arXiv:2303.00398v1 [math.PR] 1 Mar 2023

泊松空间的 Wasserstein几何与 Ricci 曲率下界

Lorenzo DELLO SCHIAVO[1], Ronan HERRY[2], Kohei SUZUKI[3]

[1]奥地利科学与技术研究所 *AmCampus 1，3400* 克洛斯特新堡，奥地利lorenzo.delloschiavo@ist.ac.at[2] *IRMAR*，雷恩第一大学，*263 avenue du Général Leclerc*，*35042* 雷恩 *Cedex*ronan.herry@univ-rennes1.fr[3]数学科学系，杜伦大学，*Science Laboratories*，*South Road*，*DH1 3LE*，英国kohei.suzuki@durham.ac.uk

2023年3月2日

摘要

设 Υ 为建立在一个完备且可分度量基空间上的构型空间，并赋予泊松测度 π。我们从最优传输和里奇曲率下界的角度研究 Υ 的几何。为此，我们在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$上定义一种形式黎曼结构； $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$是定义在 Υ 上的、具有有限一阶矩的概率测度空间；并在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$上构造扩展距离 $\mathcal{W}$。在我们的框架下，距离 $\mathcal{W}$ 对应于 Wasserstein距离的 Benamou–Brenier 变分表述。我们的主要技术工具是一个通过泊松空间上的差分算子定义的非局部连续性方程。我们证明，相对熵的定义域的闭包在赋予$\mathcal{W}$后是一个完备测地空间。我们建立了关于度量测度空间上 Wasserstein空间几何结果的非局部无限维类比，其中合成 Ricci 曲率具有下界。特别地，我们得到：

- 奥恩斯坦–乌伦贝克半群是相对熵的梯度流；
- 泊松空间的里奇曲率在熵意义下有界于 1 以下；
- 距离 $\mathcal{W}$ 满足 HWI 不等式。

目录

1 引言 3

1.1 主要结果.3 1.2 我们构造的概要.4 1.3 研究动机.4 1.4 相关工作.5 1.4.1 马尔可夫链和跳跃过程的熵里奇曲率 5 1.4.2 构型空间的其他传输代价.5 1.4.3 构型空间上的其他几何.5 1.4.4 维纳空间的曲率.6 1.5 论文概要.6 1.6 致谢.7

2 点过程的拓扑学结果 7
2.1 函数空间与测度空间的拓扑预备知识 . . . . . 72.1.1 弱拓扑.72.1.2 模糊拓扑.82.1.3 弱拓扑和模糊拓扑的拓扑性质.82.2 点过程、强度测度、Campbell测度、拉普拉斯变换 . . . . 92.3 上的弱收敛 $\mathcal{P}(\Upsilon)$ .92.4 局部可积点过程.10

3 离散算子与Ornstein–Uhlenbeck动力学 15
3.1 Mehler公式、差分算子、函数散度.153.2 Sobolev空间.163.3 奥恩斯坦–乌伦贝克半群的生成元.163.4 相对熵.163.5 费舍尔信息.17

4 连续性方程 20
4.1 连续性方程的解的例子.214.2 扩展解的概念.224.2.1 Υ .22
4 2 2 $\mathcal{H}$ $\mathcal{C}_T^1(\mathcal{H})$ 23 . . 局
4 2 3 23
部集合代数的拓扑及其..... 连续性方程在 $\mathcal{C}_T^1(\mathcal{H})$ .4.3 连续性方程的性质.244.3.1 连续性方程中的强度测度 254.3.2 连续解的存在性.254.3.3 连续性方程中的相对熵.26

5 泊松空间上的合成 Ricci 曲率下界30
5.1 泊松空间上的变分距离.305.1.1 拉格朗日泛函.305.1.2 作用泛函.325.1.3 变分距离与熵代价.345.2 $(\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}, \mathcal{W})$ .365.2.1 度量空间 $(\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}, \mathcal{W})$ .365.2.2 演化变分不等式与熵曲率下界 38

6 附录 42

参考文献 43

1 引言

最优输运理论，尤其是 *Wasserstein*几何，在度量测度空间几何及其上的泛函不等式研究中发挥着重要作用。例如，奠基性的贡献 [Stu06；LV09；AGS14b] 建立了度量测度空间里奇曲率下界的综合理论，涵盖并拓展了光滑黎曼流形上的经典理论；关于这一主题的广泛介绍，可参见 [Vil09，第三部分] 。

后续发展将这一方法扩展到各种情形，包括配备离散距离的有限空间。在这种情况下，[Maa11；Mie13] 为将 W_2 传输距离的 Benamou–Brenier动力学表述推广到离散空间提供了基本直觉，其中不存在与 W_2相关的测地线。

沿着上述研究方向，本文在构型空间上建立了 Wasserstein几何；构型空间是无限维非局部空间的典型例子。特别地，我们证明，配备泊松测度的构型空间在合成意义下具有下界为 1 的里奇曲率。

1.1 主要结果

度量空间 X 上的构型空间 Υ 是由 X 上的非负博雷尔测度组成的集合，这些测度在球上取整数值。在 X 配备 σ-有限测度 m的情况下，具有强度 m的泊松测度π （例如 [LP18，第 3], 章）是 Υ 上的一个典型参考概率测度。本文在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$上构造了距离 $\mathcal{W}$； $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$是 Υ 上具有有限一阶矩的概率测度空间（定义见第 2.4 节）。 $(\mathscr{P}_1(\Upsilon), \mathcal{W})$ 的几何性质体现了与 (Υ, π)相关的合成里奇曲率下界。为陈述我们的结果，我们考虑奥恩斯坦–乌伦贝克半群 $\mathsf{P} = \{\mathsf{P}_t : t \geq 0\}$，它在我们的设定中发挥热半群的作用；同时还考虑其作用于测度的对偶半群 $\mathsf{P}^\star = \{\mathsf{P}_t^\star : t \geq 0\}$（定义及详细内容见第 3 节）。此外，记 $\mathcal{H}(\cdot \mid \pi)$ 为相对于 π的相对熵，并记 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H} := \{\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon) : \mathcal{H}(\mu \mid \pi) < \infty\}$。

定理。 距离 $\mathcal{W}$ 满足以下性质：

- （定理 5.15）该空间 $(\mathscr{P}_1(\Upsilon), \mathcal{W})$ 是完备测地扩展度量空间。
- （定理 5.17） $\mathcal{W}$ 满足 Talagrand 不等式

$$\mathcal{W}^2(\mu, \pi) \leq \mathcal{H}(\mu \mid \pi), \qquad \mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon).$$

此外，非扩展度量空间 $(\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}, \mathcal{W})$ 以如下意义刻画了 (Υ, π) 的 *Ricci*曲率下界：

- （定理 5.26）对偶半群 $\mathsf{P}^\star$ 以速率 $\mathcal{W}$ 指数收缩1：

$$\mathcal{W}(\mathsf{P}_t^\star \mu_0, \mathsf{P}_t^\star \mu_1) \leq \mathrm{e}^{-t}\, \mathcal{W}(\mu_0, \mu_1), \qquad t \geq 0, \qquad \mu_0,\, \mu_1\, \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}\,.$$

- （定理 5.27）奥恩斯坦–乌伦贝克半群满足演化变分不等式

(EVI) $\mathcal{H}(\mathsf{P}_s^\star \mu \mid \pi) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star \mu, \xi) + \frac{1}{2}\mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star \mu, \xi) \leq \mathcal{H}(\xi \mid \pi), \qquad s \geq 0, \qquad \mu, \xi \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}\,.$

- （定理 5.28）相对熵在 1-测地凸于 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$， 相对于 $\mathcal{W}$。
  - （定理 5.30）相对熵 $\mathcal{H}$、距离 $\mathcal{W}$和费舍尔信息 $\mathcal{I}$ 满足 *HWI* 不等式

$$\mathcal{H}(\mu \mid \pi) \leq \mathcal{W}(\mu, \pi)\sqrt{\mathcal{I}(\mu \mid \pi)} - \frac{1}{2}\mathcal{W}^2(\mu, \pi), \qquad \mu \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}\,.$$

注 1.1。 在流形上，热半群关于 Wasserstein距离的收缩性、相对熵关于 Wasserstein测地线的凸性，以及 EVI 梯度流，都等价于里奇曲率有一个下界。在我们的无限维非局部情形中，它们并不等价。

1.2 我们构造的概要

我们构造距离 $\mathcal{W}$ 于 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$，即 Υ 上所有具有局部有限强度的概率测度空间（见下文定义 2.9 ）。作用于函数 $F\colon \Upsilon \to \mathbb{R}$ 上的离散差分算子为

$$\mathsf{D}F\colon \Upsilon \times X \ni (\eta, x) \mapsto \mathsf{D}_x F(\eta) \coloneqq F(\eta + \delta_x) - F(\eta),$$

其形式伴随记为 $\mathsf{D}^\star$，称为 *Skorokhod*散度。
在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 上，我们考虑由 $\mathsf{D}^\star$ 和泊松测度 π 诱导的形式黎曼结构，以及相应的 Benamou–Brenier 型内蕴距离。具体而言，对于一条绝对连续测度曲线$\bar{\mu} = \{\mu_t : t \in [0,1]\}$，满足 $\mu_t = \rho_t \pi \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$、 $t \in [0,1]$，以及一条切向量曲线 $\bar{w} = \{w_t : t \in [0,1]\}$，满足 $w_t \in L^1(\pi \otimes m)$，我们非正式地称这一对$(\bar{\mu}, \bar{w})$ 是<在这里应为「连续性方程」>的解，如果

$$\partial_t \rho_t + \mathsf{D}^\star(w_t \hat{\rho}_t) = 0, \qquad t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

这里， $\hat{\rho}_t$ 是由 ρ_t构造的切向量，用以体现 D 的非局部性（精确定义见下文）。我们在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 上赋予如下动力输运距离 $\mathcal{W}$：

$$\mathcal{W}^2(\mu_0, \mu_1) = \inf \int_0^1 \|w_t\|_{\mu_t}^2 \,\mathrm{d}t, \qquad \mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_1(\Upsilon),$$

其中　　下确界取遍所有满足 $(\bar{\mu}, \bar{w})$ （1.1）的解 $\bar{\mu}$，这些解将 μ_0 连接到 μ_1；并且我们令　t

$$\|w\|_\mu^2 \coloneqq \int |w(\eta, x)|^2 \hat{\rho}(\eta, x) \pi(\mathrm{d}\eta) m(\mathrm{d}x).$$

该距离 $\mathcal{W}$ 是扩展的，也就是说，它可能取值为 $+\infty$。然而，根据 Talagrand 不等式，它在 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$上是有限的。将注意力限制在相对熵定义域的 $\mathcal{W}$-闭包 $\mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$ 上，我们看到 $(\mathscr{P}_1^*(\Upsilon), \mathcal{W})$ 是一个完备的非扩展测地空间。实际上，我们在$\mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$上建立泛函不等式。

1.3 动机

在泊松空间 (Υ, π)的背景下发展最优传输理论，并从合成里奇曲率下界理论的角度理解该空间的曲率，是我们的主要研究指引。传统上，合成里奇曲率下界理论有两种形式:

(i) Bakry–Émery理论 [BÉ85; BGL14], 也称为欧拉形式，研究的是马尔可夫半群 $\mathsf{P} = (\mathsf{P}_t)_{t \geq 0}$。该理论通过半群作用下相对熵满足的凸性型不等式，刻画Ricci曲率下界。对于扩散半群，这种凸性是半群与相应能量密度算子之间著名的次交换不等式的推论。在泊松空间中，典范的马尔可夫半群是奥恩斯坦–乌伦贝克半群，已知它满足Bakry–Émery [Las16，引理 6]。也就是说，我们有 $\mathsf{D}\mathsf{P}_t = \mathrm{e}^{-t}\,\mathsf{P}_t\mathsf{D}$。然而，由于泊松空间上的奥恩斯坦–乌伦贝克半群具有非扩散性质，在这种情况下很难从这一性质推出结论。尽管如此，[查04] 利用Bakry–Émery交换关系，推导出了泊松测度的修正对数 Sobolev 不等式（该不等式最初由 [Wu00] 用不同方法证明）。

(ii) Lott–Sturm–Villani理论 [Stu06；LV09；AGS14b], 也称为拉格朗日形式，研究的是度量测度空间。它通过最优传输测地线上的相对熵满足的凸性型不等式，刻画Ricci曲率下界。由于构型空间上不存在典范距离，这一影响深远的理论并不适用。典范距离的缺失是无限维空间的典型特征。

尽管已有多项研究（见下文）将该理论的拉格朗日侧推广到了非扩散半群或离散空间，但将这些技术推广至非局部无限维空间（例如构型空间）迄今仍遥不可及。我们的工作着手解决这一问题，并为在没有预设几何结构的一般状态空间上，发展点过程的 Wasserstein几何及 Ricci 曲率界理论提供基础工具。

1.4 相关工作

1.4.1 马尔可夫链和跳跃过程的熵里奇曲率

[Maa11；Mie13] 及其后续工作 [EM12；FM16] 开启了对非局部算子的最优传输和里奇曲率界的研究。更具体地说，他们基于非局部连续性方程构造了一种传输距离，并研究了有限马尔可夫链相关的泛函不等式。这一方法部分推广到了 $\mathbb{R}^n$ 上的 [Erb14]所研究的跳跃过程。

尤其是，使用离散连续性方程构造 Benamou–Brenier 表述的类似形式这一思想可追溯至 [Maa11], ；而我们对拉格朗日量的定义，以及通过一对 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 来表述连续性方程，则是将 [DNS09] 中对连续情形下 Benamou–Brenier 公式的推广，以及 [Erb14] 中对 $\mathbb{R}^d$上跳跃过程的研究，改编到泊松情形。在某个空间 E上的有限马尔可夫链情形中， [Maa11]证明了赋予 $\mathcal{W}$ 度量的 $\mathcal{P}(E)$ 内部是一个黎曼流形。本着这一思路，推论 5.20 确定了 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 的一个非平凡分支，在该分支上， $\mathcal{W}$ 是一个完备测地空间。在 [Erb14]中并未作出此类确定。尤其是， [Erb14] 的工作并未排除这样一种可能性：跳跃过程由 $\mathcal{W}$ 生成的拓扑是平凡的。还需指出的是，泊松随机测度通过其跳跃测度自然地出现在 Lévy过程的研究中。因此，值得探究能否通过这一识别，将 [Erb14] 的结果改写到我们的框架中。

近期的工作 [PRST20] 将这种非局部 Benamou–Brenier 方法推广到了相当一般的跳跃过程。然而，泊松过程的跳跃核不满足[PRST20，假设 (3.4)]。

1.4.2 构型空间的其他传输成本

[GHP21] 研究泊松空间上的最优传输，尤其是传输熵不等式。在这项工作中，N. Gozlan、G. Peccati 和第二位作者通过考虑经典最优传输问题的非线性推广，绕开了规范成本的缺失。这种广义最优传输在 [GRST17], 中得到了完整的理论阐述，特别适合研究离散空间 [GRST14]。他们的一项主要结果 [GHP21，定理 1.2] 与我们的 $\mathcal{W}$ (定理 5.17) Talagrand 不等式在精神上十分接近：他们同样得到了传输成本的一个上界 $\mathbb{M}^2$，该上界由相对熵给出。然而，在撰写本文时， [GRST17] 所述广义最优传输尚无动态 Benamou–Brenier 表述，因此似乎难以比较这些结果。关于 [GHP21] 的传输成本是否满足位移凸性不等式，是一个有趣的问题，但超出了本文的研究范围。

1.4.3 构型空间上的其他几何

黎曼流形 X 上的构型空间可以赋予一种从底层黎曼流形的几何提升而来的微分几何。这种几何在

[AKR98],源自连续差分算子

$$\boldsymbol{\nabla} F:\ \Upsilon\times X\ni(\eta,x)\longmapsto \nabla^z\big|_{z=x}\mathsf{D}_z F(\eta),$$

以及与之相关的狄利克雷型

$$\mathcal{E}(F):=\int_\Upsilon\int_X\|\boldsymbol{\nabla}_\eta F(x)\|^2_{T_xX}\eta(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}\eta).$$

相应的动力学是将热半群二次量子化到泊松空间 [上82]；而本文研究的奥恩斯坦–乌伦贝克半群对应于半群 $\mathsf{P}_t f=\mathrm{e}^{-t}f$ 对所有 $f\in\mathcal{F}(X)$ 以及 $t\geq 0$。[RS99] 证明了这种几何对应于扩展度量测度空间 (Υ,W_2)，其中 W_2 是相对于黎曼距离的 Wasserstein 2 传输距离。继 [EH15], 之后，这种几何在 Υ 上继承了基空间的 Ricci 曲率下界和 Alexandrov 曲率下界。两位作者 [DS21；DS22] 最近将这些结果推广到了广泛的一类度量测度空间；第三位作者也在戴森布朗运动的情形下证明了类似的曲率界[Suz23]。

这种几何与本文其余部分始终考虑的几何不同。例如，与这种微分几何相关的过程是扩散过程；而奥恩斯坦–乌伦贝克半群定义的是跳跃过程。我们对泊松空间的分析也不需要基空间满足任何几何假设；而 [AKR98；EH15] 则要求该空间是一个满足某些几何假设的流形。

1.4.4 维纳空间的曲率

与高斯测度一样，泊松随机测度在概率论中也无处不在。除其他常见性质外，它们都存在正交混沌系统。因此，它们都具有一种称为*Malliavin* 演算的“微分演算”，且该演算完全由其概率性质刻画。特别是，我们预期，从这种微分演算中可推导出的几何与泛函分析结果，不依赖于底层空间的性质。在这方面，[FSS09] 为配备高斯测度的无限维 Wiener 空间推导出了合成里奇曲率下界，其效果与有限维情形同样好。我们的结果与他们在配备泊松测度的构型空间上所得的结果相对应。不过，我们要强调两点根本差异：

- 高斯空间上的奥恩斯坦–乌伦贝克过程的生成元是扩散型的；而我们的算子则完全是非局部的。
- 维纳空间自然带有一种扩展距离，即所谓的*Cameron– Martin* 距离；而构型空间上并不存在典范距离。

1.5 论文结构

全文中，我们设 X 是一个完备可分度量空间。第 2节回顾了关于构型空间 Υ 的必要定义，并建立了一些关于点过程拓扑的拓扑学结果。尤为重要的是，我们定义了 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 有限一阶矩点过程的空间，并赋予其 Polish 拓扑（定理 2.11）。我们证明，将 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 中的点过程映射为其约化 *Campbell* 测度是一个同胚（定理 2.10）。在第3节，我们回顾了关于奥恩斯坦–乌伦贝克半群 P 以及差分算子 D 的定义，并介绍它们与相对熵 $\mathcal{H}$ 和费舍尔信息 $\mathcal{I}$之间的相互作用。

在第4节，我们对连续性方程 (1.1)作出精确定式。我们证明（命题 4.3）Ornstein–Uhlenbeck 演化是连续性方程的一个解，并且每个解都有一个连续代表（定理 4.11）。我们还得到了连续性方程解的熵产生闭式公式（定理 4.13）。

在第 5.1 节中，我们定义并研究获得我们的 拉格朗日量 $\mathcal{L}$ 和 作用量 $\mathcal{A}$ 所必需的 传输距离 $\mathcal{W}$。我们还研究了 熵正则化 $\mathcal{J}_\varepsilon$，它本身也有独立的研究价值。我们首先陈述拉格朗日量的若干性质（引理 5.1、5.2 和 5.5），这些性质对于运用变分法的直接方法证明极小化曲线的存在性是必要的。我们还在引理 5.4 中证明，奥恩斯坦–乌伦贝克半群的作用会使拉格朗日量收缩。随后，我们定义作用量 $\mathcal{A}$ 并验证下确界中的极小化元存在。为此，我们在引理 5.9 中证明了次水平集的紧性。定义扩展距离 $\mathcal{W}$后，我们在定理 5.15 中总结其主要性质。

在第 5.2 节中，我们证明 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{H}$的定义域上有限。主要工具是 Talagrand 不等式（定理 5.17），它比较 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{H}$。随后，我们在定理 5.27 中证明了本文的一项主要结果：在 $\mathcal{H}$ 的定义域上，奥恩斯坦–乌伦贝克半群是熵的演化变分不等式梯度流。由此可得若干重要推论，例如定理 5.28 中的相对熵测地凸性，以及定理 5.30中的 HWI 不等式。

1.6 致谢

作者感谢 Masha Gordina、Takashi Kumagai、Laurent Saloff-Coste、Karl-Theodor Sturm 以及奥伯沃尔法赫数学研究所（MFO）组织了热核、随机过程与函数不等式 （2019年）研讨会，作者正是在此次研讨会上开始讨论这项工作的。

L.D.S. 衷心感谢奥地利科学基金（FWF）F65 项目以及欧洲研究理事会（ERC，项目编号 716117，该项目授予 Jan Maas 教授）的资助。他还感谢奥地利科学基金（FWF）通过 ESPRIT 208 项目为其目前的职位提供资助。

R.H. 衷心感谢亨利·勒贝格中心的资助。R.H. 的大部分研究工作是在其作为德国研究联合会（DFG）博士后、参与 SPP 2265 项目随机黎曼几何期间完成的；该项目由 Karl-Theodor Sturm 教授和 Eva Kopfer 博士发起，属于随机几何系统项目。

K.S. 谨此感谢以下资助：JSPS海外研究员奖学金，资助编号290142；日本文部科学省的世界顶尖国际研究中心计划（WPI）；JSPS创新领域科学研究补助金——材料设计的离散几何分析，资助编号17H06465；以及亚历山大·冯·洪堡基金会的洪堡研究奖学金。

2 点过程的拓扑学结果

2.1 函数空间与测度空间的拓扑预备知识

给定某个可测空间上的测度 μ，我们用 $|\mu|$ 表示其全变差；对于非负可测函数或 μ-可积函数 f，我们用 $\mu(f) = \int f \mathrm{d}\mu$ 表示 f 关于 μ 的积分。若局部凸拓扑向量空间关于定义其局部凸拓扑的每个半范数都是完备的，则称该空间为完备。

2.1.1 弱拓扑

给定一个拓扑空间 (E,τ)，我们用 $\mathfrak{B}(E)$ 表示 E的博雷尔集，用 $\mathfrak{K}(E)$ 表示其紧博雷尔集。我们用 $\mathscr{F}_b(E)$ 表示取值于 $\mathbb{R}$的有界博雷尔函数集合，用 $\mathscr{C}_b(E)$ 表示其中有界且连续的函数集合。我们用 $\mathscr{P}(E)$ 表示所有博雷尔概率测度的集合，用 $\mathscr{M}_b(E)$ 表示 E上的博雷尔有限符号测度集合。对于 $B \in \mathfrak{B}(E)$，我们定义取值映射 $\iota_B : \lambda \mapsto \lambda(B)$，其定义为

对每个博雷尔测度 λ。对于 $F \in \mathscr{F}(E)$，只要定义良好，我们也记作 ι_F。对于事件 $B \in \mathfrak{B}(E)$，我们也用 $\mathfrak{B}_B(E)$ 表示仅依赖于 B的事件的 σ代数。更确切地说，$\mathfrak{B}_B(X)$ 是由所有满足以下条件之一的 $B' \in \mathfrak{B}(X)$ 构成的 σ代数：$B' \subset B$ 或 $X \setminus B \subset B'$。空间 $\mathscr{F}_b(E)$ 和 $\mathscr{C}_b(E)$ 赋予一致范数后成为巴拿赫空间。同样，$\mathscr{P}(E)$和 $\mathscr{M}_b(E)$ 始终赋予弱拓扑，即与ι_F、$F \in \mathscr{C}_b(E)$相关联的初始拓扑。
我们还使用上标 + 表示非负函数或测度的子集。例如，我们用$\mathscr{M}_b^+(E)$ 表示非负有限博雷尔测度构成的锥，用 $\mathscr{F}^+(E)$ 表示非负博雷尔函数。

2.1.2 模糊拓扑

当 (E,d) 是度量空间时，我们用 $\mathfrak{B}_0(E)$ 表示有界可测集。我们用 $\mathscr{F}_0(E)$ 表示在有界集之外取值为零的有界可测函数空间，用 $\mathscr{C}_0(E)$ 表示其中同时为连续函数的那些函数。

给定一个闭有界的 $B \subset E$，我们用$\mathscr{C}_{b,B}(E)$ 表示函数 $f \in \mathscr{C}_0(E)$在 B之外为零的子空间；该集合$\mathscr{C}_{b,B}(E)$ 赋予一致范数，在此范数下它是一个巴拿赫空间。集合 $\mathscr{C}_0(E)$ 可赋予与包含关系$\mathscr{C}_{b,E_n}(E) \to \mathscr{C}_0(E)$相对应的归纳极限拓扑，其中 (E_n) 是 E中任意一个严格递增的闭球序列，其并覆盖 E。由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$，由$\mathscr{C}_{b,E_{n+1}}(E)$在$\mathscr{C}_{b,E_n}(E)$ 上诱导的拓扑都与$\mathscr{C}_{b,E_n}(E)$的拓扑一致，因此该归纳极限是严格的；根据 [Bou81，第 II.35]页命题 9 (iii)，$\mathscr{C}_0(E)$ 是完备的。一般而言，该拓扑不可度量化。若存在一个闭球 B，使得所有 f_n的支集都包含在 B中，且 (f_n) 在$\mathscr{C}_{b,B}(E)$中收敛于 f，则序列 $(f_n) \subset \mathscr{C}_0(E)$ 在我们刚定义的归纳极限拓扑下收敛于 f。我们为集合 $\mathscr{F}_0(E)$ 赋予类似的归纳极限拓扑。我们还考虑 $\mathscr{M}_0(E)$，即在有界集上有限的带符号博雷尔测度空间。集合 $\mathscr{M}_0(E)$ 赋予模糊拓扑，也就是由 $\iota_F, F \in \mathscr{C}_0(E)$所对应的初始拓扑。归纳极限拓扑在 $\mathscr{C}_0(E)$上的重要性体现在以下事实中：若 $F_n \to F$ 属于 $\mathscr{C}_0(E)$，则对所有 $\nu \in \mathscr{M}_0(E)$都有 $\nu(F_n) \to \nu(F)$。
注记 2.1. 与度量空间 (E,d) 相关的所有对象都依赖于 d 的度量结构，而不仅仅依赖于 d所生成的拓扑。例如，d 和 $d \wedge 1$ 生成相同的拓扑。然而，关于 $d \wedge 1$，每个集合都是有界的。

2.1.3 弱拓扑和模糊拓扑的拓扑性质

我们回顾一下有关所考虑的测度空间拓扑的一些基本结果。

定理 2.2. 假设以下条件之一成立：(E,τ) 是波兰空间（对于关于弱拓扑的结论）；或者 (E,d) 是完备可分度量空间（对于关于模糊拓扑的结论）。那么：

(i) $\mathscr{M}_b^+(E)$上的弱拓扑（分别地，$\mathscr{M}_0^+(E)$上的模糊拓扑）由 $\mathscr{C}_b(E)$（分别地，$\mathscr{C}_0(E)$）的某个可数集上的简单收敛拓扑诱导。具体而言，存在 $(h_k) \subset \mathscr{C}_b(E)$（分别地，$\mathscr{C}_0(E)$），使得 $\mathscr{M}_b^+(E)$上的弱拓扑（分别地，$\mathscr{M}_0^+(E)$上的模糊拓扑）是由半范数生成的局部凸拓扑

$$\mu \mapsto |\mu(h_k)|, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

此外，空间 $\mathscr{P}(E)$、$\mathscr{M}_b^+(E)$ 和 $\mathscr{M}_0^+(E)$ 都是波兰空间。

(ii) 集合 $\Delta \subset \mathscr{M}_0(E)$ 模糊相对序列紧，当且仅当以下两个条件同时成立：

$$\forall B \in \mathfrak{B}_0(E) \qquad \sup_{\mu\in\Delta} |\mu|(B) < \infty; \tag{2.1a}$$

$$\forall B \in \mathfrak{B}_0(E) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(E) : \sup_{\mu\in\Delta} |\mu|(B \setminus K_\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{2.1b}$$

集合 $\Delta \subset \mathscr{M}_b(E)$ 弱相对序列紧，当且仅当 (2.1a) 和 (2.1b) 在$B = E$下成立。

证明。 (i) [Par67，定理 6.2、6.5 和 6。6] 对于 $\mathscr{P}(E)$ 且为 (E,τ) 波兰空间的情形。对于 $\mathscr{M}_b^+(E)$的情形也可类似处理。现在，假设 (E,d) 是完备且可分的。于是它也是波兰空间，因此根据前一种情形，我们可以找到一个可数族 $(g_k) \subset \mathscr{C}_b(E)$，它在 $\mathscr{M}_b^+(E)$上诱导弱拓扑。我们固定一点 $o \in X$，并考虑一个序列 $(f_k) \subset \mathscr{C}_0(E)$ 使得 $1_{B(o,k)} \le f_k \le 1_{B(o,k+1)}$。我们取 (h_k) 的一个枚举 $\{f_j g_i : j,i \in \mathbb{N}\}$。于是

$$\rho(\mu,\mu') := \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \left| \int h_k \mathrm{d}(\mu - \mu') \right|,$$

是一个度量，它在 $\mathscr{M}_0^+(E)$上诱导模糊拓扑，且它是完备的。(ii) [Bog07，定理 8.6。2]。 □

2.2 点过程、强度测度、Campbell 测度、拉普拉斯变换

设 (X,d) 是一个完备可分度量空间，并配备了 $m \in \mathscr{M}_0^+(X)$。我们将 $\Upsilon = \Upsilon(X)$记作 X上的构型空间，即由 X 上的 $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 值 Borel 测度构成、且在每个有界集上有限的空间。

引理 2.3 ([GHP21，引理 2.1])。 集合 Υ 在 $\mathscr{M}_0^+(X)$中是闭集。因此，它是一个波兰空间。

点过程 μ 是 $\mathscr{P}(\Upsilon)$中的任意元素。固定一个点过程 μ。我们将 I_μ 记作 μ的强度测度，即

$$I_\mu(B) := \mu(\iota_B) = \int \eta(B)\mu(\mathrm{d}\eta), \qquad B \in \mathfrak{B}(X).$$

约化 *Campbell* 测度为

$$C_\mu(A \times B) := \iint 1_B(x) 1_A(\eta - \delta_x)\eta(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}\eta), \qquad A \in \mathfrak{B}(\Upsilon),\ B \in \mathfrak{B}(X).$$

点过程理论中有一个众所周知的事实[LP18，定理 4.1]： μ 是一个泊松点过程（强度为 I_μ）当且仅当 $C_\mu = \mu \otimes I_\mu$。我们将这一关系称为 *Mecke* 恒等式。当 μ 是泊松点过程时，对于所有概率密度 $f \in L^1(\mu)$，均有

$$\frac{\mathrm{d}C_{f\mu}}{\mathrm{d}(f\mu \otimes I_{f\mu})}(\eta,x) = \frac{f(\eta+\delta_x)}{\int_\Upsilon f(\gamma+\delta_x)\mu(\mathrm{d}\gamma)}, \qquad \eta \in \Upsilon,\ x \in X. \tag{2.2}$$

然而，对于一般的点过程 μ，Campbell 测度 C_μ 并非相对于 $\mu \otimes I_\mu$绝对连续，参见例如[OS16]，其中给出了一个明确的反例。最后，拉普拉斯变换 μ 是映射

$$\Lambda_\mu(h) := \int \exp(-\eta(h))\mu(\mathrm{d}\eta), \qquad h \in \mathscr{C}_0^+(X).$$

2.3 $\mathscr{P}(\Upsilon)$上的弱收敛

我们将 $\mathscr{G}$ 定义为形如 $\mathrm{e}^{-\iota_h}$ 的函数的（代数）线性张成，其中 $h \in \mathscr{F}_0^+(X)$。设$\mathcal{S} := \mathscr{G} \cap \mathscr{C}_b(\Upsilon)$。回顾一下 $\mathscr{P}(\Upsilon)$上的弱收敛的如下刻画。

定理 2.4 ([Kal17，定理 4。11])。 空间 $\mathscr{P}(\Upsilon)$ 是波兰空间。此外，对所有 $(\mu_n) \subset \mathscr{P}(\Upsilon)$ 和$\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon)$。于是，

$$\left[\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{P}(\Upsilon)} \mu\right] \Leftrightarrow \left[\mu_n(F) \to \mu(F), F \in \mathcal{S}\right] \Leftrightarrow \left[\Lambda_{\mu_n}(h) \to \Lambda_\mu(h), h \in \mathscr{C}_0^+(X)\right]. \tag{2.3}$$

一般而言，存在一个不可数集 $\mathscr{D} \subset \mathcal{S}$，它决定$\mathscr{P}(\Upsilon)$上弱拓扑的收敛性。现在我们为这一结果提供一个部分构想。对于 $\lambda \in \mathscr{M}_0^+(X)$， λ 的连续集 类由满足 $\lambda(\partial B) = 0$ 的集合 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$ 组成。接下来定义

$$\mathscr{P}^\lambda(\Upsilon) := \{\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon) : \lambda \text{ 的连续集也是 } I_\mu\}.\text{的连续集} \tag{2.4}$$

特别是， $\mu \in \mathscr{P}^\lambda(\Upsilon)$ 只要 $I_\mu \ll \lambda$。

引理 2.5. 取 $\lambda \in \mathscr{M}_0^+(X)$。存在一个可数集 $\mathscr{G}^\lambda \subset \mathscr{G}$，使得$\mathscr{P}(\Upsilon)$ 在 $\mathscr{P}^\lambda(\Upsilon)$ 上的迹拓扑由 $\mathscr{G}^\lambda$上的简单收敛拓扑诱导，即由以下半范数诱导：

$$\mu \mapsto |\mu(F)|, \qquad F \in \mathscr{G}^\lambda. \tag{2.5}$$

备注2.6。我们也可以使用定理2.2 (i) 来找到 $\mathscr{C}_b(\Upsilon)$ 的一个可数子集，以构造这些半范数。然而，在下文连续性方程的定义中，我们不能使用 $\mathscr{C}_b(\Upsilon)$ （$\mathbf{CE}_T$）。

证明。根据 [Kal17，引理 1.9 (v)]， $\mathfrak{B}_0^\lambda(X)$ 是一个剖分环，其含义见 [Kal17，第 24]页。根据 [Kal17，引理 1.9 (i)]，，存在一个可数剖分环 $\mathfrak{F}^\lambda \subset \mathfrak{B}_0^\lambda(X)$。令 $\mathcal{I}^\lambda$ 为定义在 X上的简单 $\mathfrak{F}^\lambda$-可测、$\mathbb{Q} \cap [0,1]$-值函数的集合。更直白地说， $\mathcal{I}^\lambda$ 是以下形式的函数 h 所构成的集合

$$h = \sum_{i=1}^{l} q_i 1_{B_i}, \qquad l \in \mathbb{N}, (q_i) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1], (B_i) \subset \mathfrak{F}^\lambda.$$

于是 $\mathcal{I}^\lambda$ 是可数的，我们定义：

$$\mathscr{G}^\lambda := \{\mathrm{e}^{-\iota_h} : h \in \mathcal{I}^\lambda\}.$$

让我们验证 $\mathscr{G}^\lambda$ 是此结论的一个合适选择。设 $(\mu_n) \subset \mathscr{P}^\lambda(\Upsilon)$ 和 $\mu \in \mathscr{P}^\lambda(\Upsilon)$。作为波兰空间 $\mathscr{P}(\Upsilon)$的子集，空间 $\mathscr{P}^\lambda(\Upsilon)$ 是可度量化的，因而也是第二可数的。因此，只需验证关于半范数族 (2.5) 的 (μ_n) 收敛等价于弱收敛。根据构造， $\mathfrak{F}^\lambda$ 是由 I_μ的连续集构成的剖分环。若 $\mu_n \to \mu$ 属于 $\mathscr{P}(\Upsilon)$，则根据 [Kal17, 定理 4.11 (iii)]，对所有 $F \in \mathscr{G}^\lambda$，都有 $\mu_n(F) \to \mu(F)$。反过来，假设对所有 $F \in \mathscr{G}^\lambda$，都有 $\mu_n(F) \to \mu(F)$。那么，对于一致拓扑下 $\mathscr{G}^\lambda$ 的闭包 $\overline{\mathscr{G}^\lambda}$ 中的所有 F，同样成立。对于 $B \in \mathfrak{F}^\lambda$、 $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$和 $r \in [0,1]$，我们有

$$\sup_{\eta \in \Upsilon} \left|\mathrm{e}^{-q\eta(B)} - \mathrm{e}^{-r\eta(B)}\right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\mathrm{e}^{-qn} - \mathrm{e}^{-rn}\right| \xrightarrow[q \to r]{} 0.$$

结合三角不等式，这表明 $\mathscr{G}^\lambda$ 包含如下形式的函数 $\mathrm{e}^{-\iota_h}$ 对于 h 一个简单的、 $\mathfrak{F}^\lambda$-可测的、 $[0,1]$-值函数，定义在 Υ上。根据定理 2.4， $\mu_n \to \mu$ 在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$中。 □

2.4 局部可积点过程

在没有进一步假设的情况下， I_μ 只是 X上的一个非负测度，不一定在有界集上有限。这促使我们给出以下定义。我们考虑$\mathscr{C}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$ 上在连续且有界、并且在某个形如 $\Upsilon \times B$ 的集合之外取值为零的函数集合，其中 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$。与 $\mathscr{C}_0(X)$ 或 $\mathscr{F}_0(X)$类似，空间$\mathscr{C}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$ 可以赋予归纳极限拓扑。更确切地说，它是巴拿赫空间$\mathscr{C}_{b,\,\Upsilon \times B}(\Upsilon \times X)$ 的严格归纳极限；这些空间由 $\Upsilon \times X$ 上连续且有界、并且在某个闭有界集 $\Upsilon \times B$之外取值为零的函数构成，其中 $B \subset X$。与模糊拓扑类似，我们考虑$\mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$ 上的带符号博雷尔测度集合 ν，使得

对所有 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$，都有 $\nu(\Upsilon \times B) < \infty$ 。我们赋予它由以下半范数诱导的局部凸拓扑

$$\nu \mapsto |\nu(F)|, \qquad F \in \mathcal{C}_{b,0}(\Upsilon \times X).$$

定理2.2 对于 $\mathcal{M}_{b,\ 0}(\Upsilon \times X)$ 也成立，其中我们将形如 $\Upsilon \times B$（某个 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$）的集合视为“有界集”。为说明这一点，我们可以考虑赋予如下形式距离的完备可分度量空间 $E = \Upsilon \times X$： $d' \oplus d$，其中 d' 是 Υ 上任意一个有界距离，该距离是完备的并诱导 Υ 的拓扑。于是，集合有界，当且仅当 E 它包含于某个 X 中的有界 B 集合 $\Upsilon \times B$，而我们定义的 $\mathcal{M}_{b,\ 0}(\Upsilon \times X)$ 的拓扑就是 $\mathcal{M}_0(E)$ 的模糊拓扑。

定义2.7。 若点过程 μ 满足 $I_\mu \in \mathcal{M}_0(X)$，则称其为局部可积。我们用 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 表示所有局部可积点过程构成的集合。

现在我们在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 上赋予一个适当的拓扑。若 $F \in \mathcal{F}(\Upsilon)$ 具有次线性增长，则称其满足该性质，前提是存在 $c > 0$ 和 $h \in \mathcal{C}_0(X)$，使得：

$$|F(\eta)| \le c(1 + \eta(h)), \qquad \eta \in \Upsilon.$$

我们用 $\mathcal{C}_1(\Upsilon)$ 表示具有次线性增长的连续函数集合。

备注 2.8。 我们总有 $\mathcal{C}_b(\Upsilon) \subset \mathcal{C}_1(\Upsilon)$，且包含关系是严格的，因为对所有 $h \in \mathcal{C}_0(X) \setminus \{0\}$, $\iota_h \in \mathcal{C}_1(\Upsilon) \setminus \mathcal{C}_b(\Upsilon)$。即使 $X = \{*\}$ 是单点空间，这一点依然成立。

定义2.9。 我们赋予 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 由映射 ι_F、 $F \in \mathcal{C}_1(\Upsilon)$所诱导的初始拓扑。换言之，这是由以下半范数族定义的局部凸拓扑

$$\mu \mapsto |\mu(F)|, \qquad F \in \mathcal{C}_1(\Upsilon).$$

现在我们证明，赋予上述拓扑的空间 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 是波兰空间。证明这一点的一个核心工具是Campbell映射的以下性质。

定理 2.10。 映射$C : \mathcal{P}_1(\Upsilon) \to \mathcal{M}^+_{b\ ,\ 0}(\Upsilon \times X)$， $\mu \mapsto C_\mu$ 是到其像上的一个同胚。

证明。 记 $\mathcal{I}$ 为 C的像。对所有 $\mu \in \mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 和 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$， $C_\mu(\Upsilon \times B) = I_\mu(B) < \infty$。此外， C_μ 始终非负。因此， $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}^+_{b\ ,\ 0}(\Upsilon \times X)$，且该断言定义良好。在证明的其余部分，我们记 $\Upsilon^* := \Upsilon \setminus \{\varnothing\}$, 其中 $\varnothing$ 为空构型。根据 [Bou74，IX，第57页，命题 1]，，开集 Υ^* 也是波兰空间。

C 是单射。 设 μ 和 $\mu' \in \mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 满足 $C_\mu = C_{\mu'}$。设 $A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$、 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$，并且

$$u(\eta, x) = \frac{1}{\eta(B) + 1} 1_B(x)\, 1_A(\eta + \delta_x) \qquad \eta \in \Upsilon,\ x \in X.$$

于是，我们有

$$C_\mu(u) = \iint_B u(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}\eta) = \iint 1_A(\eta)\frac{1_B(x)}{\eta(B)}\eta(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}\eta) = \mu(A \cap \{\eta(B) > 0\}).$$

令 $B \nearrow X$，由单调收敛可知，对所有 $A \in \mathfrak{B}(\Upsilon^*)$，都有 $\mu(A) = \mu'(A)$。因此， μ和 μ' 在 Υ^* 上作为测度相同；但由于它们是 Υ上的概率测度，我们有

$$\mu(\varnothing) = 1 - \mu(\Upsilon^*) = \mu'(\varnothing).$$

因此 $\mu = \mu'$ on $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$。

C **是连续函数**。 取 $\mu_o \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 和 $l \in \mathbb{N}$。 对于 $i = 1, ..., l$， 令 $u_i \in \mathscr{C}_{b,0}(\Upsilon \times X)$， 以及 $\varepsilon_i > 0$。我们设

$$V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{l} \left\{ C_\mu : \mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon),\ |(C_\mu - C_{\mu_o})(u_i)| \le \varepsilon_i \right\}.$$

集合 V 是 $\mathscr{I}$ 中 C_{μ_o} 的一个邻域，而所有形如 V 的集合构成 C_{μ_o} 的邻域基（例如， [Bou69, II，第 2-4]页）。因此，只需证明$C^{-1}(V)$ 是 μ_o 的一个邻域。现在，由于 C 是单射，我们有

$$C^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{l} \left\{ \mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon) : |(C_\mu - C_{\mu_o})(u_i)| \le \varepsilon_i \right\}.$$

设 $i = 1$， ...， l。对于 $\eta \in \Upsilon$， $F_i(\eta) \coloneqq \int u_i(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x)$，我们作如下定义。由下文的引理 2.15 可知， $F_i \in \mathscr{C}_1(\Upsilon)$。此外，

$$(C_\mu - C_{\mu_o})(u_i) = \iint u_i(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x)(\mu - \mu_o)(\mathrm{d}\eta) = (\mu - \mu_o)(F_i).$$

因此，我们得到

$$C^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{l} \left\{ \mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon) : |(\mu - \mu_o)(F_i)| \le \varepsilon_i \right\},$$

根据 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 上拓扑的定义，这是 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 中 μ_o 的一个邻域。

C^{-1} **是连续函数**。 由于 $\mathscr{M}_{b,\,0}^{+}(\Upsilon \times X)$ 是波兰空间，因此只需证明 C^{-1} 是序列连续的。于是，考虑满足 $C_{\mu_n} \to C_\mu$ 属于 $\mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$ 的 $(\mu_n) \subset \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 和 $\mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$。取满足 $h \ge 0$ 的 $h \in \mathscr{C}_0(X)$。我们有如下界：

$$\left| \mathrm{e}^{-s\eta(h)} - \mathrm{e}^{-t\eta(h)} \right| \le |s - t||\eta(h)|, \qquad s, t \in (0,1),\ \eta \in \Upsilon.$$

由于 $\mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 和 $h \in \mathscr{C}_0(X)$， 我们有 $\iota_h \in L^1(\mu)$。由于 $\mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$， 根据勒贝格控制收敛定理，我们发现映射 $(0,1) \ni t \mapsto \Lambda_\mu(th)$ 可微，其导数为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_\mu(th) = C_\mu(u_t),$$

其中

$$u_t(\eta, x) \coloneqq -h(x)\,\mathrm{e}^{-th(x)} \exp\left(-t \int h\mathrm{d}\eta\right), \qquad \eta \in \Upsilon,\ x \in X,\ t \in (0,1).$$

现在注意到，

$$|C_{\mu_n}(u_t)| = \int \eta(h)\,\mathrm{e}^{-t\eta(h)}\,\mu_n(\mathrm{d}\eta) \le I_{\mu_n}(h) = C_{\mu_n}(1 \otimes h).$$

右侧关于 $n \in \mathbb{N}$ 一致有界，因为根据假设， (C_{μ_n}) 在 $\mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$ 中收敛，并且 $1 \otimes h \in \mathscr{C}_{b,\,0}(\Upsilon \times X)$。因此，根据控制收敛定理：

$$\Lambda_{\mu_n}(h) = 1 + \int_0^1 C_{\mu_n}(u_t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \int_0^1 C_\mu(u_t)\mathrm{d}t = \Lambda_\mu(h).$$

因此， (μ_n) 弱收敛于 μ （定理 2.4）。取 $F \in \mathscr{C}_1(\Upsilon)$。根据定义，我们可以找到 $h \in \mathscr{C}_0(X)$ ，使得对某个 $c > 0$有 $|F| \le c(\iota_h + 1)$。现在，Campbell测度的收敛意味着强度测度在 $\mathscr{M}_0(X)$中收敛。因此，根据 [Kal21，引理 5.11]，，可得 ι_h 关于 (μ_n)一致可积。于是 F 关于 (μ_n)也一致可积。由连续映射定理， $F_\sharp\mu_n \to F_\sharp\mu$ 依分布收敛；结合一致可积性，根据[Kal21，引理 5. 11]，，可得 $\mu_n(F) \to \mu(F)$。这表明 $\mu_n \to \mu$在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$中收敛。

□

现在我们转而证明波兰性。

定理 2.11。 空间 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 是波兰空间。

证明。只需证明 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 与某个波兰空间同胚（例如， [Bou74，IX，第 58 页，推论 2]）。因此，根据前一个定理和 [Bou74，IX，第 57 页，命题 1]，，只需证明 $\mathcal{I}$ 在 $\mathcal{M}_b^+$ 中的像 $C_{0}(\Upsilon \times X)$ 是闭集。取 $(\mu_n) \subset \mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 使得 $C_{\mu_n} \to \sigma \in \mathcal{M}_{b\ 0}^{+}(\Upsilon \times X)$。由投影 $\Upsilon \times X \to X$的连续性，序列 (I_{μ_n}) 也收敛于 $\mathcal{M}_0^+(X)$中的某个测度。这说明 $\Delta := (I_{\mu_n})$ 是相对紧的，因此根据定理 2.2，它满足（2.1）。具体地，取 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$，由（2.1b）可得

$$\inf_{K \in \mathfrak{K}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \big(\eta(B \setminus K) \wedge 1\big)\mu_n(\mathrm{d}\eta) \leq \inf_{K \in \mathfrak{K}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(B \setminus K) = 0;$$

而由（2.1a）和马尔可夫不等式，我们得到

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\eta(B) > r) \leq \frac{1}{r} \sup_{n \in \mathbb{N}} I_{\mu_n}(B) \leq \frac{c}{r}.$$

前两个等式表明， [Kal17，定理 4.10] 中的条件均已满足，因此经过抽取后，我们可以找到 $\mu \in \mathcal{P}(\Upsilon)$ 使得 $\mu_n \to \mu$ 在 $\mathcal{P}(\Upsilon)$中成立。
现在，令 $h \in \mathcal{C}_0(X)$。由 [Kal21，引理 5.11],我们得到 $\mu \in \mathcal{P}_1(\Upsilon)$，且 $I_\mu(h) \leq \liminf_n I_{\mu_n}(h) < \infty$。根据定义，映射 $\eta \mapsto \eta(h)$ 是连续的。因此，对每个 $\{\eta(h) + 1 \geq r\}$，集合$r > 0$是闭集，而映射

$$u_r(\eta, x) := h(x)1_{\{\eta(h)+1 \geq r\}}, \qquad \eta \in \Upsilon,\ x \in X,$$

是上半连续的。由 Portmanteau定理，

$$\limsup_n \int \eta(h)\, 1_{\{\eta(h) \geq r\}} \mathrm{d}\mu_n \leq \limsup_n C_{\mu_n}(u_r) \leq \sigma(u_r).$$

由控制收敛定理可知，当 $r \to \infty$ 时，右侧趋于 0。特别地， ι_h 关于 (μ_n)一致可积。通过类似于前一个证明中所用的论证，我们得出 $\mu_n \to \mu$ 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 中成立。由于 C 连续且 $\mathcal{M}_{b,\ 0}(\Upsilon \times X)$ 是豪斯多夫的，这表明 $\sigma = C_\mu$。

□

实际上，在前面的证明中，我们已经得到了以下两个结果，现摘录于此以便查阅。

命题 2.12。 设 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 和 $\mu \in \mathcal{P}(\Upsilon)$。则以下各项等价：

(*i*) $\mu \in \mathcal{P}_1(\Upsilon)$ *and* $\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{P}_1(\Upsilon)} \mu$.

(*ii*) $C_{\mu_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{M}_{b,0}(\Upsilon \times X)} C_\mu$.

(*iii*) $\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{weakly} \mu$ *and* $I_{\mu_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{M}_0(X)} I_\mu$.

证明。 .....与 (*i*) 之间的等价性 (*ii*) 由定理 2.10 可知，因为 C 是一个同胚映射。我们证明了 (*ii*) 蕴含 (*iii*) 蕴含 (*i*)，这在定理 C^{-1} 2.10中证明 。

□

备注 2.13。 取 d_1（分别为 d_2）为一个完全度量化 $\mathscr{P}(\Upsilon)$（分别为 $\mathscr{M}_0^+(X)$）拓扑的距离。根据上述结果，该距离

$$d(\mu,\mu) \coloneqq d_1(\mu,\mu') + d_2(I_\mu, I_{\mu'}), \qquad \mu,\, \mu' \in \mathscr{P}_1(\Upsilon),$$

可以度量化 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 的拓扑。不过，这个距离一般来说并不完备。
事实上，取 $X = \{*\}$ 为单点空间。则， Υ 可与 $\mathbb{N}_0$等同，而 $\mathscr{M}_0(X)$ 可与 $\mathbb{R}$等同。设 μ_n是一个随机变量的分布，该随机变量以概率 $1/n$取值 n，以概率 $1-1/n$取值 0。于是 $\mu_n \to \delta_0$ 属于 $\mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$，因此 $(\mu_n)_n$ 关于 d_1是柯西的。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $I_{\mu_n} = 1$，因此 $(I_{\mu_n})_n$ 关于 d_2是柯西的。由此， $(\mu_n)_n$ 关于 d是柯西的。然而，它在 $\mathscr{P}_1(\mathbb{N}_0)$ 中不收敛，因为 $I_{\delta_0} = 0$。

命题 2.14. 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_1(\Upsilon)$。那么，以下条件等价：

(*i*) $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$中相对紧；

(*ii*) $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$ 中相对紧，并且对于所有 $h \in \mathscr{C}_0(X)$，映射 ι_h 关于 $\mathscr{A}$一致可积。

证明。 假设 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$中相对紧。取 $\mathscr{A}$中的一个序列。经过抽取子列后，它在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$中收敛。因此，由命题 2.12 (*iii*)，它弱收敛。这表明 $\mathscr{A}$ 是弱序列相对紧的，因而在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$中相对紧。一致可积性由 [Kal21，引理 5，11] 结合命题2.12 (*iii*)即可得出。

反过来，假设 $\mathscr{A}$ 是弱相对紧的，并且满足一致可积性条件。那么，经过抽取子列后， $\mathscr{A}$ 中的每个序列都弱收敛；由一致可积性以及 [Kal21，引理 5，11], 可知强度测度也收敛。由命题 2.12，我们推得 $\mathscr{A}$ 因此在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$中序列相对紧，故它相对紧，因为 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 由定理 2.11可知是波兰空间。 □

最后，我们来完成上述引理的证明。

引理 2.15. 若 $u \in \mathscr{C}_{b,0}(\Upsilon \times X)$，则

$$F : \eta \longmapsto \int u(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x), \qquad \eta \in \Upsilon,$$

满足 $F \in \mathscr{C}_1(\Upsilon)$。

证明。 不失一般性，假设 $u \geq 0$。事实上，对于 $u \in \mathscr{C}_{b,0}(\Upsilon \times X)$，我们也有 u_+ 和 $u_- \in \mathscr{C}_{b,0}(\Upsilon \times X)$。由于 $u \in \mathscr{C}_{b,0}(\Upsilon \times X)$，存在 $c > 0$ 和 $h \in \mathscr{C}_0(X)$ 使得$h \geq 0$并且

$$u(\eta, x) \leq ch(x), \qquad \eta \in \Upsilon,\, x \in X.$$

我们有

$$|F(\eta_n) - F(\eta)| \leq c\left|\int h(x)(\eta_n - \eta)(\mathrm{d}x)\right| + \int |u(\eta_n - \delta_x, x) - u(\eta - \delta_x, x)|\eta(\mathrm{d}x).$$

根据模糊收敛的定义，第一项随着 $n \to \infty$ 而趋于零。由于 u 是连续函数，第二项中的被积函数也趋于零，且由 $2ch \in L^1(\eta)$ 控制。根据控制收敛定理，相应的积分也趋于零。这表明 F 是连续函数。我们还有 $F(\eta) \leq c\eta(h)$，这表明 $F \in \mathscr{C}_1(\Upsilon)$。 □

3 离散算子与 Ornstein–Uhlenbeck动力学

3.1 Mehler公式、差分算子、函数散度

有关本节介绍的对象的更多细节和证明，请参阅 [Las16]。我们固定一个泊松点过程 π，其强度为 $m \in \mathscr{M}_0^+(X)$。

对于所有 π-可积的 $F \in \mathscr{F}(\Upsilon)$，我们通过以下方式定义奥恩斯坦–乌伦贝克半群

$$\mathsf{P}_t F(\eta) := \mathbb{E}\Big[F(\eta^{(\mathrm{e}^{-t})} + \xi_t)\Big], \qquad \eta \in \Upsilon,\ t \geq 0,$$

其中，$\eta^{(s)}$ 是对 η 进行 s稀疏化所得的点过程，而 ξ_t 服从强度为 $(1-\mathrm{e}^{-t})m$ 的泊松点过程分布，并且与该稀疏化相互独立。

族 $\mathsf{P} = (\mathsf{P}_t)_{t\geq 0}$ 是 $L^1(\pi)$上的马尔可夫半群。此外，它将连续函数映射为连续函数。对于所有点过程 μ，我们通过对偶定义

$$\mathsf{P}_t^\star \mu(A) := \mu(\mathsf{P}_t 1_A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\Upsilon), \quad t \geq 0.$$

容易验证，这确实定义了一个测度。如果 $\mu = \rho\pi$，则对于所有 $t \geq 0$都有 $\mathsf{P}_t^\star \mu = (\mathsf{P}_t \rho)\pi$。我们还得到，对于所有 $t > 0$，$\mathsf{P}_t^\star$将 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 映射为 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$，并且

$$\mathsf{P}_t^\star \mu \xrightarrow[t\to 0]{\mathscr{P}_1(\Upsilon)} \mu, \qquad \mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon). \tag{3.1}$$

（3.1）的证明。令 $\eta \sim \mu$ 和 $h \in \mathscr{C}_0(X)$，并设 $\eta_t := \eta^{(\mathrm{e}^{-t})}$。根据 [Kal17，引理 3.1],，我们有

$$\mathbb{E}[\exp(-\eta_t(h))] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int \log\left(1 - \mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-h})\right)\mathrm{d}\eta\right)\right].$$

由于 $\log\left(1-\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-h})\right) \leq (1-\mathrm{e}^{-h})$，由控制收敛定理和 [Kal17，定理 4.11],，我们得到 $\mathrm{law}(\eta_t) \to \mu$ 在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$ 中成立。类似计算可得 $\mathrm{law}(\xi_t) \to \delta_\varnothing$ 在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$ 中成立。因此，由求和的连续性和连续映射定理，我们得出 $\mathsf{P}_t^\star \mu = \mathrm{law}(\eta_t + \xi_t) \to \mu$ 在 $\mathscr{P}(\Upsilon)$ 中成立。Mehler 公式还意味着

$$I_{\mathsf{P}_t^\star \mu}(h) = \mathrm{e}^{-t} I_\mu(h) + (1-\mathrm{e}^{-t}) m(h) \xrightarrow[t\to 0]{} I_\mu(h), \tag{3.2}$$

结合命题2.12，证明至此完成。 □

对于 $F \in \mathscr{F}(\Upsilon)$，我们记作

$$\mathsf{D}_x F(\eta) := F(\eta + \delta_x) - F(\eta), \qquad \eta \in \Upsilon, \quad x \in X,$$

并将 $\mathsf{D}F$ 视为映射

$$\mathsf{D}F : \Upsilon \times X \ni (\eta, x) \mapsto \mathsf{D}_x F(\eta).$$

差分算子与半群满足 Bakry–Émery 型交换关系 [Las16，引理 6]:

$$\mathsf{D}\mathsf{P}_t F = \mathrm{e}^{-t}\, \mathsf{P}_t \mathsf{D} F, \qquad F \in L^2(\pi). \tag{\textbf{BE}}$$

对于所有 $u \in L^1(\pi \otimes m)$，我们定义 D 的形式伴随，即 *Skorokhod*散度

$$\mathsf{D}^\star u(\eta) := \int u(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x) - \int u(\eta, x) m(\mathrm{d}x), \qquad \eta \in \Upsilon.$$

根据 Mecke公式，$\mathsf{D}^\star u \in L^1(\pi)$。

3.2 Sobolev空间

由于其离散性， D 无法自然定义良好的光滑函数概念。作为部分替代，我们来定义与 D相关的 Sobolev 空间。对于所有 $F \in \mathscr{F}(\Upsilon)$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们可以迭代地定义 $\mathsf{D}^k F \in \mathscr{F}(\Upsilon \times X^k)$。因此，我们可以将阶数为 $k \in \mathbb{N}$ 和$p \in [1,\infty]$ 的*Sobolev*空间定义为集合 $\mathscr{W}^{k,\,p} = \mathscr{W}^{k,\,p}(\Upsilon)$，其中包含所有满足以下条件的 $F \in L^p(\pi)$： 对所有 $k' \le k$， $\mathsf{D}^{k'} F \in L^p(\pi \otimes m^{\otimes k'})$。其范数为

$$\|F\|_{k,p} := \|F\|_{L^p(\pi)} + \sum_{k'=1}^{k} \|D^{k'} F\|_{L^p(\pi \otimes m^{\otimes k'})}.$$

3.3 奥恩斯坦–乌伦贝克半群的生成元

P 在 $L^2(\pi)$ 上的马尔可夫生成元是无界算子 L，其定义域 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L}$ 由所有满足以下极限存在的函数 $F \in L^2(\pi)$ 组成

$$\mathsf{L}F := L^2(\pi)\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{\mathsf{P}_t - \mathrm{id}}{t} F.$$

根据[Las16，命题 3 和 4],，我们有 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L} = \mathscr{W}^{2,\,2}$；对于 $F \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L} \cap \mathscr{W}^{1,\,1}$，有以下表示

$$\mathsf{L}F(\eta) = -\mathsf{D}^\star \mathsf{D}F(\eta) = \int \big(F(\eta + \delta_x) - F(\eta)\big) m(\mathrm{d}x) - \int \big(F(\eta) - F(\eta - \delta_x)\big)\eta(\mathrm{d}x), \qquad \eta \in \Upsilon,$$

并且以下分部积分公式成立

$$\int F\,\mathsf{L}G\,\mathrm{d}\pi = -\int \mathsf{D}F\,\mathsf{D}G\,\mathrm{d}(\pi \otimes m), \qquad F \in \mathscr{W}^{1,2},\, G \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L}. \tag{3.3}$$

根据狄利克雷型的一般理论， [MR92，定理 2。20], 我们有以下正则化性质

$$\mathsf{P}_t L^2(\pi) \subset \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L}, \qquad t > 0. \tag{3.4}$$

对于所有满足 L 的 $F \in L^2(\pi)$，其逆定义为 $\int F \mathrm{d}\pi = 0$，通过 [Las16，定理 7]:

$$\mathsf{L}^{-1} F(\eta) := -\int_0^\infty \mathsf{P}_s F(\eta)\mathrm{d}s.$$

3.4 相对熵

设 π 是强度为 m 的泊松点过程， μ 是一个点过程。 π 关于 μ 的相对熵为

$$\mathcal{H}(\mu \mid \pi) := \int \rho \log \rho \mathrm{d}\pi \qquad \text{if} \quad \mu \ll \pi, \quad \rho = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\pi},$$

否则为 $\mathcal{H}(\mu \mid \pi) = \infty$ 。我们用 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 表示满足 $\mathcal{H}(\mu \mid \pi) < \infty$ 的 $\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon)$ 集合。以下结果在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 的框架下，重新表述了关于弱拓扑的相对熵的众所周知的性质。

引理 3.1。 我们有 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H} \subset \mathscr{P}_1(\Upsilon)$。此外，关于 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$-拓扑， $\mathcal{H}(\cdot \mid \pi)$ 是下半连续的，其次水平集在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 中相对紧。

证明。 令 $\theta(s) := s\log s - s + 1$ 在 $s \geq 0$ 时成立，否则令 $\theta(s) := \infty$。我们将其勒让德变换记为

$$\theta^*(t) := \sup_{s\in\mathbb{R}}\big(st - \theta(s)\big) = \mathrm{e}^t - 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

函数 θ 和 θ^* 互为凸共轭函数，且是一对杨函数。我们定义 奥利奇范数

$$\|F\|_{L^\theta} := \sup\left\{\int FG\mathrm{d}\pi : \int \theta^*(|G|) \leq 1\right\}, \qquad F \in \mathscr{F}(\Upsilon).$$

令 $\mu = \rho\pi \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 并注意到 $\int\theta(\rho)\mathrm{d}\pi = \mathcal{H}(\mu \mid \pi)$。对于 $r \in \mathbb{R}$ 和 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$，令 $F_r(\eta) := \eta(B)1_{\{\eta(B)>r\}}$。鉴于 [KR61，第 (9.13) 式，第 73], 页，我们得到

$$\left|\int F_r\rho\mathrm{d}\pi\right| \leq \|F_r\|_{L^{\theta^*}}\big(1 \wedge \mathcal{H}(\mu \mid \pi)\big). \tag{3.5}$$

一方面，根据芬切尔不等式，我们有

$$\|F_r\|_{L^{\theta^*}} \leq \|F_0\|_{L^{\theta^*}} \leq \int(\mathrm{e}^{\eta(B)} - 1)\mathrm{d}\pi + 1. \tag{3.6}$$

根据泊松随机变量的指数可积性，该量是有限的。上面的第二个不等式表明 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H} \subset \mathscr{P}_1(\Upsilon)$。另一方面，根据控制收敛，

$$\int\theta^*(aF_r)\mathrm{d}\pi = \int 1_{\{a\eta(B)>r\}}(\mathrm{e}^{a\eta(B)} - 1)\,\pi(\mathrm{d}\eta) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \qquad a > 0.$$

鉴于奥利奇范数与卢森堡范数的等价性 [KR61，第 (9.24) 式，第 80], 页，后一个收敛关系意味着

$$\lim_{r\to\infty}\|F_r\|_{L^{\theta^*}} = 0.$$

结合（3.5），这表明命题2.14 中的一致可积性条件在 $\mathcal{H}(\cdot \mid \pi)$的次水平集上得到满足。根据 [DZ10，引理 6.2。12], ，这些次水平集还是弱拓扑下相对紧的，因此由命题2.14可知它们在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 中相对紧。由于$\mathcal{H}(\cdot \mid \pi)$ 是弱下半连续的（例如，[DZ10，引理 6.2。13]），且 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$-拓扑比弱拓扑更细，我们得到下半连续性。 □

3.5 费舍尔信息

（修正的）费舍尔信息 of $\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon)$ 为

$$\mathcal{I}(\mu \mid \pi) := \int \mathsf{D}\rho\,\mathsf{D}\log\rho\mathrm{d}(\pi \otimes m) \qquad \text{if} \quad \mu \ll \pi, \quad \rho = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\pi},$$

若 $\mu = \rho\pi$，否则 $\mathcal{I}(\mu \mid \pi) := \infty$ 。我们将 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}$ 记作满足 μ的 $\mathcal{I}(\mu \mid \pi) < \infty$的集合。由 θ的凸性，有 $(a-b)(\log a - \log b) = (a-b)(\theta'(a) - \theta'(b)) \geq 0$ 对所有 a 以及 $b \in \mathbb{R}$成立。这表明 $\mathcal{I}(\mu \mid \pi)$ 定义良好，尽管对于所有 ∞可能有 $\mu \in \mathscr{P}(\Upsilon)$。相对熵与费舍尔信息通过修正对数 *Sobolev* 不等式[Wu00，推论 2。2]相关：

$$\mathcal{H}(\mu \mid \pi) \leq \mathcal{I}(\mu \mid \pi), \qquad \mu \in \mathscr{P}(\Upsilon). \tag{3.7}$$

定理 3.2。 泛函 $\mathcal{I}(\cdot \mid \pi)$ 在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$上是下半连续的。

证明。 费舍尔信息的下半连续性将由函数层面定义的类似泛函的下半连续性推出，方法是一致可积性论证，具体如下。

弱 L^1_{loc} 下半连续性。 设 $L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 为满足以下条件的博雷尔函数 $u\colon \Upsilon\times X\to\mathbb{R}$ （等价类）构成的空间

$$\|u\|_B \coloneqq \int_{\Upsilon\times B} |u|\mathrm{d}(\pi\otimes m) < \infty, \qquad B\in\mathfrak{B}_0(X).$$

赋予由半范数族 $\|\cdot\|_B$ （满足 $B\in\mathfrak{B}_0(X)$）所诱导的局部凸拓扑后，空间 $L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 是一个弗雷歇空间，且 $L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 上的每个连续线性泛函都可表示为某个 $u\in L^\infty(\pi\otimes m)$，其 u 在某个 $B\in\mathfrak{B}_0(X)$之外为零，见引理 6.1。

我们定义

$$\psi(s,t)\coloneqq\begin{cases}(\log(s+t)-\log s)t, & \text{if } s>0,\ t>-s;\\ +\infty, & \text{otherwise;}\end{cases}$$

and

$$\mathcal{I}_\pi(\rho,u)\coloneqq\int_{\Upsilon\times X}\psi(\rho,u)\mathrm{d}(\pi\otimes m), \qquad \rho\in L^1(\pi),\ u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m);$$
$$\mathcal{I}_{\pi,B}(\rho,u)\coloneqq\int_{\Upsilon\times B}\psi(\rho,u)\mathrm{d}(\pi\otimes m), \qquad \rho\in L^1(\pi),\ u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m),\ B\in\mathfrak{B}_0(X).$$

固定 $B\in\mathfrak{B}_0(X)$，并记 m_B 为 m 在 B上的限制。由于 $\pi\otimes m_B$ 是有限无原子测度，且 $\psi\geq 0$, 根据 [Iof77定理 1]，可得 $\mathcal{I}_{\pi,\ B}$ 关于 $L^1(\pi)\times L^1(\pi\otimes m_B)$的弱拓扑是下半连续的。根据 [Bou81，II，第53页，命题 8]，，该弱拓扑实际上是 $L^1(\pi)$ 和 $L^1(\pi\otimes m_B)$上弱拓扑的积拓扑。

设 $(\rho_\alpha)\subset L^1(\pi)$ 是一个弱收敛于 $\rho\in L^1(\pi)$ 的网，并且 $(u_\alpha)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 是一个弱收敛于 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$的网。另一方面，根据引理 6.1，我们得到 $(u_\alpha 1_B)$ 是在 $L^1(\pi\otimes m_B)$ 中弱收敛于 $u1_B$ 的网。另一方面，

$$\liminf_\alpha \mathcal{I}_{\pi,B}(\rho_\alpha,u_\alpha)=\liminf_\alpha \mathcal{I}_{\pi,B}(\rho_\alpha,u_\alpha 1_B)\geq \mathcal{I}_{\pi,B}(\rho,u1_B)=\mathcal{I}_{\pi,B}(\rho,u).$$

因此，根据上述建立的下半连续性，我们发现 $\mathcal{I}_{\pi,\ B}$ 关于 $L^1(\pi)\times L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 上的弱拓扑实际上是下半连续的。
S由于 $\psi\geq 0$，泛函$B\mapsto\mathcal{I}_{\pi,\ B}$ 是单调递增的。根据单调收敛

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}_0(X)}\mathcal{I}_{\pi,B}=\mathcal{I}_\pi. \tag{3.8}$$

因此，作为下半连续函数的上确界， $\mathcal{I}_\pi$ 关于 $L^1(\pi)\times L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$ 上的弱拓扑也是下半连续的。

$\mathcal{P}_1(\Upsilon)$-下半连续性。固定 $b\geq 0$。我们证明

$$A_b\coloneqq\{\mu=\rho\pi\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)\colon \mathcal{I}(\mu\mid\pi)\leq b\}$$

在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 中是闭的。根据定理 2.11，只需证明它是序列闭的。考虑 $(\mu_n)\subset A_b$，其中 $\mu_n=\rho_n\pi$ 收敛于某个 $\mu\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$。由 (3.7) 以及 la Vallée-Poussin[DM75，第 22 定理，第 38]，页的一个定理，当将 A_b 视为 $L^1(\pi)$ 的子集时，它是一致可积的。因此，根据邓福德–佩蒂斯定理 [DM75，第 25 定理，第 43]，页，族 (ρ_n) 在 $L^1(\pi)$ 中是弱相对紧的。由于 (μ_n) 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 中收敛于 μ，因此我们可以找到满足 $\mu=\rho\pi$ 的 $\rho\in L^1(\pi)$，且 (ρ_n) 在 $L^1(\pi)$ 中弱收敛于 ρ。

令 $v\in L^\infty(\pi\otimes m)$ 使得存在 $B\in\mathfrak{B}_0(X)$ 满足 $v=0\,\pi\otimes m$在 $\Upsilon\times B$之外几乎处处成立。取 $h\in\mathcal{C}_0(X)$ 使得 $0\leq h\leq 1$ 且 $h=1$ 在 B上成立。根据命题2.14，我们

发现 $(\iota_h\rho_n)$ 在 $L^1(\pi)$中一致可积。根据邓福德–佩蒂斯定理，序列 $(\iota_h\rho_n)$在 $L^1(\pi)$ 中弱收敛至 $(\iota_h\rho)$。根据Mecke公式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{Y\times X} v\,\mathsf{D}\rho_n \mathrm{d}(\pi\otimes m) &= \int_Y \left[\int_B v(\eta-\delta_x,x)\eta(\mathrm{d}x) - \int_B v(\eta,x)m(\mathrm{d}x)\right]\rho_n(\eta)\pi(\mathrm{d}\eta)\\ &= \int_Y F\iota_h\rho_n \mathrm{d}\pi - \int_Y G\rho_n \mathrm{d}\pi,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}F(\eta) &= \int_B \frac{v(\eta-\delta_x,x)}{\eta(h)}\eta(\mathrm{d}x) \le \|v\|_{L^\infty(\pi\otimes m)},\\ G(\eta) &= \int_B v(\eta,x)m(\mathrm{d}x) \le m(B)\|v\|_{L^\infty(\pi\otimes m)}.\end{aligned}$$

因此， F 和 $G\in L^\infty(\pi)$均成立。由 $(\rho_n)_n$ 和 $(\iota_h\rho_n)_n$的弱收敛可知，$(\mathsf{D}\rho_n)_n$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$中弱收敛。
根据证明第一部分中已建立的 $\mathcal{I}_\pi$在 $L^1(\pi)\times L^1_{\mathrm{loc}}(\pi\otimes m)$上的弱下半连续性，

$$\mathcal{I}(\mu\mid\pi) = \mathcal{I}_\pi(\rho,\mathsf{D}\rho) \le \liminf_n \mathcal{I}_\pi(\rho_n,\mathsf{D}\rho_n) = \liminf_n \mathcal{I}(\mu_n\mid\pi) \le b.$$

这表明 $\mu\in A_b$，并由此完成证明。 □

根据詹森不等式， $\mathcal{H}(\cdot\mid\pi)$和 $\mathcal{I}(\cdot\mid\pi)$沿着对偶奥恩斯坦–乌伦贝克半群均单调递减。特别地，$\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$和 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}$在 $\mathsf{P}^\star$的作用下均保持稳定。对于局部狄利克雷型，在相当一般的情形下，半群会将 L^2 密度映射到费舍尔信息的定义域中。在我们的非局部情形下，没有类似的结果。因此，鉴于泊松情形下狄利克雷型的显式公式，我们进行了专门的计算。

定理 3.3。设 $\mu\in\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 和 $t>0$。

(i) 奥恩斯坦–乌伦贝克半群具有正则化作用：

$$\mathsf{P}_t^\star\mu \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}. \tag{3.9}$$

(ii) 费舍尔信息控制沿奥恩斯坦–乌伦贝克半群的熵产生：

$$\mathcal{H}(\mathsf{P}_t^\star\mu\mid\pi) = \mathcal{H}(\mu\mid\pi) - \int_0^t \mathcal{I}(\mathsf{P}_s^\star\mu\mid\pi)\mathrm{d}s. \tag{3.10}$$

(iii) 奥恩斯坦–乌伦贝克半群以指数速度收敛至平衡态：

$$\mathcal{H}(\mathsf{P}_t^\star\mu\mid\pi) \le \mathrm{e}^{-t}\,\mathcal{H}(\mu\mid\pi). \tag{3.11}$$

注 3.4。 (i) 和 (ii) 是通常所说的德布鲁因恒等式。它们对于扩散过程而言是经典结果。例如，参见 [BGL14，命题 5.2。2] 或 [AGS14a，定理 4。16]。为求完备起见，我们给出泊松过程情形的证明。

证明。 (i) 且 (ii) 首先假设 $\rho\in L^2(\pi)$。与之前一样，记 $\theta(s) := s\log s - s + 1$，当 $s\ge 0$ 时，以及 $\theta(s) := \infty$ 否则。对所有 $k\in\mathbb{N}$，令

$$\theta_k(s) := \int_1^s k\wedge\log r\vee(-k)\mathrm{d}r, \qquad s\ge 0, \tag{3.12}$$

且 $\theta_k(s) \coloneqq \infty$ 否则。那么，(θ_k) 是一个递增的利普希茨函数序列，收敛于 θ。令 $t > 0$，由（3.4），$\mathsf{P}_t\rho \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathsf{L}$。由于 θ_k' 是利普希茨函数，我们还可得 $\theta_k'(\mathsf{P}_t\rho) \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{E}$[BH91，命题 3.3.1，第 14]。因此，

$$\int \theta_k(\rho)\mathrm{d}\pi - \int \theta_k(\mathsf{P}_t\rho)\mathrm{d}\pi = -\int_0^t \int \theta_k'(\mathsf{P}_t\rho)\mathsf{L}\mathsf{P}_t\rho\mathrm{d}\pi\mathrm{d}t = \int_0^t \int \mathsf{D}\theta_k'(\mathsf{P}_t\rho)\mathsf{D}\mathsf{P}_t\rho\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m.$$

如 $k \to \infty$，根据单调收敛定理，左侧收敛到 $\mathcal{H}(\mathsf{P}_t^\star\mu \mid \pi) - \mathcal{H}(\mu \mid \pi)$。现在，我们还声称右侧也是单调的。首先，由于 θ_k 的凸性，我们发现右侧的被积函数非负。求两次导数可得 $\theta_{k+1} - \theta_k$ 是凸的。因此，

$$(\theta_{k+1}'(s) - \theta_{k+1}'(r))(s-r) \geq (\theta_k'(s) - \theta_k'(r))(s-r), \qquad s, r \geq 0. \tag{3.13}$$

上述公式说明了被积函数的单调性。根据单调收敛定理，我们得到 (3.10)。这也说明，对几乎处处的 t，式 (3.9) 成立。由连续性可知，它对每个 t 都成立。
现在我们只假设 $\mu = \rho\pi \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mu_k \coloneqq (\rho \wedge k)\pi / Z_k$。我们明确计算

$$\mathcal{I}(\mathsf{P}_t^\star\mu_k \mid \pi) = \frac{1}{Z_k}\int \mathsf{D}(\mathsf{P}_t\rho \wedge k)\mathsf{D}\theta_k'(\mathsf{P}_t\rho)\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m.$$

与 (3.13) 类似，对于 s 和 $r \geq 0$，有：

$$(\log(s\wedge(k+1)) - \log(r\wedge(k+1)))(s\wedge(k+1) - r\wedge(k+1)) \geq (\log(s\wedge k) - \log(r\wedge k))(s\wedge k - r\wedge k).$$

根据前面对 $L^2(\pi)$-密度所作的论证，我们得到

$$\mathcal{H}(\mathsf{P}_t^\star\mu_k \mid \pi) - \mathcal{H}(\mu_k \mid \pi) = \int_0^t \mathcal{I}(\mathsf{P}_s^\star\mu_k \mid \pi)\mathrm{d}s.$$

由于 $Z_k \to 1$，取 $k \to \infty$，由单调收敛可得结论。
(iii) 格朗沃尔引理连同 *(ii)* 以及 (3.7)。 □

注 3.5。 上述陈述及其证明可以直接推广到函数，而非概率测度。对于 $\rho \in L^1(\pi)$，记作

$$\mathcal{H}_\pi(\rho) \coloneqq \int \rho\log\rho\mathrm{d}\pi - \int \rho\mathrm{d}\pi \log\int \rho\mathrm{d}\pi;$$
$$\mathcal{I}_\pi(\rho) \coloneqq \int \mathsf{D}\rho\mathsf{D}\log\rho\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m.$$

如果 $\mathcal{H}_\pi(\rho) < \infty$，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_\pi(\mathsf{P}_t\rho) = -\mathcal{I}_\pi(\mathsf{P}_t\rho), \qquad t > 0.$$

4 连续性方程

为了构造黎曼距离，我们首先介绍曲线 $\bar{\mu} = (\mu_t) \subset \mathscr{P}_1(Y)$的无穷小变分 $\bar{\mu} = (\mu_t) \subset \mathscr{P}_1(Y)$这一概念。非正式地说，变分是通过离散连续性方程(1.1)的弱形式得到的。为了给出更严格的定义，先回顾一下，我们用 $\mathcal{S}$ 表示形如$\mathrm{e}^{-\iota_h}$的函数的代数线性张成 $h \in \mathscr{C}_0^+(X)$。对于 $T > 0$，我们称 $\bar{\mu} = (\mu_t) \in \mathscr{F}([0,T], \mathscr{P}(Y))$ 和 $\bar{\nu} = (\nu_t) \in \mathscr{F}([0,T], \mathscr{M}_{b,0}(Y \times X))$ 在连续性方程上 $[0,T]$ 满足

$$0 = \int_0^T \dot{\varphi}(t)\int G\mathrm{d}\mu_t\mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(t)\int \mathsf{D}G\mathrm{d}\nu_t\mathrm{d}t, \qquad G \in \mathcal{S},\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty((0,T)), \tag{$\mathbf{CE}_T$}$$

and

$$\int_{[0,T]} |\nu_t|(\Upsilon \times B)\mathrm{d}t < \infty, \qquad B \in \mathfrak{B}_0(X). \tag{4.1}$$

这里以及全文中，$\dot{\varphi}$ 表示时间导数，并且我们将 $\bar{\nu}$ 与 $\Upsilon \times X \times [0,1]$上的一个测度等同，定义为

$$\bar{\nu}(\mathrm{d}\eta \mathrm{d}x \mathrm{d}t) = \int \nu_t(\mathrm{d}\eta \mathrm{d}x)\mathrm{d}t.$$

在这一对应关系下，(4.1) 可写为 $\bar{\nu} \in \mathscr{M}_{b,\ 0}(\Upsilon \times X \times [0,T])$。直观地说，我们可以认为 $\bar{\nu}$ 是曲线 $\bar{\mu}$ 的切向量。

注 4.1. 与 (1.1) 不同，曲线 $\bar{\nu}$ 并不显式依赖于 $\bar{\mu}$。在第 5.1 节构造距离时，作用泛函将自动选出特定形式的解。我们先介绍连续性方程解的以下稳定性。

引理 4.2. 设 $(\bar{\mu}_n, \bar{\nu}_n)$ 是连续性方程 $\bar{\mu} \in \mathscr{F}([0,T], \mathscr{P}(\Upsilon))$ 的一列解，且 $\bar{\nu} \in \mathscr{M}_{b,\ 0}(\Upsilon \times X \times [0,T])$ 满足

$$\mu_{n,t} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{P}(\Upsilon)} \mu_t, \qquad a.e.\ t \in [0,T],$$
$$\bar{\nu}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X\times[0,T])} \bar{\nu}.$$

证明。右端第一项在 ($\mathbf{CE}_T$) 中的收敛性，由关于 $(\bar{\mu}_n)$ 的假设及控制收敛定理得出。右端第二项在 (4.1) 和 ($\mathbf{CE}_T$) 中的收敛性，则直接由关于 $(\bar{\nu}_n)$ 的假设得出。 □

4.1 连续性方程解的示例

我们从一个重要示例开始：利用对偶奥恩斯坦–乌伦贝克半群构造连续性方程的解。

命题 4.3. 设 $\mu_0 := \rho_0 \pi \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$。对所有 $t \geq 0$，令

$$\mu_t := \mathsf{P}_t^\star \mu_0 = \mathsf{P}_t \rho \pi, \qquad \nu_t := -\mathsf{D}\mathsf{P}_t \rho\, \mathrm{d}(\pi \otimes m).$$

那么 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是连续性方程的一个解。

证明. 由于 $\mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$，根据 Mecke 恒等式，我们有

$$\int_\Upsilon \int_B \rho(\eta + \delta_x) m(\mathrm{d}x)\pi(\mathrm{d}\eta) = I_\mu(B) < \infty, \qquad B \in \mathfrak{B}_0(X). \tag{4.2}$$

因此，

$$\int_0^T |\nu_t|(\Upsilon \times B)\mathrm{d}t = \int_\Upsilon \int_B |\mathsf{D}\mathsf{P}_t \rho| \mathrm{d}m \mathrm{d}\pi \leq \int_0^T \big(I_{\mu_t}(B) + m(B)\big)\mathrm{d}t.$$

右端根据（3.2）是有限的。这表明 $\bar{\nu}$ 满足（4.1）。

设 $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty((0,T))$ 和 $G \in \mathcal{S}$。我们计算

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{\varphi}(t) \int G \mathrm{d}\mu_t \mathrm{d}t &= \int_0^T \dot{\varphi}(t) \int \mathsf{P}_t G \mathrm{d}\mu_0 \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T \varphi(t) \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{P}_t G \mathrm{d}\mu_0 \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T \varphi(t) \int \mathsf{L}\mathsf{P}_t G \mathrm{d}\mu_0 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \varphi(t) \iint \mathsf{D}G \mathsf{D}\mathsf{P}_t \rho \mathrm{d}\pi \mathrm{d}m \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

我们利用了 P 关于 π的对称性，并对 t变量进行了分部积分，（3.3）和（3.4）。 □

奥恩斯坦–乌伦贝克流也以下述意义保持连续性方程的解。

命题 4.4。 设 $\varepsilon > 0$。假设 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是连续性方程的一个解。对所有 $t \in [0,T]$，考虑由下式给出的测度

$$\mu_t^\varepsilon := \mathsf{P}_\varepsilon^\star \mu_t, \qquad \nu_t^\varepsilon := \mathrm{e}^{-\varepsilon}\, \mathsf{P}_\varepsilon^\star \nu_t.$$

那么，$(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{\nu}^\varepsilon)$ 也是连续性方程的一个解。

证明。 设 $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$和 $G \in \mathcal{S}$。于是，$\mathsf{P}_\varepsilon G \in \mathcal{S}$。由（$\mathbf{CE}_T$）可知，对于 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$

$$0 = \int_0^T \dot{\varphi}_t \int \mathsf{P}_\varepsilon G \mathrm{d}\mu_t \mathrm{d}t + \int_0^T \varphi_t \int \mathsf{D}\mathsf{P}_\varepsilon G \mathrm{d}\nu_t \mathrm{d}t.$$

我们得出（$\mathbf{CE}_T$）对于 $(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{\nu}^\varepsilon)$成立，因为根据（**BE**），$\mathsf{D}\mathsf{P}_\varepsilon G = \mathrm{e}^{-\varepsilon}\, \mathsf{P}_\varepsilon \mathsf{D} G$。
由于 $\mathsf{P}^\star$ 仅作用于 $\bar{\nu}$ 的第一坐标，如果 $\bar{\nu}$ 满足（4.1），则 $\mathsf{P}_\varepsilon^\star \bar{\nu}$也满足。 □

连续性方程的解在时间重参数化下也保持不变。

引理 4.5 ([AGS08, 引理 8.1。3])。 设有一个严格递增且绝对连续的函数 $\lambda : [0,T'] \to [0,T]$，其逆函数也绝对连续。那么 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 满足($\mathbf{CE}_T$) 当且仅当 $(\bar{\mu} \circ \lambda, \lambda' \cdot \bar{\nu} \circ \lambda)$ 在 $(0,T')$上满足连续性方程。

4.2 扩展解的概念

令 $\mathscr{H}$ 为所有满足$\mathsf{D}G \in \mathcal{F}_{b,0}(\Upsilon \times X)$的 $G \in \mathcal{F}_b(\Upsilon)$ 所构成的空间。($\mathbf{CE}_T$) 对每个$F \in \mathscr{H}$都有意义。特别地，可以通过在 ($\mathbf{CE}_T$) 中用 $\mathscr{H}$ 替换 $\mathcal{S}$，来定义连续性方程的另一种解的概念。本节的目标是证明，这样得到的解的概念与原来的相同。

4.2.1 Y 中局部集合的代数

设 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$ 是闭的。我们用 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$ 表示所有满足以下条件的 $A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ 的集合：

$$\forall x \in X \setminus B \qquad \eta \in A \Leftrightarrow \eta + \delta_x \in A.$$

容易验证，$\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$ 是 $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ 的一个子 σ-代数，并且 F 是 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$-可测的，当且仅当 $\mathsf{D}F$ 在 $\Upsilon \times B$ 之外为零。令 Υ_B 为支撑在 B 中的构型集合。由于 B 是闭的，依据 Portmanteau定理，Υ_B 是 Υ 的闭子集，因此它是一个波兰空间。我们需要以下引理。设 $\mathfrak{B}_B(\Upsilon) = \sigma\big(\iota_{B'} : B' \in \mathfrak{B}_B(X)\big)$，并用 $\mathrm{pr}_B : \Upsilon \to \Upsilon_B$ 表示典范投影。

引理 4.6。 以下 σ-代数相同：

$$\mathfrak{B}_B(\Upsilon) = \mathfrak{A}_B(\Upsilon) = \mathrm{pr}_B^{-1}\mathfrak{B}(\Upsilon_B).$$

证明。 设 $B' \in \mathfrak{B}_B(X)$。由于 $\iota_{B'}$ 是 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$-可测的，我们得到 $\mathfrak{B}_B(\Upsilon) \subset \mathfrak{A}_B(\Upsilon)$。另一方面，$\mathfrak{B}(\Upsilon)$ 由所有形如以下形式的集合生成：

$$\{\eta(C_1) = k_1, \dots, \eta(C_l) = k_l\}, \qquad l \in \mathbb{N},\ (C_i) \in \mathfrak{B}_0(X)^l,\ (k_i) \in \mathbb{N}^l. \tag{4.3}$$

由于 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$ 是σ的子代数，$\mathfrak{B}(\Upsilon)$它由（4.3）中同时属于 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$的那些集合生成。容易验证，对于（4.3）中的任意集合 A，$A \in \mathfrak{A}_B(\Upsilon)$ 成立，当且仅当 $C_i \subset B$ 对所有 i都成立。因此 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon) \subset \mathrm{pr}_B^{-1}\mathfrak{B}(\Upsilon)$。事实是，$\mathfrak{B}_B(\Upsilon)$ 与 $\mathrm{pr}_B^{-1}\mathfrak{B}(\Upsilon)$ 相同，这是众所周知的。 □

最后，我们定义代数

$$\mathfrak{A}(\Upsilon) := \cup_B \mathfrak{A}_B(\Upsilon).$$

读者可以很容易地验证， $\mathfrak{A}(\Upsilon)$ 是一个代数，但通常不是一个 σ-代数。我们有， $\mathscr{H}$是同时满足 $F \in \mathscr{F}_b(\Upsilon)$ 且 $\mathfrak{A}(\Upsilon)$-可测的元素所组成的集合。

4.2.2 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$的拓扑

对于所有闭的 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$，我们用 $\mathscr{H}_B$ 表示满足以下条件的 $G \in \mathscr{H}$所构成的空间：在 $\Upsilon \times B$之外， $\mathsf{D}G = 0$。或者， $\mathscr{H}_B$ 是 $F \in \mathscr{F}_b(\Upsilon)$ 中 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$-可测元素所组成的集合。空间 $\mathscr{H}_B$ 在以下范数下是一个巴拿赫空间

$$\|G\|_{\mathscr{H}_B} := \|G\|_{\mathscr{F}_b(\Upsilon)} + \|\mathsf{D}G\|_{\mathscr{F}_b(\Upsilon\times X)}.$$

$\mathscr{H}$ 上的拓扑是 $n \in \mathbb{N}$ 中巴拿赫空间 $\mathscr{H}_n = \mathscr{H}_{B(o,n)}$的严格归纳极限，其中 $o \in X$固定。根据 [Bou81，命题9（iii），第II.34]页， $\mathscr{H}$ 是完备的。我们考虑由连续可微且紧支撑函数 $F\colon (0,T) \to \mathscr{H}$构成的空间 $\mathscr{C}^1_c((0,T),\mathscr{H})$。为了给$\mathscr{C}^1_c((0,T),\mathscr{H})$ 赋予适当的拓扑，我们引入一些记号。给定一个局部凸线性空间 E，我们记作 $\mathscr{C}^1_T(E) = \mathscr{C}^1_c((0,T),E)$；对于 $n \in \mathbb{N}$， $\mathscr{C}^1_{T,n}(E)$ 表示由支撑在 $[1/n, T-1/n]$上的函数F 构成的空间。当 $E = \mathbb{R}$时，我们在记号中省略 E。对于所有 k 和$n \in \mathbb{N}$， 空间$\mathscr{C}^1_{T,k}(\mathscr{H}_n)$ 都是巴拿赫空间。我们在 $n \in \mathbb{N}$ 中固定 k 的情况下，为$\mathscr{C}^1_{T,k}(\mathscr{H})$ 赋予严格归纳极限拓扑。然后，我们在$k \in \mathbb{N}$ 中为$\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$ 赋予$\mathscr{C}^1_{T,k}(\mathscr{H})$的严格归纳极限拓扑。这也与 $n \in \mathbb{N}$ 中$\mathscr{C}^1_{T,n}$的严格归纳极限相一致。

引理 4.7。 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{C}^\infty_c((0,T))$ 在$\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$中稠密。

证明。 设$F \in \mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$ 和 $\varepsilon > 0$。存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得$F \in \mathscr{C}^1_{T,n}(\mathscr{H}_n)$。由于$\mathscr{H}_n \otimes \mathscr{C}^1_{T,n}$ 在$\mathscr{C}^1_{T,n}(\mathscr{H}_n)$中稠密，因此存在$F_\varepsilon \in \mathscr{H}_n \otimes \mathscr{C}^1_{T,n} \subset \mathscr{H} \otimes \mathscr{C}^1_T$ 使得

$$\|F_\varepsilon - F\|_n \le \varepsilon.$$

设 p 是定义在 $\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$上的连续半范数。根据归纳极限的泛性质 [Bou81，命题 5，第 II 页。29], 存在 $c > 0$ 使得

$$p(F_\varepsilon - F) \le c\|F_\varepsilon - F\|_n \le c\varepsilon.$$

因此 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{C}^1_T$ 在 $\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$中稠密。通过磨光可得 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{C}^\infty_c((0,T))$ 稠密。 □

4.2.3 $\mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$上成立连续性方程

命题 4.8。 设 $(\bar\mu, \bar\nu)$ 是连续性方程的一个解。那么，

$$\int_0^T \mu_t(\dot F_t)\mathrm{d}t + \int_0^T \nu_t(\mathsf{D}F_t)\mathrm{d}t = 0, \qquad F \in \mathscr{C}^1_T(\mathscr{H}). \tag{4.4}$$

证明。 设 $(\bar\mu, \bar\nu)$ 是连续性方程的一个解。我们将证明分为两部分。

(4.4) 对 $F = G \otimes \varphi \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{C}^\infty_c((0,T))$ 成立。 设 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$ 闭。记 $\hat{\mathscr{H}}_B$ 为满足 $G \in \mathscr{H}_B$ 使得 ($\mathbf{CE}_T$) 对 $G \otimes \varphi$以及所有 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c((0,T))$成立的函数空间。由于 ($\mathbf{CE}_T$) 关于 $\hat{}$是线性的 G， $\hat{\mathscr{H}}_B$ 是一个包含常数的线性空间。

设 $(G_n) \subset \hat{\mathscr{H}}_B$ 一致收敛到某个 G。首先，由于 $\mathscr{H}_B$ 是赋予一致收敛拓扑的巴拿赫空间，$G \in \mathscr{H}_B$。其次，我们有 $G_n \to G$ 在 Υ 上一致收敛，且 $\mathsf{D}G_n \to \mathsf{D}G$ 在 $\Upsilon \times B$ 上一致收敛。因此，将 ($\mathbf{CE}_T$) 应用于 $G_n \otimes \varphi$，取极限，并利用勒贝格控制收敛定理$\hat{}$ $\hat{}$，可知 $G \otimes \varphi$ 满足 ($\mathbf{CE}_T$)。这表明 $G \in \mathscr{H}_B$，且 $\mathscr{H}_B$ 在一致收敛下是闭的。

设 $(G_n) \subset \hat{\mathscr{H}}_B$ 是一个递增且有界的非负函数序列。记作 $G = \lim_n G_n$。根据单调收敛定理，我们得到

$$\int_0^T \dot{\varphi}(t)\mu_t(G_n)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^T \dot{\varphi}(t)\mu_t(G)\mathrm{d}t.$$

由 (4.1) 可得 以及 $\mathscr{H}_B$、$|\mathsf{D}G_n \otimes \varphi| \le c1_{\Upsilon\times B\times[0,T]} \in L^1(\bar{\nu})$ 的定义。因此，由控制收敛 ，

$$\bar{\nu}(\mathsf{D}G_n \otimes \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{\nu}(\mathsf{D}G \otimes \varphi).$$

这表明 $G \in \mathscr{H}_B$，且 $\mathscr{H}_B$ 在一致有界的单调收敛下保持稳定。因此，$\mathscr{H}_B$ 满足单调类定理 [DM75，定理 21，第 20] 页的假设。令 $\mathcal{S}_B$为形如 $\mathrm{e}^{-\iota_h}$ 的函数的线性张成，其中 $h \in \mathscr{C}_b$、$_B(X)$。根据构造，$\mathcal{S}_B \subset \hat{\mathscr{H}}_B$ 且 $\mathcal{S}_B$ 在乘法下保持稳定。因此，$\hat{\mathscr{H}}_B$ 包含所有关于由 $\mathcal{S}_B$生成的 σ-代数可测的有界函数。类似于 [Las16，引理 2] 中的论证表明，该σ-代数包含所有满足 $h \in \mathscr{C}_b$、$_B(X)$ 和 $B' \subset B$的 ι_h。根据引理 4.6，该 σ-代数是 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$。这表明 $\mathscr{H}_B = \mathscr{H}_B$。

取 $G \in \mathscr{H}$。根据定义，存在 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$ 使得 $G \in \mathscr{H}_B$。由第一部分即可得出结论。

(4.4) 对 $F \in \mathscr{C}_T^1(\mathscr{H})$ 成立。 根据引理 4.7，我们可以找到 $(F_n) \subset \mathscr{H} \otimes \mathscr{C}_c^\infty((0,T))$，使其在 $\mathscr{C}_T^1(\mathscr{H})$中收敛到 F。由证明的前一部分可知

$$\bar{\mu}(\dot{F}_n) + \bar{\nu}(F_n) = 0.$$

根据 $\mathscr{C}_T^1(\mathscr{H})$ 上收敛的定义，我们可以应用控制收敛定理得出结论。 □

4.3 连续性方程的性质

本节将得到若干关于沿连续性方程演化的某些量的结果。所有这些结果都源于以下简单的观察。

引理 4.9. 取 $G \in \mathscr{H}$ 和 $B_G \in \mathfrak{B}_0(X)$，使得 $\mathsf{D}G = 0$ 在 $\Upsilon \times B_G$之外成立。假设 $\varphi \otimes G$对所有 $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty((0,T))$都满足 ($\mathbf{CE}_T$)。那么，存在一个满测度的 $L_G \in \mathfrak{B}((0,T))$，使得

$$\mu_t(G) - \mu_s(G) \le 2\|G\|_\infty \int_s^t |\nu_r|(\Upsilon \times B_G)\mathrm{d}r, \qquad t, s \in L_G. \tag{4.5}$$

证明。这些假设保证 $t \mapsto \mu_t(G) \in W^{1,\ 1}(0,T)$ 其分布导数由 b 给出 y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(G) = \nu_t(\mathsf{D}G), \qquad t \in [0,T].$$

简言之，我们将 $N_t(B) = |\nu_t|(\Upsilon \times B)$ 记作 $t \in [0,T]$ 和 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$。根据假设，存在$B_G \in \mathfrak{B}_0(X)$，使得在 $\Upsilon \times B_G$之外有 $\mathsf{D}G = 0$。于是我们有

$$|\dot{\mu}_t(G)| \le 2N_t(B_G)\|\mathsf{D}G\|_\infty \le N_t(B_G)\|G\|_\infty, \qquad t \in [0,T].$$

根据勒贝格微分定理，存在一个满测度的 $L_G \subset \mathfrak{B}(0,T)$，使得

$$\dot{\mu}_t(G) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mu_s(G)\mathrm{d}s, \qquad t \in L_G.$$

这给出了（4.5），从而完成证明。 □

4.3.1 连续性方程中的强度测度

该结果的一个初步应用如下，它给出了对强度测度的控制。

定理 4.10. 设 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是满足 $\mu_0 \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$的连续性方程的一个解。那么，对于几乎处处的 $t \in [0,T]$, $\mu_t \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 且

$$I_{\mu_t}(B) = I_{\mu_0}(B) + \int_0^t \nu_s(\Upsilon \times B)\mathrm{d}s, \qquad B \in \mathfrak{B}_0(X).$$

证明。 令 $h \in \mathscr{F}_0(X)$。根据命题4.8，连续性方程对 $\iota_h \otimes \varphi$, $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty((0,T))$成立。取 $(h_k) \subset \mathscr{C}_0(X)$ 如定理 2.2 (i)所示。对于所有 $k \in \mathbb{N}$，取 $B_k \in \mathfrak{B}_0(X)$ 使得$h_k = 0$ 在 B_k之外。我们定义

$$a_k := 2^{-k}\Big(1 \wedge |\bar{\nu}|(\Upsilon \times B_k \times [0,T])^{-1}\Big).$$

根据 h_k 的构造，距离

$$\rho(\lambda, \sigma) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k |(\lambda - \sigma)(h_k)|, \qquad \lambda, \sigma \in \mathscr{M}_0^+(X),$$

在 $\mathscr{M}_0^+(X)$ 上诱导模糊拓扑。
现在，我们应用引理 4.9，其中 $G_k = \iota_{h_k}$ 和 $B_{G_k} = B_k$。这给出一个满测集 $L := \cap_k L_{G_k}$，使得

$$\rho(I_{\mu_t}, I_{\mu_s}) \le c\int_s^t \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k |\nu_r|(\Upsilon \times B_r) \le c|t-s|, \qquad s, t \in L.$$

这表明 $t \mapsto I_{\mu_t} \in \mathscr{M}_0^+(X)$ 在稠密集 $L \subset [0,T]$上一致连续。根据一致连续映射的延拓定理 [Bou71，II，第 20 页，定理 2]，，我们可以将其延拓为一个连续映射 $\sigma\colon [0,T] \to \mathscr{M}_0^+(X)$。

由于 $\sigma_t = I_{\mu_t}$对几乎所有 $t \in [0,T]$都成立，我们得到

$$\int_0^T \dot{\varphi}(t)\sigma_t(h)\mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(t)\sigma_t(1 \otimes h)\mathrm{d}t = 0, \qquad h \in \mathscr{F}_0(X),\ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty((0,T)).$$

取一个序列 $(\varphi_l) \subset \mathscr{C}_c^\infty((0,1))$，使得当 $l \to \infty$时， $\varphi_l \to 1_{[t_0,t_1]}$且 $\dot{\varphi}_l \to \delta_{t_0} - \delta_{t_1}$，由此得到

$$\sigma_{t_1}(h) = \sigma_{t_0}(h) + \int_0^t \nu_s(\Upsilon \otimes h), \qquad h \in \mathscr{F}_0(X).$$

结论立即成立。 □

4.3.2 连续解的存在性

定理 4.11。 连续性方程的每个解 $(\bar{\mu}', \bar{\nu})$ （其中 $\mu_0 \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$）都存在一个代表元 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$，使得 $[0,T] \ni t \mapsto \mu_t \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$连续。此外，对所有 t_0和 $t_1 \in [0,T]$:

$$\mu_{t_1}(F_{t_1}) - \mu_{t_0}(F_{t_0}) = \int_{t_0}^{t_1} \mu_t(\dot{F}_t) + \nu_t(\mathrm{D}F_t)\mathrm{d}t, \qquad F \in \mathscr{C}^1([0,T], \mathscr{H}). \tag{4.6}$$

证明。 我们考虑非负测度

$$\lambda(B) = I_{\mu_0}(B) + \int_0^T |\nu_s|(\Upsilon \times B)\mathrm{d}s, \qquad B \in \mathfrak{B}(X).$$

根据引理 2.5 和定理 4.10，我们可以找到一个可数集 $(G_k) = \mathscr{G}^\lambda \subset \mathscr{G}$ 使得在$\{\mu'_t : t \in [0,T]\}$ 上，$\mathscr{P}(\Upsilon)$ 的拓扑由 $\mathscr{G}^\lambda$上的简单收敛所诱导。对于所有$k \in \mathbb{N}$，记 B_k 为一个有界集，使得 $G_k \in \mathscr{H}_{B_k}$，并令

$$b_k = 2^{-k}\Big(1 \wedge |\bar{\nu}|(\Upsilon \times B_k \times [0,T])^{-1}\Big),$$
$$\delta(\mu'_t, \mu'_s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k |(\mu_t - \mu_s)(G_k)|, \qquad t, s \in [0,T].$$

那么， δ 是 (μ'_t) 上的一个距离，并使 $\mathscr{P}(\Upsilon)$的拓扑度量化。运用引理 4.9，并按照定理 4.10 的证明进行论证可知，在稠密子集 $L = \cap L_{G_k}$ 上，映射 $t \mapsto \mu'_t \in \mathscr{P}(\Upsilon)$ 关于 δ是一致连续的。于是，我们可以将其延拓为连续映射 $t \mapsto \mu_t \in \mathscr{P}(\Upsilon)$。事实是， $\bar{\mu}$ 实际上取值于 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 中且为连续函数，这是定理 4.10 和命题 2.12 的推论。对于由 (4.4) 得到的函数 $F \in \mathscr{C}^1_T(\mathscr{H})$，通过考察 (t_0, t_1) 上的一列光滑函数，使其收敛于 $1_{(t_0,t_1)}$，且其导数在分布意义下收敛于 $\delta_{t_0} - \delta_{t_1}$，即可得到公式 (4.6)（详见 [Erb14，引理 3.1]）。通过逼近，这一结论可推广到 $F \in \mathscr{C}^1([0,T], \mathscr{H})$。 □

推论 4.12. 若 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是满足 $\mu_0 \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 的解，则有

$$\mu_t(F) = \mu_0(F) + \int_0^t \nu_s(\mathsf{D}F)\mathrm{d}s, \qquad F \in \mathscr{H}. \tag{4.7}$$

证明。 将（4.6）应用于 $F_t = F$ 对所有 $t \in [0,T]$。 □

4.3.3 连续性方程下的相对熵

在（3.10）中，我们有费舍尔信息控制着沿 $\mathsf{P}^\star$ 的熵产生。连续性方程下的熵也有类似结果。

定理 4.13. 设 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是连续性方程的一个解，使得对所有 $t \in [0,T]$、 $\mu_t = \rho_t \pi \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 和 $\nu_t = w_t(\pi \otimes m)$，且

$$\int_0^T \mathcal{I}(\mu_t \mid \pi)\mathrm{d}t + \int_0^T \int |w_t|^2 \frac{\mathsf{D}\log\rho_t}{\mathsf{D}\rho_t}\mathrm{d}t < \infty. \tag{4.8}$$

那么，对所有 $t \in [0,T]$:

$$\mathcal{H}(\mu_t \mid \pi) - \mathcal{H}(\mu_0 \mid \pi) = \int_0^t \int \mathsf{D}\log\rho_s \mathrm{d}\nu_s \mathrm{d}s. \tag{4.9}$$

注记 4.14。 我们来谈谈假设（4.8）。首先，由柯西–施瓦茨不等式可知，这保证了 $\mathsf{D}\log\rho \in L^1(\bar{\nu})$，因此（4.9）右端有定义。其次，对费舍尔信息的条件并不十分苛刻。事实上，若我们从 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$中的连续性方程解出发，那么根据命题 4.3，总可以用奥恩斯坦–乌伦贝克半群对其进行扰动，从而得到一个满足 Fisher 熵有限性的解，见（3.10）。最后，（4.8）中涉及第二个积分的条件可能显得较为特别。不过，这个量在下一节作用量和变分距离的定义中发挥着自然的作用。

注记 4.15。 考虑 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 这一由对偶奥恩斯坦–乌伦贝克半群给出的连续性方程解，如命题4.3所述。在这种情况下，

$$\int_0^t \int \mathsf{D}\log\rho_s \mathrm{d}\nu_s \mathrm{d}s = -\int_0^t \mathcal{I}(\mathsf{P}^\star_s \mu_0 \mid \pi)\mathrm{d}s,$$

以及关于沿奥恩斯坦–乌伦贝克半群的熵产生的公式（3.10）与（4.9）一致。

证明。 为方便起见，我们首先给出该结论的一个简短启发式证明；这一证明至少可以追溯到 [OV00] 的开创性工作。因此，我们假设 $\rho \in \mathscr{C}^1([0,T],\mathscr{H})$，其中 ρ 下界离0有界。由于

$$\mathsf{D}\log\rho = \log(\rho+\mathsf{D}\rho) - \log\rho,$$

我们发现 $\log\rho$ 也属于 $\mathscr{C}^1([0,T],\mathscr{H})$。将 (4.6) 应用于 $F=\log\rho$ 可得

$$\mathcal{H}(\mu_t \mid \pi) - \mathcal{H}(\mu_0 \mid \pi) = \int_0^t \int \dot{\rho}_s \mathrm{d}\pi \mathrm{d}s + \int_0^t \int \mathsf{D}\log\rho_s \mathrm{d}\nu_s \mathrm{d}s.$$

由于 ρ_t 对所有 t都是概率密度，$\int \dot{\rho}_s \mathrm{d}\pi = 0$。这证明了此情形下的结论。证明的其余部分将这一思路推广到一般密度。需要强调的是，所有思路都已包含在这个简短的论证中。

现在，我们只假设 $\mathsf{D}\log\rho \in L^1(\bar{\nu})$。我们需要两个关于连续性方程解在正则化下的稳定性结果。

连续性方程在时间正则化下的稳定性。 设 ψ 是 $\mathbb{R}$上的光滑、紧支撑、非负、对称磨光函数，并且 $\varepsilon>0$。我们定义

$$\begin{aligned}
\psi_\varepsilon &:= \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\\
\rho_t^\varepsilon &:= \int_0^T \rho_\tau \psi_\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\\
w_t^\varepsilon &:= \int_0^T w_\tau \psi_\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

于是 $\bar{\rho}^\varepsilon \in \mathscr{C}^1([0,T],L^1(\pi))$。令 $\mu_t^\varepsilon := \rho_t^\varepsilon \pi$ 和 $\nu_t^\varepsilon := w_t^\varepsilon(\pi\otimes m)$，我们还有 $(\bar{\mu}^\varepsilon,\bar{\nu}^\varepsilon)$ 满足连续性方程。事实上，取 $F\in\mathscr{C}_T(\mathscr{H})$，并令

$$F_\tau^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T F_t \psi\Big(\frac{\tau-t}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}t,$$

我们有 $F_\tau^\varepsilon \in \mathscr{C}_T(\mathscr{H})$ 对所有充分小的 $\varepsilon>0$，并且

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{F}_t \mathrm{d}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^T\int \dot{F}_t \psi\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\rho_\tau \mathrm{d}\pi\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^T\int \dot{F}_\tau^\varepsilon \rho_\tau \mathrm{d}\pi\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^T\int \mathsf{D}F_\tau^\varepsilon w_\tau \mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^T \mathsf{D}F_t w_t^\varepsilon \mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由于 $F\in\mathscr{C}_T(\mathscr{H})$ 是任意的，（$\mathbf{CE}_T$）对 $(\bar{\mu}^\varepsilon,\bar{\nu}^\varepsilon)$成立。此外，根据构造，$\bar{\nu}^\varepsilon$ 满足（4.1）。这表明 $(\bar{\mu}^\varepsilon,\bar{\nu}^\varepsilon)$ 是连续性方程的一个解。

空间正则化下连续性方程的稳定性。现在，固定 $B\in\mathfrak{B}_0(X)$，并定义

$$\begin{aligned}
\rho_t^B &:= \mathbb{E}_\pi[\rho_t \mid \mathfrak{A}_B(Y)],\\
w_t^B &:= \mathbb{E}_{\pi\otimes m}[w_t 1_{Y\times B} \mid \mathfrak{A}_B(Y)\otimes\mathfrak{B}_B(X)].
\end{aligned}$$

例如，参见 [DM80，第 39–43 节，第 36–43]，了解关于相对于 σ-有限测度的条件期望和鞅的回顾。更通俗地说，我们有

$$w_t^B(\cdot, x) = 1_B(x)\,\mathbb{E}_\pi[w_t(\cdot, x) \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon)], \qquad x \in X. \tag{4.10}$$

鉴于泊松点过程的独立性，我们有显式公式：

$$\rho_t^B(\eta) = \int \rho_t(\eta_{\restriction B} + \xi)\pi_{X\setminus B}(\mathrm{d}\xi),$$

其中，对于 $C \in \mathfrak{B}(X)$，π_C 是强度为 $m_{\restriction C}$ 的泊松点过程。令 $\mu_t^B = \rho_t^B\pi$ 和 $\nu_t^B = w_t^B(\pi \otimes m)$，并且我们声称 $(\bar{\mu}^B, \bar{\nu}^B)$ 是连续性方程的一个解。根据条件期望的塔式性质

$$|\bar{\nu}^B|(\Upsilon \times X \times [0,T]) = \int_0^T \mathbb{E}_{\pi\otimes m}\big[|w_t^B|\big]\mathrm{d}t \le \int_0^T \mathbb{E}_{\pi\otimes m}[|w_t 1_{\Upsilon\times B}|]\mathrm{d}t = |\bar{\nu}|(\Upsilon \times B \times [0,T]) < \infty.$$

因此，$\bar{\nu}^B$ 满足（4.1）。现在，设 u 有界且 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}_B(X)$-可测。由显式公式

$$\mathsf{D}^\star(u1_{\Upsilon\times B})(\eta) = \int_B u(\eta - \delta_x, x)\eta(\mathrm{d}x) - \int_B u(\eta, x)m(\mathrm{d}x),$$

我们发现，对于 $y \notin B$，

$$\mathsf{D}^\star(1_{\Upsilon\times B}u)(\eta + \delta_y) = \int_B (\eta - \delta_x + \delta_y, x)(\eta + \delta_y)(\mathrm{d}x) - \int_B u(\eta + \delta_y, x)m(\mathrm{d}x) = \mathsf{D}^\star(u1_{\Upsilon\times B})(\eta).$$

Thus，$\mathsf{D}^\star(1_{\Upsilon\times B}u)$ 是 $\mathfrak{A}_B(\Upsilon)$-可测的。对于 $F \in \mathscr{H}$，由 Mecke公式，我们因此发现 t

$$\begin{aligned}\int \mathsf{D}F 1_{\Upsilon\times B}u\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m &= \int F\mathsf{D}^\star(1_{\Upsilon\times B}u)\mathrm{d}\pi \\ &= \int \mathbb{E}_\pi[F \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon)]\mathsf{D}^\star(1_{\Upsilon\times B}u)\mathrm{d}\pi \\ &= \int \mathsf{D}\,\mathbb{E}_\pi[F \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon)]u\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

由于 u 是任意的，

$$\mathbb{E}_{\pi\otimes m}[\mathsf{D}F \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}_B(X)]1_{\Upsilon\times B} = \mathsf{D}\,\mathbb{E}_\pi[F \mid \mathfrak{A}_B].$$

因此，对于 $F \in \mathscr{C}_T(\mathscr{H})$，

$$\begin{aligned}\int_0^T \int \dot{F}_t\mathrm{d}\mu_t^B\mathrm{d}t &= \int_0^T \int \mathbb{E}_\pi\big[\dot{F}_t \,\big|\, \mathfrak{A}_B(\Upsilon)\big]\mathrm{d}\mu_t\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^T \int \mathsf{D}\,\mathbb{E}_\pi[F_t \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon)]w_t\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^T \int \mathsf{D}F_t\,\mathbb{E}_{\pi\otimes m}[w_t 1_{\Upsilon\times B} \mid \mathfrak{A}_B(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}_B(X)].\end{aligned}$$

这表明 $(\bar{\mu}^B, \bar{\nu}^B)$ 满足（$\mathbf{CE}_T$）。

结合这两种正则化。现在我们定义

$$\rho_t^{\varepsilon,B} = \mathbb{E}_\pi\big[\rho_t^\varepsilon \,\big|\, \mathfrak{A}_B(\Upsilon)\big],$$
$$w_t^{\varepsilon,B} = \mathbb{E}_{\pi\otimes m}\big[w_t^\varepsilon 1_{\Upsilon\times B} \,\big|\, \mathfrak{A}_B(\Upsilon)\otimes\mathfrak{B}_B(X)\big].$$

我们还考虑这两个相关测度 $(\bar\mu^{\varepsilon,B},\bar\nu^{\varepsilon,B})$。注意，两个正则化是可交换的，也就是说，先在空间上再在时间上应用正则化，会得到相同的对象。由前面的结果可知，$(\bar\mu^{\varepsilon,B},\bar\nu^{\varepsilon,B})$ 是连续性方程的一个解。对积分号下求导可得 $\bar\rho^{\varepsilon,\ B}\in\mathscr{C}^1([0,T],L^1(\pi))$。前面的两个事实表明 $\dot\rho^{\varepsilon,\ B}_{t} = \mathsf{D}^\star w^{\varepsilon,\ B}_{t}$。固定 $k\in\mathbb{N}$，回顾 θ_k 在（3.12）中定义。于是我们得到

$$\begin{aligned}\int\theta_k(\rho_t^{\varepsilon,B})\mathrm{d}\pi - \int\theta_k(\rho_0^{\varepsilon,B})\mathrm{d}\pi &= \int_0^t\int\theta_k'(\rho_s^{\varepsilon,B})\mathsf{D}^\star w_s^{\varepsilon,B}\mathrm{d}\pi\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t\iint\mathsf{D}\theta_k'(\rho_s^{\varepsilon,B})w_s^{\varepsilon,B}\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon\to0$，我们有 $\bar\rho^{\varepsilon,\ B}\to\bar\rho^B$ 在 $\mathscr{C}^0([0,T],L^1(\pi))$中，并且 $w^{\varepsilon,\ B}_{s}\to w_s^B$在 $L^1(\pi\otimes m)$ 中，对于几乎处处的 $s\in[0,T]$均成立。因此，由控制收敛可得

$$\int\theta_k(\rho_t^B)\mathrm{d}\pi - \int\theta_k(\rho_0^B)\mathrm{d}\pi = \int_0^t\iint\mathsf{D}\theta_k'(\rho_s^B)w_s^B\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m\mathrm{d}s = \int_0^t\int\theta_k'(\rho_s^B)\mathsf{D}^\star w_s^B\mathrm{d}\pi\mathrm{d}s.$$

由单调收敛，当 $k\to\infty$ 时，我们得到

$$\mathcal{H}(\mu_t^B\mid\pi) - \mathcal{H}(\mu_0^B\mid\pi) = \int_0^t\int\log\rho_s^B\mathsf{D}^\star w_s^B\mathrm{d}\pi\mathrm{d}s = \int_0^t\iint\mathsf{D}\log\rho_s^B w_s^B\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m\mathrm{d}s. \tag{4.11}$$

由鞅几乎必然收敛定理，我们得到 $\rho_t^B\to\rho_t$ 几乎必然，当$B\to X$时。根据[DM80，第 103.1 式，第 186],页，我们有 $\sup_B\rho_t^B\in L\log L(\pi)$。因此，由控制收敛，鞅也在 $L\log L(\pi)$ 中收敛。由此可知，我们可以对（4.11）左侧取极限。

现在我们证明，右侧也可以取极限。首先，由于鞅几乎必然收敛定理对 σ-有限测度也成立，[DM80，§41，第 37],页，我们有 $w^B\to w$ 几乎必然成立。因此，要得出结论，只需证明 $(\mathsf{D}\log\rho^B w^B)$在 $L^1(\pi\otimes m\otimes\mathrm{d}t)$中一致可积。首先，由 $(s,t)\mapsto(\log s-\log t)(s-t)$的凸性以及条件期望的詹森不等式

$$\mathsf{D}_x\log\rho_t^B\mathsf{D}_x\rho_t^B \le \mathbb{E}_\pi[\mathsf{D}_x\log\rho_t\mathsf{D}_x\rho_t\mid\mathfrak{A}_B(\Upsilon)].$$

其次，根据 $(w,s,t)\mapsto w^2(\log s-\log t)/(s-t)$的凸性、条件期望的詹森不等式以及（4.10）

$$\left(\left|w_t^B(\cdot,x)\right|^2\frac{\mathsf{D}_x\log\rho_t^B}{\mathsf{D}_x\rho_t^B}\right) \le \mathbb{E}_\pi\left[w_t^2(\cdot,x)\frac{\mathsf{D}_x\log\rho_t}{\mathsf{D}_x\rho_t}\,\middle|\,\mathfrak{A}_B(\Upsilon)\right].$$

最后，记

$$|\mathsf{D}_x\log\rho_t^B w_t^B(\cdot,x)|^2 = (\mathsf{D}_x\log\rho_t^B\mathsf{D}_x\rho_t^B)\left(\left|w_t^B(\cdot,x)\right|^2\frac{\mathsf{D}_x\log\rho_t^B}{\mathsf{D}_x\rho_t^B}\right),$$

结合前两个不等式并利用 $2ab\le a^2+b^2$，可得

$$|\mathsf{D}_x\log\rho_t^B w_t^B| \le \frac12\left(\mathbb{E}_\pi[\mathsf{D}_x\log\rho_t\mathsf{D}_x\rho_t\mid\mathfrak{A}_B(\Upsilon)] + \mathbb{E}_\pi\left[w_t^2(\cdot,x)\frac{\mathsf{D}_x\log\rho_t}{\mathsf{D}_x\rho_t}\,\middle|\,\mathfrak{A}_B(\Upsilon)\right]\right).$$

由于这对所有 $x \in B$ 和所有 $t \in [0,T]$ 都成立，我们实际上已经证明

$$|\mathsf{D}\log\rho^B w^B| \le \mathbb{E}_{\pi\otimes m\otimes \mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\mathsf{D}\log\rho \mathsf{D}\rho + w^2\frac{\mathsf{D}\log\rho}{\mathsf{D}\rho}\right)\middle|\, \mathfrak{A}_B(\Upsilon)\otimes\mathfrak{B}_B(X)\otimes\mathfrak{B}(0,T)\right].$$

根据 [DM80，定理 41.1，第 38] 页，以及（4.8），右侧是两个一致可积鞅之和，因此也是一致可积的。 □

5 泊松空间上的合成里奇曲率下界

5.1 泊松空间上的变分距离

5.1.1 拉格朗日泛函

鉴于前文所述，自然地，我们将向量场视为 $\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$ 中的元素。下面定义位于 μ 处的切向量 ν 的长度。令

$$\theta(s,t) := \frac{s-t}{\log s - \log t}, \qquad s,t\in\mathbb{R}_+,$$

and

$$\alpha(s,t,w) := \frac{|w|^2}{\theta(s,t)}, \qquad w\in\mathbb{R},\ s,t\in\mathbb{R}_+,$$

按照约定，$0/0 := 0$。为方便起见，对于 $F\in\mathscr{F}_+(\Upsilon)$，我们也记作

$$\hat{F}(\eta,x) = \theta\big(F(\eta),F(\eta+\delta_x)\big) = \frac{\mathsf{D}_x F(\eta)}{\mathsf{D}_x\log F(\eta)}, \qquad \eta\in\Upsilon,\ x\in X.$$

对于所有 $\mu\in\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 和 $\nu\in\mathscr{M}_{b,\ 0}(\Upsilon\times X)$，定义

$$\mathcal{L}(\mu,\nu) = \int \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\mu\otimes m}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}C_\mu}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\sigma\in\mathscr{M}_{b,\ 0}(\Upsilon\times X)$ 是非负的，且 $\mu\otimes\pi$，C_μ以及 ν 关于 σ绝对连续。由齐次性可知，作用量的值与 σ的选取无关。若$\mu=\rho\pi$ 且 $\nu = w(\pi\otimes m)$，根据（2.2），我们可以取 $\sigma=\pi\otimes m$，从而得到：

$$\mathcal{L}(\mu,\nu) = \int \alpha\big(\rho(\eta),\rho(\eta+\delta_x),w(\eta,x)\big)\pi(\mathrm{d}\eta)m(\mathrm{d}x) = \int\frac{|w|^2}{\hat{\rho}}\mathrm{d}\pi\mathrm{d}m.$$

于是，我们可以将 $\mathcal{L}(\mu,\nu)$ 解释为“切空间”中“切向量” ν 在 $\mathscr{P}_1(\mathrm{Y})$处的范数。

由 α 的凸性，我们立即得到以下引理。

引理 5.1。 拉格朗日量 $\mathcal{L}$ 是联合凸的。

引理 5.2。 映射 $\mathcal{L}:\mathscr{P}_1(\Upsilon)\times\mathscr{M}_{b,\ 0}(\Upsilon\times X)\to\mathbb{R}_+$ 是下半连续的。

证明。 根据定理 2.11，且由于 $\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$ 可度量化，只需证明序列下半连续性。设 $(\mu_n)\subset\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 收敛到 $\mu\in\mathscr{P}_1(\Upsilon)$，且 $(\nu_n)\subset\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$ 收敛到 $\nu\in\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$。由于 α 是下半连续且凸的，我们可以写成

$$\alpha(p) = \sup\{p\cdot q - \alpha^*(q) : q\in\mathbb{Q}^3\},$$

其中 α^* 是 α的 Fenchel 共轭。对于 p 和 $q \in \mathbb{Q}^3$，我们令 $\alpha_q(p) = p \cdot q - \alpha^*(q)$。那么，根据单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mu,\nu) &= \int \sup_{q\in\mathbb{Q}^3} \alpha_q\left(\frac{\mathrm{d}\mu\otimes m}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}C_\mu}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma \\ &= \sup_{q\in\mathbb{Q}^3} \int \alpha_q\left(\frac{\mathrm{d}\mu\otimes m}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}C_\mu}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{5.1}$$

由 *(ii)* 命题2.12，我们发现，对于固定的 q，(5.1) 最后一行中的积分在 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)\times\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$ 上是连续函数。作为连续函数 $\mathcal{L}$ 的上确界，它是下半连续的。 □

只要 μ 关于 π 绝对连续，以下结果表明，我们可以将研究范围限制在 $\nu \in \mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$ 关于 $\pi\otimes m$ 绝对连续的情形。下面的引理是针对我们的问题对 [Erb14 引理 2.3] 的改写。由于我们的记号与该参考文献相当不同，我们给出一个完整的证明。

引理 5.3. 设 $\mu = \rho\pi \in \mathscr{P}(\Upsilon)$ 和 $\nu \in \mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$，使得 $\mathcal{L}(\mu,\nu) < \infty$。那么，$\nu$ 关于 $\pi\otimes m$ 绝对连续。

证明。 取 $A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ 和 $B \in \mathfrak{B}_0(X)$ 使得 $\pi(A)m(B) = 0$，且 $\sigma \in \mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon\times X)$ 非负并满足 $\pi\otimes m \ll \sigma$ 和 $\nu \ll \sigma$。θ 的齐次性给出：

$$0 = \int_{A\times B} \theta(\rho(\eta), \rho(\eta+\delta_x))\pi(\mathrm{d}\eta)m(\mathrm{d}x) = \int_{A\times B} \theta\left(\frac{\mathrm{d}(\mu\otimes m)}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}C_\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

由 θ 和 σ的正性可知，被积函数在 $A\times B$上几乎处处相对于 σ为零。根据 $\mathcal{L}$的定义：

$$\mathcal{L}(\mu,\nu) = \int \frac{\left|\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\sigma}\right|^2}{\theta\left(\frac{\mathrm{d}(\mu\otimes m)}{\mathrm{d}\sigma}, \frac{\mathrm{d}C_\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right)}\mathrm{d}\sigma.$$

根据假设，上述量有限。由于分母在 $A\times B$ 上为零，分子也为零。因此 $\nu(A\times B) = 0$。 □

引理 5.4。 设 $\mu = \rho\pi \in \mathscr{P}(\Upsilon)$ 和 $\nu \in \mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon\times X)$。那么，

$$\mathcal{L}(\mathsf{P}_t^\star\mu, \mathsf{P}_t^\star\nu) \le \mathcal{L}(\mu,\nu), \qquad t > 0.$$

证明。 不妨假设 $\mathcal{L}(\mu,\nu) < \infty$ 否则无须证明。由引理 5.3，可得 $\nu = w(\pi\otimes m)$。由（2.2），可得

$$\mathcal{L}(\mathsf{P}_t^\star\mu, \mathsf{P}_t^\star\nu) = \int \alpha(\mathsf{P}_t\rho(\eta), \mathsf{P}_t\rho(\eta+\delta_x), \mathsf{P}_t w(\eta,x))\mathrm{d}(\pi\otimes m).$$

由 α的凸性、詹森不等式以及 P 相对于 π的不变性，得出结论。 □

最后给出一个有用的界。

引理 5.5. 令 $\mu \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 和 $\nu \in \mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times X)$. 则：

$$|\nu|(A\times B) \le \left(\tfrac{1}{2}\big(m(B) + I_\mu(B)\big)\mathcal{L}(\mu,\nu)\right)^{1/2}, \qquad A \in \mathfrak{B}(\Upsilon),\ B \in \mathfrak{B}_0(X).$$

证明. 取 $\sigma = (\mu \otimes m) + C_\mu + |\nu|$，使得我们有 $\mu \otimes m = \rho^1\sigma$、$C_\mu = \rho^2\sigma$ 和 $\nu = w\sigma$。假设 $\mathcal{L}(\mu,\nu) < \infty$，否则无须证明。我们有

$$\begin{aligned}
|\nu|(A\times B) &= \int_{A\times B} |w|\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{A\times B} \sqrt{\theta(\rho^1,\rho^2)}\sqrt{\alpha(w,\rho^1,\rho^2)}\mathrm{d}\sigma \\
&\le \left(\int_{A\times B} \theta(\rho^1,\rho^2)\mathrm{d}\sigma\right)^{1/2}\left(\int_{A\times B} \alpha(\rho^1,\rho^2,w)\mathrm{d}\sigma\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{A\times B} \theta(\rho^1,\rho^2)\mathrm{d}\sigma\right)^{1/2}\sqrt{\mathcal{L}(\mu,\nu)}.
\end{aligned}$$

利用算术平均从上方界定对数平均，我们得到

$$\int_{A\times B} 2\theta(\rho^1,\rho^2)\mathrm{d}\sigma \le \int_{Y\times B} (\rho^1+\rho^2)\mathrm{d}\sigma = (\mu\otimes m)(Y\times B) + C_\mu(Y\times B) = m(B) + I_\mu(B) < \infty,$$

由此完成证明。 □

5.1.2 作用泛函

现在我们定义与曲线 $\bar{\mu} \in \mathcal{F}([0,1],\mathcal{P}(Y))$相关的作用量 。我们令

$$\mathcal{A}(\bar{\mu}) := \inf \int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t,\nu_t)\mathrm{d}t,$$

其中下确界取遍所有满足以下条件的 $\bar{\nu}$：$(\bar{\mu},\bar{\nu})$ 是定义在 $[0,1]$上的连续性方程的解。若不存在这样的 $\bar{\nu}$，则令 $\mathcal{A}(\bar{\mu}) = \infty$。
作为命题4.3 和引理5.4的直接应用，我们得到作用量的如下收缩性质。

命题 5.6. 对于所有 $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{A}(\mathsf{P}^\star_\varepsilon\bar{\mu}) \le \mathrm{e}^{-2\varepsilon}\mathcal{A}(\bar{\mu}).$$

现在我们证明，$\mathcal{A}$ 是一个适用于最小化问题的良好泛函。

引理 5.7. 泛函 $\mathcal{A}$ 是凸的。

证明。设 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\mu}'$ 的作用量有限。因此，存在 $\bar{\nu}$ 和 $\bar{\nu}'$，使得 $(\bar{\mu},\bar{\nu})$ 和 $(\bar{\mu}',\bar{\nu}')$ 满足 $(\mathbf{CE}_T)$。设 $\tau \in [0,1]$。那么，取 $\bar{\nu}_\tau = (1-\tau)\bar{\nu} + \tau\bar{\nu}'$ 和 $\bar{\mu}_\tau = (1-\tau)\bar{\mu} + \tau\bar{\mu}$，可得$(\bar{\mu}_\tau,\bar{\nu}_\tau) \sim (\mathbf{CE}_T)$。由于 $\mathcal{L}$ 根据引理 5.1是凸的，因此：

$$\mathcal{A}(\bar{\mu}_\tau) \le \int_0^1 \mathcal{L}\big((1-\tau)\mu_t + \tau\mu'_t, (1-\tau)\nu_t + \tau\nu_t\big)\mathrm{d}t \le (1-\tau)\mathcal{A}(\bar{\mu}) + \tau\mathcal{A}(\bar{\mu}').$$ □

固定 $\xi \in \mathcal{P}_1(Y)$。记

$$\mathscr{C}_\xi\big([0,1],\mathcal{P}_1(Y)\big) := \{\bar{\mu} \in \mathscr{C}([0,1],\mathcal{P}_1(Y)) : \mu_0 = \xi\}.$$

根据定理2.11，空间$\mathscr{C}_\xi\big([0,1],\mathcal{P}_1(Y)\big)$ 在赋予一致 $\mathcal{P}_1(\mathrm{Y})$-收敛拓扑后是波兰空间。

引理 5.8。 泛函 $\mathcal{A} : \mathscr{C}_\xi([0,1],\mathcal{P}_1(Y)) \to [0,\infty]$ 是下半连续的。

引理 5.9。 作用量 $\mathcal{A}$ 在 $\mathscr{C}_\xi([0,1],\mathscr{P}_1(\Upsilon))$中具有紧子水平集。

引理 5.8 和 5.9 的证明。令 $r\in(0,\infty)$并设 $\Delta=\{\mathcal{A}(\bar\mu)\le r\}\cap\{\mu_0=\xi\}$。取 $(\bar\mu_n)\subset\Delta$。由于 $\mathcal{A}(\bar\mu_n)\le r$，对所有 $n\in\mathbb{N}$，存在 $\bar\nu_n\in\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times\bar X)$，使得 $(\bar\mu_n,\bar\nu_n)$在 $[0,1]$ 上满足连续性方程，并

$$\mathcal{A}(\bar\mu_n)\le\int_0^1\mathcal{L}(\mu_{n,t},\nu_{n,t})\mathrm{d}t\le r+1.$$

令 $A\in\mathfrak{B}(\Upsilon),B\in\mathfrak{B}_0(X)$和 $I\in\mathfrak{B}([0,1])$。根据引理 5.5、定理 4.10以及柯西–施瓦茨不等式，对所有 $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|\bar\nu_n|(A\times B\times I)&\le\int_I\sqrt{m(B)+I_{\mu_0}(B)+|\bar\nu_n|(A\times B\times[0,t])}\,\mathcal{L}(\mu_{n,t},\nu_{n,t})^{1/2}\,\mathrm{d}t\\&\le\sqrt{m(B)+I_{\mu_0}(B)+|\bar\nu_n|(A\times B\times[0,1])}\,|I|(r+1).\end{aligned}\tag{5.2}$$

在 ($I:=[0,1]$ 中代入 5.2) 得

$$|\bar\nu_n|(A\times B\times[0,1])\le\sqrt{|\bar\nu_n|(A\times B\times[0,1])+m(B)+I_{\mu_0}(B)}\,(r+1).$$

显式求解该方程可得

$$|\bar\nu_n|(A\times B\times[0,1])\le a_r+b_r\sqrt{m(B)+I_{\mu_0}(B)},\tag{5.3}$$

其中 a_r 和 $b_r>0$ 仅取决于 r。这表明定理2.2中的（2.1a）得以满足。现在证明（2.1b）也得以满足。设 $\varepsilon>0$。根据定理2.2，我们可以找到 $\Gamma\in\mathfrak{K}(\Upsilon)$、$K\in\mathfrak{K}(X)$和 $J\in\mathfrak{K}([0,1])$，使得

$$|[0,1]\setminus J|+m(B\setminus K)+I_{\mu_0}(B\setminus K)\le\varepsilon.$$

现在设 $\Delta:=\Gamma\times K\times J\in\mathfrak{K}(\Upsilon\times X\times[0,1])$。则根据（5.2）和（5.3），可得

$$\begin{aligned}|\bar\nu_n|\big((\Upsilon\times B\times[0,1])\setminus\Delta\big)&\le|\bar\nu_n|\big((\Upsilon\setminus\Gamma)\times(B\setminus K)\times([0,1]\setminus J)\big)\\&\le\varepsilon(r+1)\sqrt{\varepsilon+a_r+b_r\sqrt{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

因此，定理 2.2 *(ii)* 适用，并且在取一个子序列后，我们可以找到 $\bar\nu\in\mathscr{M}_{b,\,0}(\Upsilon\times\bar X)$使得 $\bar\nu_n\to\bar\nu$，当 $n\to\infty$时。
回顾一下，$\mathfrak{A}(\Upsilon)$ 是第4.2.1节中定义的代数。定义

$$\mu_t(A):=\mu_0(A)+\int_0^t\nu_r(\mathsf{D}1_A)\mathrm{d}r,\qquad A\in\mathfrak{A}(\Upsilon).$$

由推论 4.12 可知，对于所有 $F\in\mathscr{H}$，$\mu_t(F)$都是 $\mu_t^n(F)$ 的极限。因此，μ_t 是代数 $\mathfrak{A}(\Upsilon)$ 上的一个总质量为 1 的非负集合函数。根据 Hahn 延拓定理 [DS88, Thm. III.5.8, p. 136], ，它可以唯一地延拓为定义在 $\sigma(\mathfrak{A}(\Upsilon))=\mathfrak{B}(\Upsilon)$上的概率测度 μ_t。此外，由于 $\mathcal{G}\subset\mathscr{H}$，我们得出 $\mu_t^n\to\mu_t$ 属于 $\mathscr{P}(\Upsilon)$。对强度测度作类似论证可知，实际上 $\mu_t^n\to\mu_t$ 属于 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$。根据引理 4.2，我们得出 $(\bar\mu,\bar\nu)$ 是连续性方程的一个解。因此，根据 $\mathcal{L}$ 的下半连续性（引理 5.2），我们得到 $\bar\mu\in\Delta$。这表明 Δ 是紧的，从而证明了这两个引理。 □

根据上述建立的 $\mathcal{A}$ 的性质，我们得到以下结果。
定理 5.10. 设 $\bar\mu\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathscr{P}_1(\Upsilon)\big)$ 满足 $\mathcal{A}(\bar\mu)<\infty$，则存在 $\bar\nu\in\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon\times\bar X)$，使得 $(\bar\mu,\bar\nu)$ 在 $[0,1]$ 上满足连续性方程，并且

$$\mathcal{A}(\bar\mu)=\int_0^1\mathcal{L}(\mu_t,\nu_t)\mathrm{d}t.$$

5.1.3 变分距离与熵代价

现在我们定义距离 $\mathcal{W}$。实际上，我们通过 $\mathcal{W}$ 的正则化版本的性质推导其熵曲率。

定义 5.11。 对于 $\varepsilon \geq 0$，我们将熵代价 定义为

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) \coloneqq \inf\left\{\mathcal{A}(\bar{\mu}) + \varepsilon \int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t \mid \pi)\mathrm{d}t \,:\, \mu_0 = \xi_0,\, \mu_1 = \xi_1\right\}.$$

我们还令 $\mathcal{W} \coloneqq \mathcal{J}_0^{1/2}$。

我们将 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 称为熵代价，这与连续情形类似（参见 [GT21] 及其中的参考文献）。可以将其视为 $\mathcal{W}$ 的熵正则化。关于$\mathcal{W}$ 的特有性质将在下文研究。

定理 5.12。 设 $\varepsilon \geq 0$、 ξ_0 和 ξ_1 满足 $\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) < \infty$。那么，存在满足连续性方程的 $(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{v}^\varepsilon)$，使得

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) = \int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t^\varepsilon, v_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \varepsilon \int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t^\varepsilon \mid \pi)\mathrm{d}t.$$

证明。 由于 ε 是固定的，在本证明中，只要不会引起混淆，我们将省略对 ε 的依赖。根据定理 3.2，相对费舍尔信息是下半连续的；根据詹森不等式，它是凸的。因此，结合引理 5.7 和 5.8，我们得到

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\bar{\mu}) \coloneqq \mathcal{A}(\bar{\mu}) + \varepsilon \int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t \mid \pi)\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

因此，集合 $A_\varepsilon \coloneqq \{\mathcal{A}^\varepsilon \leq r\}$ 对所有 $r \in (0, \infty)$都是闭的。显然，我们有 $A_\varepsilon \subset \{\mathcal{A} \leq r\}$。因此， A_ε 由引理 5.9可知是相对紧的。结论由标准的优化论证得出。 □

定理 5.13. 设 ξ_0和 ξ_1满足 $\mathcal{J}_{\varepsilon_o}(\xi_0, \xi_1) < \infty$，其中某个 $\varepsilon_o > 0$。对于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$，记 $(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{v}^\varepsilon)$为 $\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1)$的一个极小化元。则有

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \mathcal{W}^2(\xi_0, \xi_1).$$

此外，经过选取一个子序列

$$(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{v}^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} (\bar{\mu}, \bar{v}),$$

$\mathcal{W}(\xi_0, \xi_1)$的一个极小化元 $(\bar{\mu}, \bar{v})$。

证明。 记 $r \coloneqq \mathcal{J}_{\varepsilon_o}(\xi_0, \xi_1) + 1 < \infty$，并令 $A \coloneqq \{\mathcal{A}^{\varepsilon_o} \leq r\}$。由于族 $(\mathcal{A}^\varepsilon)$ 作为定义在 A上的泛函时，关于 ε 单调递减，因此我们有

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) = \inf\{\mathcal{A}^\varepsilon(\bar{\mu}) : \mu_0 = \xi_0,\, \mu_1 = \xi_1,\, \bar{\mu} \in A\}.$$

在 A 上，我们有 $\mathcal{A}^\varepsilon \searrow \mathcal{A}$ 逐点成立，并且 $\mathcal{A}$ 是下半连续的。因此，根据 [Dal93 命题 5.7]，$\mathcal{A}^\varepsilon$ Γ-收敛于 $\mathcal{A}$ 上的 A。现在，由于 $\mathcal{A}^\varepsilon \geq \mathcal{A}$，且由于 $\mathcal{A}$ 具有紧次水平集，该断言的第一部分由 [Dal93 命题 7.7 和定理 7.8]推出。该断言的第二部分由 [Dal93 推论 7.20] 推出，前提是我们能够证明 $\{(\bar{\mu}^\varepsilon, \bar{v}^\varepsilon) : \varepsilon \in (0, \varepsilon_o)\}$是紧的。我们采用与引理 5.9 中相同的论证。事实上，根据构造， $\bar{\mu}^\varepsilon \in \{\mathcal{A}^\varepsilon \leq r\} \subset \{\mathcal{A} \leq r\}$。因此，(5.2) 中以 ε 代替 n 即可成立，其余论证相同。 □

现在我们研究 $\mathcal{W}$ 的性质。我们从一个经典论证开始。

引理 5.14。 对于所有 $T>0$、ξ_0 和 $\xi_1 \in \mathcal{P}_1(\Upsilon)$:

$$\mathcal{W}(\xi_0,\xi_1)=\inf\left\{\int_0^T \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(\mu_t,\nu_t)\mathrm{d}t : (\bar{\mu},\bar{\nu})\sim(\mathbf{CE}_T),\ \mu_0=\xi_0,\ \mu_T=\xi_1\right\}.$$

证明。 由标准的重新参数化论证可得，例如 [DNS09，定理 5。4] 结合引理 4.5。 □

现在我们总结 $\mathcal{W}$ 的主要性质。

定理 5.15。 (i) 映射 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 上定义了一个扩展距离。

(ii) $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 上诱导的拓扑强于 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 的拓扑。

(iii) $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)\times\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 上是下半连续的。

(iv) 关于 $\mathcal{W}$ 的有界集是 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$相对紧的。

(v) 对于每个 $\eta\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$，可达分支 $\{\mathcal{W}(\eta,\cdot)<\infty\}$ 在赋予 $\mathcal{W}$后是一个完备测地空间。

证明。 (i) 对称性显而易见。通过拼接并应用引理5.14，可得三角不等式。现在取 ξ_0 和 $\xi_1\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$，使得 $\mathcal{W}(\xi_0,\xi_1)=0$。根据定理5.12，取 $\bar{\mu}$ 使$\mathcal{W}(\xi_0,\xi_1)$达到。于是 $\mathcal{A}(\bar{\mu})=0$，因此 $\bar{\nu}=0$ 且 $\xi_0=\xi_1$。这表明 $\mathcal{W}$ 是一个扩展距离。
(ii) 设 $(\xi_n)\subset\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 和 $\xi\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$ 满足 $\mathcal{W}(\xi_n,\xi)\to 0$。对于所有 $n\in\mathbb{N}$，取 $(\bar{\mu}_n,\bar{\nu}_n)$使 $\mathcal{W}(\xi_n,\xi)$中的下确界达到。令 $(h_k)\subset\mathscr{C}_0(X)$ 如引理2.5中所述。对于所有 $k\in\mathbb{N}$，设$G_k:=\mathrm{e}^{-\iota_{h_k}}$，$B_k\in\mathfrak{B}_0(X)$ 使得 $\mathsf{D}G_k=0$ 位于 B_k之外。仿照定理4.11的证明进行推导，然后应用引理5.5，可得

$$\begin{aligned}\left|\int G_k\mathrm{d}(\xi_n-\xi)\right| &\le |\bar{\nu}_n|(\Upsilon\times B_k\times[0,1])\\ &\le \int_0^1\Big(m(B_k)+I_{\mu_{n,t}}(B_k)\Big)^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}(\mu_{n,t},\nu_{n,t})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\ &\le C_k\mathcal{W}(\xi_n,\xi).\end{aligned}$$

因此，由引理 2.5，我们得到 $\xi_n\to\xi$ 关于 $\mathscr{P}(\Upsilon)$-拓扑。取 $h\in\mathscr{C}_0(X)$。由定理 4.10 和引理 5.5，我们得到

$$\begin{aligned}\left|I_{\xi_n}(h)-I_\xi(h)\right| &\le |\bar{\nu}_n|(1\otimes h\otimes 1_{[0,1]})\\ &\le \int_0^1\Big(m(h)+I_{\mu_{n,t}}(h)\Big)^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}(\mu_{n,t},\nu_{n,t})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\ &\le C\mathcal{W}(\xi_n,\xi)\end{aligned}$$

对于某个常数 $C>0$，其取决于 h。这表明 $I_{\xi_n}\to I_\xi$ 在 $\mathscr{M}_0(X)$中。由命题2.12，我们得到 $\xi_n\to\xi$ 在 $\mathcal{P}_1(\Upsilon)$中。
(iii) 固定 $r\ge 0$，我们要证明集合是闭的

$$A:=\{(\xi,\chi)\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)\times\mathcal{P}_1(\Upsilon):\ \mathcal{W}(\xi,\chi)\le r\}.$$

设 (ξ_n) 和 $(\chi_n)\subset A$ 分别收敛到 ξ 和 $\chi\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$。由定理5.12可知，对所有 $n\in\mathbb{N}$，都存在一个连续性方程的解 $(\bar{\mu}_n,\bar{\nu}_n)$，其实现 $\mathcal{W}(\xi_n,\chi_n)$。由于 $\xi_n\to\xi$ 且

$\chi_n \to \chi$ 仿照引理5.9的证明，我们可以找到 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$，其满足连续性方程并将 ξ 连接到 χ。因此，由引理5.8，我们得到

$$\mathcal{W}(\chi, \xi) \le \mathcal{A}(\bar{\mu}) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{A}(\bar{\mu}_n) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{W}(\chi_n, \xi_n).$$

(iv) 由引理 5.9可得。
(v) 测地线性质由定理 5.12推出，其中测地线由极小化曲线 $\bar{\mu}$给出。完备性由 *(iii)* 和 *(iv)*推出。 □

[1]量 $\mathcal{J}_\varepsilon^2$对于 $\varepsilon > 0$ 并非距离（引理 5.14中的重新参数化论证在此处不适用）。不过，我们有以下拟三角不等式。

命题 5.16. 设 ξ_0， ξ_1， $\xi_2 \in \mathcal{P}_1(Y)$ 和 $\varepsilon > 0$。则，

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_2) \le 2\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_0, \xi_1) + 2\mathcal{J}_\varepsilon(\xi_1, \xi_2).$$

证明。 我们假设右侧有限。设 $(\bar{\mu}^1, \bar{\nu}^1)$ 和 $(\bar{\mu}^2, \bar{\nu}^2)$ 分别实现两个下确界。通过拼接，利用引理 4.5 以及拉格朗日量关于 v是二次的这一点，我们得到

$$\mathcal{J}_\varepsilon \le 4\int_0^{1/2} \mathcal{L}(\mu^1_{2t}, \nu^1_{2t})\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^{1/2} \mathcal{I}(\mu_{2t} \mid \pi)\mathrm{d}t + 4\int_{1/2}^1 \mathcal{L}(\mu^2_{2t-1}, \nu^2_{2t-1})\mathrm{d}t + \varepsilon\int_{1/2}^1 \mathcal{I}(\mu^2_{2t-1} \mid \pi)\mathrm{d}t.$$

由于 $\varepsilon/4 \le \varepsilon$，通过直接变量替换即可得出该结论。 □

5.2 $(\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}, \mathcal{W})$ 的几何

5.2.1 度量空间 $(\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}, \mathcal{W})$

我们首先通过证明定理 5.15并非平凡结论，来说明 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{W}$提供了一个可达分支的例子。其核心工具是以下*Talagrand* 不等式。

定理 5.17. 对于所有 $\mu \in \mathcal{P}_1(Y)$,

$$\mathcal{W}^2(\mu, \pi) \le \mathcal{H}(\mu \mid \pi). \tag{5.5}$$

此外，对于所有 $\mu \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 和所有 $\varepsilon \ge 0$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\mu, \pi) < \infty.$$

注 5.18。 经典情形下，Talagrand 不等式是熵的凸性（定理5.28）的一个推论。由于 $\mathcal{W}$可能为无穷大，我们通过其他方法先验地推导 Talagrand 不等式。

证明。 我们首先证明（5.5）。不妨设 $\mu \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 否则该断言为空。令$T > 0$。由命题4.3 和（3.7）以及（3.10），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\mu, \mathsf{P}^\star_T\mu) &\le \int_0^T \mathcal{I}(\mathsf{P}^\star_t\mu \mid \pi)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T \frac{\mathcal{I}(\mathsf{P}^\star_t\mu \mid \pi)}{\mathcal{H}(\mathsf{P}^\star_t\mu \mid \pi)^{1/2}}\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(\mathsf{P}^\star_t\mu \mid \pi)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{H}(\mu \mid \pi)^{1/2} - \mathcal{H}(\mathsf{P}^\star_T\mu \mid \pi)^{1/2}.
\end{aligned}$$

令 $T \to \infty$，并利用 $\mathcal{W}$ 的下半连续性（定理 5.15 *(iii)*），即可得出结论。
现在来证明该命题的第二部分。一方面，由于 $\mu \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$，根据（3.9）和命题 4.3，可知 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mu, \mathsf{P}^\star_\delta \mu) < \infty$ 对所有 $\delta > 0$均成立。根据命题 5.16，因此只需证明 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mathsf{P}^\star_\delta, \pi) < \infty$。由于 $\mathcal{W}(\mu, \pi) < \infty$ 由第一部分可知，我们可以考虑一个关于 $\mathcal{W}(\mu, \pi)$的连续性方程极小解 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$。将命题 4.4 应用于该解，并利用 $\mathsf{P}^\star_\delta \pi = \pi$，可得 $(\mathsf{P}^\star_\delta \bar{\mu}, \mathrm{e}^{-\delta}\mathsf{P}^\star_\delta \bar{\nu})$ 是 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mathsf{P}^\star_\delta \mu, \pi)$的极小化问题的一个可行候选解。此外，根据（3.9），可知其具有有限的 ε-能量。证明完毕。

□

因此，下面的定义非常自然。

定义 5.19。 我们用 $\mathcal{P}_1^*(\Upsilon)$ 表示 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$的 $\mathcal{W}$-闭包。

以下是定理 5.15 和 5.17的推论。

推论 5.20。 空间 $(\mathcal{P}_1^*(\Upsilon), \mathcal{W})$ 是完备测地空间。

注5.21： 我们有

$$\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H} \subset \mathcal{P}_1^*(\Upsilon) \subset \mathcal{P}_1(\Upsilon).$$

事先来看，每个包含关系都可能是严格的。

命题 5.22. 固定 μ 和 $\xi \in \mathcal{P}_1^*(\Upsilon)$ 则

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}(\mathsf{P}^\star_t \mu, \xi) \le \sqrt{\mathcal{I}(\mathsf{P}^\star_t \mu \mid \pi)}, \qquad t > 0.$$

证明。 假设 $\mu = \rho\pi \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}$，否则无需证明。对于 $t > 0$，记 $\mu_t := \mathsf{P}^\star_t \mu$ 和 $\nu_t := \mathsf{D}\rho\mathrm{d}(\pi \otimes m)$。由命题 4.3，$(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是连续性方程的一个解，并且

$$\mathcal{L}(\mu_t, \nu_t) = \mathcal{I}(\mu_t \mid \pi).$$

因此，由命题5.23，可得：

$$\mathcal{W}(\mu_{t+s}, \xi) - \mathcal{W}(\mu_t, \xi) \le \mathcal{W}(\mu_{t+s}, \mu_t) \le \int_t^{t+s} |\dot{\mu}_u|\mathrm{d}u \le \int_t^{t+s} \sqrt{\mathcal{I}(\mu_u \mid \pi)}\mathrm{d}u.$$

结论立即成立。 □

回顾一下，曲线 $\bar{\mu} \in \mathcal{F}([0,T], \mathcal{P}_1(\Upsilon))$ 关于 $\mathcal{W}$ 是绝对连续的，如果存在 $g \in L^1(0,T)$ 使得：

$$\mathcal{W}(\mu_s, \mu_t) \le \int_s^t g(r)\mathrm{d}r, \qquad 0 \le s \le t \le T.$$

根据定义，度量导数 的 $\bar{\mu}$ 是上述不等式中的最小 g，记作 $t \mapsto |\dot{\mu}_t|$。回顾 [AGS08，定理 1.1。2]，对于几乎处处的 $t \in (0,T)$,

$$|\dot{\mu}_t| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{W}(\mu_{t+\varepsilon}, \mu_t)}{\varepsilon}.$$

命题 5.23. 曲线 $\bar{\mu} \in \mathscr{C}\big([0,T], \mathcal{P}_1^*(\Upsilon)\big)$ 关于 $\mathcal{W}$ 绝对连续，当且仅当存在 $\bar{\nu} \in \mathcal{M}_{b,0}(\Upsilon \times \bar{X})$ 使得 $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \sim (\mathbf{CE}_T)$ 并且

$$\int_0^T \sqrt{\mathcal{L}(\mu_t, \nu_t)}\mathrm{d}t < \infty.$$

在此情形下，$|\dot{\mu}_t|^2 \le \mathcal{L}(\mu_t, \nu_t)$ 对几乎所有的 $t \in [0,T]$ 都成立。此外，存在唯一的 $\bar{\nu}' \in \mathcal{M}_{b,0}(\Upsilon \times \bar{X})$ 使得 $(\bar{\mu}, \bar{\nu}') \sim (\mathbf{CE}_T)$ 并且

$$|\dot{\mu}_t|^2 = \mathcal{L}(\mu_t, \nu_t'), \qquad \textit{for a.e. } t \in [0,T]. \tag{5.6}$$

证明。 参见 [DNS09，定理 5。17]: [DNS09中的预紧性结果，对应于10] 引理 5.8 和5.9。 □

在上一节中，我们非正式地选择了 $\mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon \times X)$ 作为 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$ 的切空间。不过，自然的做法是只考虑拉格朗日量最小的向量场。为此，注意到如果 $(\bar{\mu}, \bar{v})$ 和 $(\bar{\mu}, \bar{v}')$ 满足连续性方程，那么对所有 $t \in [0,1]$， $v_t - v_t'$都是无散的，具体来说，

$$(v_t - v_t')(\mathsf{D}F) = 0, \qquad F \in \mathscr{H}.$$

由此得到如下切空间的定义，对于 $\mu \in \mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$,

$$T_\mu \mathscr{P}_1^*(\Upsilon) := \{v \in \mathscr{M}_{b,0}(\Upsilon \times X) : \mathcal{L}(\mu, v) \le \mathcal{L}(\mu, v + v') < \infty, \quad v' \text{ divergence-free}\}.$$

由命题5.23 和这个定义，我们得到如下结果。

推论 5.24。 取 $(\bar{\mu}, \bar{v})$ 为连续性方程的一个解，使得 $\bar{\mu}$ 关于 $\mathcal{W}$绝对连续，并且 $\mu_t \in \mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$对所有 $t \in [0,1]$均成立。那么， $\bar{v}$ 是 (5.6) 的唯一解，当且仅当 $v_t \in T_{\mu_t}\mathscr{P}_1(\Upsilon)$。

如同欧几里得情形 [AGS08第 8 节所示，1], 我们得到了切空间作为梯度场闭包的显式表示。

命题 5.25。 假设 $\mu = \rho\pi \in \mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$。那么，$T_\mu\mathscr{P}_1^*(\Upsilon)$ 是满足以下条件的测度 $v = w(\pi \otimes m)$ 的集合： w 属于 $\{\mathsf{D}F : F \in \mathscr{H}\}$ 的 $L^2(\pi \otimes m)$-闭包。

证明。 鉴于引理 5.3，只需注意到 $v' = w'(\pi \otimes m)$ 无散，当且仅当 $\int \mathsf{D}F w' \mathrm{d}\pi \mathrm{d}m = 0$ 对所有 $F \in \mathscr{H}$ 成立；而且这类密度所构成的空间正是梯度场空间的正交空间。 □

5.2.2 演化变分不等式与熵曲率下界

现在我们建立本文的主要结果，即证明奥恩斯坦–乌伦贝克半群是 $\mathcal{H}(\cdot \mid \pi)$ 在 $(\mathscr{P}_1^*(\Upsilon), \mathcal{W})$上的梯度流。尽管 $\mathcal{W}$是 $\mathscr{P}_1(\Upsilon)$上的扩展距离， $(\mathscr{P}_1^*(\Upsilon), \mathcal{W})$ 在通常意义下仍是一个度量空间（即并非扩展度量空间）。根据命题 5.6 和定理 5.17，有如下收缩估计。

定理 5.26。对于 μ_0 和 $\mu_1 \in \mathscr{P}_1(\Upsilon)$，且 $t \ge 0$:

(5.7) $$\mathcal{W}(\mathsf{P}_t^\star \mu_0, \mathsf{P}_t^\star \mu_1) \le \mathrm{e}^{-t}\, \mathcal{W}(\mu_0, \mu_1);$$

(5.8) $$\mathcal{W}(\mathsf{P}_t^\star \mu_0, \pi) \le \mathrm{e}^{-t}\, \mathcal{H}(\mu_0 \mid \pi).$$

现在，我们将证明 $\mathsf{P}^\star$ 是相对于 $\mathcal{W}$ 的熵梯度流，从而建立 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{H}$ 之间更强的关系。

定理 *5.27*。 *</style>*空间 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 相对于 $\mathcal{W}$ 是测地凸的。此外，以下演化变分不等式成立：对于所有 μ 和 $\xi \in \mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$,

(EVI) $$\mathcal{H}(\mathsf{P}_s^\star \mu \mid \pi) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star \mu, \xi) + \frac{1}{2}\mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star \mu, \xi) \le \mathcal{H}(\xi \mid \pi), \qquad s \ge 0.$$

证明。 根据 $\mathsf{P}^\star$ 的半群性质，只需在 $s = 0$处证明该结论。我们的策略是从 $\mathcal{W}(\mu, \xi)$ 和 $\delta > 0$ 的极小化曲线 $(\bar{\mu}, \bar{v})$ 出发，构造一个对$\mathcal{W}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi)$ 而言可容许的变形 $(\bar{\mu}^\delta, \bar{v}^\delta)$，然后利用上一节的估计来控制$\mathcal{W}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi) - \mathcal{W}(\mu, \xi)$。然而，由于奥恩斯坦–乌伦贝克半群仅能从 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 正则化到 $\mathscr{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}$，并且我们事先并不了解测地线的正则性，

我们分两步实施这一策略。首先，我们利用熵代价 $\mathcal{J}_\varepsilon$，由于我们知道其极小化曲线属于费舍尔信息的定义域，因此可以推导出（演化变分不等式）关于 $\mathcal{J}_\varepsilon$的较弱版本，并令 $\mathcal{W}$ 趋于极限。其次，我们可以利用这个较弱的（演化变分不等式），推得 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 是测地凸的，从而获得测地线的一些正则性。这种正则性足以让我们重新实施上述策略，但直接在 $\mathcal{W}$ 的层面，而不是 $\mathcal{J}_\varepsilon$的层面。由于 $\mathcal{W}$ 比 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 具有更多结构，我们可以推导出（演化变分不等式）。

通过奥恩斯坦–乌伦贝克半群逼近极小化元 设 $\varepsilon > 0$。由定理 5.17，可得 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mu,\xi) < \infty$。由定理 5.12，我们可以考虑 $(\bar\mu^\varepsilon, \bar\nu^\varepsilon)$，它满足连续性方程并实现 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mu,\xi)$。由于 $\mathcal{I}(\mu_t^\varepsilon \mid \pi)$ 对于几乎所有 $t \in [0,1]$ 均有限，且由定理 4.11，对于所有 $t \in [0,1]$，我们可以写成 $\mu_t^\varepsilon = \rho_t^\varepsilon \pi$ 其中某个概率密度满足条件。由引理 5.3，我们可以取 $\nu_t^\varepsilon = w_t^\varepsilon(\pi \otimes m)$。回顾一下，根据命题 4.3，我们可以利用奥恩斯坦–乌伦贝克过程，从一个固定的初始测度构造连续性方程的解。这里我们采用类似的策略，并加入一项修正，以考虑到 $\bar\mu$ 也依赖于 t。具体而言，对于所有$\delta > 0$，我们定义

$$\begin{aligned}\mu_t^{\varepsilon,\delta} &= \mathsf{P}^\star_{t\delta}\mu_t^\varepsilon = \rho_t^{\varepsilon,\delta}\mu,\\ \nu_t^{\varepsilon,\delta} &= \mathrm{e}^{-t\delta}\,\mathsf{P}^\star_{t\delta}\nu_t^\varepsilon - \delta \mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon(\pi\otimes m) = w_t^{\varepsilon,\delta}(\pi\otimes m).\end{aligned}$$

根据构造，我们有 $\mu^{\varepsilon,\ \delta}_{\ 0} = \mu_0^\varepsilon = \xi$ 并且 $\mu^{\varepsilon,\ \delta}_{\ 1} = \mathsf{P}^\star_\delta\mu$。下面证明 $(\bar\mu^{\varepsilon,\delta}, \bar\nu^{\varepsilon,\delta})$ 满足连续性方程。事实上，令 $F \in \mathscr{C}^1_c([0,1], \mathcal{S})$。根据 L的定义，我们有

$$\partial_t \mathsf{P}_{t\delta}F_t = \delta \mathsf{L}\mathsf{P}_{t\delta}F_t + \mathsf{P}_{t\delta}\partial_t F_t. \tag{5.9}$$

根据 $\mathsf{P}^\star$ 和（5.9）的定义，

$$\begin{aligned}\int_0^1\int \partial_t F_t \mathrm{d}\mathsf{P}^\star_{t\delta}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t &= \int_0^1\int \mathsf{P}_{\delta t}\partial_t F_t \mathrm{d}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\int (\partial_t \mathsf{P}_{t\delta}F_t - \delta \mathsf{L}\mathsf{P}_{t\delta}F_t)\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.10}$$

另一方面，由于根据定义，$(\bar\mu^\varepsilon, \bar\nu^\varepsilon)$ 满足连续性方程，且 $\mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta} = \mathrm{e}^{-t\delta}\,\mathsf{P}_{t\delta}\mathsf{D}$，我们有：

$$\int_0^1\int \partial_t \mathsf{P}_{t\delta}F_t \mathrm{d}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t = -\int_0^1\int \mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta}F_t \mathrm{d}\nu_t^\varepsilon \mathrm{d}t = -\int_0^1\int \mathrm{e}^{-t\delta}F_t \mathrm{d}\nu_t^\varepsilon \mathrm{d}t. \tag{5.11}$$

另一方面，由于 L 与 P 可交换，且根据 Mecke公式在 L 与 D 之间进行分部积分

$$-\delta\int_0^1\int \mathsf{L}\mathsf{P}_{t\delta}F_t \mathrm{d}\mu_t^\varepsilon \mathrm{d}t = \delta\int_0^1\int \mathsf{D}F_t \mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon \mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t. \tag{5.12}$$

结合（5.10）、（5.11）和（5.12），可得

$$\int_0^1\int \partial_t F_t \mathrm{d}\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mathrm{d}t = -\int_0^1\int \mathsf{D}F_t \mathrm{d}\nu_t^{\varepsilon,\delta}\mathrm{d}t.$$

也就是说，$(\bar\mu^{\varepsilon,\delta}, \bar\nu^{\varepsilon,\delta})$ 满足连续性方程。

展开 **沿近似过程的拉格朗日量的 n根据柯西–施瓦茨不等式** ，

$$\int_0^1 \int |\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta} w_t^{\varepsilon,\delta}|\mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t = \int_0^1 \int \left|\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta}\mathsf{D}\rho_t^{\varepsilon,\delta}\right|^{1/2}\left|\frac{\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta}}{\mathsf{D}\rho_t^{\varepsilon,\delta}} w_t^{\varepsilon,\delta}\right|^{1/2}\mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t$$
$$\leq \left(\int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mid\pi)\mathrm{d}t\int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta},\nu_t^{\varepsilon,\delta})\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用 $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$，我们得到

$$\int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta},\nu_t^{\varepsilon,\delta})\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\delta t}\,\mathcal{L}(\mathsf{P}_{t\delta}^\star\mu_t^\varepsilon,\mathsf{P}_{t\delta}^\star\nu_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \delta^2\int_0^1\int \frac{|\mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon|^2}{\theta(\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon+\mathsf{D}\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon,\mathsf{P}_{t\delta}\rho_t^\varepsilon)}\mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t.$$

根据引理 5.4，第一项不大于 $\mathcal{A}(\bar\mu^\varepsilon)$，根据构造这是有限的。第二项按定义为 $\delta^2\int_0^1\mathcal{I}(\mathsf{P}_{t\delta}^\star\mu_t^\varepsilon\mid\pi)\mathrm{d}t$。根据费舍尔信息沿奥恩斯坦–乌伦贝克半群的压缩性以及关于 μ^ε 的假设，我们有

$$\int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mid\pi)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon}\mid\pi)\mathrm{d}t < \infty.$$

因此，我们已经证明

$$\int_0^1\int |\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta} w_t^{\varepsilon,\delta}|\mathrm{d}(\pi\otimes m)\mathrm{d}t < \infty. \tag{5.13}$$

根据定义，我们有

$$w_t^{\varepsilon,\delta} = \mathrm{e}^{-t\delta}\,\mathsf{P}_{t\delta}w_t^\varepsilon - \delta\mathsf{D}\rho_t^{\varepsilon,\delta}.$$

利用 $(a-b)^2 = a^2-2(a-b)b-b^2$，我们得到

$$|w_t^{\varepsilon,\delta}|^2 = \mathrm{e}^{-2t\delta}|\mathsf{P}_{t\delta}w_t^\varepsilon|^2 - 2\delta w_t^{\varepsilon,\delta}\mathsf{D}\rho_t^{\varepsilon,\delta} - \delta^2|\mathsf{D}\rho_t^{\varepsilon,\delta}|^2.$$

因此，对于 $t\in[0,1]$，按照这种方式展开 $\mathcal{L}$ 定义中的平方，我们得到

$$\mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta},\nu_t^{\varepsilon,\delta}) = \mathrm{e}^{-2t\delta}\,\mathcal{L}(\mathsf{P}_{t\delta}^\star\mu_t^\varepsilon,\mathsf{P}_{t\delta}^\star\nu_t^\varepsilon) - 2\delta\int w_t^{\varepsilon,\delta}\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta}\mathrm{d}(\pi\otimes m) - \delta^2\,\mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mid\pi), \tag{5.14}$$

第一项由引理 5.4 可知是有限的，第二项由 (5.13) 可知是有限的，最后一项根据假设是有限的。利用 $\mathcal{I}\geq 0$ 以及拉格朗日量的压缩估计引理 5.4，得到：

$$\mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta},\nu_t^{\varepsilon,\delta}) - \mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon},\nu_t^{\varepsilon}) \leq \left(\mathrm{e}^{-2t\delta}-1\right)\mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon},\nu_t^{\varepsilon}) - 2\delta\int w_t^{\varepsilon,\delta}\mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta}\mathrm{d}(\pi\otimes m). \tag{5.15}$$

奥恩斯坦–乌伦贝克半群是一个 $EVI(0)$-梯度流 由定理 4.13，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{H}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mid\pi) = \int \mathsf{D}\log\rho_t^{\varepsilon,\delta}w_t^{\varepsilon,\delta}\mathrm{d}(\pi\otimes m). \tag{5.16}$$

S由于 $(\bar\mu^\varepsilon,\bar\nu^\varepsilon)$ 是 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mu,\xi)$的极小化元，且由于 $(\bar\mu^{\varepsilon,\delta},\bar\nu^{\varepsilon,\delta})$ 对 $\mathcal{J}_\varepsilon(\mathsf{P}_\delta^\star\mu,\xi)$是可容许的

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\mathsf{P}_\delta^\star\mu,\xi) - \mathcal{J}_\varepsilon(\mu,\xi) \leq \int_0^1\Big(\mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta},\nu_t^{\varepsilon,\delta}) - \mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon},\nu_t^{\varepsilon})\Big)\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^1\Big(\mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}\mid\pi) - \mathcal{I}(\mu_t^{\varepsilon}\mid\pi)\Big)\mathrm{d}t. \tag{5.17}$$

右端的第二项由于费舍尔信息沿奥恩斯坦–乌伦贝克半群的收缩性而非正。由于 $\mathcal{L} \geq 0$ 我们可以舍去式（5.15）右端的第一项，并由定理 4.13可得

$$\mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon,\delta}, \nu_t^{\varepsilon,\delta}) - \mathcal{L}(\mu_t^{\varepsilon}, \nu_t^{\varepsilon}) \leq -2\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{H}(\mu_t^{\varepsilon,\delta} \mid \pi).$$

代入（5.17）得到

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi) - \mathcal{J}_\varepsilon(\mu, \xi) \leq -2\delta\big(\mathcal{H}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu \mid \pi) - \mathcal{H}(\xi \mid \pi)\big). \tag{5.18}$$

在（5.18）中，我们先令 $\varepsilon \to 0$ 并应用定理 5.13，然后除以 2δ 并取 $\limsup_{\delta \to 0^+}$。由此得到

$$\mathcal{H}(\mu \mid \pi) + \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}s} \restriction_{s=0} \frac{1}{2} \mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star \mu, \xi) \leq \mathcal{H}(\xi \mid \pi).$$

利用 $\mathsf{P}^\star$ 的半群性质可知，$\mathsf{P}^\star$ 是一个 $EVI(0)$-梯度流，其对应的函数为 $\mathcal{H}$。特别地，由 [DS08，定理 2。1], 可知 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 是测地凸的。

奥恩斯坦–乌伦贝克半群是一个 $EVI(1)$-梯度流 现在我们直接对 $\mathcal{W}^2$重复上述论证。由定理 5.12，取 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 使 $\mathcal{W}^2(\mu, \xi)$成立。根据 $\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$的测地凸性可知，对所有 $t \in [0,1]$，$\mu_t = \rho_t \pi$，因此 $\nu_t = w_t \pi \otimes m$ 由引理 5.3得到。按上述方式构造 $(\bar{\mu}^\delta, \bar{\nu}^\delta)$。由引理 5.14 和柯西–施瓦茨不等式可知

$$\mathcal{W}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi) \leq \sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\delta t}\,\mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{e}^{2\delta t}\, \mathcal{L}(\mu_t^\delta, \nu_t^\delta)\mathrm{d}t}.$$

对所有 $t \in [0,1]$，$\mu_t \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$因此 $\mu_t^\delta \in \mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{I}$ 由（3.9）。事实上，由（3.10），我们发现定理4.8）中的（4.13 成立。特别地，我们得到一个与（5.14）类似的关于 $(\bar{\mu}^\delta, \bar{\nu}^\delta)$的表达式。由于$\mathcal{I} \geq 0$，并利用引理 5.4，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi) &\leq a(\delta)\left[\int_0^1 \mathcal{L}(\mathsf{P}_{t\delta}^\star \mu_t, \mathsf{P}_{t\delta}^\star \nu_t)\mathrm{d}t - 2\delta \int_0^1 \mathrm{e}^{2t\delta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{H}(\mu_t^\delta \mid \pi)\mathrm{d}t\right] \\ &\leq a(\delta)\left[\int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t, \nu_t)\mathrm{d}t - 2\delta \int_0^1 \mathrm{e}^{2t\delta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{H}(\mu_t^\delta \mid \pi)\mathrm{d}t\right], \end{aligned} \tag{5.19}$$

其中

$$a(\delta) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2t\delta}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\delta}}{2\delta}.$$

通过分部积分，我们发现

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2t\delta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{H}(\mu_t^\delta \mid \pi)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2\delta}\, \mathcal{H}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu \mid \pi) - \mathcal{H}(\xi \mid \pi) - 2\delta \int_0^1 \mathrm{e}^{2t\delta}\, \mathcal{H}(\mu_t^\delta \mid \pi)\mathrm{d}t. \tag{5.20}$$

将（5.20）代入（5.19），并利用 $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 是 $\mathcal{W}^2(\mu, \xi)$的极小化元，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2(\mathsf{P}_\delta^\star \mu, \xi) - \mathcal{W}^2(\mu, \xi) \leq{}& (a(\delta) - 1) \int_0^1 \mathcal{L}(\mu_t, \nu_t)\mathrm{d}t \\ &+ 2\delta a(\delta)\big[\mathcal{H}(\xi \mid \pi) - \mathrm{e}^{2\delta}\, \mathcal{H}(\mathsf{P}_\delta^\star \mu \mid \pi)\big] \\ &+ 4a(\delta)\delta^2 \int_0^1 \mathrm{e}^{2t\delta}\, \mathcal{H}(\mu_t^\delta \mid \pi)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

两边除以 δ 并令 $\limsup_{\delta\to 0^+}$，利用 $\mathcal{H}$ 的下半连续性以及 $\mathcal{H}$ 沿着 P 递减，可得

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0} \mathcal{W}^2(\mathsf{P}_s^\star\mu,\xi) \le -\mathcal{W}^2(\mu,\xi) + 2(\mathcal{H}(\xi\mid\pi)-\mathcal{H}(\mu\mid\pi)),$$

这正是（演化变分不等式）对于 $s=0$的形式。因此，根据 $\mathsf{P}^\star$的半群性质，对于所有 s 都有（$s=0$）。 □

现在我们从上述演化变分不等式中得出两个标准结论。

定理 5.28 （[DS08，定理 2.1]）。相对熵是1-测地凸的。也就是说，设 μ_0 和$\mu_1\in\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$。取一条连接 μ_0 与 μ_1的测地线。那么，

$$\mathcal{H}(\mu_t\mid\pi) \le (1-t)\,\mathcal{H}(\mu_0\mid\pi) + t\,\mathcal{H}(\pi_1\mid\pi) - \frac{t(1-t)}{2}\mathcal{W}^2(\mu_0,\mu_1), \qquad t\in[0,1].$$

$\mathcal{H}$ 在 $\mu\in\mathcal{D}\mathrm{om}\,\mathcal{H}$ 处的下降斜率在我们的非光滑情形中发挥着梯度长度的作用：

$$|D^-\mathcal{H}|(\mu) := \limsup_{\xi\to\mu}\frac{(\mathcal{H}(\mu\mid\pi)-\mathcal{H}(\xi\mid\pi))_+}{\mathcal{W}(\mu,\xi)}.$$

定理 5.29 （[AG13，命题 4.6]）。奥恩斯坦–乌伦贝克半群是熵的梯度流，具体来说：

$$|D^-\mathcal{H}|(\mathsf{P}_t^\star\mu) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(\mathsf{P}_t^\star\mu\mid\pi) = \mathcal{I}(\mathsf{P}_t^\star\mu\mid\pi).$$

我们还有著名 HWI 不等式的以下泊松等价形式。

定理 5.30。设 $\mu\in\mathcal{P}_1(\Upsilon)$。则：

$$\mathcal{H}(\mu\mid\pi) \le \mathcal{W}(\mu,\pi)\sqrt{\mathcal{I}(\mu\mid\pi)} - \frac{1}{2}\mathcal{W}^2(\mu,\pi).$$

证明。 证明与 [EM12中的定理 7 完全相同。3]在我们的设置中， [EM12中的命题 4 的对应结果是命题1]。 □

6 附录

引理 6.1。 设 $(E,\mathcal{F},m)$ 是一个 σ-有限测度空间，且 $\mathfrak{B}\subset\mathcal{F}$ 是一个可测集族，满足

(a) 存在一个 m-零测集 N 以及一个 $E\setminus N$的可数嵌套穷竭 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathfrak{B}$，此外，对于每个 $B\in\mathfrak{B}$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $B\subset B_n$。

对于 $p\in[1,\infty)$，设

$$L^p_{\mathrm{loc}}(E) = \{f\in L^0(E) : \|f\,1_B\|_{L^p}<\infty, B\in\mathfrak{B}\}$$

赋予由半范数族诱导的拓扑

$$\|f\|_{p,B} = \|f\,1_B\|_{L^p}$$

那么， $L^p_{\mathrm{loc}}(E)$ 是一个弗雷歇空间。进一步设 q 是 p的 *Hölder* 共轭指数。那么， $T\in L^p_{\mathrm{loc}}(E)^*$ 当且仅当存在 $B\in\mathfrak{B}$ 和 $g_B\in L^q(E)$，使得 $g_B\equiv 0$ 在 $E\setminus B$ 上成立，并且满足

$$T(f) = \int_E g_B f\,\mathrm{d}m, \qquad f\in L^p_{\mathrm{loc}}(E).$$

证明。 显然， $L^p_{\mathrm{loc}}(E) = L^p_{\mathrm{loc}}(E \setminus N)$，因此不失一般性，我们可以且将假设 $N = \varnothing$。由 (a) 以及半范数的单调性 $B \mapsto \|\cdot\|_{p,\,B}$， $L^p_{\mathrm{loc}}(E)$ 的拓扑由可数半范数族 $\|\cdot\|_{p,\,B_n}$ 所诱导，其中 $(B_n)_n$ 如 (a)中所示；因此， $L^p_{\mathrm{loc}}(E)$ 是一个弗雷歇空间。

现在，令 $T \in L^p_{\mathrm{loc}}(E)^*$。由 T 的连续性，存在 $k \in \mathbb{N}$、常数 a_1、…、 $a_k > 0$以及集合 B_1、…、 $B_k \in \mathfrak{B}$，使得 $|T(f)| \le \sum_{i=1}^k a_i \|f\|_{p,\,B_i}$ 对所有 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(E)$均成立。令 $a = \max_{i\le k} a_i$，再次由 (a) 可知，存在 $B \in \mathfrak{B}$ 使得

$$|T(f)| \le ak\|f\|_{p,B}, \qquad f \in L^p_{\mathrm{loc}}(E).$$

考虑映射 $1_B : L^p_{\mathrm{loc}}(E) \to L^p(B)$。由上述不等式， $\ker 1_B \subset \ker T$，因此 $T = T_B \circ 1_B$可通过某个 $T_B \in L^p(B)^*$分解。由于 (B, m_B) 是 σ-有限的， T_B 可按标准方式由某个函数 $g \in L^q(B)$ 表示。令 g_B 表示将 $g \in L^q(B)$ 延拓为 0 至 E，于是我们有

$$T(f) = T_B(1_B f) = \int_B g 1_B f \,\mathrm{d}m_B = \int_E g_B f \,\mathrm{d}m, \qquad f \in L^p_{\mathrm{loc}}(E).$$

反向蕴含是显然的。 □

备注 6.2. 我们注意到，前一个引理适用于每个度量测度空间 (E, d, m)，只要$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0(E)$ 且 m 在 $\mathfrak{B}_0(E)$上有限。

参考文献

[AG13] L. Ambrosio 与 N. Gigli.《最优传输用户指南》。载于：网络流的建模与优化。第 2062 卷。数学讲义。Springer，柏林，2013。doi：10.1007/978-3-642-32160-3_1.[AGS08] L. Ambrosio、N. Gigli 与 G. Savaré. 度量空间及概率测度空间中的梯度流。第二版。苏黎世联邦理工学院数学讲座。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2008，页 x+334.[AGS14a] L. Ambrosio、N. Gigli 与 G. Savaré.《度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有下里奇曲率界的空间中的应用》。载于：《数学发明》195.2（2014），页 289–391。doi：10.1007/s00222-013-0456-1.[AGS14b] L. Ambrosio、N. Gigli 与 G. Savaré.《具有下界黎曼里奇曲率的度量测度空间》。载于：《杜克数学杂志》163.7（2014），页 1405–1490。doi：10.1215/00127094-2681605.[AKR98] S. Albeverio、Y. G. Kondratiev 与 M. Röckner.《构型空间上的分析与几何》。载于：《泛函分析杂志》154.2（1998），页 444–500。doi：10.1006/jfan.1997.3183.[BÉ85] D. Bakry 与 M. Émery.《超收缩扩散》。载于：概率研讨会，第十九卷，1983/84。第 1123 卷。数学讲义。Springer，柏林，1985，页 177–206。doi：10.1007/BFb0075847.[BGL14] D. Bakry、I. Gentil 与 M. Ledoux. 马尔可夫扩散算子的分析与几何。第 348 卷。数学科学基础丛书。Springer，查姆，2014，页 xx+

552.

DOI： 10.1007/978-3-319-00227-9。[BH91] N. Bouleau & F. Hirsch. 维纳空间上的狄利克雷型与分析。第14卷。柏林等地：德格鲁伊特出版社，1991年，第x + 325。 DOI： 10.1515/9783110858389。[Bog07] V. I. Bogachev. 测度论。第*I*、*II*卷。施普林格出版社，柏林，2007年，第I卷：xviii+500页，第II卷：xiv+575。DOI： 10.1007/978-3-540-34514-5。

[Bou69] N. Bourbaki. 数学原本。第XXXV分册。第VI册：积分。第IX章：分离拓扑空间上的积分。科学与工业新知，第1343号。Hermann，巴黎，1969年，第133页。[Bou71] N. Bourbaki. 数学原本。一般拓扑学。第1至4章。Hermann，巴黎，1971年，xv+357 页（页码不连续）。[Bou74] N. Bourbaki. 数学原本。一般拓扑学。第5至10章。新版。巴黎：Hermann，1974年，第336页。[Bou81] N. Bourbaki. 数学原本。拓扑向量空间。第1至5章。Masson，巴黎，1981年，第vii + 368页。doi：10.1007/978-3-540-34498-8。[Cha04] D. Chafaï。《熵、凸性与泛函不等式：关于 Φ-熵与 Φ- Sobolev不等式》。载于：《京都大学数学杂志》44.2（2004），第325–363页。doi：10.1215/kjm/1250283556。[Dal93] G. Dal Maso. Γ-收敛导论。第8卷。巴塞尔：Birkhäuser，1993年，第xiv+ 340页。[DM75] C. Dellacherie & P.-A. Meyer. 概率与势。第I至IV章。Hermann，巴黎，1975年，第291页。[DM80] C. Dellacherie & P.-A. Meyer. 概率与势。第V至VIII章：鞅理论。Hermann，巴黎，1980年，第xiii+476页。[DNS09] J. Dolbeault, B. Nazaret & G. Savaré.《一类新的测度间输运距离》。载于：《变分法与偏微分方程》34.2（2009年），第193–231页。doi：10.1007/s00526-008-

[DS08] S. Daneri & G. Savaré. “关于 Wasserstein 距离中位移凸性的欧拉演算”。载于：SIAM数学分析杂志 40.3 (2008), 第 1104–1122 页。doi: 10.1137/08071346X.[DS21] L. Dello Schiavo & K. Suzuki. 奇异空间上的构型空间 – I. Dirichlet 形式与度量测度几何。2021年。arXiv: 2109.03192 [math.PR].[DS22] L. Dello Schiavo & K. Suzuki. 奇异空间上的构型空间 – II. 曲率。2022年。doi: 10.48550/ARXIV.2205.01379.[DS88] N. Dunford & J. T. Schwartz. 线性算子。第一部分。Wiley经典文库。John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1988, 第 xiv+858 页。[DZ10] A. Dembo & O. Zeitouni. 大偏差技术与应用。第 38 卷。随机建模与应用概率。施普林格出版社, 柏林, 2010, 第 xvi+396 页。doi: 10.1007/978-3-642-03311-7.[EH15] M. Erbar & M. Huesmann. “构型空间的曲率界”。载于：《变分法与偏微分方程》54.1 (2015), 第 397–430 页。doi: 10.1007/s00526-014-0790-1.[EM12] M. Erbar & J. Maas. “通过熵的凸性研究有限马尔可夫链的里奇曲率”。载于：《合理力学与分析档案》206.3 (2012), 第 997–1038 页。doi: 10.1007/s00205-012-0554-z.[Erb14] M. Erbar. “跳跃过程的熵梯度流”。载于：亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊 50.3 (2014), 第 920–945 页。doi: 10.1214/12-AIHP537.[FM16] M. Fathi & J. Maas. “离散相互作用系统的熵里奇曲率界”。载于：应用概率年刊 26.3 (2016), 第 1774–1806 页。doi: 10.1214/15-AAP1133.[FSS09] S. Fang, J. Shao & K.-T. Sturm. “维纳空间上的 Wasserstein 空间”。载于：《概率论及其相关领域》146.3–4 (2009), 第 535–565 页。doi: 10.1007/s00440-009-0199-5.[GHP21] N. Gozlan, R. Herry & G. Peccati. “随机点测度的输运不等式”。载于：《泛函分析杂志》281.9 (2021), 论文编号 109141, 45 页。doi: 10.1016/j.jfa.2021.109141.[GRST14] N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson & P. Tetali. “图上的熵位移凸性及相关不等式”。载于：《概率论及其相关领域》160.1-2 (2014), 第 47–94 页。doi: 10.1007/s00440-013-0523-y.

[GRST17] N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson & P. Tetali. “一般运输成本的康托罗维奇对偶及其应用”。载于：《泛函分析杂志》273.11 (2017), 第 3327–3405 页。DOI：10.1016/j.jfa.201 7
[GT21] N. Gigli & L. Tamanini. 《RCD*(*K*, *N*) 空间上的二阶微分公式》. 载于：《欧洲数学会杂志》23.5 (2021), 第 1727–1795 页。doi: 10.4171/JEMS/1042.[Iof77] A. D. Ioffe. 《积分泛函下半连续性论. I》. 载于：《SIAM控制与优化杂志》15 (1977), 第 521–538 页。doi: 10.1137/0315035.[Kal17] O. Kallenberg. 随机测度：理论与应用。第 77 卷。概率论与随机建模。Springer，查姆，2017，第 xiii+694 页。doi: 10.1007/978-3-319-41598-7.[Kal21] O. Kallenberg. 现代概率论基础。第三版。第 99 卷。概率论与随机建模。Springer，查姆，2021，第 946 页。doi: 10.1007/978-3-030-61871-1.[KR61] M. A. Krasnosel’skiĭ & J. B. Rutickiĭ. 凸函数与奥利奇空间。由 Leo F. Boron 根据俄文第一版翻译。P. Noordhoff Ltd.，格罗宁根，1961，第 xi+249 页。[Las16] G. Last. 《泊松过程的随机分析》. 载于：《泊松点过程的随机分析》。第 7 卷。博科尼—施普林格丛书。博科尼大学出版社，米兰，2016，第 1–36 页。doi: 10.1007/978-3-319-05233-5_1.[LP18] G. Last & M. Penrose. 泊松过程讲义。第 7 卷。数理统计学会教材。剑桥大学出版社，剑桥，2018，第 xx+293 页。[LV09] J. Lott & C. Villani. 《通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率》. 载于：《数学年刊》（第二辑）169.3 (2009), 第 903–991 页。doi: 10.4007/annals.2009.169.903.[Maa11] J. Maas. 《有限马尔可夫链的熵梯度流》. 载于：《泛函分析杂志》261.8 (2011), 第 2250–2292 页。doi: 10.1016/j.jfa.2011.06.009.[Mie13] A. Mielke. 《可逆马尔可夫链中相对熵的测地凸性》. 载于：《变分法与偏微分方程》48.1-2 (2013), 第 1–31 页。doi: 10.1007/s00526-012-0538-8.[MR92] Z.-M. Ma & M. Röckner. （非对称）狄利克雷型理论导论。柏林：施普林格出版社，1992，第 viii + 209 页。[OS16] H. Osada & T. Shirai. 《吉布尔点过程帕尔姆测度的绝对连续性与奇异性》. 载于：《概率论及其相关领域》165.3-4 (2016), 第 725–770 页。doi: 10.1007/s00440-015-0644-6.[OV00] F. Otto & C. Villani. 《Talagrand 不等式的推广及其与对数索博列夫不等式的联系》. 载于：《泛函分析杂志》173.2 (2000), 第 361–400 页。doi: 10.1006/jfan.2000

[Par67] K. R. Parthasarathy. 度量空间上的概率测度。1967年。[PRST20] M. A. Peletier、R. Rossi、G. Savaré 和 O. Tse. 将跳跃过程视为广义梯度流。2020年。arXiv: 2006.10624 [math.AP].[RS99] M. Röckner 和 A. Schied.《构型空间上的拉德马赫定理及其应用》。载于：《泛函分析杂志》169.2（1999），第 325–356 页。[Stu06] K.-T. Sturm.《度量测度空间的几何。I 与 II》。载于：《数学学报》196.1（2006），第 65–177 页。doi: 10.1007/s11511-006-0003-7。[Sur82] D. Surgailis.《关于多重泊松随机积分及其相关马尔可夫半群》。载于：《概率论与数理统计》3（1982），第 217–239 页。[Suz23] K. Suzuki. 戴森布朗运动的曲率界。2023年。doi: 10.48550/ARXIV.2301.00262。[Vil09] C. Villani. 最优传输：旧与新。第 338 卷。Springer，柏林，2009年，第 xxii +973 页。doi: 10.1007/978-3-540-71050-9。[Wu00] L. Wu.《泊松点过程的一种新型修正对数 Sobolev 不等式及若干应用》。载于：《概率论及其相关领域》118.3（2000年），第 427–438 页。