_0|\rho_q.$$

另一方面，尽管我们只能估计

$$\begin{aligned} |\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1 - u_1)| &= |\partial_\varepsilon(P_{u_1}(\tilde\gamma_{u_1} + j_1) + \mathrm{err}_{u_1})| \lesssim |j_1| + |\partial_\varepsilon j_1| + |\tilde\gamma_{u_1}| + |\partial_\varepsilon\tilde\gamma_{u_1}| \\ &\lesssim (|d\beta(0)| + |\partial_\varepsilon d\beta(0)|)|\hat q_0| + |d\beta(0)||\partial_\varepsilon \hat q_0| + \delta(\phi_\mu + c_\mu{}_{\mathbb{I}A}) + \eta_0\phi_\mu, \end{aligned}$$

比较式（5.38）和（5.16，我们得到更强的估计

$$|P_{u_1}^\perp(\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1 - u_1)| = |(P_{u_1}^\perp - P_{\mathfrak{z}_1}^\perp)(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_1)| \le |u_1 - \mathfrak{z}_1||\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_1| \lesssim |j_1| + |\tilde\gamma_{u_1}| \lesssim |d\beta(0)||\hat q_0| + \delta\phi_\mu.$$

Combined we hence get

$$\begin{aligned} T_1^{(3)} \lesssim & \int_{\Omega_1} |d\beta(0)||\hat q_0||\Delta P_{u_1}^\perp j_1| + \delta\int_{A\cap\Omega 1}(\phi_\mu + c_\mu)|\Delta P_{u_1}^\perp j_1| \\ & + \int_{\Omega_1}(|\partial_\varepsilon d\beta(0)||\hat q_0| + |d\beta(0)||\partial_\varepsilon \hat q_0|)|P_{u_1}(\Delta P_{u_1}^\perp j_1)| + \eta_0\int_{A\cap\Omega_1}\phi_\mu|P_{u_1}(\Delta P_{u_1}^\perp j_1)| \\ \lesssim & |d\beta(0)|^2(I_1 + I_2) + |d\beta(0)||\partial_\varepsilon d\beta(0)|I_1 + \delta(|\partial_\varepsilon d\beta(0)| + |d\beta(0)| + \eta_0)\mu^{-\frac12} + \eta_0|d\beta(0)|I_3 \end{aligned}$$

因此 $T_{(3)_1} \lesssim R_1$。这里我们只需利用 $\|\hat q_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \|\nabla \hat q_0\|_{L^2(\Omega_1)} \lesssim \mu^{-\frac12}$来处理包含 δ 的项，因为这些项只产生低阶贡献。

接下来我们估计

$$T_1^{(4)} \le \tfrac12\int_{\Omega_1} |P_{\mathfrak{z}_1}(d^2\pi_N(u_1)(\nabla j_1, \nabla j_1))| + \int_{\Omega_1} |\Delta \mathrm{err}_{u_1} - \tfrac12 d^2\pi_N(u_1)(\nabla j_1, \nabla j_1)|.$$

为处理第一项，我们利用 $A(x) = -dP_x$，从而得到

(5.41) $$d^2\pi(x)(v,w) = -A(x)(v,w) \in T_x^\perp N \text{ for all } x \in N, v, w \in T_xN.$$

结合（5.40），我们可以对其进行估计

$$|P_{\mathfrak{z}_1}(d^2\pi_N(u_1)(\nabla j_1,\nabla j_1)| \lesssim |\mathfrak{z}_1-u_1||\nabla j_1|^2+|P_{u_1}^{\perp}\nabla j_1||\nabla j_1| \lesssim |d\beta(0)|^2(|\hat{}q_0|+|\hat{}q_{1,\mu}|+|\tilde{\gamma}_{u_1}|)|\nabla\hat{}q_0|^2$$

而公式（5.32）中的误差u_1使我们能够检验

$$|\Delta\mathrm{err}_{u_1}-\frac{1}{2}d^2\pi_N(u_1)(\nabla j_1,\nabla j_1)| \lesssim (|j_1|+|\tilde{\gamma}_{u_1}|)\big[|\nabla u_1|(|\nabla j_1|+|\nabla\gamma|)+|\nabla j_1|^2+|\nabla\gamma|^2+|\tau(\gamma)|\big] + (|j_1|^2+|\tilde{\gamma}_{u_1}|^2)\rho_q^2+|\nabla\gamma|^2+|\nabla\gamma||\nabla j_1|.$$

综上可得

$$T^{(4)}{}_1 \lesssim |d\beta(0)|^2(I_1+I_2)+\delta|d\beta(0)|\mu^{-\frac{1}{2}}+\delta^2(\|\phi_\mu{}^2\rho_q^2\|_{L^1(\Omega_1)}+\|\nabla\phi_\mu\|_{L^2}^2)+(\|j_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}+\delta)\|\tau(\gamma)\|_{L^1} \lesssim |d\beta(0)|^2(I_1+I_2)+\delta|d\beta(0)|\mu^{-\frac{1}{2}}+\delta^2(\log\mu)^{-1}$$

其中第二步还用到了（5.6）、（5.7）、（5.8）和（5.12）。因此还有 $T_1^{(4)} \lesssim R_1$.

接下来我们估计

$$\begin{aligned} T_1^{(5)} &\lesssim \int_{A\cap\Omega_1}|P_{\mathfrak{z}_1}(\Delta(P_{u_1}^{\perp}\tilde{\gamma}_{u_1}))| \\ &\lesssim \int_{A\cap\Omega_1}|u_1-\mathfrak{z}_1|(|\Delta\gamma|+|\nabla\gamma|\rho_q)+|P_{u_1}^{\perp}(\nabla\gamma)|\rho_q+|\tilde{\gamma}_{u_1}|\rho_q^2 \\ &\lesssim (\mu^{-\frac{1}{2}}+\delta)\delta(\log\mu)^{-1}+\int_{A\cap\Omega_1}|u_1-\gamma||\nabla\gamma|\rho_q+\delta(\log\mu)^{-1}f_\mu{}^{-2} \end{aligned}$$

其中最后一步用到了（5.12）、$|u_1-\mathfrak{z}_1|\le\mu^{-\frac{1}{2}}+\delta$ 和（5.7）。此外，利用 $|u_1-\gamma|\lesssim|u_1-U_1(0)|+|\tilde{\gamma}_{u_1}|\le f_\mu{}^{-1}+\delta\phi_\mu$ 在 A 上，我们由此得到

$$T_1^{(5)} \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}}\delta+\delta^2(\log\mu)^{-1}+\delta(\log\mu)^{-1}f_\mu{}^{-2} \lesssim R_1. \tag{5.42}$$

最后，为了给 $T_1^{(6)}$ 定界，我们将 $\mathfrak{z}_1$ 改写为

$$\mathfrak{z}_1=\gamma+P_\gamma(\tilde{u}_1+j_1)+\mathrm{err}_\gamma \text{ for } \mathrm{err}_\gamma=\int_0^1\big(d\pi_N(\gamma+t(j_1+\tilde{u_1}))-d\pi_N(\gamma)\big)(\tilde{u_1}+j_1)$$

并利用（5.6）和（5.16），可知

$$|\partial_\varepsilon(\mathfrak{z}_1-\gamma)| \lesssim |\partial_\varepsilon\gamma|f_\mu{}^{-1}+f_\mu{}^{-2} \lesssim (\eta_0+\delta(\log\mu)^{-1})f_\mu{}^{-1}+f_\mu{}^{-2} \text{ on } A.$$

由于 $\|\Delta\gamma\|_{L^1}\lesssim\delta(\log\mu)^{-1}$，我们立即得出

$$T_1^{(6)} \le \delta(\log\mu)^{-1}f_\mu{}^{-2}+\delta^2(\log\mu)^{-2}f_\mu{}^{-1}+\eta_0\delta(\log\mu)^{-1}f_\mu{}^{-1} \lesssim R_1.$$

由于 $T_2=\int_{\Omega_1}\partial_\varepsilon(j_1\tau(\hat{}U_1)\circ\hat{}q_\mu|\nabla\hat{}q_\mu|^2)$，比较 (1.10)，此外我们还有

$$\begin{aligned} |T_2| &\lesssim \mathcal{T}\int|\partial_\varepsilon j_1|\rho_q^2+|j_1|(|\partial_\varepsilon\hat{q}_\mu|\rho_q^2+\rho_q|\partial_\varepsilon\nabla\hat{q}_\mu|)+\eta_{\mathcal{T}}\int|j_1||\nabla\hat{q}_{1,\mu}|^2 \\ &\lesssim \mathcal{T}|d\beta(0)|(I_3+I_4)+\mathcal{T}|\partial_\varepsilon d\beta(0)|I_3+\eta_{\mathcal{T}}|d\beta(0)|I_3 \lesssim R_1. \end{aligned}$$

最后，为了估计 B_1 我们利用 (5.39) 得到

$$|P_{u_1}^{\perp}j_1| \lesssim |\hat{q}_\mu||j_1|+\delta|\hat{q}_0| \lesssim |d\beta(0)||\hat{q}_\mu||\hat{q}_0|+\delta|\hat{q}_0|. \tag{5.43}$$

由于 $|\nabla u_1|+|\partial_\varepsilon\nabla u_1|\lesssim 1$ 在 $\partial\Omega_1$ 上，因此 $|P_{u_1}(\partial_n P_{u_1}^{\perp}j_1)| \lesssim |\partial_n u_1||P_{u_1}^{\perp}j_1| \lesssim |P_{u_1}^{\perp}j_1|$，我们便可得到以下界

$$|B_1| \lesssim \int_{\partial\Omega_1}|P_{u_1}^{\perp}j_1|dS \lesssim |d\beta(0)|I_{\partial\Omega}+\mu^{-1}\delta, \tag{5.44}$$

其中，最后一步成立是因为 $|\hat{}q_0|$ 和 $|\partial\Omega_1|$ 的阶为 $O(\mu^{-\frac{1}{2}})$。

由此我们证明了所有误差项均受 R_1 控制，从而完成了引理5.1的证明。□

引理5.2的证明。 为证明此引理，我们将利用

$$|\hat{q}_0(z)| + |z||\nabla \hat{q}_0(z)| \lesssim \sum_{j=1}^{n_0^*} |a_j(q_0)||z|^j \text{ for every } z \in \mathbb{C} \tag{5.45}$$

以及对于 $q_0 \in \mathcal{R}^\sigma(q_0^*)$, $\hat{}q_0 = \pi_{p^*}^{-1} \circ q_0$。为说明这一点，我们注意到，对 σ 的选择确保右侧至少为$\frac{1}{2}|z|^{n_0^*}$，因此，由于映射 $\hat{}q_0$ 满足一致的 C^k 界，(5.45) 在任意固定大小的圆盘 $\mathbb{D}_{\bar{r}}$(0) 之外显然成立。由于 $q_0^*(0) = 0$，且映射 $\hat{}q_0$ 与 $\hat{}q_0^*$ 一致地接近，我们可以固定一个足够小的 $\bar{r} = \bar{r}(q_0^*) > 0$，使得对所有$|z| \le 2\bar{r}$ 都有 $|q_0(z)| \le 1$。随后，复分析中的标准估计保证对所有 j 都有 $|a_j(q_0)| \lesssim (2\bar{r})^{-j}$，从而对所有 $|z| \le \bar{r}$ 都有 $\sum_{j \ge n_0^*+1} j|a_j(q_0)||z|^j \lesssim |z|^{n_0^*}$，这确保 (5.45) 在 $\mathbb{D}_{\bar{r}}$(0) 上也成立。

同样，给定 $q_1 \in \mathcal{R}^\sigma(q_i^*)$ 和 $\mu > \bar{\mu}$，我们可以利用 $\hat{}q_{1,\ \mu} = \pi_{p^*} \circ q_1(\frac{1}{\mu \cdot})$ 满足

$$|\hat{q}_{1,\mu}(z)| \lesssim \sum_{k=1}^{n_1^*} \frac{|a_k(q_1)|}{1+|\mu z|^k} \text{ and } |\nabla \hat{q}_{1,\mu}(z)| \lesssim \mu \sum_{k=1}^{n_1^*} \frac{|a_k(q_1)|}{1+|\mu z|^{k+1}}. \tag{5.46}$$

引理中所有结论的证明现在都可由基于这两个估计（5.45）和（5.46）的简短显式计算得出。首先，我们注意到（

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |\hat{q}_0|^2|\nabla \hat{q}_{1,\mu}|^2 + |\hat{q}_{1,\mu}|^2|\nabla \hat{q}_0|^2 &\lesssim \sum |a_j(q_0)|^2|a_k(q_1)|^2\mu^{-2j}\mu^2 \int_{\Omega_1} \frac{|\mu z|^{2j}}{1+|\mu z|^{2k+2}} + \frac{|\mu z|^{2j-2}}{1+|\mu z|^{2k}} \\ &\lesssim \sum |a_j(q_0)|^2|a_k(q_1)|^2\mu^{-2j} \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{t^{2j-1}}{1+t^{2k}} dt \\ &\lesssim \sum |a_j(q_0)|^2|a_k(q_1)|^2(\mu^{-2j} + \mu^{-j}\mu^{-k}\log\mu) \le \bar{\nu}^2 \log\mu\end{aligned} \tag{5.47}$$

这里以及下文中，我们只需对 $j = 1$、.....、n_0^* 和 $k = 1$、.....、n_1^* 求和，并且可以利用相应系数 $a_j(q_i)$ 一致有界这一点，因为我们只考虑 $\mathcal{R}^\sigma(q_i^*)$ 的元素。此外，由于

$$\int_{\Omega_1} |\hat{q}_0|^{2\alpha}|\nabla \hat{q}_0|^2 \lesssim \sum_j |a_j(q_0)|^{2(1+\alpha)} \int_{\Omega_1} |z|^{2(1+\alpha)j-2} \lesssim \bar{\nu}^{1+\alpha} \text{ for any } \alpha \ge 0, \tag{5.48}$$

因此，特别是对于 $\alpha = 1$，我们得到所声称的估计（5.22），其定义在 I_1 上。

利用（5.45）、（5.46）和（5.4），我们便得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |\hat{q}_0||\partial_\varepsilon \hat{q}_0||\nabla \hat{q}_{1,\mu}|^2 + |\partial_\varepsilon \hat{q}_0||\hat{q}_{1,\mu}||\nabla \hat{q}_{1,\mu}||\nabla q_{1,\mu}| &\lesssim \sum |a_j(q_0)||a_k(q_1)|^2\mu^{-j-1} \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{t^{j+1}}{1+t^{2k+1}} dt \\ &\lesssim \bar{\nu}\mu^{-1}\log\mu.\end{aligned}$$

由于对 I_2 的其他贡献有界于

$$\int_{\Omega_1} |\hat{q}_{1,\mu}||\nabla \hat{q}_0|^2 \lesssim \sum |a_k(q_1)||a_j(q_0)|^2\mu^{-2j} \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{t^{2j-1}}{1+t^k} \lesssim \bar{\nu}^{3/2} \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu}$$

and

$$\int |\hat{q}_0|\rho_q|\nabla \hat{q}_0| \le (\bar{\nu}^2\log\mu)^{\frac{1}{2}}\bar{\nu}^{\frac{1}{2}} \lesssim \mu^{-1}(\log\mu)^{\frac{1}{2}}\bar{\nu},$$

比较（5.47）和（5.48），因此我们得到所声称的（5.23）上的界 I_2。

将（5.48）与

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |\hat{q}_0||\nabla \hat{q}_{1,\mu}|^2 + |\nabla \hat{q}_0||\hat{q}_{1,\mu}||\nabla \hat{q}_{1,\mu}| &\lesssim \sum |a_j(q_0)||a_k(q_1)|^2\mu^{-j} \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{t^{j+1}}{1+t^{2k+2}} \\ &\lesssim \sum |a_j(q_0)||a_k(q_1)|^2(\mu^{-j} + \mu^{-j/2}\mu^{-k}\log\mu) \lesssim \bar{\nu}\end{aligned}$$

即可得出 I_3 满足（5.24），而（5.4）和（5.5）给出了

$$I_4 \leq \int_{\Omega_1} |z|(1+\tfrac{\mu^2}{1+|\mu z|^4}) \lesssim \mu^{-\frac{3}{2}} + \mu^{-1}\int_0^{\sqrt{\mu}} \tfrac{t^2}{1+t^4} dt \lesssim \mu^{-1}.$$

最后，由于 $\lceil q_0|^2 + \lceil q_{1,\ \mu}|^2 \lesssim \bar\nu$ 在 $\partial\Omega_1 = \partial\mathbb{D}_{\mu^{-\frac{1}{2}}}$ 上，我们得到 $|I_{\partial\Omega_1}| \leq |\partial\Omega_1|\bar\nu \lesssim \bar\nu\mu^{-\frac{1}{2}}$。 □

在第 6 节中，我们还将使用一个非常相似的计算结果

$$\int |\partial_\varepsilon \hat q_0|^2 \rho_q^2 + |\hat q_0|^2(|\partial_\varepsilon \nabla \hat q_0|^2 + |\partial_\varepsilon \nabla \hat q_{1,\mu}|^2) \lesssim \eta_{rat}(\mu^{-j^*} + \bar\nu)^2 \log\mu. \tag{5.49}$$

最后，我们需要证明误差项 $\mathrm{err}_\varphi = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1$ 对 $\partial_\varepsilon E(\mathfrak{z}_\varepsilon)$ 的贡献受到控制，具体如引理 5.3所述。

ˆ 由于 err_φ 的支集位于 A，我们先收集一些在此集合上成立的估计；在这里$|z| \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$，因此我们可以得到如下界

$$|q_0| + |q_{1,\mu}| + \mu^{-\frac{1}{2}}(|\nabla q_0| + |\nabla q_{1,\mu}|) \lesssim \bar\nu^{\frac{1}{2}} \tag{5.50}$$

and

$$|\partial_\varepsilon q_0| + |\partial_\varepsilon q_{\mu,1}| + \mu^{-\frac{1}{2}}|\partial_\varepsilon \nabla q_0| + |\partial_\varepsilon \nabla q_{\mu,1}| \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.51}$$

由于 $v_0 - v_1 = \beta(q_\mu) - \beta(0) - d\beta(0)(q_\mu)$，我们有

$$|v_0 - v_1| + \mu^{-\frac{1}{2}}|\nabla(v_0 - v_1)| + \mu^{-1}|\Delta(v_0 - v_1)| \lesssim \|\beta\|(|q_\mu|^2 + \mu^{-1}|\nabla q_\mu|^2) \leq \|\beta\|\bar\nu \tag{5.52}$$

以及

$$|\partial_\varepsilon(v_0 - v_1)| + \mu^{-\frac{1}{2}}|\partial_\varepsilon\nabla(v_0 - v_1)| + \mu^{-1}|\partial_\varepsilon\Delta(v_0 - v_1)| \leq (\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\bar\nu + \eta_{rat}\|\beta\|\mu^{-j^*}. \tag{5.53}$$

ˆ 此外，我们注意到 γ 在 A 上是调和的，因此可以对其进行估计

$$|\nabla v_i|^2 + |\Delta v_i| \lesssim \rho_q^2 + |\nabla\gamma|^2 \lesssim \mu(\bar\nu + \tfrac{\delta^2}{(\log\mu)^2}). \tag{5.54}$$

由于误差项由下式给出

$$\mathrm{err}_\varphi = \pi_N(v_1 + t\varphi(v_0 - v_1)) - \pi_N(v_1) = \int_0^1 d\pi_N(v_1 + t\varphi(v_0 - v_1))(\varphi(v_0 - v_1))dt \tag{5.55}$$

对于满足以下条件的函数 φ：它在$|z| \leq \frac{1}{2}\mu^{-\frac{1}{2}}$处为零，且满足 $|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi| \lesssim \mu$，我们有

$$|\mathrm{err}_\varphi| \lesssim \|\beta\|\bar\nu \qquad \text{and} \qquad |\Delta\mathrm{err}_\varphi| \lesssim \|\beta\|\mu\bar\nu. \tag{5.56}$$

由于 $|\partial_\varepsilon\mu_i| \lesssim \mu_i$，我们有

$$|\partial_\varepsilon(\varphi_\mu(z))| \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}}|\partial_\varepsilon\tfrac{\mu_1}{\mu_0}||\phi'(\mu^{\frac{1}{2}}|z|)|z| \lesssim \mathbb{1}_{\hat A} \tag{5.57}$$

从而可以对其进行估计

$$|\partial_\varepsilon\mathrm{err}_\varphi| \lesssim |v_0 - v_1| + |\partial_\varepsilon(v_0 - v_1)| \lesssim (\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\bar\nu + \eta_{rat}\|\beta\|\mu^{-j^*}. \tag{5.58}$$

稍后我们还将利用上述估计来给出.....的上界

$$\mu^{-1}|\partial_\varepsilon\Delta\mathrm{err}_\varphi| \lesssim (\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\bar\nu + \eta_{rat}\|\beta\|\mu^{-j^*}. \tag{5.59}$$

基于这些估计，我们现在可以完成.....

引理的证明 5.3。 由于 $|\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1| \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}} + \delta + \eta_0$ 在 ˆA 且由于 $|\ \hat{}\ A| \lesssim \mu^{-1}$ 我们可以估计

$$\begin{aligned}|\int_{\Omega_1} \partial_\varepsilon\mathfrak{z}\Delta\mathfrak{z} - \partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1\Delta\mathfrak{z}_1| &\leq \int_{\hat A\cap\Omega_1} (|\partial_\varepsilon\mathfrak{z}_1| + |\partial_\varepsilon\mathrm{err}_\varphi|)|\Delta\mathrm{err}_\varphi| + \int_{\hat A\cap\Omega_1} |\partial_\varepsilon\mathrm{err}_\varphi\Delta\mathfrak{z}_1| \\ &\lesssim \|\beta\|(\mu^{-\frac{1}{2}} + \delta + \eta_0)\bar\nu + \int_{\hat A\cap\Omega_1} |\partial_\varepsilon\mathrm{err}_\varphi\cdot\Delta\mathfrak{z}_1|.\end{aligned}$$

为估计最后这一项，我们将 $\partial_\varepsilon \mathrm{err}_\varphi \Delta_{\mathfrak{z}_1}$ 拆分为切向部分和法向部分的贡献。由于 $P_{\mathfrak{z}_1} = d\pi(\mathfrak{z}_1)$，且由于 $|v_1 - \mathfrak{z}_1| \le \delta + \|\beta\|\bar\nu^{\frac12}$ 和 $|\partial_\varepsilon v_1| \lesssim \eta_0 + \mu^{-\frac12}$ 在 $\hat{}_A$ 上，我们得到

$$\begin{aligned} |P^\perp_{\mathfrak{z}_1}(\partial_\varepsilon \mathrm{err}_\varphi)| &\lesssim (|v_1 - \mathfrak{z}_1| + |v_0 - v_1|)|\partial_\varepsilon(\varphi(v_0 - v_1))| + |\partial_\varepsilon v_1||\varphi(v_0 - v_1)| \\ &\le (\delta + \|\beta\|\bar\nu^{\frac12})(\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\mu^{-1} + (\eta_0 + \mu^{-\frac12})\bar\nu\|\beta\| \\ &\lesssim \|\beta\|\mu^{-3/2} + \delta(\|\partial_\varepsilon\beta\| + \|\beta\|)\mu^{-1} + \eta_0\|\beta\|\bar\nu \end{aligned} \tag{5.60}$$

因此特别可以界定 $|P^\perp_{\mathfrak{z}_1}(\partial_\varepsilon 误差\varphi)| \lesssim \mu^{-1}(\|\beta\| + \delta)$。

由于（5.54）保证了 $|\Delta_{\mathfrak{z}_1}| = |\Delta（\pi_N（v_1））| \lesssim \mu（\bar\nu + \delta^2）$ 在 $\hat{}_A$ 上，并且由于 $|\hat{}_A| \lesssim \mu^{-1}$ 这足以估计

$$\int |P^\perp_{\mathfrak{z}_1}\partial_\varepsilon \mathrm{err}_\varphi||\Delta_{\mathfrak{z}_1}| \le (\bar\nu + \delta^2)\mu^{-1}\big[\|\beta\| + \delta\big]$$

从而可知该项被（5.27）右端所界定。

由（5.31）我们进一步得到

$$|P_{u_1}(\Delta_{\mathfrak{z}_1})| \lesssim |\tau(u_1)| + |\nabla\gamma|^2 + |\nabla j_1|^2 + \rho_q(|\nabla\gamma| + |\nabla j_1|) \le \mathcal{T}\bar\nu\mu + \delta^2\mu + \delta\bar\nu^{\frac12}\mu + \|\beta\|\bar\nu\mu.$$

由于（5.58）保证了 $|\partial_\varepsilon 误差_\varphi| \lesssim （\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|）\mu^{-1}$，并且 $|\hat{}_A| \lesssim \mu^{-1}$，我们立即得出 $\int |\partial_\varepsilon 误差_\varphi||P_{u_1}\Delta_{\mathfrak{z}_1}|$ 也受（5.27）右端的控制，从而完成引理的证明。□

5.3. 有理映射的变分中能量展开的主导项。

本节将说明，如何利用上一节证明的一般能量展开，来确定一个使引理 3.5 成立的变分。

由对称性，只需证明引理对 $i = 1$的结论，即确定 q_1 的一个变分，使得由此得到的族 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 满足（3.16），其中保持 $U_{0.1}$、q_1 和 μ 不变。

对于这样的变分，根据引理 3.4 我们知道

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon\mathfrak{z}) = \int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 + \int_{\Omega_0} j_0\partial_\varepsilon\Delta u_0 + \mathrm{err}_1 \tag{5.61}$$

现在，对于一个由 $|\mathrm{err}_1| \lesssim R_2$ for 界定的误差

$$R_2 := \bar\nu\|\beta\|\mu^{-\frac12} + \tfrac{\delta^2}{\log\mu} + \tfrac{\delta}{f_\mu^2\log\mu} + \mathcal{T}\mu^{-1}\log\mu \tag{5.62}$$

当 $\eta_0 = \eta_\tau = 0$。由于 $\partial_\varepsilon U_0 = 0$ 且由于 $|\partial_\varepsilon\hat{}q_\mu| \lesssim |\partial_\varepsilon q_{1,\mu}|$ 在 Ω_0 上很小，我们可以很容易地验证这一点 t 时

$$|\int_{\Omega_0} j_0\partial_\varepsilon\Delta u_0| \lesssim \bar\nu\|\beta\|\mu^{-\frac12} \le R_2. \tag{5.63}$$

因此，要证明该引理，只需证明我们可以找到 q_1 的一个变分，使得

$$\int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 \ge c_1|d\beta(0)|^2\nu_0 - \mathrm{err}_2 \tag{5.64}$$

其中误差项有界于 $|\mathrm{err}_2| \lesssim R_2$。

为此，我们将利用这样一个事实：在远离 $z = 0$ 的地方，函数 $2(\mu z)^{-j}$ 可以由调和映射 $\bar h_{j,\mu}(z) := \pi((\mu\bar z)^j) : \hat{}\mathbb{C} \to S^2$ 的前两个分量 $h_{j,\mu}(z) := {}^2(\frac{\mu\bar z^{\,j}}{1+|\mu\bar z|^{2j}})$ 充分逼近，其中我们继续在方便时将 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 认作 $x + iy \in \mathbb{C}$。因此，我们将 $u_1(z) = U_1(q_0(z) + q_{1,\mu}(z))$ 写作

$$u_1(z) = U_1(0) + dU_1(0)\left(\tfrac12\sum_{j=1}^{n_1^*} a_j(q_1)h_{j,\mu}(z) + q_0(z)\right) + f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$$

for

$$f_1(z) := u_1(z) - (U_1(0) + dU_1(0))(q_\mu) = \int_0^1 (dU_1(tq_\mu) - dU_1(0))(q_\mu)dt$$

$$f_2(z) := dU_1(0))\Big(\sum_{1\leq j\leq n_0^*} a_j(q_1)((\mu z)^{-j} - \tfrac{1}{2}h_{j,\mu}(z)) = \tfrac{1}{2}dU_1(0)\Big(\sum_{1\leq j\leq n_0^*} a_j(q_1)\tfrac{(\mu\bar z)^j}{|\mu z|^{2j}(1+|\mu z|^{2j})}\Big)$$

$$f_3(z) := dU_1(0)\Big(\sum_{j\geq n_0^*+1} a_j(q_1)(\mu z)^{-j}\Big).$$

由此 $\Delta j_1 = 0$ 我们得到 $T_B^i := \int_{\Omega_1} j_1\Delta\partial_\varepsilon f_i = \int_{\partial\Omega_1} j_1\partial_n\partial_\varepsilon f_i - \partial_n j_1\partial_\varepsilon f_i dS$，并将利用这一点证明所有这些项都由 R_2 控制。

我们可以利用这一点：$|\partial\Omega_1| \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ 有理函数由（5.50）界定，而它们的变分由（5.51）界定，在满足 $|z| \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ 的点处。这立即意味着

$$|T_B^1| \lesssim |d\beta(0)| \int_{\partial\Omega_1} |q_0|(|\nabla q_\mu||\partial_\varepsilon q_\mu| + |q_\mu||\nabla\partial_\varepsilon q_\mu|) + |\nabla q_0||\partial_\varepsilon q_\mu||q_\mu| \lesssim |d\beta(0)|\mu^{-\frac{1}{2}}\bar\nu \lesssim R_2,$$

而 $|T_B^3| \lesssim |d\beta(0)|\mu^{-\frac{1}{2}}\nu_{\hat q_0} \lesssim R_2$ 成立，因为 $|\partial_\varepsilon f_3| + \mu^{-\frac{1}{2}}|\partial_\varepsilon\nabla f_3| \lesssim \mu^{-(n_0^*+1)/2} \lesssim \mu^{-\frac{1}{2}}\bar\nu^{\frac{1}{2}}$。

现在我们可以利用这一点：形如 $d\beta(0)(a_j z^j)$、$a_j \in \mathbb{C}$ 及其径向导数的项，与形如 $dU_1(0)(b_k(\bar z)^k)$、$b_k \in \mathbb{C}$ 及其径向导数的项，在任意满足 $j \neq k$ 的圆 $\partial\mathbb{D}_r = \partial\mathbb{D}_r(0)$ 上正交。这意味着

$$\begin{aligned}|T_B^2| &\lesssim |d\beta(0)| \sum_{j=1}^{n_0^*} |a_j(q_0)||a_j(\partial_\varepsilon q_1)| \int_{\partial\Omega_1} \Big[|z^j||\partial_n \tfrac{(\mu\bar z)^j}{|\mu z|^{2j}(1+|\mu z|^{2j})}| + |\partial_n z^j||\tfrac{(\mu\bar z)^j}{|\mu z|^{2j}(1+|\mu z|^{2j})}|\Big] \\ &\lesssim |d\beta(0)| \sum_{j\leq n_0^*} |a_j(q_0)||\partial_\varepsilon a_j(q_1)|\mu^{-2j} \lesssim |d\beta(0)|\mu^{-1}\bar\nu \lesssim R_2.\end{aligned}$$

在这一阶段，我们因此知道

$$\int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_1^*}\int_{\Omega_1} j_1 \cdot dU_1(0)(\partial_\varepsilon a_j(q_1)\Delta h_{j,\mu}) + \mathrm{err}_3 \tag{5.65}$$

对于 $|\mathrm{err}_3| \lesssim R_2$，因为我们知道 $\Delta q_0 = 0$。

由于 $\bar h_{j,\ \mu}$ 是到 S^2 中的调和映射，并且

$$|\nabla\bar h_{j,\mu}|^2(z) = |\nabla\pi((\mu\bar z)^j)|^2 \cdot (j\mu)^2|\mu z|^{2(j-1)} = \mu^2\tfrac{8j^2|\mu z|^{2j-2}}{(1+|\mu z|^{2j})^2}$$

我们可以写成

$$\Delta h_{j,\mu} = -|\nabla\bar h_{j,\mu}|^2 h_{j,\mu} = -2\mu^2 H_j(\mu|z|)\cdot(\mu\bar z)^j$$

对于 $H_j(t) := \frac{4j^2t^{2j-2}}{(1+t^{2j})^3}$。圆上不同傅里叶模态的正交性因此允许我们将（5.65）中的主要项写成

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_1} j_1 \cdot dU_1(0)(\partial_\varepsilon a_j(q_1)\Delta h_{j,\mu}) &= -I_j^H(\mu)\int_{S^1} d\beta(0)(a_j(q_0)e^{ij\theta})\cdot dU_1(0)(a_j(\partial_\varepsilon q_1)e^{-ij\theta}) \\ &= -|a_j(q_0)||a_1(\partial_\varepsilon q_1)|I_j^H(\mu)I_j^\theta(\alpha_j, U_0, U_1)\end{aligned} \tag{5.66}$$

对于 $\alpha_j = \alpha_j(\partial_\varepsilon q_1, q_0) := j^{-1}\big[\mathrm{Arg}(a_j(\partial_\varepsilon q_1)) - \mathrm{Arg}(a_j(q_0))\big]$,

$$I_j^\theta(\alpha, U_0, U_1) := \int_{S^1} d(U_0 - U_1)(0)(e^{ij\theta})dU_1(0)(e^{-ij(\theta-\alpha)})d\theta \tag{5.67}$$

and

$$I_j^H(\mu) := \mu^2\int_0^{\mu^{-\frac{1}{2}}} r^j H_j(\mu r)(\mu r)^j r dr = 4j^2\mu^{-j}\int_0^{\sqrt{\mu}} \tfrac{t^{4j-1}}{(1+t^{2j})^3}dt \sim \mu^{-j}. \tag{5.68}$$

我们注意到，上述计算适用于 q_i 满足（3.7）的任意变分，因此表明 $\partial_\varepsilon E$（$\mathfrak{z}$）始终受（3.14）控制。

为找到 q_1 的一个特定变分，使得引理 3.5 成立，我们现使用以下引理，其证明附于下文。

ˆ引理 5.4。 设 $U_{0,1}^*$： $\mathbb{C}\to N$ 是满足假设 *1*的不同调和映射。则存在 $\alpha^*\in[0,2\pi)$ 以及 $c^*>0$，使得对于所有 $-I_j^\theta(\alpha^*, U_0^*, U_1^*)>2c^*$和所有 $j\in\mathbb{N}$均成立，因而

$$I_j^\theta(\alpha^*, U_0, U_1)\geq c^* \text{ for all } U_i\in\mathcal{R}^\sigma(U_i^*),\ j\in\mathbb{N}.$$

给定一个有理映射 q_0，我们将把该引理应用于 $j_0\in\{1,\dots,n_0^*\}$，其选取满足

$$|a_j(q_0)|\mu^{-j}\Lambda_1^j\leq|a_{j_0}(q_0)|\mu^{-j_0}\Lambda_1^{j_0}\text{ for } j=1,\dots,n_0^* \tag{5.69}$$

其中 $\Lambda_1\geq1$ 是一个仅依赖于 $U_{0,1}^*$ 和 $q_{0,1}^*$ 的大数，并将在下文固定。

将 q_1 写成形式 $q_1=\frac{r_1}{r_2}$，其中多项式 $r_{1,2}$ 满足归一化条件 $r_2(0)=1$，我们最终将所需的 q_1 变分定义为

$$q_1^{(\varepsilon)}(z):=\frac{r_1(z)+\varepsilon(e^{i\theta^*}z)^{j_0}}{r_2(z)}$$

其中我们选取 $\theta^*:=\alpha^*+\frac{1}{j_0}\mathrm{Arg}(a_{j_0})$，使得 $\alpha_{j_0}(\partial_\varepsilon q_1, q_0)$ 由引理 5.4 中的数 α^*给出。

由于 $a_j(\partial_\varepsilon q_1)=0$ 对 $j<j_0$ 成立，而 $|a_{j_0}(\partial_\varepsilon q_1)|=1$，由（5.65）和（5.66）可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} j_1\partial_\varepsilon\Delta u_1 &\geq c^*|a_{j_0}(q_0)|I_{j_0}^H(\mu)-C\sum_{j=j_0+1}^{n_0^*}|a_j(q_0)|I_j^H(\mu)-CR_2\\ &\geq 2c|a_{j_0}(q_0)|\mu^{-j_0}-C\sum_{j=j_0+1}^{n_0^*}|a_j(q_0)|\mu^{-j}-CR_2\\ &\geq(2c-C\Lambda_1^{-1})|a_{j_0}(q_0)|\mu^{-j_0}-CR_2\geq c|a_{j_0}(q_0)|\mu^{-j_0}-CR_2\end{aligned}$$

其中常数 $c>0$ 仅依赖于 U_i^*和 $q_{0,1}^*$，其中最后一步成立的条件是$\Lambda_1=\Lambda_1(U_i^*, q_i^*)$ 在（5.69）中取值充分大。

由于（5.69）保证了 $\nu_{q_0}\lesssim|a_{j_0}(q_0)|\mu^{-j_0}$，这就完成了（5.64）的证明，从而完成了引理 3.5，剩下的

证明 引理 *5.4*。 我们利用调和球面是弱共形的这一事实，以及 $dU_i^*(0)\neq0$.

若 $U_1^*(z)=U_0^*(\bar z)$，则我们可以据此在目标空间上选取坐标，使得 $dU_{0,1}^*(0)$ 由以下矩阵给出，其列分别为 $\frac{1}{\sqrt2}|dU_0^*(0)|(1,0,0_{N-2})^T$和 $\frac{1}{\sqrt2}|dU_0^*(0)|(0,\pm1,0_{N-2})^T$，视为从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^N$ 的映射。令 $\alpha^*:=\pi$，于是得到

$$-I_j^\theta(\alpha^*, U_0^*, U_1^*)=\tfrac12|dU_0^*(0)|^2\int_{S^1}\sin^2(j\theta)+\cos^2(j\theta)=\pi|dU_0^*(0)|^2$$

这就证明了这种情况下的结论。

因此，不妨设 N 是三维的，并且 $U_{0,1}^*$ 是极小球面，其在 $U_0^*(0)=U_1^*(0)$ 处的切空间横截地相交。在这种情况下，我们选择定义域上的坐标，使得 $\partial_{x_1}U_1^*(0)$ 包含于这些切空间的交点中，然后利用 U_1^* 的保角性选择目标空间上的坐标，使得 $\partial_{x_{1,2}}U_1^*=c_{U_1^*}e_{1,2}$，并且使得 $T_{U_0^*(0)}N=\mathbb{R}^3\times\{0\}$。这里，$e_i$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的标准基，而 $c_{U_1^*}:=\frac{1}{\sqrt2}|dU_1^*(0)|$。

矩阵 $A = c_{U_0^*}^{-1} dU_0^*(0)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N$ 的列向量是标准正交的，因此满足 $A_{31} = 0$、 $A_{32} \neq 0$，并且满足 $A_{ij} = 0$ （对 $i \geq 4$）。由于

$$\int dU_1^*(0)(e^{ij\theta}) dU_1^*(0)(e^{-ij(\theta-\alpha^*)}) = \int \cos(j\theta)\cos(j\theta+\theta^*) - \sin(j\theta)\sin(j\theta+\alpha^*) = 0,$$

对于任意 α^*，我们因此得到

$$\begin{aligned} I_j^\theta(\alpha^*, U_0^*, U_1^*) &= c_{U_1^*} c_{U_0^*} \int [A_{11}\cos(j\theta) + A_{12}\sin(j\theta)]\cos(j\theta+\alpha^*) \\ &\quad - c_{U_1^*} c_{U_0^*} \int [A_{21}\cos(j\theta) + A_{22}\sin(j\theta)]\sin(j\theta+\alpha^*) d\theta \\ &= \pi c_{U_1^*} c_{U_0^*} [(A_{11} - A_{22})\cos\alpha^* - (A_{12}+A_{21})\sin\alpha^*]. \end{aligned}$$

如果 $A_{11} \neq A_{22}$，我们因此可以选择 α^* 为 0 或 π。反之，如果 $A_{11} = A_{22}$，那么我们不能同时有 $A_{12} = -A_{21}$，因为 A 的两列长度均为单位长度，并且 $A_{31} = 0$，而$A_{32} \neq 0$。在第二种情况下，我们因此可以选择 α^* 为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$。□

5.4. 底层映射 U_i 的变分的能量展开中的主导项。

现在我们希望证明，总能找到映射的变分 U_i，使其在 $\mathcal{H}_1(U_i^*)$ 中诱导出的变分 $\mathcal{Z}_0$ 如引理 3.7 和 3.8 中所述。

对于这样的变分，我们总能对 $|\partial_\varepsilon \Delta u_1| \lesssim \rho_q^2$ 进行界定，因此有

$$|\int_{\Omega_1} j_1 \partial_\varepsilon \Delta u_1| \lesssim |d\beta(0)| \int_\Omega |\hat{q}_0| \rho_q^2 \lesssim |d\beta(0)| I_3 \lesssim \|\beta\| \bar{\nu},$$

参见引理 5.2，而 $|\int_{\Omega_0} j_0 \partial_\varepsilon \Delta u_0|$ 的类似估计可由对称性得出

co .

关于 $\mathcal{Z}_0$ 上能量的变分的一般公式 (3.11) 因此告诉我们

$$dE(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon \mathfrak{z}) = \pi c_\mu \tfrac{d}{d\varepsilon}\delta(U_0, U_1)^2 + \deg(q_1)\tfrac{d}{d\varepsilon}E(U_1) + \deg(q_0)\tfrac{d}{d\varepsilon}E(U_0) + \mathrm{err}_4 \tag{5.70}$$

对于 $|\mathrm{err}_4| \lesssim \|\beta\|\bar{\nu} + \frac{\delta}{\text{对数 } \mu}[\delta + f_\mu{}^{-1} + (\text{对数 } \mu)^{-1}] + \mathcal{T}(\text{对数 } \mu)^{-1} f_\mu{}^{-1}$。

由于 $c_\mu \sim (\log\mu)^{-1}$，我们立即得到：若选择一个变分 $U_{i,\,\varepsilon}$ 在 $\mathcal{H}_1^\sigma(U_i^*)$ 中，使得 (2.8) 成立，则引理 3.8 成立。

另一方面，若考虑由定义域上的平移所诱导的 U_i 的变分，那么我们知道 $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} E(U_i) = 0$，因为能量是共形不变的。因此，要证明引理 3.7，只需证明引理 3.6，即总存在如下形式的变分 $U_{i,\,\varepsilon} = U_i(\cdot + \varepsilon e^{i\theta_0})$，使得

$$\tfrac{d}{d\varepsilon}\delta^2(U_0, U_1) \gtrsim \delta(U_0, U_1). \tag{5.71}$$

如果我们处于满足 $U_0^* = U_1^*$的非退化情形，那么我们知道，对于某个 $|c_i| \leq \sigma$，有 $U_i(z) = U_0^*(z + c_i)$。如果 $c_0 = c_1$，那么 $\delta = 0$，因此无需证明；而对于 $c_0 \neq c_1$，我们可以考虑 $U_{1,\,\varepsilon}(z) = U_0^*(z + c_1 + \varepsilon\frac{c_0 - c_1}{|c_0 - c_1|}) = U_1(z + \varepsilon\frac{c_0 - c_1}{|c_0 - c_1|})$，并利用 $dU_0^*(0) \neq 0$，从而得到一个满足 (5.71) 的变分。类似论证也适用于满足$U_0^*(z) = U_1^*(\bar{z})$的情形；在这两种情况下，我们同样可以构造 U_0的变分。

因此，假设映射 $U_{0,\,1}^*$ 符合假设 1 的 (ii) 部分。在这种情况下，我们可以利用切空间 $T_{U_i^*(0)}U_i^*(\mathbb{C})$，它们是同一个三维空间 $T_{U_i^*(0)}N$中的二维子空间，且彼此横截；此外，连接点 $U_i(0)$ 的测地线 $\hat{}\gamma_{U_1,\,U_0}$的长度 δ 可以通过减小 σ而缩短至任意给定的常数以下。

$\hat{}$ 因此我们得出，在 $\alpha_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\hat{}\gamma$ 与 $T_{U_i(0)}U_i(\mathbb{C})$ 相交所形成的角中，至少有一个角满足 $|\frac{\pi}{2} - \alpha_i| \geq \frac{1}{3}\bar{\alpha}$；其中 $\bar{\alpha} \in (0, \frac{\pi}{2}]$表示空间 $T_{U_i^*(0)}U_i^*(\hat{}\mathbb{C})$ 之间的夹角。

对于这个 i，我们因此知道 $\|P^{T_{U_i(0)}U_i(\hat{\mathbb{C}})}(\frac{\hat{\gamma}'(i^*)}{\|\hat{\gamma}'(i^*)\|})\| = \cos(\alpha_i) \geq \sin(\bar{\alpha}/3)$ 与零保持正距离；回想一下，$\hat{\gamma}(i^*) = U_i(0)$，$0^* = 1, 1^* = 0$。

由于 U_i^*是弱共形的，且 $dU_i^*(0) \neq 0$，并且映射 U_i与 C^k相近于 U_i^*，我们由此推得 $U_i(\cdot + \varepsilon e^{i\theta_0})$ 具有所需性质（5.71），只要 θ_0 的选取满足： $\partial_\varepsilon U_i(0)(e^{i\theta_0})$ 指向 $\pm P^{T_{U_i(0)}U_i(\hat{\mathbb{C}})}(\frac{\hat{\gamma}'(i^*)}{\|\hat{\gamma}'(i^*)\|})$。

这就完成了引理 3.6的证明，也就完成了引理 3.7的证明。

6. Estimates on the first and second variation of the energy

本文最后给出引理 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$ 中关于点 3.1-3.3处能量的一阶变分和二阶变分的断言证明。我们将继续使用经过缩放的立体投影坐标，使得 $|a_{n_0^*}(q_0)| = 1$，从而 $\mu_0 = 1$；但现在我们需要考虑一般方向上的变分 $w \in \Gamma(\mathfrak{z}^* TN)$。因此，注意到对于任意这样的 w，我们可以对其作如下界估计：

$$\int_{S^1} |w(re^{i\theta})| d\theta \lesssim [\log(\min(r^{-1}, \mu r))]^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathfrak{z}} \text{ for any } r \in [r_1, r_0] = [\mu^{-1} f_\mu, {f_\mu}^{-1}], \tag{6.1}$$

由于 $\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{D}_1)}$、$\int_{S^1} |w(e^{i\theta})|$ 和 $\int_{S^1} |w(\mu^{-1} e^{i\theta})|$ 均由 $\|w\|_{\mathfrak{z}}$ 控制。因此在下文中我们可以使用

$$\int_A \rho_{\mathfrak{z}}^2 |w|^2 dx \lesssim {f_\mu}^{-2} \log f_\mu \|w\|_{\mathfrak{z}}^2 \text{ and } \int_A \tfrac{1}{r^2} |w|^2 dx \leq C(\log \mu)^2 \|w\|_z^2 \tag{6.2}$$

这尤其意味着

$$\int [\rho_z^2 + |\partial_\varepsilon \nabla \gamma|^2 + |\partial_\varepsilon \nabla v_i|^2] |w|^2 \lesssim \|w\|_z^2 \text{ while } \int_A |\nabla \gamma|^2 |w|^2 \lesssim \delta^2 \|w\|_{\mathfrak{z}}^2, \tag{6.3}$$

并且我们注意到，结合式（3.2），可立即得到（3.3）。

在下文引理 3.2 和 3.3 的证明中，我们还将使用（6.1）保证了

$$\int_{A^*} \tfrac{1}{r^2} |w| dx \leq C(\log f_\mu)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathfrak{z}} \text{ and that } \|w\|_{L^1(\hat{A})} \leq C\mu^{-1} (\log \mu)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4}$$

6.1. 相对于 $\mathcal{Z}$ 正交的二阶变分的一致定性。

本节旨在证明，相对于我们的一组奇异性模型正交的二阶变分是一致定性的，正如引理 3.1所述。

引理 3.1 证明的主要步骤是证明存在一个常数 $c_0 > 0$，使得对于任意 $w \in T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z}$满足 $\|w\|_{\mathfrak{z}} = 1$，存在一个元素 $v \in T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z}$满足 $\|v\|_{\mathfrak{z}} = 1$，从而有

$$d^2 E(\mathfrak{z})(w, v) \geq c_0. \tag{6.5}$$

一旦证明了这一点，我们就可以将 $\mathcal{V}_{\mathfrak{z}}^{\pm}$ 定义为相应雅可比算子的正特征值和负特征值所对应的特征函数的张成空间

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}} : T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z} \to T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z},$$

其特征在于

$$d^2 E(\mathfrak{z})(v, w) = \langle \tilde{L}_{\mathfrak{z}} v, w \rangle_{\mathfrak{z}} \text{ for } v, w \in T_{\mathfrak{z}}^\perp \mathcal{Z}$$

并由自伴 Fredholm 算子的谱定理得到该引理的结论。

为证明这一断言（6.5），我们将把元素 $\mathfrak{z}$（属于 $\mathcal{Z}_0$）以及沿 v 的向量场 w 与相应的元素 $\hat{\mathfrak{z}} = U_0 \circ q_0$（属于 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$）以及沿 $\hat{v}$ 的向量场 $\hat{w}$ 联系起来。$\mathfrak{z}_0$

对于这类向量场，我们始终采用内积

$$\langle \hat{w}, \hat{v} \rangle_\pi := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \pi|^2 \hat{w} \hat{v} + \nabla \hat{w} \nabla \hat{v} \tag{6.6}$$

它（相差一个因子 2）对应于球面上的 H^1 内积，并且在远离 $\langle \cdot$原点处能很好地近似$\rangle_\mathfrak{z}$。

我们注意到，$d^2E(\omega_0)$ 在 $T^\perp_{\omega_0}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 上是一致定的，因为 $T_{\omega_0}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 与相应雅可比算子 L_{ω_0} 的核重合：$\Gamma(\omega_0^* TN) \to \Gamma(\omega_0^* TN)$，并且该自伴 Fredholm 算子的特征值趋于无穷。由于 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 是一个包含在 ω_0 的小 C^k 邻域内的有限维流形，我们便可利用雅可比算子的连续性，推得对于 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 的一般元素，类似的结论同样成立（只要将 $\sigma > 0$ 取得足够小）。

也就是说，我们可以利用存在 $c > 0$ 这一事实：对于任意 $\hat{\mathfrak{z}} \in \mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 以及任意满足 $\|\hat{w}\|_\pi = 1$ 的 $\hat{w} \in T^\perp_{\hat{\mathfrak{z}}}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$，存在一个单位元 $\hat{v} \in T^\perp_{\hat{\mathfrak{z}}}\mathcal{H}(\omega_0)$，使得

$$d^2E(\hat{\mathfrak{z}})(\hat{w}, \hat{v}) \geq c. \tag{6.7}$$

在下面的证明中，我们还将用到这样一点：由仅对U_0和 q_0作变分所诱导的 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{Z}_0$ 中，可由相应的$\mathfrak{z}_\varepsilon = U_0^{(\varepsilon)} \circ q_0^{(\varepsilon)}$ 在 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$中的变分很好地逼近。更准确地说，我们很容易验证

$$\| |\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}}|^2 + |\partial_\varepsilon(\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}})|^2 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}_{r_0^2})} + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}})|^2 + |\nabla \partial_\varepsilon(\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}})|^2 = o(1) \tag{6.8}$$

这里以及下文中，若通过取 $\bar{\mu}$ 充分大、σ 和 σ_1充分小，可以使某个量小于任意给定的正数，我们就记该量为 $o(1)$。这里我们利用 $|1 - \phi_\mu| \lesssim \log f_\mu \log \mu = o(1)$（对$|z| \geq r_0^2 = {f_\mu}^{-2}$ 成立）来估计 $\partial_\varepsilon(\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}})$的$L^\infty$ 范数，并注意到我们还有

$$\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}\|_{\mathfrak{z}, \mathbb{D}_{r_0}} + \|\partial_\varepsilon \hat{\mathfrak{z}}\|_{\pi, \mathbb{D}_{r_0}} = o(1) \tag{6.9}$$

其中 $\|\cdot\|_{\pi,\,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathfrak{z},\,\Omega}$ 的定义与(3.1)和(6.6)中的相同，但积分是在 Ω 上进行的。

做好这些准备后，我们现在开始证明（6.5）。

因此，设 $\mathfrak{z} \in \mathcal{Z}_0$，并设 $w \in T^\perp_{\mathfrak{z}}\mathcal{Z}$ 满足 $\|w\|_{\mathfrak{z}} = 1$。我们首先指出，(6.2) 和 (6.3) 保证 $\|w\|_{\mathfrak{z},\,A} + \||\nabla_{\mathfrak{z}}|w\|\|_{L^2(A)} = o(1)$，从而

$$d^2E(\mathfrak{z})(w, w) \geq \|w\|^2_{\mathfrak{z}} - C\|w\|^2_{\mathfrak{z}, \mathbb{R}^2 \setminus A} - o(1).$$

因此，当 $\|w\|_{\mathfrak{z},\,\mathbb{R}^2\setminus A}$ 足够小时，断言 (6.5) 显然成立（对于 $v = w$）；由对称性，不妨假设 $\|w\|^2_{\mathfrak{z},\,\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{r_0}} \geq c_4$，其中常数 $c_4 > 0$ 足够小但固定。

给定这样的 w，我们首先要构造一个 $\hat{w} \in T^\perp_{\hat{\mathfrak{z}}}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$，使得

$$\|w - \hat{w}\|_{\pi, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}_{s_0}} = o(1) \text{ while } \|\hat{w}\|_{\pi, \mathbb{D}_{2s_0}} = o(1) \text{ and } \|w\|_{\mathbb{D}_{2s_0} \setminus \mathbb{D}_{s_0/2}} = o(1) \tag{6.10}$$

对某个 $s_0 \in [2r_0^2, r_0]$ 成立。为此，我们先构造一个在 $\Omega_1 = \{z$ 上为零的函数 $w_1 : |z| \leq \mu^{-\frac{1}{2}}\}$，并且存在一个半径 $s_0 \in [2r_0^2, r_0]$，使得

$$w_1 \equiv w \text{ on } \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}_{s_0} \text{ while } \|w_1\|_{\mathfrak{z}, \mathbb{D}_{2s_0}} = o(1).$$

为得到这样的函数 w_1，我们利用 $\mathbb{D}_{r_0} \setminus \mathbb{D}_{r_0^2}$ 包含 $J \gtrsim \log(r_0^{-1}) = \log f_\mu$ 个形如 $\mathbb{D}_{4r} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{4}r}$ 的不相交环带，从中选取 $s_0 \in [2r_0^2, \frac{1}{2}r_0]$，使得

$$\int_{\mathbb{D}_{2s_0} \setminus \mathbb{D}_{s_0/2}} |\nabla w|^2 dx + \int_{S^1} |\partial_\theta w(s_0 e^{i\theta})|^2 \lesssim (\log f_\mu)^{-1} = o(1). \tag{6.11}$$

在 $\mathbb{D}_{s_0} \setminus \mathbb{D}_{s_0/2}$ 上，我们接着定义 w_1，使用 $w|_{\partial\mathbb{D}_{s_0}}$ 与该圆上的平均值 $\bar{w}$ 之间的标准插值。根据（6.1），该值有界于 $|\bar{w}| \lesssim (\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}$。结合

（6.11）以及 $\int_A \rho_{\mathfrak{z}}^2 \lesssim {f_\mu}^{-2}$，这确保了$\|w_1\|_{\mathfrak{z},\ \mathbb{D}_{2s_0}\setminus\mathbb{D}_{s_0^2}} = o(1)$。在 $\mathbb{D}_{s_0/2}\setminus\mathbb{D}_{\mu^{-\frac{1}{2}}}$上，我们可以选取 w_1 作为在 0 与 $\bar{w}$ 之间过渡的调和函数，并注意到该映射的能量为 $O(\frac{\log f_\mu}{\log \mu}) = o(1)$，加权 L^2范数为 $O((\log f_\mu)^{\frac{1}{2}} {f_\mu}^{-1}) = o(1)$。

给定这样的函数 w_1，我们于是令 $w_2 := P_{\hat{\mathfrak{z}}} w_1$，从而得到沿$\hat{\mathfrak{z}}$的向量场。注意到（6.8）保证了$\|w_1 - w_2\|_{\pi,\ \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{s_0}} \sim \|w_1 - w_2\|_{\mathfrak{z},\ \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{s_0}} = o(1)$，并且我们仍有$\|w_2\|_{\mathfrak{z},\ \mathbb{D}_{s_0}} = o(1)$。

给定 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 中的一个变分，且 $\|\partial_\varepsilon \hat{\mathfrak{z}}\|_\pi = 1$，因此我们可以考虑 $\mathfrak{z}_\varepsilon$ 的相应变分，该变分 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中，并使用（6.8）和（6.9），以及 $w \in P_{\hat{\mathfrak{z}}}^{\perp}\mathcal{Z}$ 来得到

$$|\langle w_2, \partial_\varepsilon \hat{\mathfrak{z}}\rangle_\pi| = |\langle w, \partial_\varepsilon \mathfrak{z}\rangle_{\mathfrak{z},\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{s_0}}| + o(1) \le |\langle w, \partial_\varepsilon \mathfrak{z}\rangle_{\mathfrak{z}}| + o(1) = o(1).$$

因此我们推得 $\|P^{T_{\hat{\mathfrak{z}}}\hat{\mathcal{Z}}} w_2\|_\pi = o(1)$，从而 $w := P^{T_{\hat{\mathfrak{z}}}^{\perp}\hat{\mathcal{Z}}} w_2$满足（6.10）.

由于 $\|\hat{w}\|_\pi^2 \ge c_4 - o(1)$ 与零点保持有界距离，因此我们可以将（6.7）应用于得到一个向量场 $\hat{v} \in T_{\hat{\mathfrak{z}}}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$，满足 $\|\hat{v}\|_\pi \lesssim 1$，从而

$$d^2E(\hat{\mathfrak{z}})(\hat{w},\hat{v}) \ge 1 \tag{6.12}$$

并且，我们将通过修改这个向量场 $\hat{v}$，得到所需的 $T_{\mathfrak{z}}^{\perp}\mathcal{Z}$ 中的元素 v。

为此，我们重复上面的论证，得到一个 v_1，满足

$$v_1 \equiv \hat{v} \text{ on } \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0},\quad v_1 \equiv 0 \text{ on } \mathbb{D}_{\mu^{-\frac{1}{2}}},\quad \|v_1\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{2s_0}\setminus\mathbb{D}_{s_0/2}} \lesssim 1 \text{ and } \|v_1\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{s_0/2}} = o(1), \tag{6.13}$$

不过 t 我们使用半径$\hat{s}_0 \in [s_0, 2s_0]$，使得 $\int_{S^1} |\partial_\theta \hat{v}(\hat{s}_0 e^{i\theta})|^2 \lesssim 1$，而不是使用 s_0。

由于 $\hat{v}$ 沿着 N 在 $\hat{\mathfrak{z}}$ 上的支集包含于 Ω_0 其中 $\rho_{\mathfrak{z}} \sim |\nabla\pi|$ 我们可以结合（6.8）和（6.13），得到

$$\|P_{\mathfrak{z}} v_1 - v_1\|_{\mathfrak{z}} \lesssim \|v_1\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}s_0/2} + \|\mathfrak{z} - \hat{\mathfrak{z}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{r_0^2})}\|v_1\|_{\mathfrak{z}} + \||\nabla\mathfrak{z} - \nabla\hat{\mathfrak{z}}|v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{r_0^2})} = o(1)$$

其中，我们利用 $|\nabla\mathfrak{z} - \nabla\hat{\mathfrak{z}}| \lesssim o(1)(\rho_{\mathfrak{z}} + |\nabla\phi_\mu|)$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{r_0^2}$ 上成立这一点来处理最后一项。

由于 $\hat{v}$ 与 $T_{\hat{\mathfrak{z}}}\mathcal{H}^\sigma(\omega_0)$ 正交，我们可以将此界与 (6.8) 和 (6.9) 结合，得到对于 $\mathcal{Z}$ 中所有仅由 U_0 和 q_0 的变分所诱导的变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，都有 $\langle \partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon, P_{\mathfrak{z}} v_1\rangle_{\mathfrak{z}} = o(1)$。反过来，对 U_1 和 q_1 进行变分会产生满足 $\|\partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon\|_{\mathfrak{z},\Omega_0} = o(1)$ 的变分 $\mathfrak{z}_\varepsilon$，因此我们显然知道 $\langle \partial_\varepsilon \mathfrak{z}_\varepsilon, P_{\mathfrak{z}} v_1\rangle_{\mathfrak{z}} = o(1)$。

总而言之，这保证了 $v := P^{T_{\mathfrak{z}}^{\perp}\mathcal{Z}}(P_{\mathfrak{z}} v_1) \in T_{\mathfrak{z}}^{\perp}\mathcal{Z}$ 满足

$$\|v\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{s_0/2}} = o(1),\quad \|v\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{2s_0}\setminus\mathbb{D}_{s_0/2}} \lesssim 1 \text{ and } \|v - \hat{v}\|_{\mathfrak{z},\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0}} = o(1).$$

现在，为简便起见，我们将 $II_{\mathfrak{z}}(w,v) = \nabla w \nabla v - A(\mathfrak{z})(\nabla\mathfrak{z},\nabla\mathfrak{z})A(\mathfrak{z})(w,v)$ 记作公式 (3.2) 中出现的被积函数，并注意到对于每个 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，都有 $\Omega\ |II_{\mathfrak{z}}(w,v)| \lesssim \|w\|_{\mathfrak{z},\Omega}\|v\|_{\mathfrak{z},\Omega} + o(1)$，其中 $o(1)$ 项来自 $\nabla\gamma$ 对 $\nabla\mathfrak{z}$ 的贡献，参见 (6.3)。因此我们得到

$$\begin{aligned}
d^2E(\mathfrak{z})(v,w) &\ge \int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0}} II_{\mathfrak{z}}(w,v) - C\big[\|v\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{s_0/2}} + \|w\|_{\mathfrak{z},\mathbb{D}_{2s_0}\setminus\mathbb{D}_{s_0/2}}\big] - o(1)\\
&\ge \int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0}} II_{\hat{\mathfrak{z}}}(\hat{w},\hat{v}) - C\big[\|v-\hat{v}\|_{\mathfrak{z},\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0}} + \|w-\hat{w}\|_{\mathfrak{z},\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0}} + \|\mathfrak{z}-\hat{\mathfrak{z}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{D}_{2s_0})}\big] - o(1)\\
&\ge \int_{\mathbb{R}^2} II_{\hat{\mathfrak{z}}}(\hat{w},\hat{v}) - C\|\hat{w}\|_{\pi,\mathbb{D}_{2s_0}} - o(1)\\
&\ge d^2E(\hat{\mathfrak{z}})(\hat{w},\hat{v}) - o(1) \ge 1 - o(1) \ge \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立的条件是 σ 和 σ_1 足够小，且 $\bar{\mu}$ 足够大。由于 $\|v\|_{\mathfrak{z}} \lesssim 1$ 因此我们得到，对于6.5，相应的单位元满足该式$T_{\mathfrak{z}}^{\perp}\mathcal{Z}$ 这就完成了引理3.1的证明。

6.2. 引理 **3.2**和 **3.3** 的证明。
最后，我们转而证明引理3.2 和3.3中所述的E 的一阶变分和二阶变分的范数估计。为简化记号，我们简记

$$R_3 := \|\beta\|\bar{\nu}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta}{f_\mu \log\mu} \tag{6.14}$$

and

$$R_4 := (\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\bar{\nu}\log(\mu)^{\frac{1}{2}} + \eta_{rat}\|\beta\|\mu^{-j^*}\log(\mu)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{(\delta+\eta_0)(\log f_\mu)^{\frac{1}{2}}}{\log\mu} \tag{6.15}$$

并回顾一下，为证明引理 3.2 ，我们需要证明

$$|dE(\mathfrak{z})(w)| = |\int \tau(\mathfrak{z})w| \lesssim R_3 + \mathcal{T} \text{ for every } w \text{ with } \|w\|_{\mathfrak{z}} = 1$$

而引理 3.3 断言

$$|d^2E(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon\mathfrak{z}, w)| = |\int \partial_\varepsilon(\tau(\mathfrak{z}))w| \lesssim R_4 + \mathcal{T} + \eta_{\mathcal{T}} \text{ for every } w \in \Gamma(\mathfrak{z}^*TN) \text{ with } \|w\|_{\mathfrak{z}} = 1.$$

由对称性，只需对 Ω 上相应的积分进行估计$_1$ 其中 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ +误差项φ 对于 $\hat{}\mathfrak{z}_1 = \pi_N(v_1)$ 以及误差项φ，其由（5.55）定义，且支撑在 A上。

为证明这两个引理，我们将 $\mathfrak{z}$ 在 Ω_1 上的张力写作

$$\tau(\mathfrak{z}) = P_{\mathfrak{z}}(\Delta\mathfrak{z}_1 + \Delta\mathrm{err}_\varphi) = \tau(\mathfrak{z}_1) + (P_{\mathfrak{z}} - P_{\mathfrak{z}_1})(\Delta\mathfrak{z}_1) + P_{\mathfrak{z}}(\Delta\mathrm{err}_\varphi), \tag{6.16}$$

并利用 $\Delta j_1 = 0$ 来写出

$$\tau(\mathfrak{z}_1) = P_{\mathfrak{z}_1}(d\pi_N(v_1)\Delta v_1) + P_{\mathfrak{z}_1}(d^2\pi_N(v_1)(\nabla v_1, \nabla v_1)) = T^\tau_{u_1} + T^A_{u_1} + T_\gamma + T_\pi \tag{6.17}$$

其中，我们将 Δu_1 的贡献拆分为以下几项

$$T^\tau_{u_1} := P_{\mathfrak{z}_1}(d\pi_N(v_1)(\tau(u_1)) \text{ and } T^A_{u_1} := -P_{\mathfrak{z}_1}(d\pi_N(v_1))(A(u_1)(\nabla u_1, \nabla u_1))) \tag{6.18}$$

并简记为

$$T_\gamma := P_{\mathfrak{z}_1}(\Delta\gamma) \text{ and } T_\pi := P_{\mathfrak{z}_1}(d^2\pi_N(v_1)(\nabla v_1, \nabla v_1)). \tag{6.19}$$

在分析所得积分时，我们将利用

$$|\mathfrak{z}_1 - v_1| \le |u_1 - v_1| \le |\tilde{\gamma}_{u_1}| + |j_1| \lesssim \delta\phi_\mu + \|\beta\||\hat{q}_0| \tag{6.20}$$

这要归功于（5.47）、（5.48）和（5.7），它们保证了

$$\||v_1 - \mathfrak{z}_1|\rho_q\|_{L^2(\Omega_1)} \le \||u_1 - v_1|\rho_q\|_{L^2(\Omega_1)} \lesssim R_3. \tag{6.21}$$

同样，由于我们可以估计

$$\begin{aligned} |\partial_\varepsilon(u_1 - v_1)| &\lesssim |\partial_\varepsilon j_1| + |\partial_\varepsilon\tilde{\gamma}_{u_1}| + |\tilde{\gamma}_{u_1}| + |j_1| \\ &\lesssim (\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)|\hat{q}_0| + \|\beta\||\partial_\varepsilon\hat{q}_0| + (\delta+\eta_0)\phi_\mu + \delta(\log\mu)^{-1}\mathbb{I}_A, \end{aligned} \tag{6.22}$$

另请比较（5.16），我们可以结合（5.47）、（5.48）和（5.7），再利用（5.49）可知

$$\||\partial_\varepsilon(u_1 - v_1)|\rho_q\|_{L^2} \lesssim R_4. \tag{6.23}$$

为了分析涉及 γ 的项，我们改写为 $v_1 = \gamma + \tilde{u}_1 + j_1$，从而可知

$$|v_1 - \gamma| + |\partial_\varepsilon(v_1 - \gamma)| \lesssim |\hat{q}_0| + |\hat{q}_{1,\mu}| + |\partial_\varepsilon\hat{q}_0| + |\partial_\varepsilon\hat{q}_{1,\mu}| \lesssim |z| + (1+\mu^2|z|^2)^{-1}$$

因此也可得

$$\||v_1 - \gamma|\nabla\gamma\|_{L^2} + \||\partial_\varepsilon(v_1 - \gamma)|\nabla\gamma\|_{L^2} \le \tfrac{\delta}{f_\mu\log\mu} \lesssim R_3. \tag{6.24}$$

最后，由于 $|P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1 - \nabla v_1| \lesssim |u_1 - \mathfrak{z}_1|\rho_q + \|\beta\||\nabla\hat{}q_0| + |v_1 - \gamma||\nabla\gamma|$，我们还可得

$$\|P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1 - \nabla v_1\|_{L^2} \lesssim R_3. \tag{6.25}$$

有了这些估计，我们现在可以证明，$dE(\mathfrak{z})(w)$ 的所有贡献都受到 $R_3 + \mathcal{T}$ 的控制，而 $d^2E(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon\mathfrak{z}, w)$ 的所有贡献都受到 $R_4 + \mathcal{T} + \eta_{\mathcal{T}}$ 的控制。

首先，我们利用 $|\tau(u_1)| \lesssim \mathcal{T}\rho_q^2 \lesssim \mathcal{T}\rho_{\mathfrak{z}}^2$ 来说明

$$\int_{\Omega_1} |T^{\tau}_{u_1} w| \lesssim \mathcal{T}\|w\|_{\mathfrak{z}} = \mathcal{T}$$

而 我们可以利用 $|\partial_\varepsilon T^{\tau}_{u_1}| \lesssim |\tau(u_1)| + |\partial_\varepsilon \tau(u_1)| \lesssim \mathcal{T}\rho_q\rho_{\mathfrak{z}} + \eta_\tau \rho_q^2 \lesssim (\mathcal{T}+\eta_\tau)\rho_{\mathfrak{z}}^2$来界定

$$|\int T^{\tau}_{u_1} w| \lesssim \mathcal{T} + \eta_\tau.$$

由于 $A(u_1)(\nabla u_1, \nabla u_1) \in T^{\perp}_{u_1} N$，我们于是可以写成

$$T^{A}_{u_1} = P_{\mathfrak{z}_1}\big((d\pi_N(u_1) - d\pi_N(v_1))(A(u_1)(\nabla u_1, \nabla u_1))\big) \tag{6.26}$$

因此利用（6.21）可得到界定

$$\int_{\Omega_1} |T_{u_1} w| \lesssim \||u_1 - z_1|\rho_q\|_{L^2} \lesssim R_3.$$

由（6.26）可知 $|\partial_\varepsilon T^{A}_{u_1}| \lesssim \big[|u_1 - v_1| + |\partial_\varepsilon (u_1 - v_1)|\big]\rho_q \cdot \rho_{\mathfrak{z}}$，将其与（6.21）和（6.23）结合可知同样有

$$|\int \partial_\varepsilon T^{A}_{u_1} w| \lesssim \||u_1 - v_1|\rho_q\|_{L^2} + \||\partial_\varepsilon(u_1 - v_1)|\rho_q\|_{L^2} \lesssim R_3 + R_4 \lesssim R_4.$$

同样地，我们可以写成

$$T_\gamma = P_{\mathfrak{z}_1}((d\pi_N(\gamma) - d\pi_N(v_1))(A(\gamma)(\nabla\gamma, \nabla\gamma))) + P_{\mathfrak{z}_1}(d\pi_N(v_1)\tau(\gamma))) \tag{6.27}$$

并利用（5.11）、（6.3）、（6.4）和（6.24）可知

$$|\int T_\gamma w| \le \delta\||\gamma - v_1||\nabla\gamma|\|_{L^2} + \delta c_\mu \int_{A^*} |w| r^{-2} \lesssim \tfrac{\delta^2}{f_\mu \log\mu} + \tfrac{\delta(\log f_\mu)^{\frac12}}{\log\mu} \lesssim R_3. \tag{6.28}$$

As

$$|\partial_\varepsilon \tau(\gamma)| \lesssim (\eta_0 + \delta^2 c_\mu)|\Delta\phi_\mu| + \delta|\partial_\varepsilon \Delta\phi_\mu| \lesssim (\eta_0 + \delta) c_\mu r^{-2}\mathbb{I}^{A^*} \tag{6.29}$$

此外，利用（6.3）、（6.4）、（6.24）和（5.11）可知

$$|\int \partial_\varepsilon T_\gamma w| \lesssim \||\gamma - v_1||\nabla\gamma|)\|_{L^2} + \||\partial_\varepsilon(\gamma - v_1)||\nabla\gamma|\|_{L^2} + \int |\tau(\gamma)||w| + |\partial_\varepsilon\tau(\gamma)||w|$$

$$\lesssim \tfrac{\delta+\eta_0}{(\log\mu) f_\mu} + \tfrac{\delta+\eta_0}{(\log\mu)} \int_{A^*} r^{-2}|w| \lesssim \tfrac{\delta+\eta_0}{(\log\mu)} (\log f_\mu)^{\frac12} \lesssim R_4$$

其中倒数第二步由（6.4）得出。

最后，我们利用（5.41）将其写为

$$T_\pi = P_{\mathfrak{z}_1}(d^2\pi_N(v_1)(\nabla v_1, \nabla v_1) - d^2\pi_N(\mathfrak{z}_1)(P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1, P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1)). \tag{6.30}$$

由（6.3）、（6.21）、（6.24）和（6.25）还可得

$$\int |T_\pi w| \lesssim \||v_1 - \mathfrak{z}_1|\rho_q\|_{L^2} + \||v_1 - \mathfrak{z}_1|\nabla\gamma\|_{L^2} + \|P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1 - \nabla v_q\|_{L^2} \lesssim R_3.$$

由（6.30）可知

$$|\int \partial_\varepsilon T_\pi w| \lesssim \||v_1 - \mathfrak{z}_1|\nabla v_1\|_{L^2} + \||\partial_\varepsilon(v_1 - \mathfrak{z}_1)|\nabla v_1\|_{L^2} + \|P_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1 - \nabla v_1\|_{L^2} + \int |\partial_\varepsilon(P^{\perp}_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1)||\nabla v_1||w|.$$

由于我们可以写成 $P^{\perp}_{\mathfrak{z}_1}\nabla v_1 = (P^{\perp}_{\mathfrak{z}_1} - P^{\perp}_{u_1})(\nabla u_1) + (P^{\perp}_{\mathfrak{z}_1} - P^{\perp}_{\gamma})(\nabla\gamma) + (P^{\perp}_{\mathfrak{z}_1} - P^{\perp}_{U_1(0)})\nabla j_1$，因此我们也得到 $|\int \partial_\varepsilon T_\pi w| \lesssim R_4$。

总而言之，我们由此得到

$$\int_{\Omega_1} |\tau(\mathfrak{z}_1) w| \lesssim R_3 + \mathcal{T} \text{ and } \int_{\Omega_1} |\partial_\varepsilon \tau(\mathfrak{z}_1) w| \lesssim R_4 + \mathcal{T} + \eta_{\mathcal{T}}.$$

为了完成引理 3.2 和 3.3 的证明，还需对式（6.16）中最后两个 $\hat{}$ 项的贡献进行估计。这些项的支集位于 A 其中 $\rho_{\mathfrak{z}} \lesssim 1$， $\tau(\gamma) = 0$ 因此

$$|\Delta_{\mathfrak{z}1}| \lesssim \mu(\bar{\nu} + \delta^2(\log\mu)^{-2}) \tag{6.31}$$

因此特别是 $|\Delta_{\mathfrak{z}1}| \lesssim 1 + \frac{\delta^2}{(\log\mu)^2}\mu$。结合（5.56）和（6.4）可得

$$|\int (P_{\mathfrak{z}} - P_{\mathfrak{z}1})(\Delta_{\mathfrak{z}1})w| \lesssim \|\beta\|\bar{\nu}\big[1 + \tfrac{\delta^2}{(\log\mu)^2}\mu\big]\|w\|_{L^1(\hat{A})} \lesssim \|\beta\|\bar{\nu}\mu^{-1}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{\delta^2}{(\log\mu)^{3/2}}$$

只产生低阶贡献，而（5.56）和（6.4）还使我们能够界定

$$\int |\Delta\mathrm{err}_\varphi||w| \lesssim \|\beta\|\bar{\nu}\int_{\hat{A}} |w| \lesssim \|\beta\|\bar{\nu}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} \lesssim R_3.$$

这就完成了引理 3.2 的证明

将（6.31）与（5.58）结合，可得到 $|\partial_\varepsilon \mathrm{err}_\varphi||\Delta_{\mathfrak{z}1}| \lesssim R_4$ 的逐点界；而将$|\partial_\varepsilon\Delta_{\mathfrak{z}1}| \lesssim \mu$（$\bar{\nu} + \eta_{rat}\mu^{-j^*}$）$+ \mu\frac{\delta^2+\delta\eta_0}{(\log\mu)^2}$与（5.56）结合，还可确保 $|\mathrm{err}_\varphi||\partial_\varepsilon\Delta_{\mathfrak{z}1}| \lesssim R_4$ 在 $\hat{}A$ 上成立。结合（6.4），因此可得

$$|\int \partial_\varepsilon((P_{\mathfrak{z}1} - P_{\mathfrak{z}})\Delta_{\mathfrak{z}1})w| \lesssim R_4\mu^{-1}(\log\mu)^{\frac{1}{2}} \ll R_4$$

只对 $d^2E(\mathfrak{z})(\partial_\varepsilon\mathfrak{z}, w)$ 产生低阶贡献。

最后，(5.56)、(5.59) 和 (6.4) 还允许我们对其进行估计

$$\begin{aligned}\int |\partial_\varepsilon(P_{\mathfrak{z}}\Delta\mathrm{err}_\varphi)||w| &\lesssim (\|\partial_\varepsilon\Delta\mathrm{err}_\varphi\|_{L^\infty(\hat{A})} + \|\Delta\mathrm{err}_\varphi\|_{L^\infty(\hat{A})})\|w\|_{L^1(\hat{A})} \\ &\lesssim \big[(\|\beta\| + \|\partial_\varepsilon\beta\|)\bar{\nu} + \eta_{rat}\|\beta\|\mu^{-j^*}\big](\log\mu)^{\frac{1}{2}} \lesssim R_4,\end{aligned} \tag{6.32}$$

由此完成引理 3.3的证明。

References

[1] 丁伟岳和田刚， *Energy identity for a class of approximate harmonic maps from surfaces.* 《几何分析与几何学》3（1995），543–554。[2] R. D. Gulliver、R. Osserman 和 H. L. Royden, *A theory of branched immersions of surfaces*, 美国数学杂志 95（1973），750–812。[3] R. D. Gulliver 和 B. White, *The rate of convergence of a harmonic map at a singular point*, 《数学年刊》283（1989），第4期，539–549。[4] 林芳华和王长友， *Energy identity of harmonic map flows from surfaces at finite singular time.* 《变分法与偏微分方程》6（1998），369–380。[5] 林芳华， *Mapping problems, fundamental groups and defect measures*, 《数学学报（英文版）》15（1999），25–52。[6] Q. Liu 和 Y. Yang, *Rigidity of the harmonic map heat flow from the sphere to compact Kähler manifolds*, 《Arkiv för Matematik》48（2010），第1期，121–130。[7] A. Malchiodi、M. Rupflin 和 B. Sharp, *Lojasiewicz inequalities near simple bubble trees*, 预印本（2020）[8] J.D. Moore, *Bumpy metrics and closed parametrized minimal surfaces in Riemannian manifolds*, 《美国数学会汇刊》358（2006），第12期，5193–5256。[9] J.D. Moore, *Introduction to Global Analysis: Minimal Surfaces in Riemannian Manifolds*, 《美国数学会研究生数学丛书》第187卷。美国数学会，普罗维登斯（2017）。[10] J. Qing 和田刚, *Bubbling of the heat flows for harmonic maps from surfaces.* 《纯粹与应用数学通讯》50（1997），295–310。[11] M. Rupflin, *Lojasiewicz inequalities for almost harmonic maps near simple bubble trees*, arXiv:2101.05527。[12] J. Sacks 和 K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, 《数学年刊》113（1981），1–24。[13] L. Simon, *Asymptotics for a Class of Non-Linear Evolution Equations with Applications to Geometric Problems.* **118** 1983 525 571 《数学年刊》（）–。[14] M. Struwe, *On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces.* 《瑞士数学评论》60（1985），558–581。[15] P.M. Topping, *Rigidity in the harmonic map heat flow.* 《微分几何杂志》45（1997），593–610。

arXiv:org/abs/2007.07017

[16] P. M, Topping,
Repulsion and quantization in almost-harmonic maps and asymptotics of the harmonic , 《数学
map flow **159** 2004 465 534
年刊》 （） ， –。[17] P.M. Topping,
Bubbling of almost-harmonic maps between 2-spheres at points of zero energy density., 《黎曼几何中的变分问题: 泡、扫描与几何流》，Baird 等编，非线性微分方程及其应用进展，第59卷（2004），33–42。[18] B. White,
Nonunique tangent maps at isolated singularities of harmonic maps. 《美国数学会公报》26（1992），125–130。
[19] B. White, *The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics*, 《印第安纳大学数学杂志》40（1991），第1期，161–200。[20] B. White, *On the bumpy metrics theorem for minimal submanifolds.* 《美国数学杂志》139（2017），第4期，1149–1155。[21] B. White,
Generic transversality of minimal submanifolds and generic regularity of two-dimensional area-minimizing integral currents, arXiv:1901.05148

M. Rupflin：牛津大学数学研究所，牛津 OX2 6GG，英国
melanie.rupflin@maths.ox.ac.uk