横向磁场作用下磁流体力学管流的不稳定性

Yelyzaveta Velizhanina* 和 Bernard Knaepen†*Physique des Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles, Boulevard du Triomphe CP231, 1050 Ixelles, Belgium*（日期：2023年3月2日）

本文对横向磁场作用下充分发展的液态金属磁流体力学管流的线性稳定性进行了数值研究。由于平均速度剖面缺乏轴向对称性，因此需要进行 BiGlobal 稳定性分析。为此，我们开发了一种基于物理空间中的切比雪夫-傅里叶配置法的二维复特征值求解器。通过开展广泛的参数研究，我们表明，与已知在所有雷诺数下均线性稳定的哈根-泊肃叶流不同，横向磁场作用下的磁流体力学管流在哈特曼数和壁面电导率比足够高时，会对三维扰动表现出不稳定性。在这一状态下观察到的不稳定性归因于所谓罗伯茨层中的速度超调，以及平均速度剖面中相应的拐点。我们研究了最不稳定模态的性质和特征，并表明它们会随壁面电导率比的变化而显著改变。本文的一个主要结果是，横向磁场作用下磁流体力学管流的全局临界雷诺数为 $Re = 45230$；该临界状态出现在管壁完全导电且哈特曼数为 $Ha = 19.7$ 时。

arXiv:2303.00395v1 [physics.flu-dyn] 1 Mar 2023

I. 引言

线性稳定性理论表明，叠加在哈根–泊肃叶流之上的所有小振幅三维扰动——即圆管内黏性不可压缩流体的流动——经过足够长的时间后都会衰减 [1, 2]。然而，实验表明，该流动在有限雷诺数下可能发生层流-湍流转捩[3, 4]。换言之，观察到的转捩是亚临界的，即发生在低于模态线性稳定性分析所预测值的雷诺数下。与其他剪切流类似，管道内流动转捩为湍流的一个可能情景是：初始较小的三维扰动因产生较大的瞬态增长，进而形成有限振幅扰动，使流动失稳 [5, 6]。随后，达到一定临界振幅的放大最强初始扰动可能导致一种被称为边缘态的状态——一种既不会重新层流化、也不会触发湍流的运动方程解 [7, 8]。这为深入理解这一问题提供了重要洞见，并有助于找到控制不稳定性发生的有效方法。

尽管人们对哈根-泊肃叶流不稳定机制的理解取得了显著进展，但对于外加磁场作用下圆管内液态金属流的湍流起始过程，人们知之甚少。自 Hartmann 和 Lazarus 的经典实验以来，人们早已知道，外加磁场能够稳定原本不稳定的流动。许多应用都利用了这一现象，例如半导体晶体生长 [10], 钢铸造 [11] 以及流动控制 [12]。这种稳定作用背后的机制是焦耳阻尼：流体在外加磁场中运动时会产生感应电流，从而导致焦耳阻尼。

然而，在某些构型下，外加磁场也可能产生 destabilizing effect。在均匀横向磁场作用下的管道流中，Priede 等人 [13–15]进行了线性稳定性分析，结果表明，当哈特曼数足够高时，存在导电壁面的情况下流动会变得不稳定。不稳定性的根源在于平均速度剖面的改变，以及管道中心线以外出现的侧壁速度射流。Hunt 流尤为显著，其特征是沿平行于磁场的方向，一对壁面完全导电，另一对壁面绝缘。对于绝缘壁，管道流保持线性稳定；Krasnov等人 [16] 研究了其通过瞬态增长发生的亚临界转捩。非线性状态下的磁流体力学管道流也受到了广泛关注（综述见 [17] ），近期 Blishchick等人强调了壁面电导率对流动状态的影响 [18]。他们的观察结果与 Priede等人的线性计算一致；后者指出，在某些参数组合下，侧壁速度射流发挥着重要作用。

* yelyzaveta.velizhanina@ulb.be
† bernard.knaepen@ulb.be

据我们所知，尚未有人对横向磁场作用下的磁流体力学管流进行详细的线性稳定性分析，尽管已有几位作者研究了自然对流和外加磁场 [19, 20]作用下管流的稳定性。与本研究更相关的是 ˚Akerstedt [21]的工作；他分析了纵向磁场对具有完全导电壁的磁流体力学管流的稳定作用，并对该情形进行了瞬态增长分析。关于磁流体力学管流再层流化及其在过渡状态附近动力学特性的一些结果也已有报道，例如见 [17, 22, 23]。

与管道流道中的情况一样，横向磁场对磁流体力学管流的稳定性可能产生两种影响：首先，它可以通过引入额外的焦耳耗散来稳定流动；其次，它可以通过改变平均速度剖面使流动失稳。在管道中，横向磁场会使流动沿其方向系统性地拉长，并在管壁垂直于磁场的区域诱发薄哈特曼层。在管壁平行于磁场的区域，则会形成另一种边界层，称为罗伯茨层 [24–26]。如果管壁是电绝缘的，这些边界层中的速度剖面会随离壁距离增加而单调衰减。相反，当壁面电导率和哈特曼数足够高时，可能会出现速度超速区域及其拐点 [27, 28]。因此，这种情况与管道流道中观察到的现象十分相似，故有必要评估磁流体力学管流中是否可能出现模态不稳定性。

在本文中，我们采用 BiGlobal 稳定性分析来探讨上述问题。BiGlobal 稳定性分析这一概念在 [29]中确立，用于描述在具有两个非均匀方向和一个均匀方向的三维域中的线性稳定性分析。借助该方法，我们可以将流动的稳定性表述为一个二维特征值问题，该问题取决于雷诺数、施加磁场强度以及壁面电导率与流体电导率之比。参数研究中所考虑的雷诺数和哈特曼数范围分别为10^3 至 10^6 以及 0 至 60，而电导比的变化范围为 0 至 ∞。

本文的组织结构如下。第二节介绍物理模型和问题的 formul 公式。
第三节专门介绍数值方法及其验证。随后，第四节给出横向磁场作用下磁流体力学管流全局稳定性的研究结果，而第五节总结本研究的结论。

II. 问题表述

我们考虑半径为 a 的圆管中不可压缩、黏性且导电的流体在均匀横向磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 作用下的流动（见图 1）。

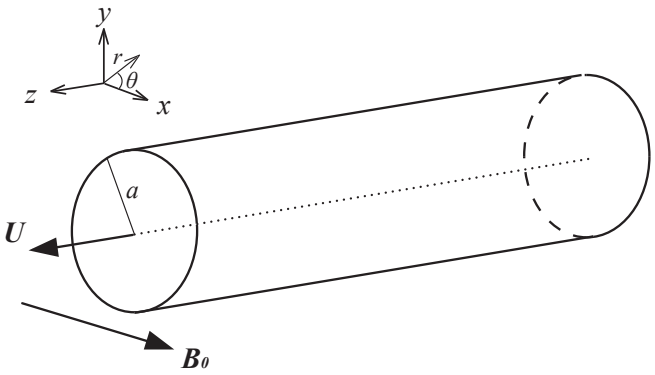

图 1. 示意图 均匀横向磁场作用下磁流体力学管流的示意图 .

我们关注液态金属流动，并假设准静态近似适用。在此框架下，感应磁场相对于外加磁场可以忽略，且磁扩散的特征时间尺度远小于其他相关时间尺度。因此，速度 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 由准静态磁流体力学方程 [30],描述

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\,(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_0)\,, \tag{1b}$$

其中， ρ、 ν 和 σ 分别是流体的密度、运动黏度和电导率。感应电流 $\boldsymbol{j}$ 遵循运动导体的欧姆定律，

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(-\nabla\phi + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}_0\right), \tag{2}$$

并满足电荷守恒方程，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0. \tag{3}$$

对 $\boldsymbol{j}$应用旋度算子，即可消去式（2）中出现的电势 ϕ 。

在管道壁面， $\boldsymbol{u}$ 满足无滑移条件和不可渗透条件，

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{at } r = a. \tag{4}$$

$\boldsymbol{j}$ 的边界条件是在“薄壁”假设下得到的；该假设在壁厚 t_w 远小于管道半径 a [30]时成立，

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} - \nabla_\tau\cdot\left(\frac{t_w\sigma_w}{\sigma}\boldsymbol{j}_\tau\right) = 0 \quad \text{at } r = a, \tag{5}$$

其中， σ_w 为壁面的电导率， $\boldsymbol{n}$ 为壁面外法线， $\boldsymbol{j}_\tau = \boldsymbol{j} - (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}$ 和 $\nabla_\tau = \nabla - (\partial/\partial n)\boldsymbol{n}$。请注意，对于完全绝缘壁面，该边界条件简化为 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} = 0$；对于完全导电壁，该条件简化为 $\nabla_\tau\cdot\boldsymbol{j}_\tau = 0$。

上述方程通过以下变换进行无量纲化：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}\to a\boldsymbol{x}, \quad t\to aU_0^{-1}t, \quad p\to\rho U_0^2 p,\\ &\boldsymbol{u}\to U_0\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{B}_0\to B_0\mathbf{1}_{B_0}, \ \boldsymbol{j}\to\sigma U_0 B_0\boldsymbol{j}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中，特征速度尺度 U_0 为基流最大速度（见下文）， $B_0 = |\boldsymbol{B}_0|$ 为外加磁场的大小， $\mathbf{1}_{B_0}$ 为与 $\boldsymbol{B}_0$对齐的单位向量。注意，在图 1 所示的柱坐标 $(r,\ \theta,\ z)$ 中， $\mathbf{1}_{B_0} = \cos\theta\mathbf{1}_r - \sin\theta\mathbf{1}_\theta$。

用无量纲变量 (6) 表示，由方程 (1)-(2)-(3) 和边界条件 (4)-(5) 给出的系统为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{Ha^2}{Re}\left(\boldsymbol{j}\times\mathbf{1}_{B_0}\right), \tag{7b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{j} = (\mathbf{1}_{B_0}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}, \tag{7c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0, \tag{7d}$$

边界条件为：

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{at } r = 1, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} - \nabla_\tau\cdot(\chi\boldsymbol{j}_\tau) = 0 \quad \text{at } r = 1. \tag{8b}$$

无量纲参数 Re、 Ha 和 χ 出现在这组方程中，分别为雷诺数、哈特曼数 和壁面电导率比：

$$Re = \frac{U_0 a}{\nu}, \quad Ha = B_0 a\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}, \quad \chi = \frac{t_w\sigma_w}{a\sigma}. \tag{9}$$

为研究横向磁场存在时充分发展磁流体力学管流的线性稳定性，我们根据以下方式，将瞬时变量 $\boldsymbol{u}$、 p 和 $\boldsymbol{j}$ 分解为基态（$\boldsymbol{U}$、 P、 $\boldsymbol{J}$）和无穷小扰动（$\boldsymbol{u}'$、 p'、 $\boldsymbol{j}'$）：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{u}', \quad p = P + p', \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{j}'. \tag{10}$$

在柱坐标中，基态表示为

$$\boldsymbol{U} = U(r,\theta)\,\mathbf{1}_z, \quad P = P(r,\theta,z), \quad \boldsymbol{J} = J_r(r,\theta)\,\mathbf{1}_r + J_\theta(r,\theta)\,\mathbf{1}_\theta. \tag{11}$$

为计算该基态，我们求解以下标量方程组，

$$\nabla^2 U + Ha^2 \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) M_z = ReK, \tag{12a}$$

$$\nabla^2 M_z + \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U = 0, \tag{12b}$$

将（$\boldsymbol{U}$，P，$\boldsymbol{J}$）代入方程（7），并利用方程（7d）将平均电流表示为 $\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{M}$ 后得到。其中，$K = \partial P/\partial z$ 为流向压降。

随后将流动扰动（$\boldsymbol{u}'$，p'，$\boldsymbol{j}'$）分解为以下正规模态：

$$\{\boldsymbol{u}', p', \boldsymbol{j}'\}(r,\theta,z,t) = \{\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{j}}\}(r,\theta)\, e^{i\alpha(z-ct)}, \tag{13}$$

其中，$\alpha c = \alpha c_r + i\alpha c_i$。若 c_i 为负，则扰动的时间增长率为负，我们称该流动为线性稳定；若 c_i 为正，则该流动为线性不稳定。最后，将这种正规模态分解代入方程（7），并围绕稳态层流（11）对方程进行线性化，得到以下二维扰动方程：

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0, \tag{14a}$$

$$i\alpha c \hat{\boldsymbol{u}} = i\alpha U \hat{\boldsymbol{u}} + \left(\hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{U} + \nabla \hat{p} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\boldsymbol{u}} - \frac{Ha^2}{Re} \left(\hat{\boldsymbol{j}} \times \mathbf{1}_{B_0} \right), \tag{14b}$$

$$\nabla \times \hat{\boldsymbol{j}} = \left(\mathbf{1}_{B_0} \cdot \nabla \right) \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{14c}$$

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = 0, \tag{14d}$$

其中，$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{1}_\theta + i\alpha \mathbf{1}_z$。根据 Theofilis [29]，，上述系统构成一个双全局稳定性问题，因为未知量取决于两个坐标 r 和 θ。

III. 数值方法

为离散基流方程 (12) 和扰动方程 (14)，在 r 和 θ 中，我们结合使用切比雪夫谱配置法和傅里叶谱配置法。因此，未知量在适当的基数函数上展开，并在物理空间 $\boldsymbol{x} = (r,\theta)$ [31]中求解。为了减少管道原点附近网格点的聚集，并消除 $r = 0$处的坐标奇异性，我们利用所谓的“旋转-反射”对称性 [32]。任意标量场 $f(r,\theta,z,t)$ 或向量场 $\boldsymbol{g}(r,\theta,z,t)$ 首先在冗余的~ ~ ~虚拟域 $[-1,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ 中，使用 $N = N_r N_\theta$ 个网格点进行离散，其中 N_r 和 N_θ 分别为切比雪夫配置点和傅里叶配置点的数量。随后施加以下对称性：

$$f(r,\theta,z,t) = f(-r,\theta \pm \pi,z,t), \tag{15a}$$

$$g_r(r,\theta,z,t) = -g_r(-r,\theta \pm \pi,z,t), \tag{15b}$$

$$g_\theta(r,\theta,z,t) = -g_\theta(-r,\theta \pm \pi,z,t), \tag{15c}$$

$$g_z(r,\theta,z,t) = g_z(-r,\theta \pm \pi,z,t), \tag{15d}$$

并以这种方式，将原始极坐标域 $[0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ 离散为 $= N_r N_\theta$ 个网格点，其中 $N_r = \tilde{N}_r/2$。在网格点处对连续流动量 $\hat{\boldsymbol{u}}(r,\ \theta)$、$\hat{p}(r,\ \theta)$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}(r,\ \theta)$ 进行求值，得到向量

$$\hat{\boldsymbol{U}} = \left(\hat{u}_{r,0}, \ldots, \hat{u}_{r,N-1}, \hat{u}_{\theta,0}, \ldots, \hat{u}_{\theta,N-1}, \hat{u}_{z,0}, \ldots, \hat{u}_{z,N-1} \right)^T, \tag{16}$$

$$\hat{P} = \left(\hat{p}_0, \ldots, \hat{p}_{N-1} \right)^T, \tag{17}$$

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \left(\hat{j}_{r,0}, \ldots, \hat{j}_{r,N-1}, \hat{j}_{\theta,0}, \ldots, \hat{j}_{\theta,N-1}, \hat{j}_{z,0}, \ldots, \hat{j}_{z,N-1} \right)^T, \tag{18}$$

其对应的大小为 $3N$、N 和 $3N$。方程组 (14) 的离散化对应项则为 s

$$F\hat{\boldsymbol{U}} = 0, \tag{19a}$$

$$i\alpha c \hat{\boldsymbol{U}} = S\hat{\boldsymbol{U}} + T\hat{P} + Q\hat{\boldsymbol{J}}, \tag{19b}$$

$$G\hat{\boldsymbol{J}} = E\hat{\boldsymbol{U}}. \tag{19c}$$

这里， S、 Q、 G和 E是大小为 $3N$的方阵，而 F和 T分别是大小为 $N\times 3N$和$3N\times N$的矩形矩阵。

式 (19c) 通过结合式 (14c) 和式 (14d) 的两个线性无关分量得到。因此，矩阵G 和 E 定义为

$$G=\begin{bmatrix} 0 & -i\alpha I & RD_\theta^{(1)} \\ i\alpha I & 0 & -D_r^{(1)} \\ D_r^{(1)}+R & RD_\theta^{(1)} & i\alpha I \\ I & -\chi RD_\theta^{(1)} & -\chi i\alpha I \end{bmatrix}\begin{matrix}\}N\\ \}N\\ \}(N_r-1)N_\theta\\ \}N_\theta\end{matrix}$$
$$\underbrace{\quad}_{N}\quad\underbrace{\quad}_{N}\quad\underbrace{\quad}_{N}$$

and

$$E=\begin{bmatrix} \cos\Theta D_r^{(1)}-\sin\Theta RD_\theta^{(1)} & \sin\Theta R & 0 \\ -\sin\Theta R & \cos\Theta D_r^{(1)}-\sin\Theta RD_\theta^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中， I为单位矩阵， $R=\mathsf{diag}\left(r_j^{-1}\right)$， $\Theta=\mathsf{diag}\left(\theta_j\right)$，对于 $j=0,\ 1,\ \ldots N-1$成立； $D_r^{(n)}$和 $D_\theta^{(n)}$ 分别是关于 r 和 θ的 n 阶微分矩阵。通过将 G 和 E 中对应于在 $r=1$ 处计算的式 (14d) 的行替换为式 (8b) 的离散化对应项，计入了关于 $\hat{}\boldsymbol{\jmath}$ 的电磁边界条件。后者由一个大小为 $N_\theta\times 3N$ 的矩阵表示。

如果利用式 (19c) 从式 (19b) 中消去 $\hat{}\boldsymbol{J}$，则可以仅用流体动力学变量 $\boldsymbol{U}$ 和 P 重写我们的方程组，

$$F\hat{\boldsymbol{U}}=0, \tag{21a}$$
$$i\alpha c\hat{\boldsymbol{U}}=S'\hat{\boldsymbol{U}}+T\hat{P}, \tag{21b}$$

其中 $S'=S+Q\left(G^{-1}E\right)$。这里 S表示微分矩阵

$$S=\begin{bmatrix} i\alpha\mathcal{U}-Re^{-1}\left(D^2-R^2\right) & 2Re^{-1}R^2D_\theta^{(1)} & 0 \\ -2Re^{-1}R^2D_\theta^{(1)} & i\alpha\mathcal{U}-Re^{-1}\left(D^2-R^2\right) & 0 \\ \left(D_r^{(1)}\mathcal{U}\right) & \left(D_\theta^{(1)}\mathcal{U}\right) & i\alpha\mathcal{U}-Re^{-1}D^2 \end{bmatrix}\begin{matrix}\}N\\ \}N\\ \}N\end{matrix},$$
$$\underbrace{\quad}_{N}\quad\underbrace{\quad}_{N}\quad\underbrace{\quad}_{N}$$

其中 $D^2=D_r^{(2)}+RD_r^{(1)}+R^2D_\theta^{(2)}-\alpha^2I$以及 $\mathcal{U}=\mathsf{diag}\left(U_j\right)$，对于 $j=0,\ 1,\ \ldots N-1$。随后，考虑到 $\hat{}\boldsymbol{u}$ 的边界条件，组装式（21）中出现的矩阵，得到

$$S'=\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ I & 0 & 0 \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ 0 & I & 0 \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{matrix}\}(N_r-1)N_\theta\\ \}N_\theta\\ \}(N_r-1)N_\theta\\ \}N_\theta\\ \}(N_r-1)N_\theta\\ \}N_\theta\end{matrix},\qquad T=\begin{bmatrix} D_r^{(1)} \\ 0 \\ RD_\theta^{(1)} \\ 0 \\ i\alpha I \\ 0 \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} \underbrace{D_r^{(1)}+R}_{N} & \underbrace{RD_\theta^{(1)}}_{N} & \underbrace{i\alpha I}_{N} \end{bmatrix}\}N.$$

总计而言，系统（21）包含 $4N$ 个未知量，边界条件作为附加线性方程处理。为从该系统中消除压力并降低内存需求，我们采用 [33]中所述的代数约化方法。为此，我们对矩阵 T 和 F^* 进行QR分解（此处 * 表示共轭转置）：

$$T=T_QT_R=\underbrace{\begin{bmatrix} T_{Q,1} & T_{Q,2} \end{bmatrix}}_{N\quad 2N}\begin{bmatrix} T_{R,1} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}\}N\\ \}2N\end{matrix},\quad F^*=F_QF_R=\underbrace{\begin{bmatrix} F_{Q,1} & F_{Q,2} \end{bmatrix}}_{N\quad 2N}\begin{bmatrix} F_{R,1} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}\}N\\ \}2N\end{matrix},$$

其中， T_Q 和 F_Q 是大小为 $3N$ 且具有正交归一列的酉矩阵， $T_{R,\ 1}$ 和$F_{R,\ 1}$ 是大小为 N的非奇异上三角矩阵。随后可利用这些变换定义另一组 $2N$ 未知量 $\boldsymbol{W}$

$$\hat{\boldsymbol{W}}=F_{Q,2}^*\hat{\boldsymbol{U}}\quad\text{and}\quad\hat{\boldsymbol{U}}=F_{Q,2}\hat{\boldsymbol{W}}. \tag{22}$$

表 I. 哈根-泊肃叶流在 $Re = 3000$ 和 $\alpha = 1$ 下最不稳定特征值的收敛性。 N_r 是计算域中的切比雪夫配置点数量。本文使用二维谱代码获得的结果与 [37] 中报告的结果进行了比较。

Schmid & Henningson [37]	本研究	
$c,\, n = 0$	N_r	c
(0.94836022, −0.05197311)	15	(0.94851426, −0.05185138)
	19	(0.94836026, −0.05197305)
	23	(0.94836022, −0.05197311)
$c,\, n = 1$		
(0.91146557, −0.04127564)	18	(0.91148503, −0.04126378)
	22	(0.91146537, −0.04127591)
	26	(0.91146557, −0.04127564)
$c,\, n = 2$		
(0.88829766, −0.06028569)	16	(0.88829953, −0.06032205)
	20	(0.88829742, −0.06028591)
	24	(0.88829766, −0.06028569)

代入最后一个 将该表达式代入式（21b），并利用 T的QR分解，我们得到 n

$$(i\alpha c - S')\, F_{Q,2}\hat{\boldsymbol{W}} - T_{Q,1}T_{R,1}\hat{P} = 0. \tag{23}$$

将该矩阵方程与 $T^*_{Q,\ 2}$ 相乘，得到

$$T^*_{Q,2}\,(i\alpha c - S')\, F_{Q,2}\hat{\boldsymbol{W}} = 0, \tag{24}$$

这里用到了 T_Q 各列的正交归一性。采用与 [33], 中相同的记号，我们将上述方程改写如下:

$$i\alpha c\hat{\boldsymbol{W}} = H\hat{\boldsymbol{W}}, \tag{25}$$

其中 $H = A_{22}^{-1}M_{22}$, $A_{22} = T^*_{Q,\ 2}F_{Q,\ 2}$以及 $M_{22} = T^*_{Q,\ 2}S'F_{Q,\ 2}$ （ A_{22}的非奇异性是矩阵 FT 非奇异性的推论，见 [33]）。求解这个规模为 $2N$ 的特征值问题，可显著降低计算量；并且按照构造，它只会得到原系统 (21) 的有限部分谱。式 (25) 中的离散算子由内部开发的 Python 求解器实现，该求解器依赖 NumPy 库 [34]。根据不同流动状态下观察到的收敛特性，我们随后使用 SciPy [35]或 SLEPc [36]软件包求解复矩阵特征值问题 (25)。

数值过程分两个阶段进行了验证。首先，我们将基流方程的求解结果与现有的数值解 [28] 和解析解 [24, 25]进行了比较。其次，我们利用哈根-泊肃叶流 [2, 37], 以及受轴向磁场 [21]作用的磁流体力学管流的线性稳定性分析结果，检验了线性稳定性问题的表述。在表 I 中，我们比较了我们与 Schmid & Henningson [37] 对哈根-泊肃叶流进行线性稳定性分析所得的结果。我们发现，在计算域 $r > 0$中最多使用 26 个切比雪夫配置点，衰减率便可达到 9 位有效数字的一致。受均匀轴向磁场 $\mathbf{1}_{B_0} = \mathbf{1}_z$ 作用的磁流体力学管流的特征值谱见图 2。我们将采用磁流体力学方程二维表述得到的结果，与文献 [21] 针对方位波数 $n = 1$报告的结果进行了比较。与受横向磁场作用的磁流体力学管流不同，在此情形下，磁场不会改变基流。因此，该问题在轴向和方位向均匀。我们看到，Akerstedt[21] 采用一维表述为 $n = 1$ 得到的所有特征值，都包含在完整谱中；完整谱还涵盖了其他所有可能的方位波数。在本研究中，我们自然地观察到，随着雷诺数和哈特曼数增大，收敛至所报告结果所需的网格点数也随之增加。对于导电情形，这一点尤为明显，其特征是罗伯茨层中逐渐出现速度超速区域。通常，为使所报告的增长率收敛至 7 位有效数字，我们分别在 40 至 120 和 35 至 60 的范围内取用 N_θ 和 N_r 。

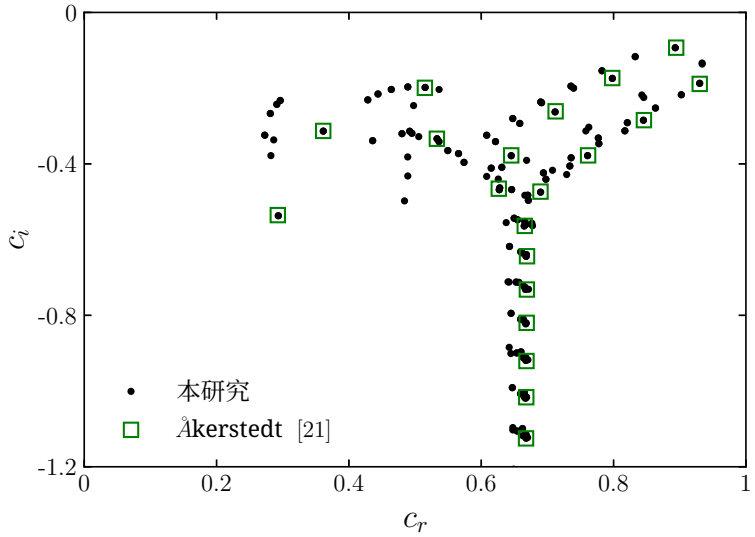

图2. 对于均匀轴向磁场作用下磁流体力学管流的情形，当 $Re = 1000$、$\alpha = 1$、$Ha = 44.7$ 和 $\chi = \infty$时的特征值谱。在本文中获得的结果与 [21] 针对方位波数 $n = 1$ 报道的结果进行了比较。

IV. 结果

A. 基流剖面

与 Akerstedt [21],研究的受流向磁场作用的磁流体力学管流不同，施加横向磁场时，基流速度剖面不再具有轴向对称性。一般而言，该剖面会沿磁场方向拉长；当管壁电导率非零时，也可能出现速度超速区域。当电流进入管壁时，在某些流动参数下会产生后一种效应，使侧层（又称罗伯茨层）中的流速高于核心区 [27, 28]。

为说明这一重要特征，我们在图3中展示了基流速度 $U(r, \theta)$ 的等值线，其中 $Ha = 60$ for$\chi = 0$ 和 $\chi = \infty$。在这两种情况下，剖面均沿磁场方向拉长，但只有当壁面具有电导性时，侧层中才会出现超速区域。关于速度超调出现的详细判据，可参见 Vantieghem 等 [28]。特别是，这些作者表明，超速区域仅在 $Ha > 12$ 且电导率非零时才会出现。对于 $Ha \geq 250$，观察到这些区域所需的最小电导率按 $Ha^{-2/3}$ 缩放。图4(a)和图4(b)进一步展示了速度超调存在所需的最小哈特曼数和有限电导率，分别显示了随着 Ha 和 χ 增大，其逐渐形成的过程。

B. 不稳定性机制

流动的稳定性由虚部 c_i 最大的全局特征值 c 决定。在图5(a)中，我们绘出了 c_i 的最大值随哈特曼数 Ha 的变化关系，其中 $Re = 10^5$ 和 $\alpha = 1.5$ 分别对应完全绝缘壁和完全导电壁的情形。在没有磁场时，哈根-泊肃叶流是线性稳定的，且 $\max(c_i) = -5.874 \cdot 10^{-3}$。从图中可以观察到，对于两种导电性，在中等哈特曼数区间 $0 < Ha \leq 50$ 内，磁流体力学管流中主导特征模态的衰减率超过了这一数值。这表明，由于平均流变形，处于横向磁场中的磁流体力学管流比其水动力学对应流动更不稳定。对于较小的 Ha，两种情形对应的曲线无法区分。在此范围内，磁场对基流速度剖面的改变主要表现为沿 $\boldsymbol{B}_0$ 的拉长，并且对所有 χ 均如此。对于 $Ha \gtrsim 5$，我们看到磁场的致不稳定效应在 $\chi = \infty$ 时变得更加明显。在这种情况下，流动甚至在 $16 \leq Ha \leq 23$ 时变为线性不稳定；而当 $\chi = 0$ 时，对于 Ha 的所有取值，流动都保持稳定。

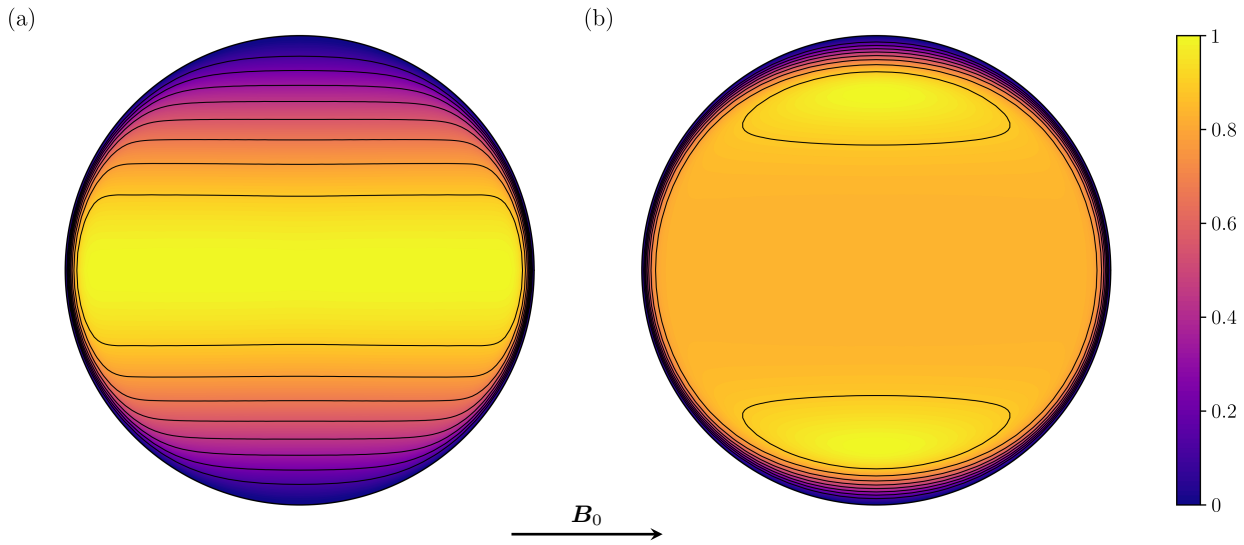

图3. 基流速度 $U(r,\ \theta)$在 $Ha = 60$ 和 (a) $\chi = 0$ 及 (b) $\chi = \infty$下的等值线。

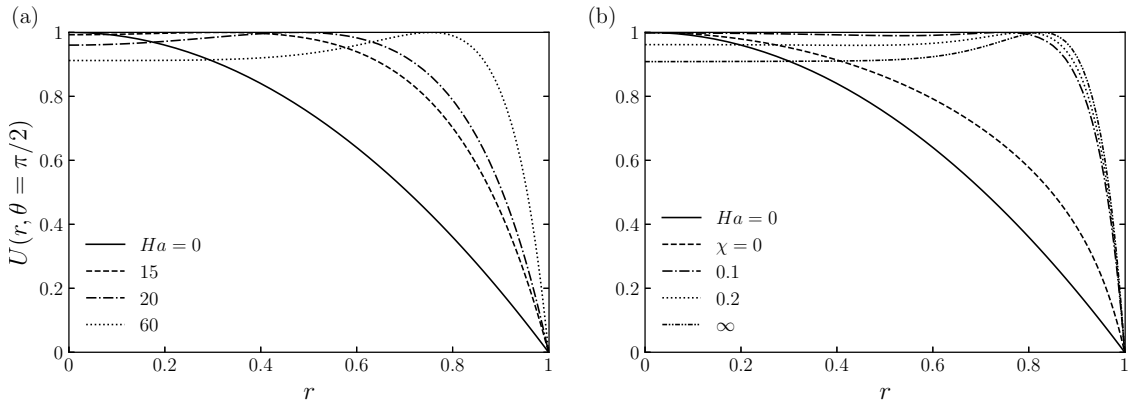

图4. 基流速度剖面中速度超速区域的出现：(a) 在 $\chi = \infty$处，随着 Ha 增大；(b) 在 $Ha = 100$处，随着 χ 增大。

我们将导电情形下流动的不稳定性归因于速度剖面中超速区域的出现以及拐点的形成。首先，不稳定性恰好在超速区域形成后出现，而超速区域仅存在于导电情形中。其次，从图5(b)可以观察到，导电情形下最不稳定模态的相速度与速度剖面中拐点附近流动的相速度非常相似（见图4(a)）。我们还注意到，$Ha \gtrsim 30$ 在 c_r 时趋于平坦，这与 Vantieghem等人的结果一致；他们表明，对于较大的哈特曼数，超速区域中的速度与核心区中的速度之比会收敛到一个固定值。

对于磁流体动力学流动，稳定性特性取决于平均流变形与焦耳阻尼强度各自的作用。为了单独考察平均流变形的影响，我们进行了一次数值实验：在方程（14b）中抑制电磁项，并使用系统（12）计算得到的基流求解流体动力学稳定性问题。表II列出了 $Re = 10^4$, $\alpha = 1.5$, $\chi = 0,\ \infty$以及不同 Ha值下的一些结果。在完全绝缘情形下，随着哈特曼数增大，哈特曼层变薄，流动趋于不稳定。然而，当 Ha取较大值时，主导特征值的衰减率几乎保持不变。因此，即使不存在焦耳阻尼，绝缘情形下的基流修正以及超速区域的缺失也不会使流动变得不稳定。需要指出的是，这一结论已在雷诺数高达 10^6的情况下得到检验。在完全导电情形下，抑制焦耳耗散如预期那样会提高主导特征模态的增长率，并使得在较低雷诺数下发生

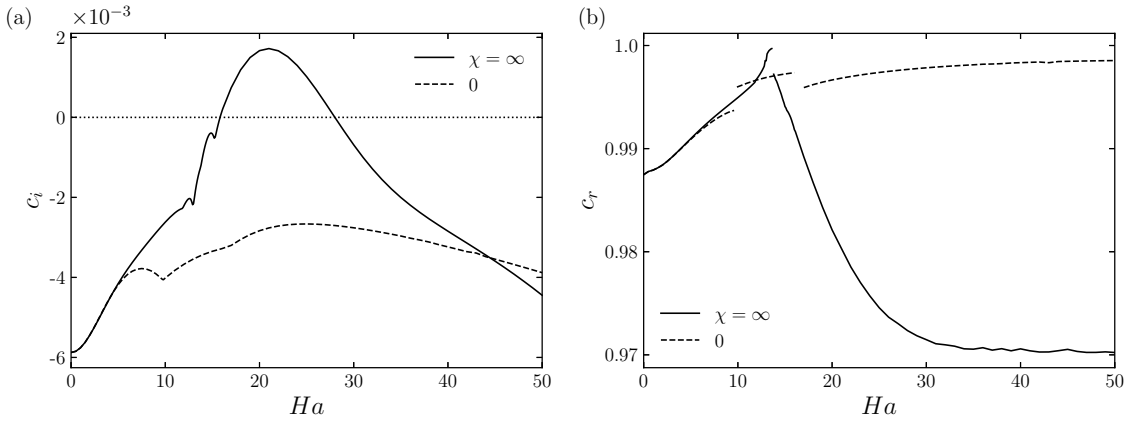

图5. (a) 增长率 c_i 和 $\chi = 0$ （虚线）和 $\chi = \infty$ (b) 主导特征模态的相速度 c_r 随哈特曼数 Ha 变化的关系，其中（实线），在 $Re = 10^5$ 和 $\alpha = 1.5$时。

表II. 在完全绝缘壁面和完全导电壁面情况下，不同 Ha 对应的有磁阻尼和无磁阻尼时的最大特征值。

χ	Ha	c_i 有磁阻尼	c_i 没有磁阻尼
0	15	-0.015072	-0.007913
	60	-0.020923	-0.004959
	200	-0.030967	-0.004792
∞	15	-0.00705	-0.002428
	60	-0.015753	0.003715

不稳定成为可能。

再次观察图5(a)，也可以清楚地看出焦耳阻尼的影响： c_i 对 Ha 的依赖关系是非单调的。在区间 $0 \leq Ha \leq 50$ 内，完全绝缘和完全导电情形下的全局最大值分别出现在 $Ha = 25$ 和 $Ha = 21$处。超过这些值后，基流速度剖面的变化对流动造成的失稳作用会受到焦耳阻尼的抑制，而焦耳阻尼对流动稳定性的影响方向相反。值得注意的是，在完全导电情形下，当超速区域相对于核心流达到最大幅度时，对于 $Ha \gtrsim 30$ ，磁阻尼的稳定作用开始占主导。

作为本节的总结，我们在图6中绘出了 $\chi = \infty$的中性稳定曲线。对于给定的轴向波数 α，中性状态由临界雷诺数 Re_c 确定，此时增长率$c_i = 0$。图6(a)展示了不同 Ha 取值下， Re_c 随 α 的变化关系。对于 $Ha = 15$，当 $1 \leq \alpha \leq 2.5$时，中性雷诺数的量级为 10^5 。如上文所述，哈特曼数增加时，流动起初会变得更不稳定；而当哈特曼数较高时，由于磁阻尼增强，流动会趋于稳定。图6(b)展示了中等 Ha取值下， Re_c 对所有 α 取最小值后随 Ha 的变化关系。该曲线的最小值对应于全局临界雷诺数 $Re_c = 45230$ ，其出现于 $Ha = 19.7$ 和$\alpha = 1.37$处。

C. 有限 χ下的线性稳定性

在本节中，我们分析壁面电导率比 χ 对磁流体力学管流稳定性特征的影响。根据 χ，可以确定两种不同的流态，其中最不稳定模态分别对应较大或较小的轴向波数 α （因此，轴向波长较短或较长）。图7绘出了对所有 Ha 和 α 取值进行最小化后得到的相应全局临界雷诺数。对于 $0 < \chi < 0.176$，短波模态区间最不稳定。相应的 Re_c 曲线在 $\chi = 0.1$ 处达到最小值 107420。对于 $\chi > 0.176$，稳定性阈值由长波模态区间决定；随着 χ 增大，临界雷诺数迅速趋近于 $Re_c = 45230$ 的全局最小值

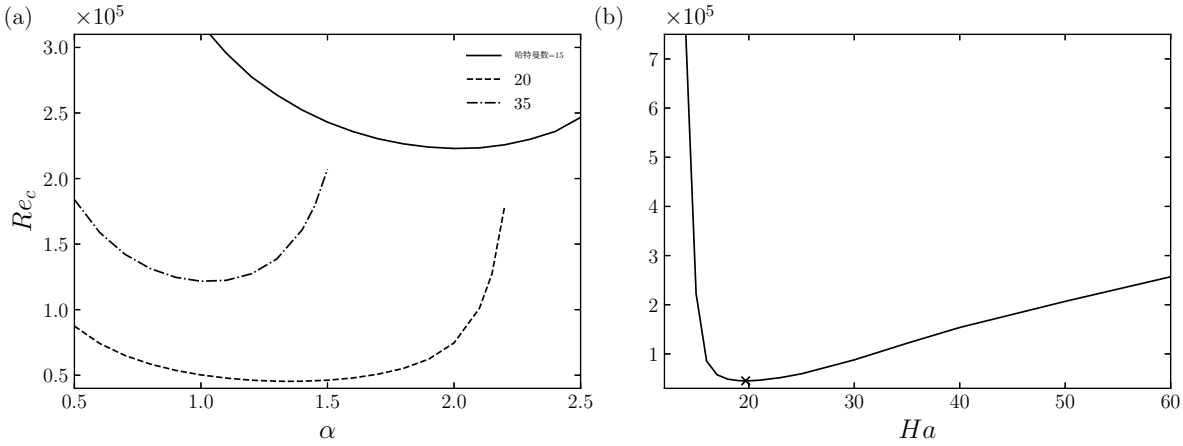

图6。（a）对于 $\chi = \infty$ 和不同的 Ha取值，临界雷诺数 Re 随轴向波数 α 的变化关系。（b）对于 $\chi = \infty$，在所有 α 上优化得到的临界雷诺数 Re_c 随哈特曼数 Ha 的变化关系。标记 $\times$ 对应于在 $Ha = 19.7$ 和 $\alpha = 1.37$条件下出现的临界雷诺数 $Re_c = 45230$ 。

与 $\chi = \infty$ 相关。

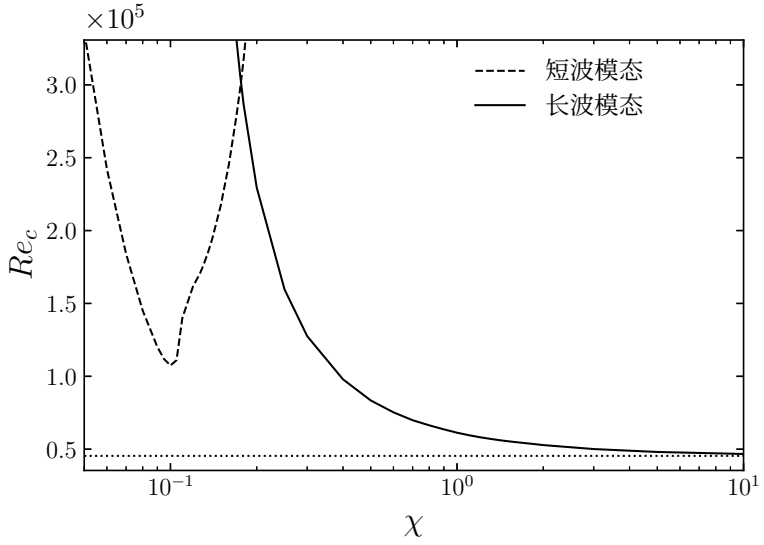

图7。临界雷诺数 Re_c 随壁面电导率比 χ的变化关系。虚线和实线曲线对应于两种失稳区域。点线标示了在 $\chi = \infty$条件下出现的全局临界雷诺数 $Re_c = 45230$ 。

不同 χ 值下最不稳定模态对应的临界波数 α_c 和临界哈特曼数 Ha_c 分别如图8(a)和图8(b)所示。在两幅图中，$\chi = 0.176$ 处出现的不连续性标志着短波区间与长波区间之间的转捩。因此，较低的壁面电导率比和短波模态与较高的 Ha相关。这一行为与Vantieghem等 [28]的结果一致；他们表明，基流速度剖面中速度超调开始出现时所对应的哈特曼数会随着 χ 的减小而增大（在 $Ha = 35$附近的局部最小值处除外） [28]。当χ较大时，即在长波区间内，对于 $\chi \gtrsim 0.4$ 和 $\chi \gtrsim 1.9$， $\alpha_c \approx 1.4$ 和 $Ha_c \approx 20$ 分别为。

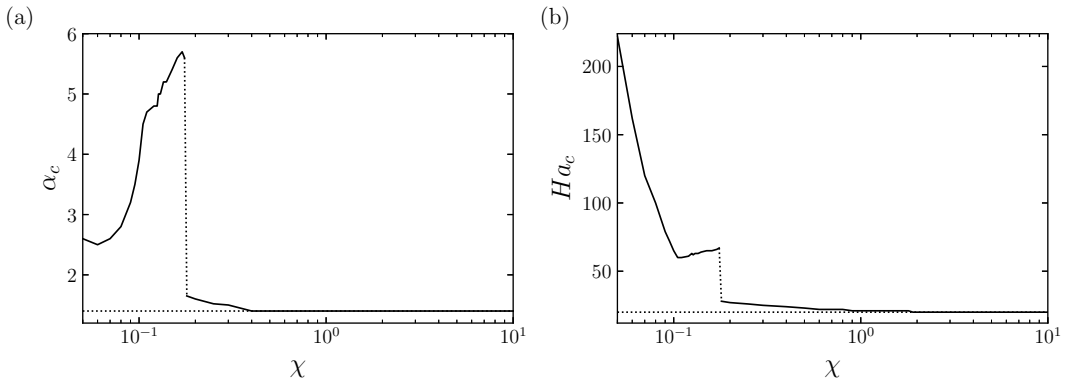

图 8. (a) 临界轴向波数 α_c 和 (b) 临界哈特曼数 Ha_c 随壁面电导率比 χ的变化。曲线中的不连续点是由不稳定性状态的改变所致。

D. 最不稳定扰动的特征

现在讨论最不稳定扰动的结构。当 $Ha > 0$时，扰动方程（14）允许四种不同对称性类型的解，这类似于Tatsumi [38] 针对正方形或矩形横截面管道中的流动所描述的情形。在图9(a)和图9(b)中，我们分别绘出了 $\chi = 0.1$ 和$\chi = \infty$时出现的最不稳定短波模态和长波模态的流向速度扰动等值线。我们注意到，它们具有不同类型的轴向对称性。短波模态的流向速度相对于笛卡尔坐标轴 x 和 y分别呈反对称和对称（A-S），而长波模态的流向速度相对于两者均呈反对称（A-A）。在Tatsumi [38] 以及后来Priede等 [13] 关于磁流体力学管道流的研究中，这些A-S和A-A模态分别被标记为模态I和模态II。上述观察具有普遍性：我们总是发现，在不稳定性的短波区间内，最不稳定模态沿磁场方向呈对称性；而在长波区间内，稳定性阈值由相对于 y-轴具有相反对称性的A-A模态确定。该性质与以下事实一致：长波模态区间仅在较小的哈特曼数和较大的 χ 值下占主导（见第IV C节）。因此，鉴于其A-A对称性，这类模态会经历较强的焦耳阻尼，并被强磁场迅速衰减。

从图 9(c) 和 9(d) 还可以看出，随着哈特曼数增大，最不稳定扰动的速度分布相较于图 9(a) 和 9(b) 中的分布如何变化。由于扰动局限于速度超速区域，随着磁场增强、罗伯茨层变薄，扰动逐渐被排挤出流动核心。

考虑短波和长波临界模态时，三个速度分量之间的能量分配也存在显著差异。沿轴向波长取平均后，长波模态的大部分动能集中在流向速度分量中。如图 10 所示，扰动主要由成对的高速和低速纵向条带构成。对流线进行详细考察还表明，在流向速度较低的区域，另外两个速度分量使流体质点能够从一条条带转移到另一条条带。

在短波区间，动能集中于垂直于磁场方向的速度分量中。扰动由与磁场对齐、反向旋转的展向涡卷构成（见图 11）。我们再次强调，这类结构所受的焦耳阻尼远小于长波区间中具有代表性的条带，因此它们在高哈特曼数下占主导地位是合理的。

V. 结论与讨论

本研究采用准静态近似，分析了均匀横向磁场作用下磁流体力学管流的全局稳定性。研究发现，在中等哈特曼数下，其稳定性低于无磁场时的情况——哈根-泊肃叶流。磁场的致不稳定作用源于基流速度剖面的改变。因此，流动的稳定性特征强烈依赖于哈特曼数和壁面电导率比。

我们的结果表明，t 圆形绝缘管中的磁流体力学管流在线性上稳定，直至 $Re = 10^6$.

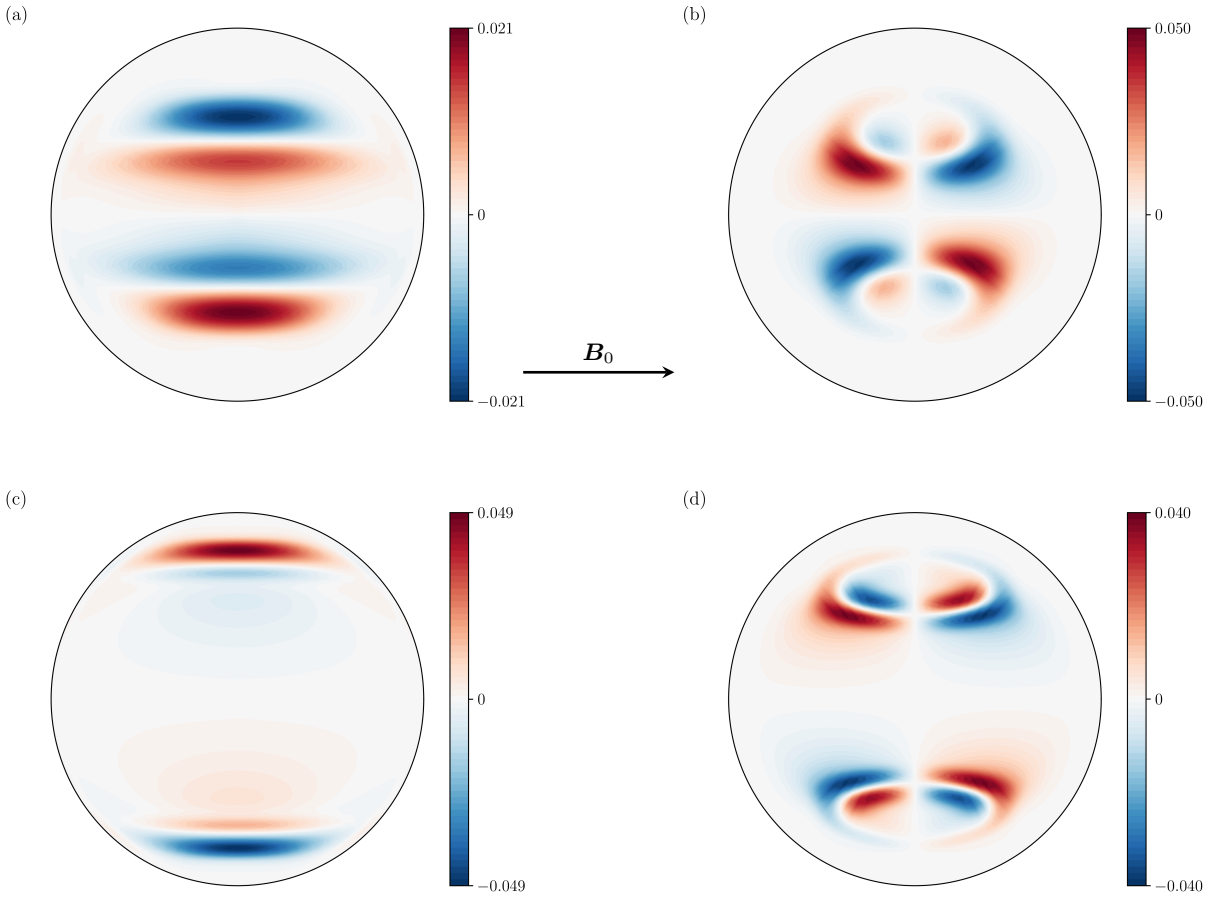

图 9. $z = 0$ 处临界模态流向速度的等值线：(a) $\chi = 0.1$, $Ha = 65$；(b) $\chi = \infty$, $Ha = 20$；(c) $\chi = 0.05$, $Ha = 222$；(d) $\chi = \infty$, $Ha = 35$。

然而，我们无法完全排除在更高雷诺数下出现不稳定性的可能性。在绝缘管道中，基流速度剖面仅沿磁场方向发生拉伸，从而导致薄哈特曼层的出现。当哈特曼数 [39, 40] 足够高时，这类哈特曼层会在通道流中对雷诺数 $Re_c' = Re_c/Ha \approx 48311$ 变得不稳定。然而，在磁流体力学管流中，必须考虑弯曲侧壁的稳定化作用。 [41], 对此已有相关讨论；椭圆管流同样在某一展向方向上呈现拉伸的剖面。与矩形管道中的流动类似， [38], 它会对平行平面间流动中最不稳定扰动的展向调制类似模态变得不稳定。然而，由于边界曲率，椭圆管中的不稳定性要在远高于具有相似长宽比的管道的雷诺数下才会出现。

相比之下，具有横向磁场和导电壁的管道内 MHD 流动，在哈特曼数 Ha 和壁面电导率比 χ 足够大时会变得不稳定。在这种流态下，基流速度剖面在罗伯茨层中呈现两个侧壁极大值，这意味着可能发生拐点不稳定性 [42]。事实上，确实观察到了这种不稳定性；与给定 χ 时最小临界雷诺数 Re_c 相对应的临界哈特曼数 Ha_c，通常略大于侧壁速度超速开始出现时的哈特曼数。当 Ha 增大时，由于磁阻尼增强，流动趋于稳定。存在两种不同的不稳定区间，分别对应于 $0 < \chi < 0.176$ 和$\chi > 0.176$，主要与较短或较长的轴向波长以及较高或较低的哈特曼数有关。在短波区间， Re_c 在 $\chi = 0.1$ 时达到最小值 107420；而在长波区间，Re_c 随 χ 单调变化，并在 $\chi \to \infty$ 时趋近于 45230。此外，当 $\chi \gtrsim 0.4$ 和 $\chi \gtrsim 1.9$ 时，长波模态的轴向波数和哈特曼数分别保持恒定。

两个失稳区域中，最不稳定扰动的性质也有所不同。在长波区间，扰动由成对的高速和低速纵向条带构成，且大部分动能集中在

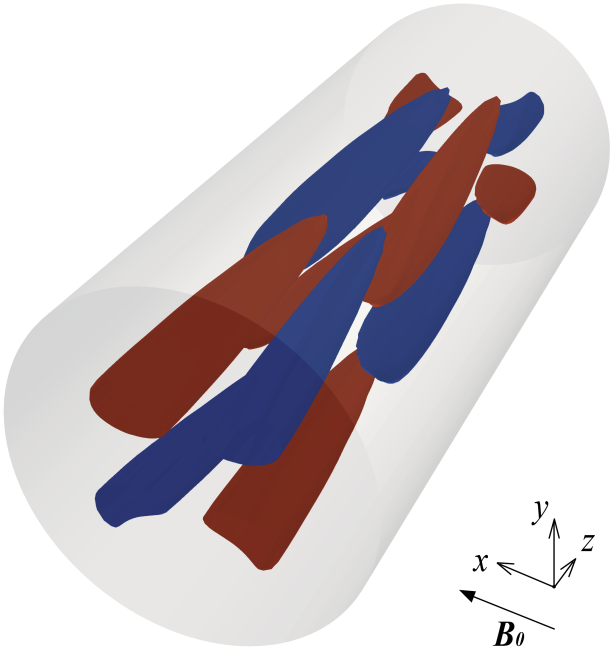

图 10. 最不稳定长波扰动的流向速度分量等值面，由低速（蓝色）和高速（红色）条带组成。图中展示了一个轴向波长范围内，在 $\chi = \infty$, $Ha = 20$, $\alpha = 1.4$ 和 $Re_c = 45400$ 处的扰动。

流向速度分量中。这些扰动在管道横截面上完全反对称。另一方面，短波区间的特征是展向涡，其动能由垂直于磁场的速度分量承载。因此，这些扰动在管道横截面上呈反对称—对称结构。扰动结构的这种差异可以这样解释：长波区间对应较高的哈特曼数，而相应的完全反对称模态会受到强烈的焦耳阻尼；相比之下，短波展向涡则不会受到如此强烈的阻尼。

遗憾的是，目前关于横向磁场下磁流体力学管流转捩的实验数据有限。Zhang等人 [43]最近开展的实验，旨在考察与本研究所讨论条件完全相同的情形。然而，作者报告的不同 Ha 值对应的临界雷诺数，比本文所述线性稳定性理论的预测值低两个数量级。这种差异可能是由类似哈根-泊肃叶流中发生的旁路转捩造成的，也可能是由于磁场中的流动存在入口效应，从而影响了实验中观察到的转捩。在此背景下，未来开展横向磁场下磁流体力学管流瞬态增长方面的研究将很有价值。

致谢

作者感谢 A. Morozov 富有成效的讨论。本研究是在以下框架内开展的：1）由欧盟通过欧拉atom研究与培训计划（资助协议编号 101052200 — EUROfusion）资助的 EUROfusion 联盟；2）比利时聚变协会。本研究还获得了联邦公共服务经济、中小企业、自雇人士与能源部的资助。文中所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟、欧盟委员会或联邦公共服务经济、中小企业、自雇人士与能源部的立场。欧盟、

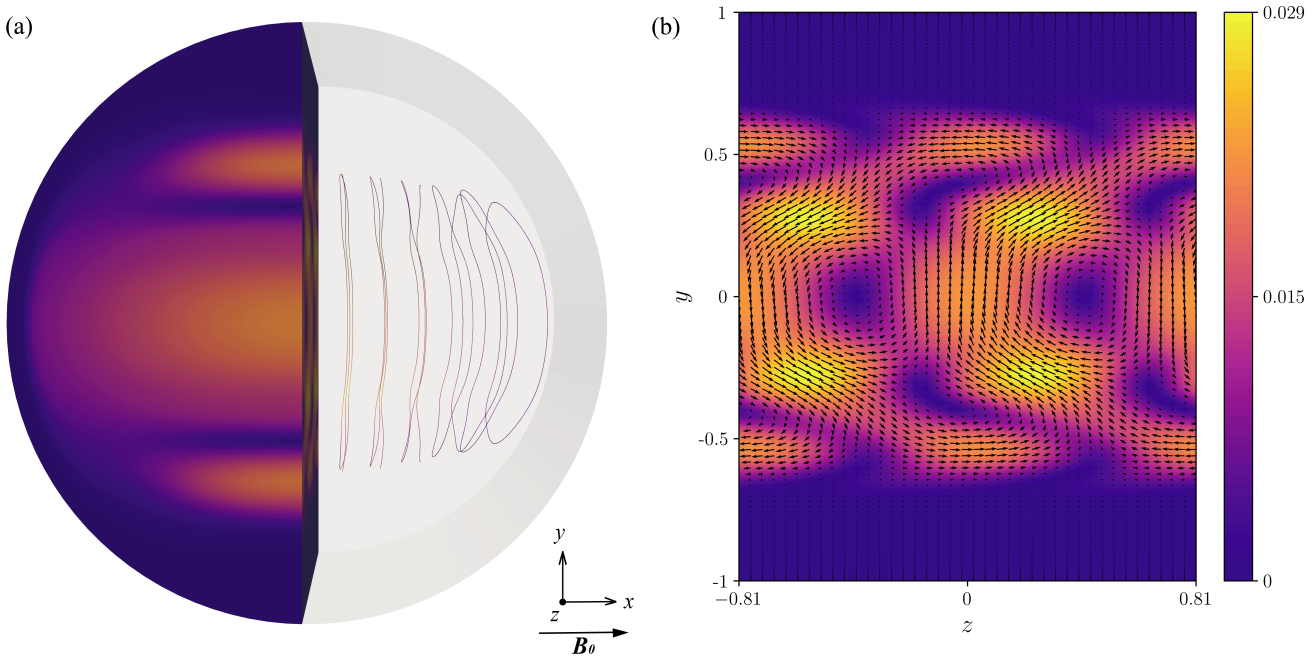

图 11。（a）短波区间内速度大小的等值线和速度场的流线。（b）相应的$y-z$流场和速度大小的等值线。所示扰动对应于$\chi=0.1$、$Ha=65$、$\alpha=3.9$和$Re=107420$。

中小企业、自雇人士与能源部均不对这些观点和意见承担责任。

---

[1] M. Lessen、S. G. Sadler 和 T.-Y. Liu，管道泊肃叶流稳定性，《物理流体》**11**，1404（1968）。[2] A. Meseguer 和 L. N. Trefethen，雷诺数 10^7, 下的线性化管流，《计算物理学杂志》**186**，178（2003）。[3] O. Reynolds，关于决定水的运动是直线状还是蜿蜒状的条件，以及平行通道中阻力定律的实验研究，《伦敦皇家学会会刊》**174**，935（1883）。[4] I. J. Wygnanski 和 F. H. Champagne，管道转捩。第一部分：湍流斑和湍流团的起源以及湍流团中的流动，《流体力学杂志》**59**，281（1973）。[5] P. J. Schmid 和 H. D. S.，*Stability and Transition in Shear Flows*，第 1 版（施普林格，2001）。[6] C. C. T. Pringle 和 R. R. Kerswell，利用非线性瞬态增长构造剪切流湍流的最小种子，《物理评论快报》**105**，154502（2010）。[7] C. C. T. Pringle、A. P. Willis 和 R. R. Kerswell，管流中的完全局域化非线性能量增长最优扰动，《物理流体》**27**，064102（2015）。[8] M. Avila、D. Barkley 和 B. Hof，管流向湍流的转捩，《流体力学年度评论》**55**，575（2023）。[9] J. Hartmann 和 F. Lazarus，汞动力学 II：均匀磁场中汞的流动实验研究，《丹麦皇家科学院数学物理通讯》**15**，1（1937）。[10] Q. Chen、Y. Jiang、J. Yan 和 M. Qin，晶体生长过程中流体流动建模的进展，《自然科学进展》**18**，1465 2008（）。[11] R. Chaudhary、B. G. Thomas 和 S. P. Vanka，电磁制动（EMBr）对采用大涡模拟的板坯连铸中瞬态湍流的影响，《冶金与材料学报B辑》**43**，532（2012）。[12] A. B. Tsinober，磁流体流动减阻，载于 *Viscous drag reduction in boundary layers*，D. Bushnell 和 J. N. Hefner 编（美国航空航天学会，1990），第 327–350 页。[13] J. Priede、S. Aleksandrova 和 S. Molokov，Hunt 流的线性稳定性，《流体力学杂志》**649**，115（2010）。[14] J. Priede、S. Aleksandrova 和 S. Molokov，理想导电矩形管道中磁流体流动的线性稳定性，《流体力学杂志》**708**，111（2012），1111.0036。[15] J. Priede、T. Arlt 和 L. B¨uhler，带薄导电壁的方形管道中磁流体流动的线性稳定性，《流体力学杂志》**788**，129（2016）。[16] D. Krasnov、O. Zikanov、M. Rossi 和 T. Boeck，磁流体管道流中的最优线性增长，《流体力学杂志》**653**，273（2010）。[17] O. Zikanov、D. Krasnov、T. Boeck、A. Thess 和 M. Rossi，磁流体管道中的层流-湍流转捩，

管道流与通道流，《应用力学评论》66，030802（2014）。[18] A. Blishchik 和 S. Kenjereˇs，有限电壁电导率导致初始处于湍流状态的磁流体管道流出现一种新型流动状态的观测，《物理评论 E》104，L013101（2021）。[19] O. Zikanov、Y. I. Listratov 和 V. G. Sviridov，强横向磁场下水平管道流动中的自然对流，《流体力学杂志》720，486–（2013）。[20] J. Hu、H. Wu 和 B. Song，底部加热和横向磁场作用下水平管道流动的线性不稳定性与非线性流动状态，《流体力学杂志》953，A33（2022）。[21] H. O. ̊Akerstedt，水磁流体管道流中三维扰动瞬态能量增长的阻尼，《流体动力学研究》15，295（1995）。[22] R. A. Gardner 和 P. S. Lykoudis，横向磁场中的磁流体管道流。第一部分：等温流动，《流体力学杂志》47，737（1971）。[23] L. Moriconi，磁耗散对磁流体管流近壁湍流相干结构的作用，《物理评论 E》101，043111（2020），1909.13289。[24] S. Ihara、K. Tajima 和 A. Matsushima，均匀横向磁场下有限电导率圆管中的导电流体流动，《应用力学杂志》34，29（1967）。[25] R. R. Gold，磁流体力学管流。第一部分，《流体力学杂志》13，505（1962）。[26] J. A. Shercliff，横向磁场下圆管中的导电流体流动，《流体力学杂志》1，644（1956）。[27] S. A. Samad，均匀横向磁场下流经具有有限电导率和有限壁厚圆管的导电流体，《国际工程科学杂志》19，1221（1981）。[28] S. Vantieghem、X. Albets-Chico 和 B. Knaepen，圆形导电管道中层流磁流体力学流动的速度剖面，《理论与计算流体动力学》23，525（2009）。[29] V. Theofilis，全局线性不稳定性，《流体力学年度评论》43，319（2011）。[30] U. M¨uller 和 B. L.， *Magnetofluiddynamics in Channels and Containers*，第一版（施普林格，2001）。[31] J. P. Boyd， *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*，第二版（DOVER Publications, Inc.，2000）。[32] L. N. Trefethen， *Spectral Methods in MATLAB*（SIAM，2000）。[33] A. V. Boiko 和 Y. M. Nechepurenko，恒定横截面层流管道流时间稳定性的数值谱分析，《计算数学与数学物理》48，1699（2008）。[34] C. R. Harris、K. J. Millman、S. J. van der Walt、R. Gommers、P. Virtanen、D. Cournapeau、E. Wieser、J. Taylor、S. Berg 和 N. J. Smith，使用 NumPy 进行数组编程，《自然》585，357（2020）。[35] P. Virtanen、R. Gommers、T. E. Oliphant、M. Haberland、T. Reddy、D. Cournapeau、E. Burovski、P. Peterson、W. Weckesser 和 J. Bright，SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法，《自然·方法》17，261（2020）。[36] V. Hernandez、J. E. Roman 和 V. E. Vidal，SLEPc：用于求解特征值问题的可扩展、灵活工具包，《ACM 数学软件汇刊》31，351–（2005）。[37] P. J. Schmid 和 D. S. Henningson，哈根–泊肃叶流中的最优能量密度增长，《流体力学杂志》277，197（1994）。[38] T. Tatsumi 和 T. Yoshimura，矩形管道中层流的稳定性，《流体力学杂志》212，437（1990）。[39] R. C. Lock，横向磁场下平行平面间导电流体流动的稳定性，《伦敦皇家学会会刊》A 233，105（1955）。[40] M. Takashima，横向磁场作用下修正平面泊肃叶流动的稳定性，《流体动力学研究》17，293（1996）。[41] R. R. Kerswell 和 A. Davey，椭圆管流的线性不稳定性，《流体力学杂志》316，307（1996）。[42] B. J. Bayly、S. A. Orszag 和 T. Herbert，剪切流转捩中的不稳定机制，《流体力学年度评论》20，359（1988）。[43] X. Zhang、C. Pan 和 Z. Xu，导电壁圆管中液态金属磁流体力学湍流的实验研究，《聚变工程与设计》125，647（2017）。