arXiv:2303.00405v1 [math.CA] 1 Mar 2023

从单位立方体到某些对称空间的保测映射

CARLOS BELTRÁN、DAMIR FERIZOVIĆ 和 PEDRO R. LÓPEZ-GÓMEZ

摘要。我们构造了从 d 维单位立方体到 d 维单位球和紧致秩一对称空间的保测映射，即到 d 维球面、实射影空间、复射影空间、四元数射影空间以及凯莱平面的保测映射。我们还给出了一种方法，在一定条件下生成从 d 维单位立方体到乘积空间和纤维丛的保测映射。

目录

1. 引言与主要结果 1 2. 一个技术性结果 5 3. 从单位立方体到紧致秩一对称空间的保测映射 7 4. 从单位立方体到纤维丛的保测映射 12 附录 A. 光滑余面积公式 15 附录 B. 辅助计算 16 参考文献 19

1. 引言与主要结果

给定两个测度空间 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 和 $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$，若双射映射$\varphi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ 满足： φ 和 φ^{-1} 都是可测映射，并且对于每个 $A \in \Sigma_2$都有 $\mu_2(A) = \mu_1(\varphi^{-1}(A))$，则称其为保测映射；或者，等价地，对于每个 $A \in \Sigma_1$都有$\mu_1(A) = \mu_2(\varphi(A))$。在本文中，我们研究黎曼流形之间的保测光滑微分同胚。

寻找从一个流形到另一个流形的保测映射这一问题，在制图学、计算机图形学、医学成像、信号处理等领域都有应用；更一般地说，任何需要对特定空间进行良好离散化的领域都与此相关。因此，在流形 $\mathcal{M}$ 上寻找均匀的点集或均匀网格（即所有单元体积相同的网格）时，一种常见做法是先在

日期：2023年3月2日。2020 数学主题分类。58C35, 52C35。关键词与短语。保测映射、对称空间、球面、射影空间。第一和第三作者得到由 MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 资助的 PID2020-113887GB-I00 项目资助。第二作者谨此感谢佛兰德政府 Methusalem资助项目的支持。第三作者还得到由 MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 资助的 PRE2021-097772 项目以及“ESF“投资你的未来””的支持。

单位立方体等更简单、易于离散化的空间上生成具有这一性质的点集或网格，然后通过保测映射将它们映射到 $\mathcal{M}$ 。就此而言，大多数研究都针对二维和三维流形开展（参见 [12–15，18–20] 及其中的参考文献）。在 [18], 中，作者还得到了一个映射，它将 n维、半径为 r 的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 球面映射到 n维、半径为 R 的 $\mathbb{R}^n$ 球内；该映射推广了等面积兰伯特映射。

保测映射在利普希茨区域上的偏微分方程理论中也有相关应用（见 [11]），可用于生成低差异点（例如，见 [1, 5, 7, 9, 10]）；近来，它们还被用于生成非相干通信中单输入多输出（simo）信道的射影星座；参见 [17], ，作者在其中构造了一个从单位正方形到复射影直线$\mathbb{CP}^1$的保测映射；更高维情形则见 [6]。然而，据我们所知，目前还没有从 d维单位立方体到 d球面及其余射影空间的保测映射构造方法。

1.1. 记号。 本文中，λ 表示 $\mathbb{R}^d$中的勒贝格测度，$B^d(0,R)$表示 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 $R\in$ 的开球（若 $R=\infty$，则这仅表示 $\mathbb{R}^d$）。当 $R=1$时，我们将其记作 $\mathbb{B}^d$。我们称$(0,1)^d$ 为（开）单位立方体。

我们将与 $\mathbb{R}^d$ 中的正态分布 $\mathcal{N}(0,\ c)$ 相对应的测度记为 μ_c，即，

$$d\mu_c(x)=\frac{1}{(2\pi c)^{d/2}}e^{-\|x\|^2/(2c)}\,d\lambda(x).$$

众所周知，映射

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbb{R}^d}:\quad (0,1)^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d,\\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix}\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x_1-1)\\ \vdots\\ \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x_d-1)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1}$$

是从 $((0,\ 1)^d,\ \lambda)$ 到 $(\mathbb{R}^d,\ \mu_{c=1})$ 的保测映射，其中 erf^{-1} 是误差函数 $\mathrm{erf}:\mathbb{R}\to(-1,\ 1)$ 的逆映射，定义如下：

$$\mathrm{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-s^2}\,ds.$$

给定任意连续函数 $\omega\colon(0,\ R)\to(0,\ \infty)$，我们考虑由权函数 $\omega(\|x\|)$ 给出的 $B^d(0,\ R)$ 上的相应测度，并将其记为 μ_ω，即，

$$d\mu_\omega(x)=\omega(\|x\|)\,d\lambda(x).$$

我们始终假设 μ_ω 是概率测度，即，

$$1=\int_{x\in B^d(0,R)}d\mu_\omega(x)=\int_{x\in B^d(0,R)}\omega(\|x\|)\,d\lambda(x)=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^R\omega(s)s^{d-1}\,ds.\tag{2}$$

最后，如果我们有一个黎曼流形 $\mathcal{M}$（包括以下情形：$\mathcal{M}$ 是具有标准结构的单位立方体、通常的 d球面，或紧黎曼流形的任意开集），则用 unif 表示根据其体积形式在 $\mathcal{M}$ 上的均匀测度。例如，$(\mathbb{B}^d$,unif) 是赋予经归一化、使体积为 1 的勒贝格测度的单位球；用我们前面的记法可表示为 $\mu_{\omega=1/\,\mathrm{vol}(\mathbb{B}^d)}$。

1.2. **紧致秩一对称空间**。紧致秩一对称空间（十字形）包括 n球面 $\mathbb{S}^n$ 以及实、复、四元数和八元数射影空间 $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$和 $\mathbb{OP}^2$。这些由 É. Cartan 分类的空间是局部调和布拉施克流形的例子；事实上，Lichnerowicz猜想认为，十字形是此类黎曼流形中仅有的例子。它们也是仅有的紧致连通二点齐性黎曼流形。关于这些空间的更多信息，请参见 [4]。

设 $\mathcal{M}$ 是一个十字形，并分别记其实维数、直径（即 $\mathcal{M}$中两点之间黎曼距离的最大值）和体积为 d、 D和 V。以北极为基点的指数映射

$$\begin{array}{rccc} \exp_{\mathcal{M}}\colon & B^d(0,D) & \longrightarrow & \mathcal{M}, \\ & v & \longmapsto & \exp_{(0,\dots,0,1)}(v), \end{array}$$

是到 $\mathcal{M}\setminus\mathcal{X}$上的微分同胚，其中 $\mathcal{X}$是一个零测集（在 $\mathcal{M}=\mathbb{S}^n$ 的情形下它只是一个点，而在射影空间中则是一个超平面）。此外，$\exp_{\mathcal{M}}$ 的雅可比行列式称为体积密度，其形式为 $\Omega(\|v\|)$，其中 Ω 是某个函数。因此，我们有如下引理:

引理 1.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个十字形。那么，指数映射 $\exp_{\mathcal{M}}$ 是从$(B^d(0,D)\,\mu_{\omega=\Omega/V})$ 到$(\mathcal{M}$,均匀分布)的保测映射。

证明。 由于 $\exp_{\mathcal{M}}$ 是光滑微分同胚，$\exp_{\mathcal{M}}$ 及其逆映射都是可测映射。现在，设 $A\subseteq(0,1)^d$ 是一个可测集。对 $\exp_{\mathcal{M}}$ 应用变量替换定理，即可得到所需结果。□

表1 总结了这些经典空间的维数、直径、体积、指数映射和体积密度。

表 1. 十字体中的体积密度为 $\omega_p(q)=\Omega(r)$，其中 $r=d_R(p,q)$ 是黎曼距离。在此表中，我们展示十字体的 $r^{d-1}\Omega(r)$，其中 $d=\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$。此外，还列出了直径 $D=\operatorname{diam}(\mathcal{M})$、体积 $V=\operatorname{vol}(\mathcal{M})$ 以及指数映射 $\exp_{\mathcal{M}}$。表格摘自 [3]。

$\mathcal{M}$	d	D	V	$\exp_{\mathcal{M}}(v)$	$r^{d-1}\Omega(r)$
$\mathbb{S}^n$	n	π	$\dfrac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$	$\begin{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}\sin\|v\| \\ \cos\|v\| \end{pmatrix}$	$\sin^{n-1} r$
$\mathbb{RP}^n$	n	$\pi/2$	$\dfrac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$	$\begin{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}\tan\|v\| \\ 1 \end{pmatrix}$	$\sin^{n-1} r$
$\mathbb{CP}^n$	$2n$	$\pi/2$	$\dfrac{\pi^n}{n!}$	$\begin{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}\tan\|v\| \\ 1 \end{pmatrix}$	$\sin^{2n-1} r\cos r$
$\mathbb{HP}^n$	$4n$	$\pi/2$	$\dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$	$\begin{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}\text{正切}\|v\| \\ 1 \end{pmatrix}$	正弦$^{4n-1} r$余弦$^3 r$
$\mathbb{OP}^2$	16	$\pi/2$	$\dfrac{\pi^8}{1320\,\Gamma(8)}$	$\begin{pmatrix} \frac{v}{\|v\|}\text{正切}\|v\| \\ 1 \end{pmatrix}$	正弦$^{15} r$余弦$^7 r$

1.3. 主要结果。 令 γ 表示不完全伽马函数：

$$\gamma(t,x)=\int_0^x s^{t-1}e^{-s}\,ds.$$

我们的第一个主要结果是下面的命题，它给出了一个从单位立方体到单位球的保测映射：

命题 1.2。 令 $\varphi_{\mathbb{B}^d}:(\mathbb{R}^d,\mu_{c=1})\to(\mathbb{B}^d,\text{unif})$ 为如下映射：

$$\varphi_{\mathbb{B}^d}(x)=\frac{x}{\|x\|}\left(\frac{\gamma\left(\frac{d}{2},\frac{\|x\|^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\right)^{1/d}.$$

那么，映射 $\Phi_{\mathbb{B}^d}=\varphi_{\mathbb{B}^d}\circ\Phi_{\mathbb{R}^d}:((0,1)^d,\text{unif})\to(\mathbb{B}^d,\text{unif})$ 是保测的。

下一个主要结果给出了一种生成从单位立方体到每个十字形的保测映射的过程。

定理 1.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个十字形，且 $\varphi_{\mathcal{M}}:(\mathbb{R}^d,\mu_{c=1})\to(B^d(0,D),\mu_{\omega=\Omega/V})$ 是由 $\varphi_{\mathcal{M}}(x)=x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 给出的映射，其中 $\rho=\rho(r)$ 是下列方程的唯一解

$$\int_0^\rho \omega(s)s^{d-1}\,ds=\frac{1}{2\pi^{d/2}}\gamma\left(\frac{d}{2},\frac{r^2}{2}\right).$$

那么，映射 $\Phi_{\mathcal{M}}=\exp_{\mathcal{M}}\circ\varphi_{\mathcal{M}}\circ\Phi_{\mathbb{R}^d}:((0,1)^d,\text{均匀分布})\to(\mathcal{M},\text{均匀分布})$ 是保测的。

下面的交换图展示了定理 1.3 中所述构造：

$$\begin{array}{ccc}((0,1)^d,\text{unif}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathbb{R}^d}} & (\mathbb{R}^d,\mu_{c=1})\\ \Phi_{\mathcal{M}}\downarrow & & \downarrow\varphi_{\mathcal{M}}\\ (\mathcal{M},\text{unif}) & \xleftarrow[\exp_{\mathcal{M}}]{} & (B^d(0,D),\mu_{\omega=\Omega/V})\end{array}$$

根据保测映射的定义可直接得出：给定两个黎曼流形 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$，以及两个保测映射 $\Phi_{\mathcal{M}_1}:(0,1)^{\dim(\mathcal{M}_1)}\to\mathcal{M}_1$ 和 $\Phi_{\mathcal{M}_2}:(0,1)^{\dim(\mathcal{M}_2)}\to\mathcal{M}_2$，映射

$$\begin{array}{rccc}\Phi_{\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2}: & ((0,1)^{\dim(\mathcal{M}_1)+\dim(\mathcal{M}_2)},\text{unif}) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2,\text{unif}),\\ & (x,y) & \longmapsto & (\Phi_{\mathcal{M}_1}(x),\Phi_{\mathcal{M}_2}(y)),\end{array}$$

其中 $x\in(0,1)^{\dim(\mathcal{M}_1)}$ 和 $y\in(0,1)^{\dim(\mathcal{M}_2)}$ 也保测。因此，由于根据定理 1.3 我们有从单位立方体到任意十字形的保测映射，我们也有一种构造性方法，可以生成从单位立方体到任意有限个十字形的直积的保测映射。在这项工作中，我们将这一性质推广到纤维丛的情形：

定理 1.4. 设 E、B和 F 为黎曼流形，并假设 E、B和 F 上的测度均已归一化为单位体积。设 $F\hookrightarrow E\xrightarrow{\pi}B$ 为光滑纤维丛，使得对每个 $x\in E$，$NJac\,\pi(x)$均为常数。设 $\Phi_B:((0,1)^{\dim(B)},unif)\to(B,unif)$和 $\Phi_F:((0,1)^{\dim(F)},unif)\to(F,unif)$为保测映射。对每个 $y\in B$，设 $\Psi_y:(F,unif)\to(\pi^{-1}(y),unif)$为保测映射，且映射 $\xi:(B\times F,unif)\to$

$(E,\ \mathrm{unif})$ 由 $\xi(y,\ z) = \Psi_y(z)$ 给出，且为可测映射。那么，ξ 为保测映射，因此该映射

$$\begin{aligned}\Phi_E\colon\ ((0,1)^{\dim(E)},\mathrm{unif}) &\longrightarrow (E,\mathrm{unif}),\\ (y,z) &\longmapsto \Psi_{\Phi_B(y)}(\Phi_F(z)),\end{aligned}$$

其中 $y\in(0,\ 1)^{\dim(B)}$ 和 $z\in(0,\ 1)^{\dim(F)}$，是保测的。

1.4. **论文结构**。在第 2节中，我们证明主要技术结果，并由此得到一种从 $(\mathbb{R}^d,\ \mu_c)$ 到$(B^d(0,R)\ \mu_\omega)$生成保测映射的过程，并证明命题 1.2。在第 3节中，我们证明定理 1.3，并构造从单位立方体到每个 十字形的保测映射。在第 4节中，我们证明定理 1.4 ，并展示一种利用霍普夫纤维化构造从单位立方体到奇数维球面的保测映射的替代方法。附录 A专门介绍光滑余面积公式这一技术工具。最后，在附录 B 中，我们给出一些辅助计算。

2. 一项技术结果

回顾一下，$\omega\colon(0,R)\to(0,\infty)$ 是任意一个满足（2）的连续函数。

定理 2.1。设 $G(\rho) = \int_0^\rho \omega(s)s^{d-1}\,ds$，并设 $\rho=\rho(r)$ 是下列方程的唯一解

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi^{d/2}}\gamma\left(\frac{d}{2},\frac{r^2}{2c}\right). \tag{3}$$

那么，由 $\varphi(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 定义的映射 $\varphi\colon(\mathbb{R}^d,\mu_c)\to(B^d(0,R)\ \mu_\omega)$ 是保测的。

证明。首先，注意到 $\omega(\rho) > 0$ 意味着 G 是递增函数，且$G(0) = 0$。此外，等式 (2) 意味着 $G(R) = \Gamma(d/2)/2\pi^{d/2}$，这表明 ρ 是一个良定义的双射，且 $\rho(r\to\infty)\to R$。容易计算出 φ 的逆映射：$\varphi^{-1}(y) = y\rho^{-1}(\|y\|)/\|y\|$。

对 r 两边关于（3）求导，得到

$$\omega(\rho)\rho^{d-1}\rho'(r) = \frac{r^{d-1}}{(2\pi c)^{d/2}}e^{-r^2/(2c)}. \tag{4}$$

现在，令 $f(r) = \rho(r)/r$，并通过在 $x\in\mathbb{R}^d$ 处选择一组正交归一基 v_1^x、.....、v_d^x（其中 $v_1^x = x/\|x\|$），计算 $\varphi(x) = xf(\|x\|)$ 的雅可比行列式。直接计算可得，$D\varphi(x)$ 保持该基的正交性，并得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}\varphi(x) =& f(\|x\|)^{d-1}(f(\|x\|)+\|x\|f'(\|x\|))\\ =& \frac{\rho(\|x\|)^{d-1}}{\|x\|^{d-1}}\rho'(\|x\|)\\ \overset{(4)}{=}& \frac{1}{(2\pi c)^{d/2}\omega(\rho(\|x\|))}e^{-\|x\|^2/(2c)}.\end{aligned}$$

那么，给定任意可测集 $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{R}^d$，我们可以利用变量替换定理验证，$\mathcal{A}$ 在 $(\mathbb{R}^d,\ \mu_c)$ 中的测度等于 $\varphi(\mathcal{A})$ 在 $(B^d(0,\ R)\ \mu_\omega)$ 中的测度：若将 $\chi_{\mathcal{A}}$ 记为 $\mathcal{A}$ 的示性函数，则

$$\mu_c(\mathcal{A}) = \int_{x\in\mathbb{R}^d}\chi_{\mathcal{A}}(x)\,d\mu_c(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x\in\mathbb{R}^d} \chi_{\mathcal{A}}(x) \frac{1}{(2\pi c)^{d/2}} e^{-\|x\|^2/(2c)}\, d\lambda(x) \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^d} \chi_{\mathcal{A}}(x) \omega(\rho(\|x\|))\, \mathrm{Jac}\, \varphi(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{y\in B^d(0,R)} \chi_{\mathcal{A}}(\varphi^{-1}(y)) \omega(\rho(\|\varphi^{-1}(y)\|))\, d\lambda(y) \\
&= \int_{y\in B^d(0,R)} \chi_{\varphi(\mathcal{A})}(y) \omega(\|y\|)\, d\lambda(y) \\
&= \int_{y\in B^d(0,R)} \chi_{\varphi(\mathcal{A})}(y)\, d\mu_\omega(y) \\
&= \mu_\omega(\varphi(\mathcal{A})),
\end{aligned}
$$

这就证明了该定理。 □

例 2.2 （从 $(\mathbb{R}^d, \mu_c)$ 到 $(\mathbb{R}^d, \mu_b)$ 的保测映射）。 在这种情况下，我们有 $R = \infty$ 和

$$\omega(\rho) = \frac{e^{-\rho^2/(2b)}}{(2\pi b)^{d/2}}.$$

根据定理 2.1，令

$$G(\rho) = \int_0^\rho \omega(s) s^{d-1}\, ds = \frac{1}{(2\pi b)^{d/2}} \int_0^\rho s^{d-1} e^{-s^2/(2b)}\, ds = \frac{1}{2\pi^{d/2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{\rho^2}{2b}\right).$$

我们必须从 ρ 得到

$$\frac{1}{2\pi^{d/2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{\rho^2}{2b}\right) = \frac{1}{2\pi^{d/2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{2c}\right),$$

显然， $\rho(r) = r\sqrt{b/c}$即可解出。因此，我们得出

$$\varphi(x) = x\sqrt{\frac{b}{c}}$$

定义了从（$\mathbb{R}^d$， μ_c）到（$\mathbb{R}^d$， μ_b）的保测映射。

例 2.3 （从（$\mathbb{R}^d$， $\mu_{c=1}$）到（$\mathbb{R}^d$， μ_{stereo}）的保测映射）。令 μ_{stereo} 为使立体投影成为保测映射的测度，即

$$d\mu_{\mathrm{stereo}}(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^d)} \frac{2^d}{(1+\|x\|^2)^d}\, d\lambda(x).$$

在这种情况下，我们有 $c = 1$、 $R = \infty$，并且

$$\omega(\rho) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^d)} \frac{2^d}{(1+\rho^2)^d} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{(d+1)/2}} \frac{2^d}{(1+\rho^2)^d}.$$

我们计算

$$G(\rho) = \int_0^\rho \omega(s) s^{d-1}\, ds = \frac{2^{d-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \int_0^\rho \frac{s^{d-1}}{(1+s^2)^d}\, ds.$$

若 $d = 2$,

$$G(\rho) = \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^{3/2}} \int_0^\rho \frac{s}{(1+s^2)^2}\, ds = \frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho^2)}.$$

因此，我们必须从中得到 ρ

$$\frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho^2)} = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(1, \frac{r^2}{2}\right),$$

也就是说，

$$\rho^2 = \frac{1}{e^{-r^2/2}} - 1 = e^{r^2/2} - 1.$$

因此，我们得出

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}\sqrt{e^{\|x\|^2/2} - 1}$$

定义了一个从 $(\mathbb{R}^2,\ \mu_{c=1})$ 到 $(\mathbb{R}^2,\ \mu_{\text{stereo}})$ 的保测映射。

例 2.4 （从 $(\mathbb{R}^d,\ \mu_{c=1})$ 到 $(\mathbb{B}^d,\ \text{unif})$ 的保测映射）。 在这种情况下，我们有 $c = 1$、$R = 1$，并且

$$\omega(\rho) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^d)} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}} = \frac{d\,\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}}.$$

我们很容易计算得出

$$G(\rho) = \int_0^\rho \omega(s)s^{d-1}\,ds = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}}\rho^d,$$

并且我们必须从 ρ 得到

$$\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}}\rho^d = \frac{1}{2\pi^{d/2}}\gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{2}\right),$$

由此可得，沿用命题 1.2的记号，

$$\varphi_{\mathbb{B}^d}(x) = \frac{x}{\|x\|}\left(\frac{\gamma(\frac{d}{2}, \frac{\|x\|^2}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{1/d}$$

定义了从 $(\mathbb{R}^d,\ \mu_{c=1})$ 到 $(\mathbb{B}^d,\ \text{unif})$ 的保测映射。

命题 1.2 的证明。 由例 2.4 以及 $\Phi_{\mathbb{R}^d}$ 保测这一事实立即可得。 □

3. 从单位立方体到紧致秩一对称空间的保测映射

定理 2.1之后，定理 1.3的证明就很直接了：

定理 1.3的证明。 由定理2.1、引理1.1以及$\Phi_{\mathbb{R}^d}$ 是保测的这一事实可立即得到。 □

现在，我们可以根据定理 十字形生成从单位立方体到所有十字形的保测映射 2.1：只需考虑 $\exp_{\mathcal{M}} \circ \varphi_{\mathcal{M}} \circ \Phi_{\mathbb{R}^d}$。 根据定理 2.1，映射 $\varphi_{\mathcal{M}}$: $(\mathbb{R}^d, \mu_{c=1}) \to (B^d(0, D)$ $\mu_{\omega=\Omega/V})$ 可以在一定程度上显式计算。接下来的几个小节将针对 $\mathcal{M}$ 的不同取值进行计算。回顾一下，对于每个十字形 $\mathcal{M}$，我们用 d表示其实维数，用 D表示其直径，用 V 表示其体积（见表 1）。

3.1. 单位球面 $\mathbb{S}^n$。 在这种情况下，我们有 $d = n$, $D = \pi$，并且

$$\omega(r) = \frac{\Omega(r)}{V} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}} \frac{\sin^{n-1} r}{r^{n-1}}.$$

推论 3.1. 映射 $\varphi_{\mathbb{S}^n} : (\mathbb{R}^n, \mu_{c=1}) \to (B^n(0,\pi)^{\mu_{\omega=\Omega/V}})$ 由$\varphi_{\mathbb{S}^n}(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 给出；若 $\rho = \rho(r)$ 满足以下条件，则该映射为保测

$$\int_0^\rho \sin^{n-1} r \, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right).$$

因此，映射 $\Phi_{\mathbb{S}^n} = \exp_{\mathbb{S}^n} \circ \varphi_{\mathbb{S}^n} \circ \Phi_{\mathbb{R}^n} : ((0,1)^n, \text{unif}) \to (\mathbb{S}^n, \text{unif})$为保测。对于 $n = 1$，我们有

$$\rho(r) = \sqrt{\pi}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2}\right) = \pi \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

因此

$$\Phi_{\mathbb{S}^1}(x) = (-\sin 2\pi x, -\cos 2\pi x) \cong -ie^{-i2\pi x}.$$

对于 $n = 2$，我们可以显式计算 $\rho(r)$：

$$\rho(r) = 2 \arccos e^{-r^2/4},$$

因此

$$\Phi_{\mathbb{S}^2}(x) = \left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|} 2e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/4} \sqrt{1 - e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/2}}, 2e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/2} - 1\right).$$

证明。 根据定理2.1 我们只需验证

$$\int_0^\rho \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}} \sin^{n-1} r \, dr = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right),$$

这等价于推论中的公式。情形 $n = 2$ 可写为

$$\sin^2 \frac{\rho}{2} = \frac{1 - \cos\rho}{2} = \gamma\left(1, \frac{r^2}{2}\right) = 1 - e^{-r^2/2},$$

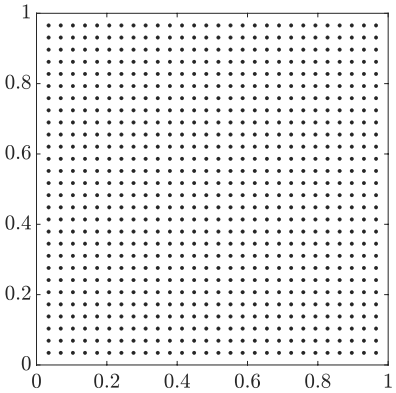
这等价于推论中的最后一个结论。 □

注意，推论3.1 中表达式左侧的积分是不完全贝塔函数：

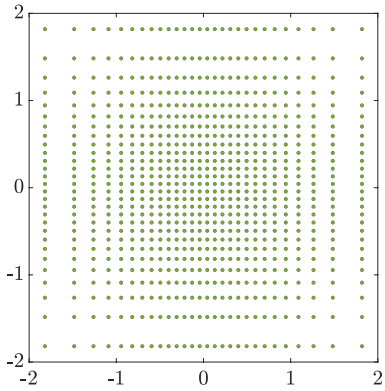
$$\int_0^\rho \sin^{n-1} r \, dr = 2^{n-1} \mathrm{B}_{\sin^2(\rho/2)}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

因此，当 $\Phi_{\mathbb{S}^n}$ 时，无法得到 $n > 2$的闭式表达式。第 4 节将介绍另一种方法，该方法可为奇数维球面提供具有闭式表达式的保测映射。

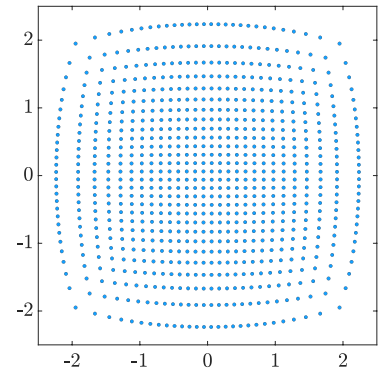
图1 和2 展示了推论3.1 在二维球面这一特例下得到的保测映射 $\mathbb{S}^2$。



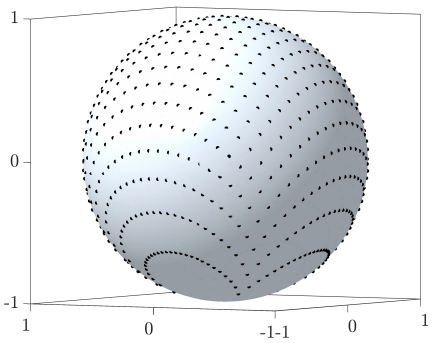
(a) (0,1) 中的方形网格^2



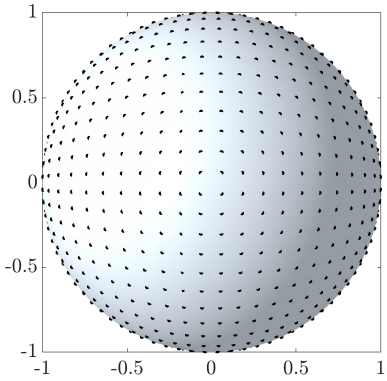
(b) 网格在 $\Phi_{\mathbb{R}^2}$ 下的像



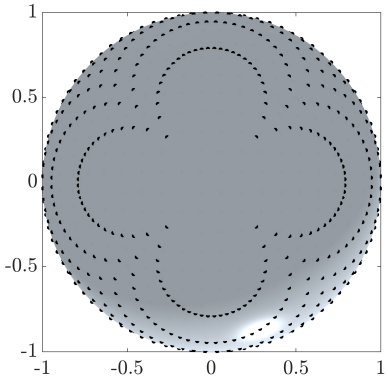
(c) 网格在 $\varphi_{\mathbb{S}^2} \circ \Phi_{\mathbb{R}^2}$ 下的像



(d) 网格在 $\exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2} \circ$ 下的像 $\Phi_{\mathbb{R}^2}$，侧视图

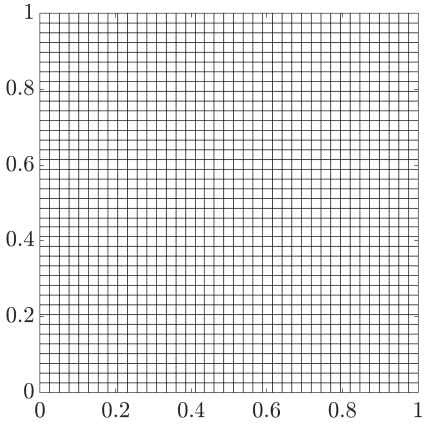


(e) $\exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2} \circ$作用下网格的像 $\Phi_{\mathbb{R}^2}$，北极视图

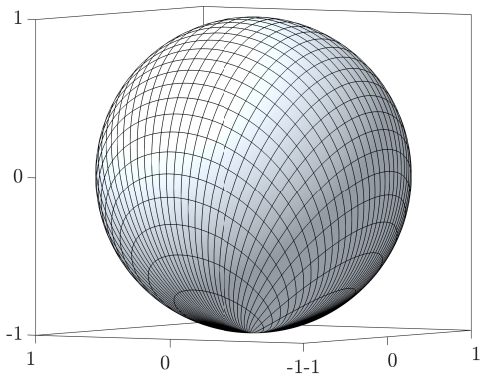


(f) $\exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2} \circ$作用下网格的像 $\Phi_{\mathbb{R}^2}$，南极视图

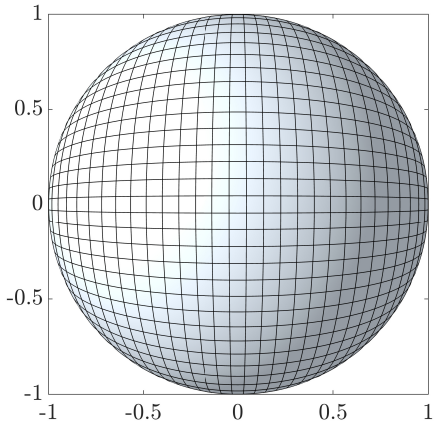
图1。保测映射 $\Phi_{\mathbb{S}^2} = \exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2} \circ \Phi_{\mathbb{R}^2} : ((0,\ 1)^2, \text{unif}) \to (\mathbb{S}^2,$ unif) 将 $(0,\ 1)^2$ 上的点映射为 $\mathbb{S}^2$ 上的点。对于初始的 784 个在 $(0,\ 1)^2$，上均匀分布的点，我们展示了从单位正方形到球面的不同步骤。



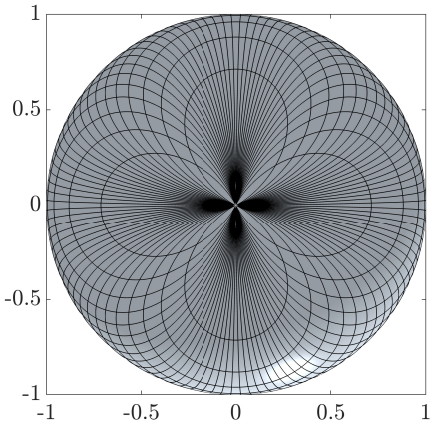
（a）(0，1) 中的均匀网格[2]



（b） $\mathbb{S}^2$ 中的网格像



（c） $\mathbb{S}^2$ 中的网格像，北极 view



（d）网格在 $\mathbb{S}^2$ 中的像，南极 view

图 2. 保测映射 $\Phi_{\mathbb{S}^2} = \exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2} \circ \Phi_{\mathbb{R}^2} : ((0,1)^2, \text{unif}) \to (\mathbb{S}^2,$ unif) 将 $(0,1)^2$ 中的均匀网格映射为 $\mathbb{S}^2$ 中的均匀网格。我们展示了一个由 1369 个单元构成的、位于 $(0,1)^2$ 中的网格的像。

3.2. 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$。 在这种情况下，我们有 $d = n$、 $D = \pi/2$，以及

$$\omega(r) = \frac{\Omega(r)}{V} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{\sin^{n-1} r}{r^{n-1}}.$$

推论 3.2。 映射 $\varphi_{\mathbb{RP}^n} : (\mathbb{R}^n, \mu_{c=1}) \to (B^n(0, \pi/2)^{\mu_{\omega=\Omega/V}})$ 由 $\varphi_{\mathbb{RP}^n}(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 给出；若 $\rho = \rho(r)$ 满足

$$\int_0^\rho \sin^{n-1} r \, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right).$$

因此，映射 $\Phi_{\mathbb{RP}^n} = \exp_{\mathbb{RP}^n} \circ \varphi_{\mathbb{RP}^n} \circ \Phi_{\mathbb{R}^n} : ((0,1)^n, \mathrm{unif}) \to (\mathbb{RP}^n, \mathrm{unif})$ 是保测的。对于 $n = 1$，我们有

$$\rho(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

因此

$$\Phi_{\mathbb{RP}^1}(x) = (-\cot \pi x, 1).$$

对于 $n = 2$，我们可以显式计算 $\rho(r)$：

$$\rho(r) = \arccos e^{-r^2/2},$$

因此

$$\Phi_{\mathbb{RP}^2}(x) = \left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|}\sqrt{e^{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2} - 1}, 1\right).$$

证明。 由定理2.1，我们只需验证

$$\int_0^\rho \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \sin^{n-1} r \, dr = \frac{1}{2\pi^{n/2}}\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right),$$

这与推论中的公式等价。情形 $n = 2$ 可写为

$$1 - \cos\rho = \gamma\left(1, \frac{r^2}{2}\right) = 1 - e^{-r^2/2},$$

这等价于该推论中的最后一个断言。 □

3.3. 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$。 在这种情况下，我们有 $d = 2n$、 $D = \pi/2$，并且

$$\omega(r) = \frac{\Omega(r)}{V} = \frac{n!}{\pi^n}\frac{\sin^{2n-1} r \cos r}{r^{2n-1}}.$$

推论 3.3. 映射 $\varphi_{\mathbb{CP}^n} : (\mathbb{R}^{2n}, \mu_{c=1}) \to (B^{2n}(0, \pi/2)^{\mu_{\omega=\Omega/V}})$ 由 $\varphi_{\mathbb{CP}^n}(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 给出；若 $\rho = \rho(r)$ 满足

$$\rho(r) = \arcsin\left(\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{r^2}{2}\right)\right)^{1/(2n)}\right).$$

因此，映射 $\Phi_{\mathbb{CP}^n} = \exp_{\mathbb{CP}^n} \circ \varphi_{\mathbb{CP}^n} \circ \Phi_{\mathbb{R}^{2n}} : ((0,1)^{2n}, \mathrm{unif}) \to (\mathbb{CP}^n, \mathrm{unif})$ 是保测的。

证明。 根据定理2.1 我们只需验证

$$\int_0^\rho \frac{n!}{\pi^n} \sin^{2n-1} r \cos r \, dr = \frac{1}{2\pi^n}\gamma\left(n, \frac{r^2}{2}\right),$$

这等价于

$$\sin^{2n}(\rho) = \frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{r^2}{2}\right),$$

推论得证。 □

3.4. **四元数射影空间** $\mathbb{HP}^n$。在这种情况下，我们有 $d = 4n$，$D = \pi/2$，且

$$\omega(r) = \frac{\Omega(r)}{V} = \frac{(2n+1)!}{\pi^{2n}} \frac{\sin^{4n-1} r \cos^3 r}{r^{4n-1}}.$$

推论 3.4。映射 $\varphi_{\mathbb{HP}^n} : (\mathbb{R}^{4n}, \mu_{c=1}) \to (B^{4n}(0, \pi/2)^{\mu_{\omega=\Omega/V}})$ 定义为$\varphi_{\mathbb{HP}^n}(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$，若 $\rho = \rho(r)$ 满足以下条件，则为保测

$$\int_0^\rho \sin^{4n-1} r \cos^3 r \, dr = \frac{1}{2(2n+1)!} \gamma\left(2n, \frac{r^2}{2}\right).$$

因此，映射 $\Phi_{\mathbb{HP}^n} = \exp_{\mathbb{HP}^n} \circ \varphi_{\mathbb{HP}^n} \circ \Phi_{\mathbb{R}^{4n}} : ((0,1)^{4n}, \text{unif}) \to (\mathbb{HP}^n, \text{unif})$ 是保测的。

证明。根据定理2.1 我们只需验证

$$\int_0^\rho \frac{(2n+1)!}{\pi^{2n}} \sin^{4n-1} r \cos^3 r \, dr = \frac{1}{2\pi^{2n}} \gamma\left(2n, \frac{r^2}{2}\right),$$

这等价于推论中的公式。 □

3.5. **凯莱平面** $\mathbb{OP}^2$。在这种情况下，我们有 $d = 16$、$D = \pi/2$，并且

$$\omega(r) = \frac{\Omega(r)}{V} = \frac{1320\,\Gamma(8)}{\pi^8} \frac{\sin^{15} r \cos^7 r}{r^{15}}.$$

推论 3.5。映射 $\varphi_{\mathbb{OP}^2}$：$(\mathbb{R}^{16}, \mu_{c=1}) \to (B^{16}(0, \pi/2)^{\mu_{\omega=\Omega/V}})$ 由$\varphi_{\mathbb{OP}^2}(x) = x\rho(\|x\|)/\|x\|$ 给出；当 $\rho = \rho(r)$ 满足

$$\int_0^\rho \sin^{15} r \cos^7 r \, dr = \frac{1}{2640\,\Gamma(8)} \gamma\left(8, \frac{r^2}{2}\right).$$

因此，映射 $\Phi_{\mathbb{OP}^2} = \exp_{\mathbb{OP}^2} \circ \varphi_{\mathbb{OP}^2} \circ \Phi_{\mathbb{R}^{16}}$：$((0, 1)^{16}, \text{unif}) \to (\mathbb{OP}^2, \text{unif})$ 是保测的。

证明。根据定理2.1，我们只需验证

$$\int_0^\rho \frac{1320\Gamma(8)}{\pi^8} \sin^{15} r \cos^7 r \, dr = \frac{1}{2\pi^8} \gamma\left(8, \frac{r^2}{2}\right),$$

这等价于推论中的公式。 □

在表2 中，我们列出了具有保测映射 $\Phi_{\mathcal{M}}$闭式表达式的情形。此外，在下一节中，我们将介绍一种方法，以便为任意奇维球面得到具有显式表达式的保测映射。

4. 从单位立方体到纤维丛的保测映射

本节展示如何从单位立方体构造到光滑纤维丛 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$的全空间 E 的保测映射，其中全空间 E、底空间 B和纤维 F 均为黎曼流形，并假设我们已有从相应的单位立方体到 B 和 F的保测映射。

为证明定理 1.4，我们需要以下引理。其证明中使用的主要技术工具是光滑余面积公式，这是一种由 Federer 提出的积分公式 [8]和 Howard [16]，它推广了换元公式和 Fubini 定理（见附录 A）。感兴趣的读者可参见 [2, 第 2]节。

表 2. 对于以下流形，我们得到了保测映射的闭式公式 $\Phi_{\mathcal{M}}$，其中 $\Phi_{\mathbb{R}^d}$ 如方程（1）所示。根据我们的主要结果，计算过程很直接；参见附录 B。

$\mathcal{M}$	$\Phi_{\mathcal{M}} = \exp_{\mathcal{M}} \circ \varphi_{\mathcal{M}} \circ \Phi_{\mathbb{R}^d} \colon ((0,1)^d, \mathrm{unif}) \to (\mathcal{M}, \mathrm{unif})$
$\mathbb{B}^n$	$\dfrac{\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)}{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)\rVert}\left(\dfrac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)\rVert^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{1/n}$
$\mathbb{S}^1$	$(-\sin 2\pi x, -\cos 2\pi x)$
$\mathbb{S}^2$	$\left(\dfrac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert} 2e^{-\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert^2/4}\sqrt{1-e^{-\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert^2/2}}, 2e^{-\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert^2/2}-1\right)$
$\mathbb{RP}^1$	$(-\cot \pi x, 1)$
$\mathbb{RP}^2$	$\left(\dfrac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert}\sqrt{e^{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert^2}-1}, 1\right)$
$\mathbb{CP}^1$	$\left(\dfrac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert}\sqrt{e^{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\rVert^2/2}-1}, 1\right)$
$\mathbb{CP}^n$	$\left(\dfrac{\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)}{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)\rVert}\left(-1+\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{\lVert\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)\rVert^2}{2}\right)\right)^{1/n}}\right)^{1/2}, 1\right)$

引理 4.1. 设 E、B 和 F 是有限体积黎曼流形，且 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 是一个光滑纤维丛，使得对于每个 $x \in E$，$\mathrm{NJac}\,\pi(x)$ 均为常数。设 $\Psi_y \colon F \to \pi^{-1}(y)$ 对于每个 $y \in B$ 都是保测映射，并考虑映射

$$\begin{aligned} \xi \colon \quad (B \times F, \mathrm{unif}) &\longrightarrow (E, \mathrm{unif}), \\ (y, z) &\longmapsto \Psi_y(z). \end{aligned}$$

如果 ξ 可测，那么它就是保测的。此外，如果 E、B 和 F 中的测度均已归一化为单位体积，那么对于每个 $x \in E$，$\mathrm{NJac}\,\pi(x) = 1$。

证明。不失一般性，假设 E、B 和 F 中的测度均已归一化。我们首先验证对于每个 $x \in E$，$\mathrm{NJac}\,\pi(x) = 1$。由于 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$是光滑纤维丛，我们知道 π 是浸没，因此可以应用光滑余面积公式。因此，

$$\begin{aligned} 1 = \mathrm{vol}(E) &= \int_{x \in E} dx = \int_{y \in B} \int_{z \in \pi^{-1}(y)} \frac{1}{C}\, dz dy = \frac{\mathrm{vol}(\pi^{-1}(y))\,\mathrm{vol}(B)}{C} \\ &= \frac{\mathrm{vol}(F)\,\mathrm{vol}(B)}{C} = \frac{1}{C}, \end{aligned}$$

因此 $C = 1$。现在我们证明 ξ 是保测的。设 $\mathcal{A} \subseteq E$ 是一个可测集。我们需要证明

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A}) = \mathrm{vol}(\xi^{-1}(\mathcal{A})).$$

再次使用光滑余面积公式，并结合对所有 $x \in E$都有 $\operatorname{NJac}\pi(x) = 1$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\mathcal{A}) &= \int_{x\in E} \chi_{\mathcal{A}}(x)\,dx = \int_{y\in B}\int_{z\in\pi^{-1}(y)} \chi_{\mathcal{A}}(z)\frac{1}{\operatorname{NJac}\pi(z)}\,dzdy \\ &= \int_{y\in B}\int_{z\in\pi^{-1}(y)} \chi_{\mathcal{A}}(z)\,dzdy = \int_{y\in B}\operatorname{vol}(\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y))\,dy \\ &= \int_{y\in B}\operatorname{vol}(\Psi_y^{-1}(\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y)))\,dy \\ &= \int_{y\in B}\int_{z\in F}\chi_{\Psi_y^{-1}(\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y))}(z)\,dzdy.\end{aligned} \tag{5}$$

注意到

$$\begin{aligned}\chi_{\Psi_y^{-1}(\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y))}(z) = 1 &\iff z\in\Psi_y^{-1}(\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y)) \iff \Psi_y(z)\in\mathcal{A}\cap\pi^{-1}(y) \\ &\iff \Psi_y(z)\in\mathcal{A} \iff \xi(y,z)\in\mathcal{A} \\ &\iff (y,z)\in\xi^{-1}(\mathcal{A}) \iff \chi_{\xi^{-1}(\mathcal{A})}(y,z) = 1.\end{aligned}$$

因此，由于

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\xi^{-1}(\mathcal{A})) &= \int_{(y,z)\in B\times F}\chi_{\xi^{-1}(\mathcal{A})}(y,z)\,d(y,z) = \int_{y\in B}\int_{z\in F}\chi_{\xi^{-1}(\mathcal{A})}\,dzdy \\ &= \int_{y\in B}\int_{z\in F}\chi_{\Psi_y^{-1}(A\cap\pi^{-1}(y))}(z)\,dzdy \overset{(5)}{=} \operatorname{vol}(\mathcal{A}),\end{aligned}$$

引理得证。 □

定理 1.4 的证明。由引理 4.1 可知，映射 $\xi\colon B\times F\to E$定义为 $\xi(y,z) = \Psi_y(z)$是保测的。由于 $\Phi_E = \xi\circ\Phi_{B\times F}$，且这两个映射均为保测映射，定理得证。 □

例4.2（霍普夫纤维化）。考虑 $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{S}^{2n+1}\subset\mathbb{C}^{n+1}$。回想一下，复霍普夫纤维化 $\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{S}^{2n+1}\xrightarrow{h}\mathbb{CP}^n$ 由下式给出

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{S}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{CP}^n, \\ & (y_1,\dots,y_{n+1}) & \longmapsto & [y_1:\cdots:y_{n+1}]. \end{array}$$

每个 $[y] = [y_1\colon\cdots\colon y_{n+1}]\in\mathbb{CP}^n$的纤维都是 $\mathbb{S}^{2n+1}$中的一个单位圆，由下式给出

$$h^{-1}([y]) = \{w\in\mathbb{S}^{2n+1} : [w] = [y]\}.$$

对于每个 $[y]\in\mathbb{CP}^n$，我们从一个低维集合中光滑地选取一个单位范数代表元 y，并将 $\mathbb{S}^1$ 中的元素视为模为1的复数，考虑映射

$$\begin{array}{rccc} \Psi_y\colon & (\mathbb{S}^1,\text{unif}) & \longrightarrow & (h^{-1}([y]),\text{unif}), \\ & \zeta & \longmapsto & \zeta y, \end{array}$$

它是等距映射，因此保测。由此，根据定理 1.4，映射

$$\begin{array}{rccc} \Phi^h_{\mathbb{S}^{2n+1}}\colon & ((0,1)^{2n+1},\text{unif}) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^{2n+1},\text{unif}), \\ & (y,t) & \longmapsto & \Psi_{\Phi_{\mathbb{CP}^n}(y)}(\Phi_{\mathbb{S}^1}(t)) = \Phi_{\mathbb{S}^1}(t)\Phi_{\mathbb{CP}^n}(y), \end{array}$$

其中 $y \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 和 $t \in \mathbb{R}$ （并回想一下，我们假设 $\Phi_{\mathbb{CP}^n}(y)$ 的代表元具有单位范数）是保测的。注意，我们有 $\Phi_{\mathbb{S}^1}$ 和 $\Phi_{\mathbb{CP}^n}$的显式表达式，因此也有 $\Phi^h_{\mathbb{S}^{2n+1}}$的显式表达式：

$$\begin{aligned}\Phi^h_{\mathbb{S}^{2n+1}}(y,t) &= \Phi_{\mathbb{S}^1}(t)\Phi_{\mathbb{CP}^n}(y)\\ &= -ie^{-i2\pi t}\frac{\left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)\|}\left(-1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n,\frac{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)\|^2}{2}\right)\right)^{1/n}}\right)^{1/2},1\right)}{\left\|\left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)\|}\left(-1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n,\frac{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(y)\|^2}{2}\right)\right)^{1/n}}\right)^{1/2},1\right)\right\|}.\end{aligned}$$

对于 $\mathbb{S}^3$ 的特殊情形，我们有

$$\begin{aligned}\Phi^h_{\mathbb{S}^3}(y,t) = \Phi_{\mathbb{S}^1}(t)\Phi_{\mathbb{CP}^1}(y) &= -ie^{-i2\pi t}e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|^2/4}\left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|}\sqrt{e^{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|^2/2}-1},1\right)\\ &= \left(-ie^{-i2\pi t}\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|}\sqrt{1-e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|^2/2}},-ie^{-i2\pi t}e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|^2/4}\right),\end{aligned}$$

因为 $\|\Phi_{\mathbb{CP}^1}(y)\| = e^{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(y)\|^2/4}$。注意，我们通过由 $(a,\ b) \mapsto a+bi$ 给出的典范同构，来考虑 $\Phi_{\mathbb{R}^2}(y) \in \mathbb{C}$。

Appendix A. The smooth coarea formula

设 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ 为黎曼流形。给定一个光滑映射 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，令 $D\varphi(x)\colon T_x\mathcal{M} \to T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ 表示微分映射，其中 $T_x\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 在 $x \in \mathcal{M}$ 处的切空间，而 $T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{N}$ 在 $\varphi(x) \in \mathcal{N}$ 处的切空间。

定义 A.1（法雅可比）。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为黎曼流形，且 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个 C^1 满射。令 $n = \dim(\mathcal{N})$ 为 $\mathcal{N}$ 的实维数。对于每个点 $x \in \mathcal{M}$，若微分映射 $D\varphi(x)$ 为满射，设 $v_1^x, \ldots, v_n^x$ 为 $(\ker(D\varphi(x)))^\perp$ 的一组正交基。则定义 φ 在 x 处的法雅可比，记作 $\operatorname{NJac}\varphi(x)$，为切空间 $T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ 中由 $D\varphi(x)(v_1^x)\ldots,\ D\varphi(x)(v_n^x)$ 张成的平行六面体的体积。若 $D\varphi(x)$ 不是满射，则定义 $\operatorname{NJac}\varphi(x) = 0$。

定理 A.2（光滑余面积公式）。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 分别是维数为 m 和 n的黎曼流形，其中 $m \geq n$。设 $\varphi\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个光滑满射，且对于几乎所有$x \in \mathcal{M}$，微分映射 $D\varphi$（x） 都是满射。设 $\psi\colon\ \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 是一个可积映射。则以下等式成立：

$$\begin{aligned}\int_{x\in\mathcal{M}} \psi(x)\,dx &= \int_{y\in\mathcal{N}}\int_{x\in\varphi^{-1}(y)} \psi(x)\frac{1}{\operatorname{NJac}\varphi(x)}\,dxdy,\\ \int_{x\in\mathcal{M}} \psi(x)\operatorname{NJac}\varphi(x)\,dx &= \int_{y\in\mathcal{N}}\int_{x\in\varphi^{-1}(y)} \psi(x)\,dxdy.\end{aligned}$$

注意，若 $m = n$ 和 φ 是微分同胚，我们便可得到经典的变量替换定理。

附录 B. 辅助计算

在本附录中，我们将展示推导表格 2.

B.1. **.....的显式表达式** $\Phi_{\mathbb{B}^n}$。 回顾命题 1.2，我们有

$$\varphi_{\mathbb{B}^n}(x) = \frac{x}{\|x\|}\left(\frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{\|x\|^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{1/n}.$$

因此，

$$\Phi_{\mathbb{B}^n}(x) = \varphi_{\mathbb{B}^n}(\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)) = \frac{\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)\|}\left(\frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{\|\Phi_{\mathbb{R}^n}(x)\|^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{1/n}.$$

B.2. 的显式表达式 $\Phi_{\mathbb{S}^1}$。 虽然我们可以直接定义 $\Phi_{\mathbb{S}^1}(x) = e^{i2\pi x}$，但还是让我们按照一般步骤求出该映射的表达式。在这种情况下，我们有

$$\Phi_{\mathbb{R}}(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1).$$

根据推论3.1，为了求得 $\varphi_{\mathbb{S}^1}$，我们需要从 ρ 中得到

$$\int_0^{\rho} \sin^{n-1} r\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right).$$

由于在这种情况下 $n=1$，我们有

$$\rho(r) = \sqrt{\pi}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2}\right) = \pi\,\mathrm{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

因此，

$$\varphi_{\mathbb{S}^1}(x) = \frac{\pi x}{|x|}\,\mathrm{erf}\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{S}^1}(\Phi_{\mathbb{R}}(x)) &= \frac{\pi\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)}{|\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}\,\mathrm{erf}\left(\frac{|\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\pi\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)}{|\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}\,\mathrm{erf}(|\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|).\end{aligned}$$

由于误差函数和误差函数$^{-1}$ 都是奇函数，绝对值相互抵消，因此

$$\varphi_{\mathbb{S}^1}(\Phi_{\mathbb{R}}(x)) = \pi\,\mathrm{erf}(\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)) = \pi(2x-1).$$

回顾表1 中的指数映射$\exp_{\mathbb{S}^1} : (-\pi,\ \pi) \to \mathbb{S}^1$ 由下式给出

$$\exp_{\mathbb{S}^1}(v) = \left(\frac{v}{|v|}\sin|v|, \cos|v|\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbb{S}^1}(x) = \exp_{\mathbb{S}^1}(\pi(2x-1)) &= \left(\frac{\pi(2x-1)}{|\pi(2x-1)|}\sin|\pi(2x-1)|, \cos|\pi(2x-1)|\right)\\ &= (\sin(2\pi x-\pi), \cos(2\pi x-\pi)) = (-\sin 2\pi x, -\cos 2\pi x)\\ &\cong -ie^{-i2\pi x}.\end{aligned}$$

B.3. $\Phi_{\mathbb{S}^2}$**的显式表达式。** 回顾推论3.1，我们有

$$\varphi_{\mathbb{S}^2}(x) = \frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}.$$

我们先计算 $\exp_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_{\mathbb{S}^2}$。回顾表 1 可知

$$\exp_{\mathbb{S}^2}(v) = \left(\frac{v}{\|v\|}\sin\|v\|, \cos\|v\|\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\exp_{\mathbb{S}^2}(\varphi_{\mathbb{S}^2}(x)) &= \exp_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}}{\|\frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}\|}\sin\left\|\frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}\right\|,\right. \\ &\qquad \left.\cos\left\|\frac{x}{\|x\|} \cdot 2\arccos e^{-\|x\|^2/4}\right\|\right).\end{aligned}$$

由于正弦和余弦的奇偶性，我们可以将前面的表达式改写为

$$\exp_{\mathbb{S}^2}(\varphi_{\mathbb{S}^2}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}\sin(2\arccos e^{-\|x\|^2/4}), \cos(2\arccos e^{-\|x\|^2/4})\right).$$

为了进一步简化这些表达式，注意对于 $-1 < x < 1$,

$$\begin{aligned}\sin(2\arccos(x)) &= 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} \\ &= 2x\sqrt{1-x^2},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\cos(2\arccos(x)) &= \cos^2(\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x)) = x^2 - (1-x^2) \\ &= 2x^2 - 1.\end{aligned}$$

因此，

$$\exp_{\mathbb{S}^2}(\varphi_{\mathbb{S}^2}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}2e^{-\|x\|^2/4}\sqrt{1-e^{-\|x\|^2/2}}, 2e^{-\|x\|^2/2} - 1\right).$$

因此，我们得出

$$\Phi_{\mathbb{S}^2}(x) = \left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|}2e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/4}\sqrt{1-e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/2}}, 2e^{-\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2/2} - 1\right).$$

B.4. 的显式表达式。在这种情况下，我们有

$$\Phi_{\mathbb{R}}(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1).$$

根据推论3.2，为了求得 $\varphi_{\mathbb{RP}^1}$，我们需要从 ρ 中得到

$$\int_0^\rho \sin^{n-1} r\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r^2}{2}\right).$$

由于在这种情况下 $n = 1$，我们有

$$\rho(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

因此,

$$\varphi_{\mathbb{RP}^1}(x) = \frac{\pi x}{2|x|}\,\mathrm{erf}\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{RP}^1}(\Phi_{\mathbb{R}}(x)) &= \frac{\pi\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)}{2|\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}\,\mathrm{erf}\left(\frac{|\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\pi\,\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)}{2|\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|}\,\mathrm{erf}(|\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)|).\end{aligned}$$

由于 erf 和 erf^{-1} 都是奇函数，绝对值相互抵消，因此

$$\varphi_{\mathbb{S}^1}(\Phi_{\mathbb{R}}(x)) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{erf}(\mathrm{erf}^{-1}(2x-1)) = \frac{\pi}{2}(2x-1).$$

回顾表 1 指数映射 $\exp_{\mathbb{RP}^1} : (-\pi/2,\ \pi/2) \to \mathbb{RP}^1$ 给出 n
by

$$\exp_{\mathbb{RP}^1}(v) = \left(\frac{v}{|v|}\tan|v|, 1\right).$$

因此,

$$\Phi_{\mathbb{RP}^1}(x) = \exp_{\mathbb{RP}^1}\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right) = \left(\frac{\pi(2x-1)}{|\pi(2x-1)|}\tan\left|\frac{\pi}{2}(2x-1)\right|, 1\right).$$

由于正切函数是奇函数，我们可以将前一个表达式化简如下:

$$\Phi_{\mathbb{RP}^1}(x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right), 1\right) = \left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), 1\right) = (-\cot\pi x, 1).$$

B.5. **的显式表达式** $\Phi_{\mathbb{RP}^2}$。 回顾推论 3.2，我们有

$$\varphi_{\mathbb{RP}^2}(x) = \frac{x}{\|x\|}\arccos e^{-\|x\|^2/2}.$$

我们来计算 $\exp_{\mathbb{RP}^2} \circ \varphi_{\mathbb{RP}^2}$。 回顾表 1 可知

$$\exp_{\mathbb{RP}^2}(v) = \left(\frac{v}{\|v\|}\tan\|v\|, 1\right).$$

因此,

$$\exp_{\mathbb{RP}^2}(\varphi_{\mathbb{RP}^2}(x)) = \left(\frac{\frac{x}{\|x\|}\arccos e^{-\|x\|^2/2}}{\|\frac{x}{\|x\|}\arccos e^{-\|x\|^2/2}\|}\tan\left\|\frac{x}{\|x\|}\arccos e^{-\|x\|^2/2}\right\|, 1\right).$$

由于正切函数是奇函数，我们可以将前一个表达式化简如下 :

$$\exp_{\mathbb{RP}^2}(\varphi_{\mathbb{RP}^2}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}\tan\arccos e^{-\|x\|^2/2}, 1\right).$$

注意,

$$\tan\arccos(x) = \frac{\sin\arccos(x)}{\cos\arccos(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}.$$

因此,

$$\exp_{\mathbb{RP}^2}(\varphi_{\mathbb{RP}^2}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}\sqrt{e^{\|x\|^2}-1}, 1\right),$$

由此我们得出

$$\Phi_{\mathbb{RP}^2}(x) = \left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|}\sqrt{e^{\|\Phi_{\mathbb{R}^2}(x)\|^2}-1}, 1\right).$$

B.6. **的显式表达式。** 回顾推论 3.3，我们有

$$\varphi_{\mathbb{CP}^n}(x) = \frac{x}{\|x\|}\arcsin\left(\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{\|x\|^2}{2}\right)\right)^{1/(2n)}\right).$$

回顾表 1可知

$$\exp_{\mathbb{CP}^n}(v) = \left(\frac{v}{\|v\|}\tan\|v\|, 1\right).$$

我们来计算 $\exp_{\mathbb{CP}^n} \circ \varphi_{\mathbb{CP}^n}$。对于 $\mathbb{RP}^2$ 的情形，正切函数的奇偶性意味着

$$\exp_{\mathbb{CP}^n}(\varphi_{\mathbb{CP}^n}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}\tan\arcsin\left(\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{\|x\|^2}{2}\right)\right)^{1/(2n)}\right), 1\right).$$

注意，在我们的范围内，

$$\tan\arcsin(x) = \frac{\sin\arcsin(x)}{\cos\arcsin(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{-1+\frac{1}{1-x^2}}.$$

因此，

$$\exp_{\mathbb{CP}^n}(\varphi_{\mathbb{CP}^n}(x)) = \left(\frac{x}{\|x\|}\sqrt{-1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma(n, \frac{\|x\|^2}{2})\right)^{1/n}}}, 1\right),$$

从而我们得出

$$\Phi_{\mathbb{CP}^n}(x) = \left(\frac{\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)}{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)\|}\sqrt{-1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\left(n, \frac{\|\Phi_{\mathbb{R}^{2n}}(x)\|^2}{2}\right)\right)^{1/n}}}, 1\right).$$

参考文献

[1] M. Alexa, 《超斐波那契螺旋：*SO* 的快速低差异采样》，2022 年 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议（CVPR），2022 年，第 8281–8290 页。 ↑2[2] C. Beltrán, 《随机秩亏矩阵条件数的估计》，IMA 数值分析杂志 **31** 2011 1, 25 39 ↑12 ( )，第 – 期。C. Beltrán、V. De la Torre 和 F. Lizarte, 《调和流形中点配置的格林能量下界》，arXiv, 2022 ↑3 。A. L. Besse, 《所有测地线均为闭合曲线的流形》，Springer Berlin Heidelberg, 1978 ↑3 。J. S. Brauchart 和 J. Dick, 《在单位球面上进行数值积分的拟蒙特卡罗规则 $\mathbb{S}^2$ **121** 2012 3, 473 502 ↑2 》，Numerische Mathematik ( )，第 – 期。D. Cuevas 、 J. Álvarez-Vizoso 、 C. Beltrán 、 I. Santamaría 、 V. Tuček 和 G. Peters, 《用于单输入多输出信道中结构化格拉斯曼星座的保测度映射》，2022 2022 ↑2 IEEE 全球通信大会（GLOBECOM）论文集，。S. De Marchi 和 G. Elefante, 《利用映射后的低差异点和贪心最小黎斯 *s*-能量点进行流形上的拟蒙特卡罗积分》，应用数值数学 **127** 2018 110 124 ↑2 ( )，–。H. Federer, 《几何测度论》，数学科学基础丛书，第 153 卷，Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1969 年。 ↑12[9] D. Ferizović, 《兰伯特投影下扰动格点的球冠差异》，arXiv，2022 年。 ↑2[10] D. Ferizović、J. Hofstadler 和 M. Mastrianni, 《*HEALPix* 点的球冠差异》，arXiv，2022 年。 ↑2[11] J. A. Griepentrog、W. Höpner、H.-C. Kaiser 和 J. Rehberg, 《从单位球到立方体的双 *Lipschitz* 连续保体积映射》，Note di Matematica (2008)。 ↑2

[12] A. Holhoş，从正方形到 p球的两个保面积映射，《数学建模与分析》 **22** 2017 2, 157 166 ↑2 ( )，第 – 期。A. Holhoş 和 D. Roşca，球面的八面体
[13]
等面积划分及近优点配置，《计算机与应用数学》 **67** 2014 5, ( ), 1092 ~~1107~~ ↑2
第 – 期。[14] ，多面体与球面之间一类保面积映射和保体积映射，《计算数学进展》 **43** 2016 4, 677 697 ↑2 ( )，第 –
[15] **11** 2019 11, 1404
期。，球之间的保体积映射，《对称性》 ( )，第 期。 p ↑2
[16] R.
Howard，黎曼齐性空间中的运动学公式，《美国数学会回忆录》 **106** 1993 509 ↑12 ( )，第 期。K.-H. Ngo、A.
[17]
Decurninge、M. Guillaud 和 S. Yang，Cube-split：一种用于非相干单输入多输出通信的结构化格拉斯曼星座，《IEEE无线通信汇刊》 **19** 2020 3, 1948 1964 ↑2 ( )，第 – 期。
[18]
D. Roşca、A. Morawiec 和 M. De Graef，一种构造三维旋转空间网格的新方法及其在织构分析中的应用，《材料科学与工程中的建模与仿真》 **22** 2014 7, 075013 ↑2
[19]
( )，第 期。D. Roşca 和 G. Plonka，通过从立方体到球面的等面积投影生成均匀球面网格，《计算与应用数学杂志》236 (2011)，第 6 期，1033–1041 页。↑2[20] P. Shirley 和 K. Chiu，一种圆盘与正方形之间的低畸变映射，《图形工具杂志》2 (1997)，第 3 期，45–52 页。 ↑2Carlos Beltrán：数学、统计与计算系，坎塔布里亚大学，Avda. Los Castros, s/n, 39005 桑坦德，西班牙。电子邮箱：beltranc@unican.es Damir Ferizović：数学系，鲁汶大学，Celestijnenlaan 200b, Box 2400, 3001 鲁汶，比利时。电子邮箱：damir.ferizovic@kuleuven.be Pedro R. López-Gómez：数学、统计与计算系，坎塔布里亚大学，Avda. Los Castros, s/n, 39005 桑坦德，西班牙。电子邮箱：lopezpr@unican.es