arXiv:2303.00392v2 [quant-ph] 2 Aug 2023

克服噪声量子计量学禁戒定理的弗洛凯工程

Si-Yuan Bai[1] 和 Jun-Hong An[1],

[1]*Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of MoE, Lanzhou Center for Theoretical Physics, and Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu Province, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

借助量子资源，量子计量学能够实现比经典极限更高精度的物理量测量，有望推动许多革命性技术的发展。然而，噪声诱导退相干会迫使其优势消失，这被称为噪声量子计量学禁戒定理，并限制了其应用。我们提出了一种通过弗洛凯工程克服该不可能性定理的方案。研究发现，在拉姆齐光谱学的原子上施加周期性驱动后，只要由每个受驱动原子及其局域噪声组成的系统形成Floquet束缚态，以量子 Fisher 信息表征的原子频率测量终极灵敏度就会随着编码时间恢复理想的 t^2 标度。结合最优控制，该机制还使我们能够恢复随原子数 N变化的理想海森堡极限标度。我们的结果为规避噪声量子计量学禁戒定理并实现高精度测量提供了一种有效途径。

引言——以实现对物理量的精确测量为目标，计量学在发展高度先进的技术中发挥着至关重要的作用。受经典统计学限制，经典物理学所能达到的计量精度受到散粒噪声极限（SNL）的约束$N^{-1/2}$，其中 N 表示测量中所使用资源的数量。量子计量学的出现揭示了量子效应可以突破散粒噪声极限 [1–12]。研究发现，通过利用量子探针的纠缠，可以在拉姆齐光谱学中实现精度达到海森堡极限（HL）的频率测量 N^{-1}。量子计量学在下一代陀螺仪 [13–16], 原子钟[17–21], 磁力计 [22–24], 和重力测量 [25]等领域具有广泛应用。

量子计量学的实现受到噪声诱导退相干在其稳定性和可扩展性方面所带来挑战的影响 [26–32]。研究发现，马尔可夫退相位噪声会迫使拉姆齐光谱学中的海森堡极限不仅在最佳编码时间下退回标准量子极限，而且还会在长时间条件下会发散 [33]。由于这一结论适用于任意马尔可夫噪声 [34–40], ，这两种破坏性后果被称为噪声量子计量学禁戒定理 [41, 42]。进一步研究表明，退相干噪声的非马尔可夫效应可在最优时间[42–47]将海森堡极限降低至芝诺极限 $N^{-3/4}$ 。人们提出了许多方法来恢复海森堡极限，例如自适应 [17, 48] 和无损测量 [49]、关联退相干 [50]、纯化 [51], 、纠错 [52–58], 以及动态控制 [59, 60], 。尽管这些方法部分恢复了量子优势随 N变化的标度，但精度在长时间条件下发散的命运并未改变。文献 [16, 61],提出了一种解决发散问题的机制，但对于任意 N，仍无法恢复海森堡极限。因此，如何同时恢复海森堡极限并克服精度随时间发散的问题，仍是一个悬而未决的问题。

受弗洛凯工程已成为量子控制中一种多功能工具的进展启发 [62–65] ，并且

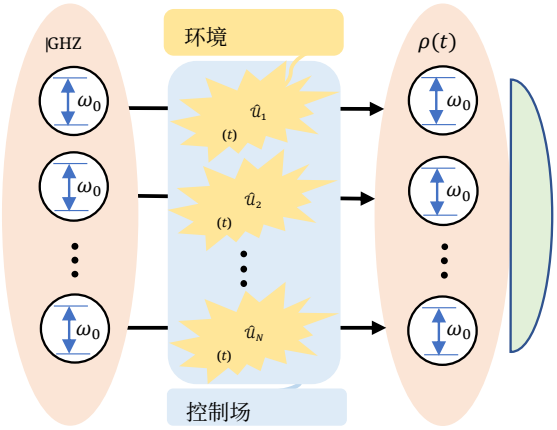

图 1. 周期控制下噪声量子计量学的示意图。$\hat{}$ $\mathcal{U}_j(t)$ 是第j个受周期驱动、与其环境相互作用的原子的演化算符。

能够产生新颖量子相 [66–68], （综述参见文献 [69], ），我们提出了一种通过弗洛凯工程克服噪声量子计量学禁戒定理的方案。我们发现，在局域耗散噪声下对基于拉姆齐光谱的量子计量学中的原子施加周期驱动后，只要由每个受驱动原子及其局域噪声构成的系统的准能谱中形成Floquet束缚态（FBS），就能避免长时间条件下的精度发散。进一步利用这一机制，通过优化设计驱动振幅，我们可以完全恢复海森堡极限（HL）。同时恢复精度的理想标度与 N 和 t ，我们的结果为在实践中实现量子计量学铺平了道路。

噪声量子计量学。—量子计量学利用探针的量子资源，对物理量进行高精度测量。为了测量系统的某个物理量 θ ，我们首先将探针制备为状态 ρ_{in} ，并将其与系统耦合，以便将 θ 编码到探针态 ρ_θ 中。随后，我们测量探针的某个可观测量

$\hat{O}$，并根据测量结果推断 θ 的值。不可避免的误差使我们无法精确估计 θ。根据量子参数估计理论 [70, 71]，，通过优化所有可能的可观测量 O，θ 的终极精度受量子 Cramér-Rao 界 $\delta\theta = 1/\sqrt{\upsilon\mathcal{F}_\theta}$ 的限制，其中 $\delta\theta$ 是估计值的标准误差，υ 是重复测量的次数，而 $\mathcal{F}_\theta = \mathrm{Tr}(\hat{L}_\theta^2\rho_\theta)$ 是量子 Fisher 信息（QFI），用于表征从 ρ_θ 中可提取的关于 θ 的最大信息量。L_θ 称为对称对数 $\hat{}$ 导数，其定义为 $\partial_\theta\rho(\theta) = (L_\theta\rho_\theta + \rho_\theta L_\theta)/2$。如果 $\delta\theta \propto N^{-1/2}$，其中 N 是所用资源的数量，那么这种精度称为标准量子极限（SNL），这是任何经典测量都能达到的极限。利用量子协议可以突破标准量子极限。

在测量原子频率 ω_0 [33] 的拉姆齐光谱学实验中，人们选择 N 原子本身作为探针，并将其制备为 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 型纠缠态 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle = (|g\rangle^{\otimes N} + |e\rangle^{\otimes N})/\sqrt{2}$，其中 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 分别是原子的基态和激发态。随后，由第 j 个原子哈密顿量 $\hat{H}_{0,j} = \omega_0\hat{\sigma}_j^\dagger\hat{\sigma}_j$ 支配的自由演化（其中 $\hbar = 1$ 且 $\hat{\sigma}_j = |g_j\rangle\langle e_j|$）将 ω_0 编码到态 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\sum_j \hat{H}_{0,j}t}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ 中。由量子 Fisher 信息描述的极限精度评估为 $\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = N^2t^2$，其随 N 按海森堡极限的标度增长，并由于利用了纠缠 [18, 72, 73] 而比经典标准量子极限高出 N 倍。这展现了该计量方案的量子优势。另一个特点是，$\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 随编码时间按 t^2 的标度增长，而编码时间也可作为提高精度的资源 [74]。

在实际中，编码过程会受到耗散环境的影响，从而导致探针的能量损失和纠缠退化。编码过程由 $\hat{H} = \sum_j \hat{H}_j$ 支配，其中

$$\hat{H}_j = \hat{H}_{0,j} + \sum_k [\omega_k\hat{a}_{j,k}^\dagger\hat{a}_{j,k} + g_{j,k}(\hat{a}_{j,k}\hat{\sigma}_j^\dagger + \mathrm{H.c.})], \quad (1)$$

其中，$\hat{a}_{j,k}$ 是环境中频率为 ω_k 的第 k 个模式的湮灭算符，该环境作用于第 j 个原子；$g_{j,k}$ 是它们之间的耦合强度。耦合还可用谱密度 $J(\omega) = \sum_k |g_k|^2\delta(\omega - \omega_k)$ 描述。将总系统的动力学中环境自由度迹掉后，我们得到非马尔可夫主方程 [61]

$$\dot{\rho}(t) = \sum_{j=1}^{N}\{-i\omega(t)[\hat{\sigma}_j^\dagger\hat{\sigma}_j, \rho(t)] + \gamma(t)\check{\mathcal{L}}_j\rho(t)\}, \quad (2)$$

其中，$\check{\mathcal{L}}_j\rho(t) \equiv 2\hat{\sigma}_j\rho\hat{\sigma}_j^\dagger - \{\rho(t)\hat{\sigma}_j^\dagger\hat{\sigma}_j\}$，$\gamma(t) \equiv \mathrm{Re}[\dot{c}(t)/c(t)]$ 为耗散率，而 $\omega(t) \equiv -\mathrm{Im}[\dot{c}(t)/c(t)]$ 为重整化频率。此处，$c(t)$ 由以下积分微分方程确定

$$\dot{c}(t) + i\omega_0 c(t) + \int_0^t \nu(t-\tau)c(\tau)d\tau = 0, \quad (3)$$

其中 $\nu(x) \equiv \int_0^\infty J(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$ 是环境关联函数，且 $c(0) = 1$。在初态 $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ 下求解方程（2），我们可以根据以下公式计算相应的量子 Fisher 信息 [70, 75]

$$\mathcal{F}_{\omega_0} = \sum_{i,j}[\lambda_i^{-1}\lambda_i'^2 + 4\lambda_i\langle\lambda_i'|\lambda_i'\rangle - \frac{8\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle\lambda_i|\lambda_j'\rangle|^2], \quad (4)$$

其中，撇号表示对 ω_0 求导，且 $\rho(t) = \sum_i \lambda_i|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$。

在探针与环境之间的耦合较弱，且环境的特征时间尺度小于探针的特征时间尺度这一特殊情形下，我们可以对式（3）应用马尔可夫近似。近似解为 $c_{\mathrm{MA}}(t) = \exp\{-\kappa t - i[\omega_0 + \Delta(\omega_0)]t\}$ [76, 77]，其中 $\kappa = \pi J(\omega_0)$ 和 $\Delta(\omega_0) = \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\omega_0-\omega}d\omega$。这里，$\mathcal{P}$ 表示柯西主值。量子 Fisher 信息为 $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathrm{MA}}(t) = \frac{2N^2t^2}{1+e^{2\kappa t}-1}$。当 $N+e^{2N\kappa t}$ 时，首先，我们发现，在大条件下，当 t 时，$\frac{\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathrm{MA}}}{N} = 0.24/\kappa^2$ 达到最大值 $t_{\mathrm{opt}} = 1.11/\kappa N$。在拉姆齐光谱学中，通常会在时长 T_R 内重复测量。因此，重复次数为 $\upsilon = T_R/t_{\mathrm{opt}}$。根据量子 Cramér-Rao 界，极限精度为 $\min_t \delta\omega_0^{\mathrm{MA}} = (0.22T_RN/\kappa)^{-1/2}$，即标准量子极限 [33]。其次，我们看到 $\lim_{t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}^{\mathrm{MA}}(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}\delta\omega_0^{\mathrm{MA}}(t) = \infty$，这意味着该方案在长时间条件下失效。因此，噪声会抹去量子优势。这被称为噪声量子计量学禁戒定理 [41, 42]。

弗洛凯工程——为克服不可能性定理，我们对探针施加周期驱动 $\hat{H}_{c,j}(t) = f(t)\hat{\sigma}_j^\dagger\hat{\sigma}_j$，其中 $f(t) = \frac{A}{2}[1 - \cos(\omega_T t)]$，且 ω_T 为驱动频率。这可通过施加随时间变化的塞曼磁场 [78–81] 来实现。有趣的是，在这种情况下，主方程与方程（2）形式相同，但方程（3）变为

$$\dot{c}(t) + i[\omega_0 + f(t)]c(t) + \int_0^t d\tau\nu(t-\tau)c(\tau) = 0. \quad (5)$$

由于每个原子的动力学彼此独立，式（5）等价于对每个原子及其局域环境分别有 $c(t) = \langle e_j, \{0_k\}|\mathcal{U}_j(t)|e_j, \{0_k\}\rangle$，其中 $\mathcal{U}_j(t) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^t[\hat{H}_j + \hat{H}_{c,j}(\tau)]d\tau}$ 是演化算符，$|\{0_k\}\rangle$ 是环境真空态，$\mathcal{T}$ 是时间排序算符。根据 Floquet 定理，对于周期系统 $H_j(t) = H_j(t+T)$，其中 $T = 2\pi/\omega_T$，其 $\mathcal{U}_j(t)$ 可展开为 $\mathcal{U}_j(t) = \sum_\alpha e^{-i\epsilon_\alpha t}|u_\alpha(t)\rangle\langle u_\alpha(0)|$。这里，$\epsilon_\alpha$ 和 $|u_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t+T)\rangle$ 分别称为准能量和准定态，由 Floquet 本征方程 $[H_j(t) - i\partial_t]|u_\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha|u_\alpha(t)\rangle$ [82, 83] 确定。与环境耦合的周期驱动双能级系统的准能谱由有限宽度准能带构成，并且可能形成离散准能级，

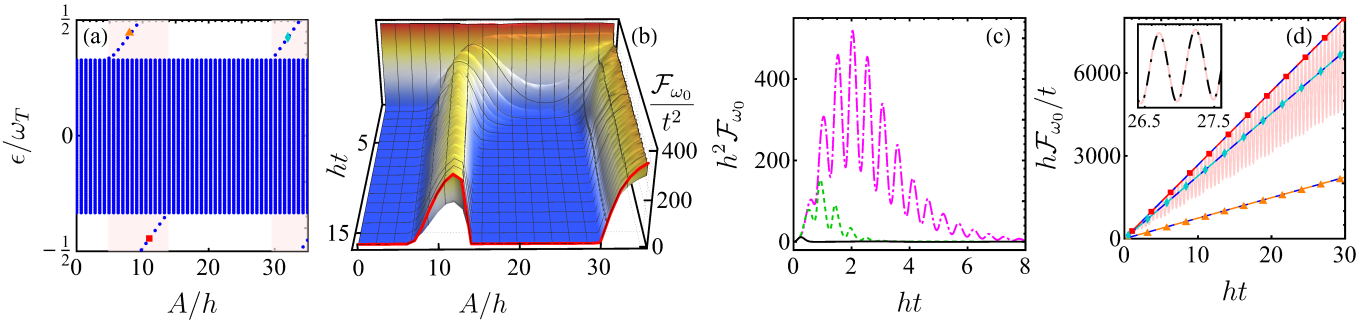

图2。（a）不同驱动振幅下的准能谱 A。阴影背景标示了存在束缚态的区域。（b）通过数值求解方程（5）得到的 $\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 在不同 A 下的演化。红线表示由方程（7）在$t=31T$处计算得到的结果。（c）在不存在束缚态时 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 的演化，其中 $A=16h$ （品红色点划线）、 $20h$ （绿色虚线）和0（黑线）。（d）存在束缚态时 $\mathcal{F}_{\omega_0}/t$ 的演化，其中 $A=11h$ （浅红线）的频闪值由红色方块标示的红线给出。橙色三角形和青色菱形标示的线分别表示 $\mathcal{F}_{\omega_0}/t$ 在 $A=8h$ 和 $32h$时的频闪值。蓝色虚线表示由方程（6）计算得到的量子 Fisher 信息，在长时间极限下与频闪值吻合。插图比较了数值结果（浅红线）与根据束缚态计算得到的结果（黑色点划线）。我们取 $\omega_T=12h$， $g=\omega_0=h$， $\omega_c=0$，以及 $N=20$。

我们称之为 Floquet束缚态。准能带中的准定态对长时间 $c(t$的贡献会因反相干涉而趋于零 [62, 63]。只有来自 Floquet束缚态的准定态能够留存。因此，在频闪动力学下，式（5）的长时间解，即 $t=nT$，为 [77]

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\sum_{l=1}^{M} Z_l e^{-i\epsilon_l^{\mathrm{b}}t} \tag{6}$$

当形成 M Floquet束缚态时，其中 $Z_l=|\langle u_l^{\mathrm{b}}(0)|e_j,\ \{0_k\}\rangle|^2$ 且 $|u_l^{\mathrm{b}}(t)\rangle$ 是准能量为 ϵ_l^{b} 的第 l 个 Floquet束缚态。

在不存在束缚态时，自然会预期 $\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 趋于零，因为 $c(t)$ 渐近趋于零。与马尔可夫结果一致，此时计量方案也会因耗散而失效。我们聚焦于形成一个束缚态的情形。在初始态为 GHZ态的条件下，将式（6）代入式（2）和（4），可得 [77]

$$\lim_{N,t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}(t)\simeq y_N(Z^2)(Nt\partial_{\omega_0}\epsilon^{\mathrm{b}})^2+\frac{N(\partial_{\omega_0}Z^2)^2}{Z^2(1-Z^2)}, \tag{7}$$

其中 $y_N(x)=2x^N/[1+x^N+(1-x)^N]$。我们发现，式（7）恢复了其理想的 t^2 标度关系，且编码时间仅使第二项产生与时间无关的偏移。此外，其与 N 的标度关系将在以下条件下恢复至海森堡极限：若能将 $y_N(Z^2)$ 改写为与 N 无关的函数。这可以通过假设 opt $Z^2=e^{-a/N}$ 来实现，由此得到 $y_N(Z^2)\backsimeq\frac{2}{e^a+1}$以及

$$\mathrm{opt}_A\lim_{N,t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}(t)=\frac{2}{e^a+1}(Nt\partial_{\omega_0}\epsilon^{\mathrm{b}})^2, \tag{8}$$

其中 a 为正常数。然后，我们利用最优控制Z^2，针对给定的 N反向设计最优驱动振幅 A 。因此，令人瞩目的是，理想的（Nt）^{2} 标度 $\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 得以恢复，并通过弗洛凯工程和最优控制克服了禁行定理。需要注意的是，我们的结果超越了[16, 61]，在后者中，尽管避免了误差随时间发散，但当 N较大时，其灵敏度甚至比标准量子极限更差。

数值结果——我们考虑环境由二维结构化储库构成，其带宽有限 $8h$，色散关系为$\omega_{\mathbf{k}}=\omega_c-2h(\cos k_x+\cos k_y)$ [84, 85]。它可以通过 $L\times L$ 耦合谐振器阵列或光学晶格实现，其中ω_c 为谐振器或晶格的本征频率， h 为最近邻跃迁率。原子-环境耦合强度为$g_{j\mathbf{k}}=ge^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}/L$。形成束缚态的先决条件是准能谱中存在带隙，这在 $\omega_T>8h$ [77]时出现。图2(a)中，每个受驱动原子及其环境组成的总系统的准能谱表明，随着驱动振幅 A增加，位于带隙中的两支束缚态准能量将谱分为两个区域：当 $A\in(0,4.9)h\cup(13.9,28.3)h$时不存在束缚态，而当 $A\in(4.9,13.9)h\cup(28.3,35.2)h$时存在一个束缚态。通过数值求解公式（5），我们获得了$\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 在不同 A [下的演化，见图2(b)]。在不存在束缚态的区域， $\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 单调衰减至零，体现了不可能性定理的破坏性影响。有趣的是，只要形成束缚态，$\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 就会趋于一个非零常数，并伴随持续存在的微小振幅振荡。图2(b)中的红线根据公式（7）绘制，表明振荡峰与频闪动力学相吻合。这证实，在长时间条件下，理想情况下 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 的 t^2标度得以恢复。对图2(c)中不存在束缚态的情形进行详细分析可见，尽管相较于无驱动情形（黑色

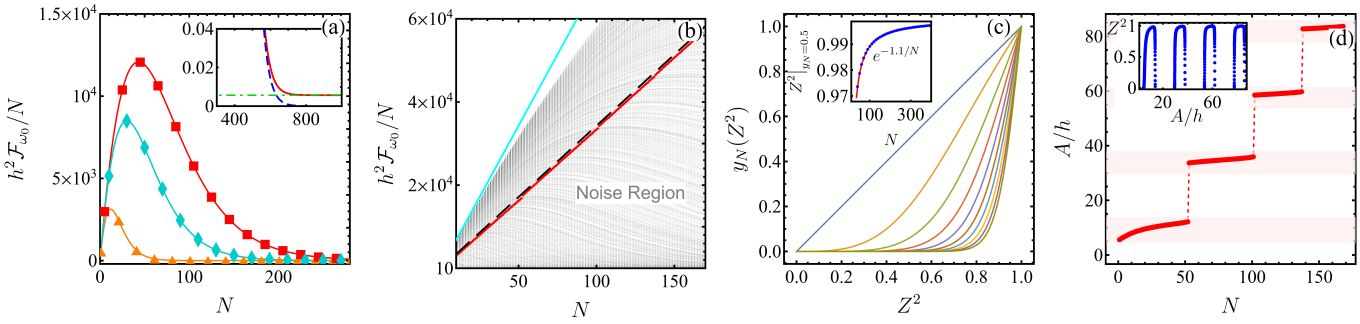

图3. $\mathcal{F}_{\omega_0}/N$ 在 $t=50T$ 处随原子数 N 变化的频闪值：(a)中 $A=8h$ （橙色三角线）、 $11h$（红色方块线）和 $32h$（青色菱形线）；(b)中所有支持束缚态的 $A\in[0,100]h$（灰色线）。(a)中的插图展示了 $A=32h$的大N行为，其中蓝色虚线和绿色点划线分别表示公式（7）的第一项和第二项。(b)中的青色线表示理想海森堡极限。红线表示在优化后的 A下得到的数值结果，使得 $\mathrm{opt}_A y_N(Z^2)=0.5$。黑色虚线表示由公式（7）计算得到的解析结果。(c) $f_N(Z^2)$ 随 Z^2 变化的关系； N 从 1 到 19 变化，步长为 2，从左到右依次对应各条线。插图中的蓝点表示为使 $y_N(Z^2)=0.5$而对 Z^2关于N的依赖关系，其数值拟合结果为 $Z^2=e^{-1.1/N}$。(d)不同 N下优化的A，使得 $y_N(Z^2)=0.5$；这导致了(b)中红线所示的 $\lim_{t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}\propto N^2$。插图展示了不同 A下的 Z^2。阴影背景标示束缚态形成的区域。其他参数与图2相同。

实线）， $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 在驱动作用下，经过暂时的增加后最终衰减至零。相反，在存在束缚态且时， $\mathcal{F}_{\omega_0}/t$ 的频闪取值 $A=11h$ [（见图2（d）中的浅红线）], 与公式（6）中的解析结果相符，显示出随 t线性增加。这证实了长时间动力学中 t^2 的标度 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 。在图 $A=8h$ 2（d）中， $32h$ 和的行为也类似。图2（d）插图中，数值结果与束缚态给出的结果相吻合，验证了束缚态在长时间动力学中的主导作用。所有这些结果表明，由于束缚态的形成，随时间增长的误差发散问题得以避免。

为揭示形成束缚态时能否恢复海森堡极限，我们在图3(a)中绘制了长时间频闪演化时间 $\mathcal{F}_{\omega_0}/N$ 随原子数 N 的变化关系。结果表明，仅当 N 较小时， $\mathcal{F}_{\omega_0}/N$ 才会随 N 近似线性增长，即 $\mathcal{F}_{\omega_0}\propto N^2$。当 N 较大时， $\mathcal{F}_{\omega_0}/N$ 则会出现非期望的指数衰减，并趋于由公式（7）的第二项决定的常数 [（见图3(a)插图）]。与不存在周期驱动时的结果类似 [16, 61], ，这种依赖于 N 的行为对于所有支持束缚态的驱动振幅 A 都具有普适性 [（见图3(b)）]。我们发现，不同 A 下的 $\mathcal{F}_{\omega_0}/N$ 均位于理想海森堡极限以下的区域。这表明，通过优化 A，有可能避免 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 随 N 衰减，从而恢复 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 的 N^2 标度。为此，我们在图3(c)中绘制了不同 N 下 y_N （Z^2）随 Z^2 的变化关系。对于固定的 Z^2，它会随 N 增大而指数下降。由于不同 N 对应的所有 y_N （Z^2）曲线都有相同的两个端点 (0, 0) 和 (1, 1)，因此，对于给定的 N，总能找到一个最优 Z^2，使 y_N（Z^2）保持为常数。令 y_N（Z^2） $=0.5$，我们在图3(c)插图中绘制了所需的 Z^2 随 N 的变化关系。数值拟合表明，$\mathrm{opt}Z^2|_{y_N(Z^2)=0.5}=e^{-1.1/N}$，这使我们能够根据插图中 A 与 Z^2 以及 A 之间的数值对应关系，设计最优的图33(d)中展示了在不同 A下获得的最优 N。相应的 $\mathrm{opt}\lim_{t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 以红线绘于图3(b)中，与我们根据公式（8）得到的解析结果吻合。结果清楚地表明，通过优化设计周期驱动，可避免 N 随 $\mathcal{F}_{\omega_0}\propto N^2$ 衰减，并恢复海森堡极限。研究结果表明，对于给定的原子数 N，总能找到一种可在实验中实现的最优周期驱动，从而彻底克服噪声量子计量学禁戒定理。

讨论与结论——超越广泛使用的马尔可夫近似 [17, 48–58], 我们的方案通过周期驱动，精确地刻画了如何消除噪声对量子计量学的影响。借此，我们得以在拉姆齐光谱学中恢复精度相对于原子数和编码时间的理想海森堡极限标度。该方案成功克服了退相干对量子计量学可扩展性和稳定性造成的挑战。尽管本文只研究了GHZ态，但我们的 FBS机制也适用于其他初态，例如自旋压缩态[5, 86]。鉴于拉姆齐光谱学在量子陀螺仪、原子钟、磁力计和重力测量的研发中发挥着基础作用 [13–25]，我们的结果对于实现这些技术创新具有实际意义。弗洛凯工程广泛应用于量子技术中 [62–69]。无需借助精心设计的控制脉冲 [59, 60, 87, 88], ，我们持续施加的正弦周期驱动便可满足实验可行性要求。静态情况下的系统-环境束缚态已在电路量子电动力学 [89]和冷原子[90]系统中得到观测，这为在周期驱动系统中实现我们的FBS提供了支持。

总之，我们提出了一种弗洛凯工程方案，用以消除耗散噪声对量子计量学的不利影响。通过对存在局域噪声时基于拉姆齐光谱的量子计量中的原子施加周期驱动，我们发现，以量子 Fisher 信息表征的精度主要由每个受驱动原子及其噪声所构成系统的准能谱特征决定。只要谱中形成束缚态，量子 Fisher 信息相对于编码时间的理想海森堡极限 t^2 标度便可恢复。进一步将最优控制应用于驱动场，还可恢复量子 Fisher 信息相对于任意原子数 N 的海森堡极限标度。我们的方案为解决长期存在的噪声量子计量学不可能性定理提供了一种灵活途径，也为在实际条件下实现超灵敏测量提供了指导。

致谢。—本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12205128、12275109、12247101 和 11834005）、中国博士后科学基金（项目编号：BX20220138 和 2022M710063）以及兰州大学超级计算中心的资助。

* anjhong@lzu.edu.cn

[1] D. Leibfried, T. Schaetz, J. Britton, J. Chiaverini, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer 和 D. J. Wineland，利用多粒子纠缠态实现接近海森堡极限的光谱学，《科学》304，1476（2004）。[2]V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone，量子增强测量：突破标准量子极限，《科学》306，1330（2004）。[3] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone，量子计量学，Phys. Rev. Lett. 96，010401（2006）。[4] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone，量子计量学进展，《自然·光子学》5，222（2011）。[5] J. Ma、X. Wang、C. Sun 和 F. Nori，量子自旋压缩，《物理报告》509，89（2011）。[6] J. Joo、W. J. Munro 和 T. P. Spiller，利用纠缠相干态进行量子计量，Phys. Rev. Lett. 107，083601（2011）。[7] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，量子传感，《现代物理评论》89，035002（2017）。[8] L. Pezz`e、A. Smerzi、M. K. Oberthaler、R. Schmied 和 P. Treutlein，利用原子系综的非经典态进行量子计量学，《现代物理评论》90，035005（2018）。[9] S. Daryanoosh、S. Slussarenko、D. W. Berry、H. M. Wiseman 和 G. J. Pryde，实验光学相位测量逼近精确的海森堡极限，Nat. Commun. 9，4606（2018）。[10] J. Yang、S. Pang、Z. Chen、A. N. Jordan 和 A. del Campo，量子计量学中最优量子控制的变分原理，Phys. Rev. Lett. 128，160505（2022）。[11] A. Fallani、M. A. C. Rossi、D. Tamascelli 和 M. G. Genoni，学习量子计量学的反馈控制策略，PRX Quantum 3，020310（2022）。[12] M. Barbieri，《光学量子计量》，PRX Quantum 3，010202（2022年）。[13] C. L. Garrido Alzar，《用于惯性导航的紧凑型芯片级导引冷原子陀螺仪：使能技术与设计研究》，AVS Quantum Sci. 1, 014702（2019年）。[14] M. R. Grace、C. N. Gagatsos、Q. Zhuang 和 S. Guha，《利用正交压缩与连续变量纠缠实现量子增强型光纤陀螺仪》，Phys. Rev. Appl. 14, 034065（2020年）。[15] Y. Wu、J. Guo、X. Feng、L. Chen、C.-H. Yuan 和 W. Zhang，《原子-光混合量子陀螺仪》，Phys. Rev. Appl. 14, 064023（2020年）。[16] L. Jiao 和 J.-H. An，《噪声量子陀螺仪》，Photonics Res. 11, 150（2023年）。[17] J. Borregaard 和 A. S. Sørensen，《存在退相干时接近海森堡极限的原子钟》，Phys. Rev. Lett. 111, 090801（2013年）。[18] E. M. Kessler、P. K´om´ar、M. Bishof、L. Jiang、A. S. Sørensen、J. Ye 和 M. D. Lukin，《基于纠缠量子比特的海森堡极限原子钟》，Phys. Rev. Lett. 112, 190403（2014年）。[19] P. K´om´ar、E. M. Kessler、M. Bishof、L. Jiang、A. S. Sørensen、J. Ye 和 M. D. Lukin，《量子钟网络》，Nat. Phys. 10, 582（2014年）。[20] L. Pezz`e 和 A. Smerzi，《采用混合相干态与压缩态协议的海森堡极限噪声原子钟》，Phys. Rev. Lett. 125, 210503（2020年）。[21] E. Pedrozo-Pe˜nafiel、S. Colombo、C. Shu、A. F. Adiy-atullin、Z. Li、E. Mendez、B. Braverman、A. Kawasaki、D. Akamatsu、Y. Xiao 和 V. Vuleti´c，《光学原子钟跃迁中的纠缠》，《自然》（伦敦）588, 414（2020年）。[22] L. Thiel、D. Rohner、M. Ganzhorn、P. Appel、E. Neu、B. M¨uller、R. Kleiner、D. Koelle 和 P. Maletinsky，《利用低温量子磁力计进行定量纳米尺度涡旋成像》，Nat. Nanotechnol. 11, 677（2016年）。[23] J. M. Taylor、P. Cappellaro、L. Childress、L. Jiang、D. Budker、P. R. Hemmer、A. Yacoby、R. Walsworth 和 M. D. Lukin，《具有纳米尺度分辨率的高灵敏度金刚石磁力计》，Nat. Phys. 4, 810（2008年）。[24] H. Bao、J. Duan、S. Jin、X. Lu、P. Li、W. Qu、M. Wang、I. Novikova、E. E. Mikhailov、K.-F. Zhao、K. Mølmer、H. Shen 和 Y. Xiao，《通过预测与逆推测量实现原子自旋压缩》，《自然》（伦敦）581, 159（2020年）。[25] S. S. Szigeti、S. P. Nolan、J. D. Close 和 S. A. Haine，《利用玻色-爱因斯坦凝聚体进行高精度量子增强重力测量》，Phys. Rev. Lett. 125, 100402（2020年）。[26] L. Maccone 和 V. Giovannetti，《美丽与噪声野兽》，Nat. Phys. 7, 376（2011年）。[27] B. M. Escher、R. L. de Matos Filho 和 L. Davidovich，《估计噪声量子增强计量最终精度极限的通用框架》，Nat. Phys. 7, 406（2011年）。[28] F. Albarelli 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，《多参数噪声量子计量中的探针不相容性》，Phys. Rev. X 12, 011039（2022年）。[29] W. G´orecki、A. Riccardi 和 L. Maccone，《噪声扩散信道的量子计量学》，Phys. Rev. Lett. 129, 240503（2022年）。[30] N. Zhang、C. Chen、S.-Y. Bai、W. Wu 和 J.-H.

An, 《非马尔可夫量子测温》, Phys. Rev. Appl. 17, 034073（2022年）。[31] N. Mirkin、M. Larocca 和 D. Wisniacki, 《非马尔可夫量子演化中的量子计量学》, Phys. Rev. A 102, 022618（2020年）。[32] A. Altherr 和 Y. Yang, 《非马尔可夫过程的量子计量学》, Phys. Rev. Lett. 127, 060501（2021年）。[33] S. F. Huelga、C. Macchiavello、T. Pellizzari、A. K. Ek-ert、M. B. Plenio 和 J. I. Cirac, 《利用量子纠缠提升频率标准》, Phys. Rev. Lett. 79, 3865（1997年）。[34] A. Fujiwara 和 H. Imai, 《量子信道流形上的纤维丛及其在量子统计学中的应用》, J. Phys. A 41, 255304（2008年）。[35] R. Demkowicz-Dobrza ´nski、J. Ko lody ´nski 和 M. GuŢ˘a, 《量子增强计量学中难以捉摸的海森堡极限》, Nat. Commun. 3, 1063（2012年）。[36] U. Dorner、R. Demkowicz-Dobrzanski、B. J. Smith、J. S. Lundeen、W. Wasilewski、K. Banaszek 和 I. A. Walm-sley, 《最优量子相位估计》, Phys. Rev. Lett. 102, 040403（2009年）。[37] R. Demkowicz-Dobrzanski、U. Dorner、B. J. Smith、J. S. Lundeen、W. Wasilewski、K. Banaszek 和 I. A. Walm-sley, 《利用有损干涉仪进行量子相位估计》, Phys. Rev. A 80, 013825（2009年）。[38] A. Andr´e、A. S. Sørensen 和 M. D. Lukin, 《基于纠缠原子的原子钟稳定性》, Phys. Rev. Lett. 92, 230801（2004年）。[39] N. Thomas-Peter、B. J. Smith、A. Datta、L. Zhang、U. Dorner 和 I. A. Walmsley, 《真实世界中的量子传感器：评估精密测量的资源》, Phys. Rev. Lett. 107, 113603（2011年）。[40] M. Kacprowicz、R. Demkowicz-Dobrza ´nski、W. Wasilewski、K. Banaszek 和 I. A. Walmsley, 《有损相移的实验性量子增强估计》, 《自然·光子学》4, 357（2010年）。[41] F. Albarelli、M. A. C. Rossi、D. Tamascelli 和 M. G. Genoni, 《通过监测环境，在噪声量子计量学中恢复海森堡标度》, Quantum 2, 110（2018年）。[42] A. Smirne、J. Ko lody ´nski、S. F. Huelga 和 R. Demkowicz-Dobrza ´nski, 《噪声频率估计的终极精度极限》, Phys. Rev. Lett. 116, 120801（2016年）。[43] Y. Matsuzaki、S. C. Benjamin 和 J. Fitzsimons, 《退相干作用下超越标准量子极限的磁场传感》, Phys. Rev. A 84, 012103（2011年）。[44] A. W. Chin、S. F. Huelga 和 M. B. Plenio, 《非马尔可夫环境中的量子计量学》, Phys. Rev. Lett. 109, 233601（2012年）。[45] K. Macieszczak, 《非马尔可夫环境下频率估计的芝诺极限》, Phys. Rev. A 92, 010102 2015(R)（）。[46] K. Bai、Z. Peng、H.-G. Luo 和 J.-H. An, 《在噪声量子光学计量学中恢复理想精度》, Phys. Rev. Lett. 123, 040402（2019年）。[47] X. Long、W.-T. He、N.-N. Zhang、K. Tang、Z. Lin、H. Liu、X. Nie、G. Feng、J. Li、T. Xin、Q. Ai 和 D. Lu, 《通过量子芝诺效应在有色噪声中实现纠缠增强量子计量学》, Phys. Rev. Lett. 129, 070502（2022年）。[48] R. Demkowicz-Dobrza ´nski

, J. Czajkowski , and

P. Sekatski, 《一般马尔可夫噪声下的自适应量子计量》, Phys. Rev. X 7, 041009（2017年）。[49] M. A. C. Rossi、F. Albarelli、D. Tamascelli 和 M. G. Genoni, 《连续无损测量增强的噪声量子计量学》, Phys. Rev. Lett. 125, 200505（2020年）。[50] J. Jeske、J. H. Cole 和 S. F. Huelga, 《受空间相关马尔可夫噪声影响的量子计量学：恢复海森堡极限》, New J. Phys. 16, 073039（2014年）。[51] K. Yamamoto、S. Endo、H. Hakoshima、Y. Matsuzaki 和 Y. Tokunaga, 《通过虚拟纯化实现误差缓解量子计量》, Phys. Rev. Lett. 129, 250503（2022年）。[52] W. D¨ur、M. Skotiniotis、F. Fr¨owis 和 B. Kraus, 《利用量子纠错改进量子计量》, Phys. Rev. Lett. 112, 080801（2014年）。[53] G. Arrad、Y. Vinkler、D. Aharonov 和 A. Retzker, 《通过纠错提高传感分辨率》, Phys. Rev. Lett. 112, 150801（2014年）。[54] T. Unden、P. Balasubramanian、D. Louzon、Y. Vinkler、M. B. Plenio、M. Markham、D. Twitchen、A. Stacey、I. Lovchinsky、A. O. Sushkov、M. D. Lukin、A. Retzker、B. Naydenov、L. P. McGuinness 和 F. Jelezko, 《通过重复量子纠错增强量子计量》, Phys. Rev. Lett. 116, 230502（2016年）。[55] X.-M. Lu、S. Yu 和 C. H. Oh, 《基于量子 Fisher 信息保护的稳健量子计量方案》, Nat. Commun. 6, 7282（2015年）。[56] F. Reiter、A. S. Sørensen、P. Zoller 和 C. A. Muschik, 《耗散性量子纠错及其在囚禁离子量子传感中的应用》, Nat. Commun. 8, 1822（2017年）。[57] S. Zhou、M. Zhang、J. Preskill 和 L. Jiang, 《利用量子纠错在量子计量学中实现海森堡极限》, Nat. Commun. 9, 78（2018年）。[58] I. Rojkov、D. Layden、P. Cappellaro、J. Home 和 F. Reiter, 《纠错量子传感中的偏差》, Phys. Rev. Lett. 128, 140503（2022年）。[59] Q.-S. Tan、Y. Huang、X. Yin、L.-M. Kuang 和 X. Wang, 《通过动力学解耦脉冲提高噪声系统中的参数估计精度》, Phys. Rev. A 87, 032102（2013年）。[60] P. Sekatski、M. Skotiniotis 和 W. D¨ur, 《动力学解耦提高噪声量子计量学中的标度》, New J. Phys. 18, 073034（2016年）。[61] Y.-S. Wang、C. Chen 和 J.-H. An, 《局域耗散环境中的量子计量学》, New J. Phys. 19, 113019（2017年）。[62] C. Chen、J.-H. An、H.-G. Luo、C. P. Sun 和 C. H. Oh, 《自旋链中量子耗散的 Floquet 控制》, Phys. Rev. A 91, 052122（2015年）。[63] S.-Y. Bai 和 J.-H. An, 《通过弗洛凯工程重新激活耗散型量子电池》, Phys. Rev. A 102, 060201（2020年）（R）。[64] S. Restrepo、J. Cerrillo、V. M. Bastidas、D. G. Angelakis 和 T. Brandes, 《受驱开放量子系统与 Floquet 频闪动力学》, Phys. Rev. Lett. 117, 250401（2016年）。[65] L. Viola、E. Knill 和 S. Lloyd, 《开放量子系统的动力学解耦》, Phys. Rev. Lett. 82, 2417（1999年）。[66] A. Eckardt 和 E. Anisimovas, 《从 Floquet空间视角研究周期性驱动量子系统的高频近似》,

《Floquet空间视角》，New J. Phys. 17, 093039（2015年）。[67] J. W. McIver、B. Schulte、F.-U. Stein、T. Matsuyama、G. Jotzu、G. Meier 和 A. Cavalleri，《光诱导石墨烯反常霍尔效应》，Nat. Phys. 16, 38（2020年）。[68] J. Zhang、P. W. Hess、A. Kyprianidis、P. Becker、A. Lee、J. Smith、G. Pagano、I.-D. Potirniche、A. C. Potter、A. Vishwanath、N. Y. Yao 和 C. Monroe，《离散时间晶体的观测》，Nature（伦敦）543, 217（2017年）。[69] M. Bukov、L. D'Alessio 和 A. Polkovnikov，《周期驱动系统的普适高频行为：从动力学稳定化到弗洛凯工程》，Adv. Phys. 64, 139（2015年）。[70] J. Liu、H. Yuan、X.-M. Lu 和 X. Wang，《量子 Fisher 信息矩阵与多参数估计》，J. Phys. A 53, 023001（2019年）。[71] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves，《统计距离与量子态的几何学》，Phys. Rev. Lett. 72, 3439（1994年）。[72] D. Leibfried、M. D. Barrett、T. Schaetz、J. Britton、J. Chiaverini、W. M. Itano、J. D. Jost、C. Langer 和 D. J. Wineland，《利用多粒子纠缠态迈向海森堡极限光谱学》，Science 304, 1476（2004年）。[73] L. Pezz´e 和 A. Smerzi，《纠缠、非线性动力学与海森堡极限》，Phys. Rev. Lett. 102, 100401（2009年）。[74] S. Pang 和 A. N. Jordan，《含时哈密顿量下量子计量学的最优自适应控制》，Nat. Commun. 8, 14695（2017年）。[75] J. Liu、J. Chen、X.-X. Jing 和 X. Wang，《通过反对易子求量子 Fisher 信息和对称对数导数》，J. Phys. A 49, 275302（2016年）。[76] C.-J. Yang、J.-H. An、H.-G. Luo、Y. Li 和 C. H. Oh，《开放量子系统的正则与非正则平衡动力学》，Phys. Rev. E 90, 022122（2014年）。[77] 有关噪声量子计量学禁戒定理、$c(t)$ 的稳态解、存在一个束缚态时的量子 Fisher 信息以及准能谱结构的详细推导，请参阅补充材料。[78] J. Liang, Y. Zhou, W.-C. Jiang, M. Yu, M. Li 和 P. Lu，强场电离中的塞曼效应，Phys. Rev. A 105, 043112 (2022年)。[79] A. Hartung, S. Eckart, S. Brennecke, J. Rist, D. Trabert, K. Fehre, M. Richter, H. Sann, S. Zeller, K. Henrichs, G. Kastirke, J. Hoehl, A. Kalinin, M. S. Sch¨offler, T. Jahnke, L. P. H. Schmidt, M. Lein, M. Kunitski 和 R. D¨orner，磁场改变强场电离，Nat. Phys. 15, 1222 (2019年)。[80] S. Chelkowski, A. D. Bandrauk 和 P. B. Corkum，光电离中电子与离子之间的光子动量分配：从单光子（光电效应）到多光子吸收，Phys. Rev. Lett. 113, 263005 2014年( )。[81] P.-L. He, D. Lao 和 F. He，非相对论区域中超越偶极近似的强场理论，Phys. Rev. Lett. 118, 163203 (2017年)。[82] J. H. Shirley，具有时间周期性哈密顿量的薛定谔方程的解，Phys. Rev. 138, B979 (1965年)。¨H. Sambe，振荡场中量子力学系统的稳态和准能量，Phys. Rev. A 7, 2203 (1973年)。[83] A. Gonz[84] alez-Tudela 和 J. I. Cirac，非微扰区二维结构化储库中的量子发射体，Phys. Rev. Lett. 119, 143602 (2017年)。´A. Gonz[85] alez-Tudela, C. S. Mu´noz 和 J. I. Cirac，高维浴中巨原子的工程化与利用：使用冷原子实现的方案，Phys. Rev. Lett. 122, 203603 (2019年)。˜S.-Y. Bai 和 J.-H. An，通过压缩储库工程产生稳定的自旋压缩，Phys. Rev. Lett. 127, 083602 (2021年)。[86] J. Liu 和 H. Yuan，采用最优控制的量子参数估计，Phys. Rev. A 96, 012117 (2017年)。[87] J. Liu 和 H. Yuan，控制增强多参数量子估计，Phys. Rev. A 96, 042114 (2017年)。[88] Y. Liu 和 A. A. Houck，光子带隙附近的量子电动力学，Nat. Phys. 13, 48 (2017年)。[89] L. Krinner, M. Stewart, A. Pazmi[90] no, J. Kwon 和 D. Schneble，可调开放量子系统中物质波的自发辐射，Nature (London) 559, 589 2018年( )。

arXiv:2303.00392v2 [quant-ph] 2 Aug 2023

《噪声量子计量学禁戒定理的弗洛凯工程克服方法》补充材料

Si-Yuan Bai [1] 和 Jun-Hong An [1], *[1] Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of MoE, Lanzhou Center for Theoretical Physics, and Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu Province, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

I. 噪声量子计量学禁戒定理

主文中初始 GHZ 态对应的式 (2) 的解为

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\Big[p_t|e\rangle\langle e| + (1-p_t)|g\rangle\langle g|\Big]^{\otimes N} + \frac{1}{2}\Big[|g\rangle\langle g|^{\otimes N} + \Big(c(t)^N|e\rangle\langle g|^{\otimes N} + \text{H.c.}\Big)\Big] \quad \text{(S1)}$$

将式 (S1) 的第一项展开为

$$\begin{aligned}&\big[p_t|e\rangle\langle e| + (1-p_t)|g\rangle\langle g|\big]^{\otimes N}\\ =\ & p_t^N|e\rangle\langle e|^{\otimes N} + \big(1-p_t\big)^N|g\rangle\langle g|^{\otimes N} + \sum_{\mathbb{P}}\sum_{m=1}^{N-1} p_t^m \\ &\times\big(1-p_t\big)^{N-m}\mathbb{P}\big[|e\rangle\langle e|^{\otimes m}\otimes|g\rangle\langle g|^{\otimes(N-m)}\big], \quad \text{(S2)}\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{P}$ 表示所有二分置换，且 $p_t = |c(t)|^2$，我们将式 (S1) 重新写为 $\rho(t) = \rho_1(t)\oplus\rho_2(t)$，其中

$$\begin{aligned}\rho_1(t) &= \frac{1}{2}\big\{p_t^N|e\rangle\langle e|^{\otimes N} + \big[1+(1-p_t)^N\big]|g\rangle\langle g|^{\otimes N} \\ &\quad + \big[c(t)^N|e\rangle\langle g|^{\otimes N} + \text{H.c.}\big]\big\}, \quad \text{(S3)}\\ \rho_2(t) &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbb{P}}\sum_{m=1}^{N-1} p_t^m\big(1-p_t\big)^{N-m}\mathbb{P}\big[|e\rangle\langle e|^{\otimes m} \\ &\quad \otimes|g\rangle\langle g|^{\otimes(N-m)}\big]. \quad \text{(S4)}\end{aligned}$$

容易看出，$\rho_1(t)$ 在基底 $\{|e\rangle^{\otimes N}, |g\rangle^{\otimes N}\}$ 下是一个二阶方阵，而 $\rho_2(t)$ 是一个 (2^N-2) 维对角矩阵。根据量子 Fisher 信息（QFI）对直和密度矩阵具有可加性这一事实 [1],，我们有 $\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = \mathcal{F}_{\omega_0}^{(1)} + \mathcal{F}_{\omega_0}^{(2)}$，其中 $\mathcal{F}_{\omega_0}^{(1,2)}$是 $\rho_{1,2}(t)$ 的 QFI。

任意态的量子 Fisher 信息 ρ 为 [2]

$$\mathcal{F}_{\omega_0} = \sum_{i,j=1}^{D}\left[\frac{\lambda_i'^2}{\lambda_i} + 4\lambda_i\langle\lambda_i'|\lambda_i'\rangle - \frac{8\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle\lambda_i|\lambda_j'\rangle|^2\right], \quad \text{(S5)}$$

其中，$\rho = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ 和 D 是 $\rho(t)$的非零特征值的数量。由于该矩阵的特征向量对角矩阵 $\rho_2(t)$ 与 ω_0无关，因此非零分量仅为式（S5）中的第一项

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\omega_0}^{(2)} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{\{[p_t^m(1-p_t)^{N-m}]'\}^2}{p_t^m(1-p_t)^{N-m}} \\ &= -\frac{Np_t'^2}{2p_t}\left[\frac{Np_t(1-p_t)^N + p_t - 1}{(p_t-1)^2} + Np_t^{N-1}\right]. \quad \text{(S6)}\end{aligned}$$

利用式（S5）以及 $\rho_1(t)$ 的特征分解，$\mathcal{F}_{\omega_0}^{(1)}$即可轻松计算得出。

正文中式（3）的马尔可夫近似解为 $c_{\text{MA}}(t) = \exp\{-\kappa t - i[\omega_0 + \Delta(\omega_0)]t\}$ [3]，其中 $\kappa = \pi J(\omega_0)$ 为衰减率，$\Delta(\omega_0) = \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\omega_0-\omega}d\omega$ 为重整化频率。这里，$\mathcal{P}$表示柯西主值。将衰减率 κ 视为常数，可得 $p_t = e^{-2\kappa t}$ 与 ω_0无关，因此有 $\mathcal{F}_{\omega_0}^{(2)} = 0$。将$c_{\text{MA}}(t)$代入式（S3），并对二阶方阵 $\rho_1(t)$进行对角化，可直接得到

$$\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = \mathcal{F}_{\omega_0}^{(1)} = \frac{2N^2t^2}{1+(e^{2\kappa t}-1)^N + e^{2N\kappa t}}. \quad \text{(S7)}$$

首先，当 (S7) 式化简为理想结果 $\mathcal{F}_{\omega_0}^{\text{ideal}}(t) = N^2t^2$ 时，$\kappa = 0$。其次，(S7) 式揭示了

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = 0, \quad \text{(S8)}$$

这与理想情形形成鲜明对比，意味着作为提升精度资源的编码时间 t 的优越性被噪声破坏。第三，$\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 的最大值为

$$\max_t\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = \frac{2q^2}{1+(e^{\frac{2\kappa q}{N}}-1)^N + e^{2q\kappa}} \quad \text{(S9)}$$

在最优时间 $t_{\text{opt}} = q/N$处取得，其中 $q = \frac{1}{2\kappa}[W\left(\frac{2}{e^2}\right)+2] = 1.11/\kappa$ 且 $W(z)$ 为 Lambert W 函数。在 N 很大的极限下，(S9) 式化简为

$$\lim_{N\to\infty}\max_t\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = \frac{2q^2}{1+e^{2q\kappa}} = \frac{0.24}{\kappa^2}. \quad \text{(S10)}$$

在拉姆齐光谱学中，我们会在时长为 T_R的时间内重复测量。因此，重复次数为 $\upsilon = T_R/t_{\text{opt}} = T_RN/q$。根据量子克拉默-拉奥界，$\omega_0$ 的最终精度为´

$$\min\delta\omega_0 = \Big[\upsilon\lim_{N\to\infty}\max_t\mathcal{F}_{\omega_0}(t)\Big]^{-1/2} = (0.22T_RN/\kappa)^{-1/2}, \quad \text{(S11)}$$

* anjhong@lzu.edu.cn

这使精度回归散粒噪声极限。因此，马尔可夫噪声不仅迫使拉姆齐光谱学中的理想海森堡极限精度在最优编码时间下回归散粒噪声极限，还会使其在长时间条件下发散。噪声彻底摧毁了编码时间 t 和原子数 N作为提升精度资源的优势。这被称为噪声量子计量学禁戒定理。

II. $c(t)$ 的稳态解

我们首先考虑周期性驱动的第 j 个原子与其环境耦合时的局域动力学，该动力学由 $\hat{H}_j(t) = \hat{H}_j + \hat{H}_{c,j}(t)$ 描述，并满足初始条件 $\hat{|}\psi(0)\rangle = |e_j, \{0_k\}\rangle$。其演化态 $|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}_j(t)|\psi(0)\rangle$ 展开为

$$|\psi(t)\rangle = [c(t)\hat{\sigma}_j^\dagger + \sum_k d_k(t)\hat{a}_{k,j}^\dagger]|g_j, \{0_k\}\rangle, \tag{S12}$$

其中，$|\{0_k\}\rangle$ 表示环境真空态，$c(t)$ 是第 j 个原子处于激发态且环境处于真空态的概率振幅，而 $d_k(t)$ 是第 j 个原子处于基态且环境中仅含有一个处于第 k 个模式的光子的概率振幅。由薛定谔方程 $i|\dot{\psi}(t)\rangle = H_j(t)|\psi(t)\rangle$ 可推导出 $\dot{\cdot}\hat{}$，其中概率振幅 $c(t)$ 满足

$$\dot{c}(t) + i[\omega_0 + f(t)]c(t) + \int_0^t d\tau\nu(t-\tau)c(\tau) = 0, \tag{S13}$$

这正是正文中的式（5）。因此，式（5）的解等价于

$$c(t) = \langle e_j, \{0_k\}|\psi(t)\rangle = \langle e_j, \{0_k\}|\hat{\mathcal{U}}_j(t)|e_j, \{0_k\}\rangle. \tag{S14}$$

根据 Floquet 定理，演化算符 $\hat{\mathcal{U}}_j(t)$ 可展开为

$$\hat{\mathcal{U}}_j(t) = \sum_\alpha e^{-i\epsilon_\alpha t}|u_\alpha(t)\rangle\langle u_\alpha(0)|, \tag{S15}$$

其中 ϵ_α 和 $|u_\alpha(t)\rangle$ 满足 Floquet 本征方程$[\hat{H}_j(t) - i\partial_t]|u_\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha|u_\alpha(t)\rangle$ [4, 5]。将式（S15）代入式（S14），得到

$$c(t) = \sum_\alpha e^{-i\epsilon_\alpha t}\langle e_j, \{0_k\}|u_\alpha(t)\rangle\langle u_\alpha(0)|e_j, \{0_k\}\rangle. \tag{S16}$$

利用周期性 $|u_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t+T)\rangle$，可得频闪动力学下的 $c(t)$，即 $t = nT(n \in \mathbb{Z})$，如下：

$$c(t) = \sum_\alpha e^{-i\epsilon_\alpha t}|\langle u_\alpha(0)|e_j, \{0_k\}\rangle|^2. \tag{S17}$$

耦合到环境的周期驱动二能级系统的准能谱由一个有限的连续准能带以及可能形成的离散准能级构成，我们将后者称为 Floquet束缚态（FBSs）。由于反相干涉，连续准能带中的准稳态对长时间 $c(nT)$ 的贡献趋于零 [6, 7]。只有来自 Floquet束缚态的准稳态能够留存。因此，式（5）在频闪动力学下的长时间解，即 $t = nT$，为

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \sum_{l=1}^{M} Z_l e^{-i\epsilon_l^{\mathrm{b}} t} \tag{S18}$$

当形成 M 个 Floquet束缚态时，其中 $Z_l = |\langle u_l^{\mathrm{b}}(0)|e_j, \{0_k\}\rangle|^2$ 而 $|u_l^{\mathrm{b}}(t)\rangle$ 是准能量为 ϵ_l^{b} 的第 l 个 Floquet束缚态。

除数值计算外，ϵ_l^{b} 和 Z_l的形式也可如下确定。为简单起见，我们仅考虑形成一个束缚态的情况，因此去掉标签 l。进行傅里叶变换 $|u^{\mathrm{b}}(t)\rangle = \sum_n e^{in\omega_T t}|\tilde{u}^{\mathrm{b}}(n)\rangle$，并展开 $|\tilde{u}^{\mathrm{b}}(n)\rangle = c_n|e_j, \{0_{\mathbf{k}}\}\rangle + \sum_{\mathbf{k}} d_n^{\mathbf{k}}|g_j, 1_{\mathbf{k}}\rangle$ 后，可将 Floquet 本征方程改写为

$$\mathbf{Y}(\epsilon^{\mathrm{b}}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon^{\mathrm{b}}\mathbf{c}, \tag{S19}$$

其中 $\mathbf{c} \equiv \begin{pmatrix} \cdots & c_n & \cdots \end{pmatrix}^T$和 $n \in \mathbb{Z}$是傅里叶指标。$\mathbf{Y}(\epsilon^{\mathrm{b}})$ 是一个矩阵，其矩阵元为 $[\mathbf{Y}(\epsilon^{\mathrm{b}})]_{n,m} = \tilde{f}_{n,m} + [\omega_0 + m\omega_T + \Sigma_m(\epsilon^{\mathrm{b}})]\delta_{n,m}$，其中 $\Sigma_m(\epsilon^{\mathrm{b}}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\epsilon^{\mathrm{b}} - m\omega_T - \omega_{\mathbf{k}}}$ 是自能，汇集了所有环境效应；$f_{n,m} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i(n-m)\omega_T t}dt$ 是控制场 $f(t)$ 的傅里叶变换。通过求解方程 (S19)，可以得到所有布里渊区中的束缚态准能量$\epsilon^{\mathrm{b}} + m\omega_T$。由于方程 (S19) 在 $m\omega_T$ 平移下具有平移不变性，我们只选择由 ϵ^{b} 形成的第一布里渊区。归一化条件 $\langle u^{\mathrm{b}}(t)|u^{\mathrm{b}}(t)\rangle = 1$ 给出

$$\mathbf{c}^\dagger \cdot \mathbf{G}(\epsilon^{\mathrm{b}}) \cdot \mathbf{c} = 1 \tag{S20}$$

其中 $[\mathbf{G}(\epsilon^{\mathrm{b}})]_{m,n} = [1 - \partial_\epsilon\Sigma_m(\epsilon)]\delta_{m,n}\big|_{\epsilon\to\epsilon^{\mathrm{b}}}$ 结合方程 (S19) 和 (S20)，ϵ^{b} 及其对应的 $\mathbf{c}$ 可以唯一确定。然后 $Z = |\sum_n c_n|^2$。

对于正文中的环境，我们有

$$\Sigma_m(\epsilon^{\mathrm{b}}) = \frac{2g^2K[(\frac{4h}{\epsilon^{\mathrm{b}} - m\omega_T})^2]}{\pi(\epsilon^{\mathrm{b}} - m\omega_T)}, \tag{S21}$$

其中 $K(x) = \int_0^{\pi/2}[1 - x\sin^2(\phi)]^{-1/2}d\phi$ 是第一类完全椭圆积分。对 ϵ 求关于 $\Sigma_m(\epsilon^{\mathrm{b}})$ 的导数，可得

$$[\mathbf{G}(\epsilon^{\mathrm{b}})]_{m,n} = \{1 + \frac{2g^2E[(\frac{4h}{\epsilon^{\mathrm{b}} - m\omega_T})^2]}{\pi[(\epsilon^{\mathrm{b}} - m\omega_T)^2 - (4h)^2]}\}\delta_{m,n}, \tag{S22}$$

其中 $E(x) = \int_0^{\pi/2}[1 - x\sin^2(\phi)]^{1/2}d\phi$ 是第二类完全椭圆积分。

III. 存在一个束缚态时的量子 Fisher 信息

如果形成一个束缚态，即 $M=1$，那么根据公式（S18），稳态 $c(t)$，即 $t=nT$ 为

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = Ze^{-i\epsilon^{\mathrm{b}}t}. \tag{S23}$$

将式（S23）代入式（S6，即可得到

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{F}^{(2)}_{\omega_0} = \frac{N(\partial_{\omega_0}Z^2)^2}{2Z^2}\Big[\frac{1-NZ^2(1-Z^2)^{N-1}}{1-Z^2} -NZ^{2N-2}\Big], \tag{S24}$$

它与时间无关，并趋于

$$\lim_{N,t\to\infty}\mathcal{F}^{(2)}_{\omega_0} = \frac{N(\partial_{\omega_0}Z^2)^2}{Z^2(1-Z^2)}. \tag{S25}$$

$\rho_1(t)$的稳态形式为

$$\rho_1(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z^{2N} & Ze^{i\epsilon^{\mathrm{b}}t} \\ Ze^{-i\epsilon^{\mathrm{b}}t} & 1+(1-Z^2)^N \end{pmatrix} \tag{S26}$$

在大-t 极限下，其本征解为

$$\lambda_\pm = \frac{s}{4}\Big[1\pm\sqrt{1-4Z^{2N}(1-Z^2)^N/s^2}\Big], \tag{S27}$$

$$|\lambda_\pm\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\epsilon^{\mathrm{b}}Nt}\sin\theta_\pm & \cos\theta_\pm \end{pmatrix}^T, \tag{S28}$$

其中 $s=1+Z^{2N}+(1-Z^2)^N$ 和

$$\theta_\pm = \arctan\frac{1}{2}\Big\{Z^N - Z^{-N} - (Z^{-1}-Z)^N \pm\sqrt{s^2Z^{-2N}-4(1-Z^2)^N}\Big\}.$$

.....之间的正交性 $|\lambda_\pm\rangle$ 导致 $\cos(\theta_+-\theta_-)=0$。保留 t 和 N的首阶项，我们由方程（S5）计算得出

$$\lim_{N,t\to\infty}\mathcal{F}^{(1)}_{\omega_0} \simeq y_N(Z^2)(Nt\partial_{\omega_0}\epsilon^{\mathrm{b}})^2, \tag{S29}$$

其中

$$y_N(Z^2) = \sum_{i=\pm}\lambda_i\sin^2(2\theta_i) - \frac{16\lambda_+\lambda_-(\sin\theta_+\sin\theta_-)^2}{\lambda_++\lambda_-}. \tag{S30}$$

进一步的代数运算将方程（S30）化简为

$$y_N(x) = \frac{2x^N}{x^N+(1-x)^N+1}. \tag{S31}$$

结合方程（S25）和（S29），最终得到

$$\lim_{N,t\to\infty}\mathcal{F}_{\omega_0}(t) \simeq y_N(Z^2)(Nt\partial_{\omega_0}\epsilon^{\mathrm{b}})^2 + \frac{N(\partial_{\omega_0}Z^2)^2}{Z^2(1-Z^2)}. \tag{S32}$$

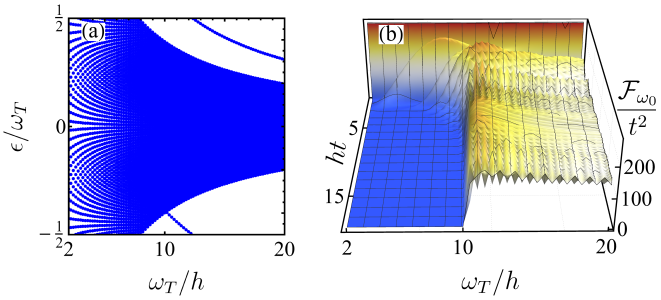

图 S1。（a）不同驱动频率 ω_T 下的准能谱以及（b）量子 Fisher 信息 $\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 的演化。在形成束缚态的区域内，$\mathcal{F}_{\omega_0}$ 的理想 t^2 标度得以恢复。我们使用了 $A=10h$，其他参数与正文图2中的参数相同。

IV. 准能谱

我们在此分析由每个周期驱动原子及其局域环境构成的总系统的准能谱结构。环境的色散关系为 $\omega_{\mathbf{k}}=\omega_c-2h(\cos k_x+\cos k_y)$，形成一个宽度为 $8h$、中心位于ω_c的能带。当一个周期驱动双能级系统与该环境耦合时，能带的宽度 $8h$会传递到由 Floquet 本征方程 [4, 5] 确定的准能谱中

$$[\hat{H}_j(t)-i\partial_t]|u_\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha|u_\alpha(t)\rangle, \tag{S33}$$

其中，ϵ_α 和 $|u_\alpha(t)\rangle=|u_\alpha(t+T)\rangle$ 分别称为准能量和准定态。准能量 ϵ_α 以 ω_T 为周期，因为 $e^{il\omega_T t}|u_\alpha(t)\rangle$ 也是方程（S33）对应特征值 $\epsilon_\alpha+l\omega_T$ 的本征态。通常将它们选在称为第一布里渊区的 $[-\omega_T/2,\omega_T/2]$ 内。第一布里渊区内准能量的宽度为 ω_T。将准能带宽度 $8h$ 代入后，只有当 $\omega_T>8h$ 时，准能谱中才可能出现宽度有限的带隙 ω_T-8h。在此参数区域内，适当改变 ω_T，即可在带隙区域形成束缚态。只要 $\omega_T<8h$，准能带便会填满整个准能谱，因此不再有形成束缚态的空间。因此，形成束缚态的前提是准能谱中存在带隙，而这仅在 $\omega_T>8h$ 时出现。

我们在图 S1(a) 中绘出了由周期驱动的双能级原子与环境构成的总系统在不同驱动频率下的准能谱ω_T。这证实了我们的预期：当 $\omega_T>8h$时，存在带隙。在该参数区域内，随着 ω_T增加，会形成束缚态。图 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ S1(b) 中量子 Fisher 信息 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 的演化表明，在没有束缚态的区域中，$\mathcal{F}_{\omega_0}$ 仅衰减至零。当形成束缚态时，$\mathcal{F}_{\omega_0}/t^2$ 则趋于一个非零常数，并伴有持续的微小振幅振荡。结合这一结果

在正文研究的驱动振幅 A 变化下，我们可以看到，无论哪种驱动参数发生变化时，束缚态的形成与理想的 t^2 量子 Fisher 信息的标度 $\mathcal{F}_{\omega_0}$ 恢复之间存在明确的对应关系，这一关系依然成立。

[1] J. Liu、J. Chen、X.-X. Jing 和 X. Wang，《通过反对易子求量子 Fisher 信息与对称对数导数》，《物理学杂志A：数学与理论》**49**，275302（2016年）。[2] J. Liu、H. Yuan、X.-M. Lu 和 X. Wang，《量子 Fisher 信息矩阵与多参数估计》，《物理学杂志A：数学与理论》**53**，023001（2019年）。[3] C.-J. Yang、J.-H. An、H.-G. Luo、Y. Li 和 C. H. Oh，《开放量子系统的正则与非正则平衡动力学》，Phys. Rev.E **90**，022122（2014年）。[4] J. H. Shirley，《薛定谔方程的解¨与一个时间周期性变化的哈密顿量，Phys. Rev. **138**, B979 (1965年)。[5] H. Sambe，振荡场中量子力学系统的稳态和准能量，Phys. Rev. A **7**, 2203 1973年( )。[6] C. Chen、J.-H. An、H.-G. Luo、C. P. Sun 和 C. H. Oh，自旋链中量子耗散的 Floquet 控制，Phys. Rev. A **91**, 052122 (2015年)。[7] S.-Y. Bai 和 J.-H. An，弗洛凯工程重新激活耗散型量子电池，Phys. Rev.A **102**, 060201(R) (2020年)。